

IRSNINSTITUT
DE RADIOPROTECTION
ET DE SÛRETÉ NUCLÉAIRE



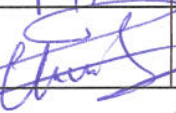
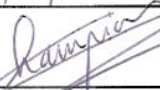
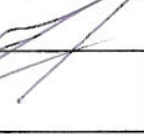
Influence de la représentation de la connaissance sur les résultats de calcul de risque.

Cédric Baudrit¹, Catherine Mercat-Rommens, Eric Chojnacki²

DIRECTION DE L'ENVIRONNEMENT
ET DE L'INTERVENTION
Service d'Etude et de Surveillance
de la Radioactivité
dans l'Environnement

⁽¹⁾ En thèse à l'Institut de Recherche en Informatique de Toulouse

⁽²⁾ DPAM/SEMIC/LMPC

Demandeur					
Référence de la demande					
Numéro de la fiche programme					
<p>Influence de la représentation mathématique de la connaissance sur les résultats de calcul de risque.</p> <p>Rapport DEI/SESURE n° 2005-14</p>					
	Réservé à l'unité		Visas pour diffusion		
	Auteur(s)	Vérificateur*	Chef du SESURE	Directeur DEI	Directeur Général de l'IRSN
Noms	C. MERCAT	Ph. RENAUD	N. LEMAITRE	D. CHAMPION	J. REPUSSARD
Dates	13/09/05	14/09/05	28/09/05	7/10/05	
Signatures					

* rapport sous assurance de la qualité

HISTORIQUE DES MODIFICATIONS

Version	Date	Auteur	Pages ou paragraphes modifiés	Description ou commentaires
0	06/09/2004	C. Mercat		Émission du document
1	04/04/2005	C. Mercat/E. Chojnacki		Prise en compte demande de modifications N. Lemaitre
2	13/09/2005	C. Mercat/E. Chojnacki		Prise en compte demande de modifications DEI/Dir

LISTE DES PARTICIPANTS

Nom	Organisme
Cédric BAUDRIT	IRIT Toulouse
Catherine MERCAT	IRSN / DEI / SESURE / LERCM
Eric CHOJNACKI	IRSN / DPAM / SEMIC / LMPC

LISTE DE DIFFUSION

Nom	Organisme
J. REPUSSARD	IRSN/DIR
M. BRIERE	IRSN/DIR
JC NIEL	IRSN/DSDRE
J. LEWI	IRSN/DESTQ
MP BIGOT	IRSN/COM
F. SOULET	DESTQ/DISCT/CRIS
M. SCHWARTZ	DPAM/DIR
R. GONZALEZ	DPAM/SEMIC
JC LATCHE	DPAM/SEMIC/LMPC
D. CHAMPION	DEI/DIR
G. LINDEN <i>D. BOULAUD</i>	DEI/DIR
B. DUFER	DEI/DIR
JM PERES	DEI/SARG
JC GARIEL	DEI/SECRE
P. DUBIAU	DEI/SESUC
JP MAIGNE	DEI/SIAR
MC ROBE	DEI/STEME
B. DESCAMPS	DEI/SESURE/LESE
O. PIERRARD	DEI/SESURE/LVRE
P. RENAUD	DEI/SESURE/LERCM

RESUME

Dans le domaine de la radioécologie, l'incertitude a surtout été appréhendée dans un cadre purement probabiliste. Ce rapport présente les différentes théories mathématiques qui permettent de représenter l'information incertaine : théorie des probabilités, théorie des possibilités, théorie des fonctions de croyance. L'influence du choix de ces différents modèles mathématiques pour représenter la connaissance est ensuite étudiée sur l'exemple du transfert du strontium 90 depuis un dépôt atmosphérique jusqu'à l'homme à travers la consommation de lait de vache.

ABSTRACT

In the field of the radioecology, uncertainty was especially apprehended within a purely probabilistic framework. This report presents the various mathematical theories which make it possible to represent dubious information: theory of probabilities, theory of possibilities, theory of belief function. The influence of the choice of these various mathematical models to represent knowledge is then studied on the example of the transfer of strontium 90 from an atmospheric deposit to the man through the cow's milk consumption.

MOTS-CLES

Incertainitude, variabilité, théorie des probabilités, théorie des possibilités, théorie des fonctions de croyance

Ce rapport s'inscrit dans le cadre d'une collaboration avec le BRGM (Bureau de Recherche Géologique et Minière) et l'INERIS
(Institut National de l'Environnement Industriel et des Risques).

Table des matières

1	Introduction	5
2	Théories de l'incertain pour traiter mathématiquement l'information	7
2.1	Variabilité-Imprécision	7
2.2	Théorie des probabilités	9
2.3	Théorie des possibilités	10
2.4	Théorie des fonctions de croyance	13
2.5	Propagation des incertitudes	15
2.6	Représentation de notre état de connaissance	18
2.6.1	Intervalle	18
2.6.2	Distribution de possibilité triangulaire	18
2.6.3	Distribution de possibilité trapézoïdale	19
2.6.4	Distribution de possibilité déduite de fractiles	20
3	Application : transfert d'un polluant (^{90}Sr) du sol vers l'homme à travers la consommation du lait de vache	22
3.1	Transfert du sol vers les plantes (activité racinaire)	22
3.1.1	Représentation de l'information disponible	22
3.1.1.1	Facteur de transfert sol/plante $Frac$	22
3.1.1.2	Masse volumique des sols cultivés R_o	22
3.1.1.3	Profondeur racinaire P_r	22
3.1.2	Etude des incertitudes de l'activité racinaire	23
3.1.2.1	Calcul d'intervalles	23
3.1.2.2	Calcul de référence	24
3.1.2.3	Calcul purement probabiliste (variabilité)	24
3.1.2.4	Calcul hybride (combine imprécision-variabilité)	26
3.2	Interception directe des retombées d'un rejet par les végétaux (activité foliaire)	29
3.2.1	Représentation de l'information disponible	29
3.2.1.1	Constante de décroissance λ_{bio}	29
3.2.1.2	Rapport de captation R_c	30
3.2.1.3	Facteur de translocation (sans unité)	30
3.2.1.4	Rendement cultural Rdt	30
3.2.1.5	Rapport poids frais/poids sec RFS	31
3.2.2	Etude des incertitudes de l'activité foliaire	31
3.2.2.1	Calcul d'intervalles	31
3.2.2.2	Calcul de référence	31
3.2.2.3	Calcul purement probabiliste (variabilité)	32
3.2.2.4	Calcul hybride (combine imprécision-variabilité)	33
3.3	Activité massique du fourrage	35
3.3.1	Calcul d'intervalles	35
3.3.2	Calcul de référence	35
3.3.3	Calcul purement probabiliste (variabilité)	35
3.3.4	Calcul hybride (combine imprécision-variabilité)	36
3.4	Transfert vers les produits animaux	38
3.4.1	Représentation de l'information disponible	38
3.4.1.1	Facteur de transfert au lait de vache Ft_{lait}/l	38
3.4.1.2	Ration alimentaire d'une vache laitière $Ration_{fourrage}$	38
3.4.1.3	Rapport poids frais/poids sec RFS	39

3.4.2	Etude des incertitudes de l'activité volumique du lait	39
3.4.2.1	Calcul d'intervalles	39
3.4.2.2	Calcul de référence	39
3.4.2.3	Calcul purement probabiliste (variabilité)	40
3.4.2.4	Calcul hybride (combine imprécision-variabilité)	40
3.5	Transfert à l'homme	42
3.5.1	Représentation de l'information disponible	42
3.5.1.1	Ration alimentaire de lait $Ration_{lait} (l.an^{-1})$	42
3.5.2	Etude des incertitudes sur la dose de strontium 90 ingérée	43
3.5.2.1	Calcul d'intervalles	43
3.5.2.2	Calcul de référence	44
3.5.2.3	Calcul purement probabiliste (variabilité)	44
3.5.2.4	Calcul hybride (combine imprécision-variabilité)	44
4	Conclusion	46
	Liste des références	47

1 Introduction

Dans le domaine nucléaire, l'incertitude a surtout été appréhendée dans un cadre purement probabiliste. C'est à dire que l'on suppose que la connaissance sur les paramètres est toujours de nature aléatoire (variabilité). Cette approche consiste à représenter les paramètres incertains par des distributions de probabilité uniques et à transmettre l'incertitude relative à ces paramètres sur celle du risque encouru par la cible, en appliquant en général la technique dite Monte Carlo (Random Sampling, Latin Hypercube Sampling [6], Conover [5]). Si cette approche est bien connue, toute la difficulté tient à une définition cohérente, par rapport à la connaissance disponible, des distributions de probabilité affectées aux paramètres. En effet dans un contexte d'évaluation des risques liés à l'exposition aux polluants, l'information dont on dispose concernant certains paramètres est souvent de nature imprécise. Le calage de distribution de probabilité unique sur ce type de connaissance devient subjectif et en partie arbitraire. Des théories (plus récentes) comme la théorie des possibilités [9] ou des fonctions de croyances de Shafer [27] permettent de représenter de façon moins arbitraire l'information incomplète, vague ou imprécise. Il vient s'ajouter aux difficultés de la représentation, la connaissance (ou non connaissance) des dépendances, corrélations entre les paramètres (dépendance linéaire, non linéaire, ou fonctionnelle) qui peuvent avoir des répercussions de (sur-sous)-estimations lourdes de conséquences sur les résultats selon les hypothèses que l'on peut faire [15] [25]. Lorsque le traitement des incertitudes est appréhendé dans un cadre purement probabiliste, le fait de supposer l'indépendance stochastique des paramètres dans le processus de propagation a pour effet de créer des phénomènes de compensation des erreurs. Cela se ressent surtout sur les queues des distributions dans le sens où les scénarios associant plusieurs variables peu probables ont d'autant moins de chance de se réaliser.

De nombreux chercheurs ont utilisé soit les probabilités soit les possibilités afin de représenter l'incertitude [4] [19] [23] [24]. Par contre, peu de chercheurs se sont intéressés à la question de comment combiner ces différents modes de représentation (probabilité, possibilité, fonction de croyance) [17] [20] [22].

Le premier objectif de ce document est de présenter les différentes théories de l'incertain qui permettent de traiter mathématiquement l'information.

Nous essaierons, dans la Section 2.1, de faire prendre conscience aux lecteurs que la variabilité et l'imprécision sont deux notions différentes et doivent se traiter différemment dans la prise en compte des incertitudes. Dans la Section 2.2, nous rappellerons rapidement les notions de la théorie des probabilités. Dans la Section 2.3 (resp Section 2.4) on introduira les notions de la théorie des possibilités (resp des fonctions de croyance) qui permettent de traiter de la connaissance imprécise. Dans la Section 2.5, nous présenterons une méthode (nommée calcul hybride) pour propager de l'information hétérogène (aléatoire-imprécise) à travers les modèles mathématiques qui simulent les phénomènes physico-chimiques. Dans la Section 2.6, nous présenterons les modèles mathématiques utilisés pour représenter l'information. Il n'est évidemment pas question d'exclure l'utilisation de distributions de probabilité pour représenter l'information dans la mesure où l'on dispose de suffisamment de connaissance. Dans le cas contraire, utilisons d'autres théories (possibilités, fonctions de croyance) qui permettent une représentation plus cohérente avec l'information réellement disponible.

Le second objectif, de ce rapport est d'utiliser ces modèles mathématiques afin d'étudier la prise en compte des incertitudes sur une sous-partie du modèle d'évaluation du risque qui concerne le transfert d'un polluant radioactif (le ^{90}Sr) depuis le dépôt jusqu'à l'homme, au travers de la consommation d'un aliment (le lait de vache). Les équations choisies pour le modèle de transfert sont celles du rapport I.R.S.N. [26]. Dans cet exemple, on considère que le dépôt, D , est réparti de façon homogène sur l'année et est intégralement fait sous forme de dépôt sec ($D = 1 \text{ Bq.m}^{-2}$). Les types de fourrage considérés sont l'herbe et le maïs ensilage. Le résultat final du modèle proposé est la dose annuelle D_{ing} par ingestion

de lait de vache contaminé par du strontium 90 (^{90}Sr) en Bq.an^{-1} , selon les équations suivantes :

$$\text{Activité}_{\text{foliaire}} = D \frac{R_c \cdot F_t}{RFS \cdot Rdt \cdot \lambda_{\text{bio}} \cdot 365} \quad (1)$$

$$\text{Activité}_{\text{racinaire}} = D \frac{Frac}{R_o \cdot P_r} \quad (2)$$

$$\text{Activité}_{\text{fourrage}} = \text{Activité}_{\text{racinaire}} + \text{Activité}_{\text{foliaire}} \quad (3)$$

$$\text{Activité}_{\text{lait}} = Ft_{\text{lait}} \cdot \sum_{\text{fourrage}} \text{Activité}_{\text{fourrage}} \cdot \text{Ration}_{\text{fourrage}} \cdot RFS_{\text{fourrage}} \quad (4)$$

$$D_{\text{ing}} = \text{Activité}_{\text{lait}} \cdot \text{Ration}_{\text{lait}} \quad (5)$$

D	Dépôt (Bq.m^{-2}).
$Frac$	Facteur de transfert sol/plante ($\text{Bq.kg sec de végétal}^{-1} / \text{Bq.kg de sol}^{-1}$).
R_o	Masse volumique des sols cultivés (kg.m^{-3}).
P_r	Profondeur racinaire (m).
R_c	Rapport de captation (sans unité).
F_t	Facteur de translocation (j^{-1}).
RFS	Rapport poids Frais/poids Sec (sans unité).
Rdt	Rendement cultural (kg.m^{-2}).
λ_{bio}	Constante de décroissance biomécanique (j^{-1}).
$\text{Activité}_{\text{foliaire}}$	Activité foliaire du fourrage (Bq.kg sec^{-1}).
$\text{Activité}_{\text{racinaire}}$	Activité racinaire (Bq.kg sec^{-1}).
$\text{Activité}_{\text{fourrage}}$	Activité massique du fourrage (Bq.kg sec^{-1}).
Ft_{lait}	Facteur de transfert à l'équilibre ($j.kg \text{ frais}^{-1}$).
$\text{Ration}_{\text{fourrage}}$	Quantité de fourrage consommée chaque jour ($\text{kg sec} \cdot j^{-1}$).
$\text{Activité}_{\text{lait}}$	Activité volumique du lait (Bq.l^{-1}).
$\text{Ration}_{\text{lait}}$	Ration alimentaire de lait (l.an^{-1}).
D_{ing}	Dose ingérée (Bq.an^{-1}).

Nous étudierons en détail, dans les Sections 3.1 à 3.5, l'influence de la représentation mathématique de la connaissance sur le résultat de chaque équation.

2 Théories de l'incertain pour traiter mathématiquement l'information

2.1 Variabilité-Imprécision

L'incertitude sur les paramètres peut avoir deux origines. L'information dont on dispose réellement peut être de nature aléatoire due à une variabilité naturelle résultant de phénomènes stochastiques. Elle peut être également de nature imprécise due à un manque d'information résultant par exemple d'erreurs systématiques lors de mesures ou d'avis d'experts.

Dans le calcul de risque, ces deux notions sont souvent confondues. Ferson [18] explique clairement la différence entre ces deux notions et les erreurs qui peuvent être engendrées par une telle confusion lors du processus de propagation. En effet, supposons que l'on sache seulement que le rapport de captation $R_c \in [0, 1]$ et rien d'autre. Le principe de Laplace (tout ce qui est équiprobable est équiprobable) ou le maximum d'entropie [21] préconise de modéliser la connaissance sur R_c par une loi de probabilité uniforme sur $[0, 1]$. Ce choix est très contestable dans le sens où l'on apporte de l'information sur R_c dont on ne dispose pas à savoir l'équiprobabilité; le cadre probabiliste ici confond l'ignorance (imprécision) avec le hasard (variabilité). En fait il existe une infinité de lois de probabilité qui sont limitées par $[0, 1]$ et la loi uniforme est juste l'une d'entre elles (voir Figure 1). A titre indicatif, la distribution de possibilité π , telle que $\pi(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et 0 sinon, définit la famille des probabilités limitées par $[0, 1]$; nous reviendrons sur la théorie des possibilités par la suite.

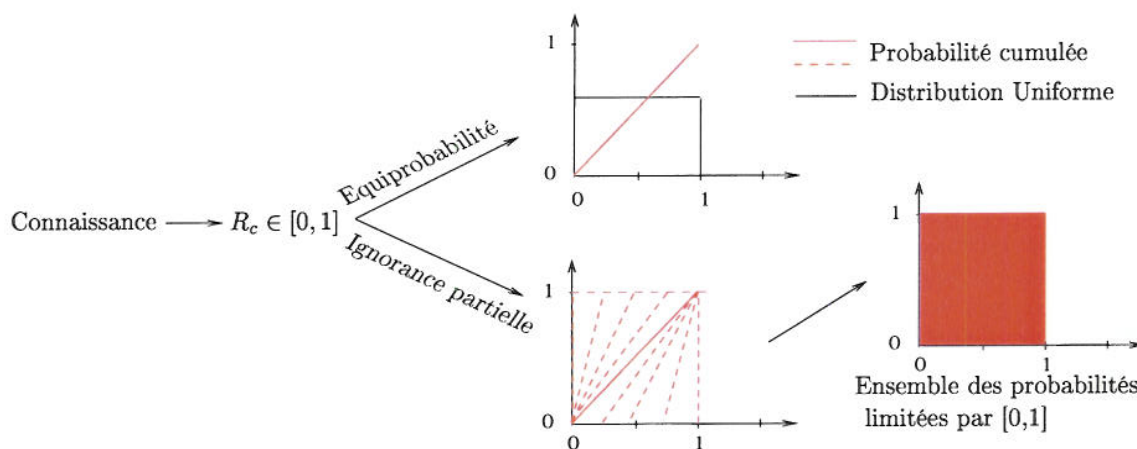


FIG. 1 – Confusion entre Variabilité et Imprécision.

Le choix de représenter la connaissance par des probabilités uniques, et donc de supposer que l'information dont on dispose est de nature aléatoire, a des répercussions sur la propagation des incertitudes à travers les modèles. Supposons à présent que l'on ait deux paramètres A et B dont la seule information est $A \in [0, 1]$, $B \in [0, 2]$ et que l'on cherche à estimer $A + B$. Etant donnée la nature de l'information, la seule chose que l'on puisse dire est que $A + B \in [0, 3]$. Si nous calons des lois uniformes sur A et B , on obtient une distribution de probabilité trapézoïdale sur $[0, 3]$ avec A et B indépendants (voir Figure 2). Ainsi, nous sommes capables à partir de ce résultat de définir dans quelle mesure le résultat du modèle $A + B$ est inférieur à un certain seuil (ex : $P(A + B \leq 1.5) = 0.5$). Cette information est cependant contestable dans le sens où l'on a rajouté implicitement de l'information sur A et B pour caler les lois uniformes. En effet, si la distribution de probabilité uniforme modélise une ignorance partielle, il paraît alors étrange que la somme d'ignorances partielles aboutisse à une information précise telle qu'une dis-

tribution trapézoïdale. Etant donnée l'ignorance partielle sur A et B , nous ne pouvons pas obtenir une estimation précise de $P(A + B \leq 1.5)$. En sommant l'ensemble des probabilités limitées par $[0, 1]$ avec celui des probabilités limitées par $[0, 2]$, on obtiendra au mieux un encadrement de $P(A + B \leq 1.5)$ à savoir $0 \leq P(A + B \leq 1.5) \leq 1$ (voir Figure 2).

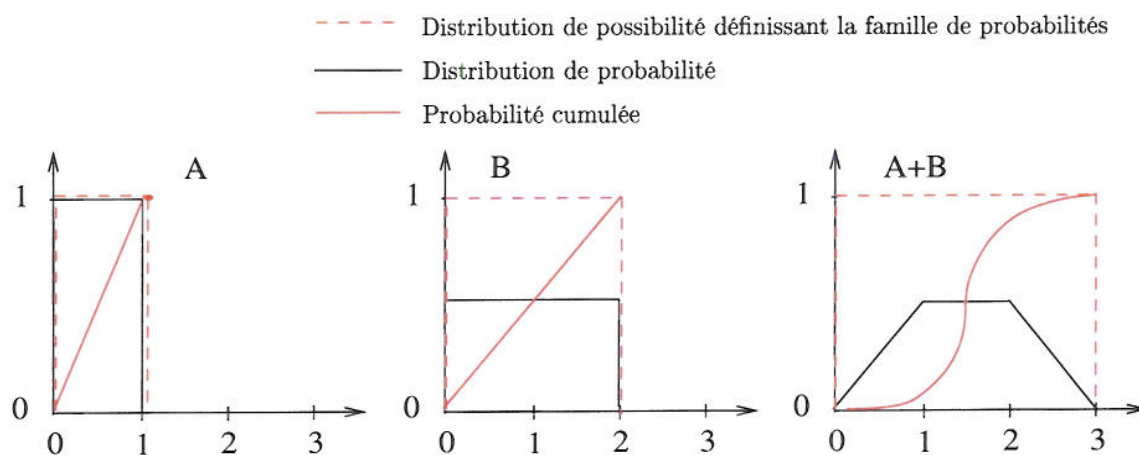


FIG. 2 – Différence de résultats lors de la propagation selon que l'information est de nature imprécise ou aléatoire sur le modèle $A + B$.

De plus, la technique classique de propagation de Monte-Carlo suppose une indépendance stochastique entre les paramètres, des résultats différents seraient obtenus en supposant par exemple des corrélations entre A et B (voir Figure 3).

Ces exemples illustrent bien les conséquences que peut engendrer une confusion entre l'imprécision et la variabilité. L'information dont on dispose réellement est souvent plus riche qu'un intervalle mais moins riche qu'une distribution de probabilité. La théorie des possibilités [9] et celle des fonctions de croyance de Shafer [27] fournissent des outils mathématiques plus rigoureux pour traiter ce type d'information.

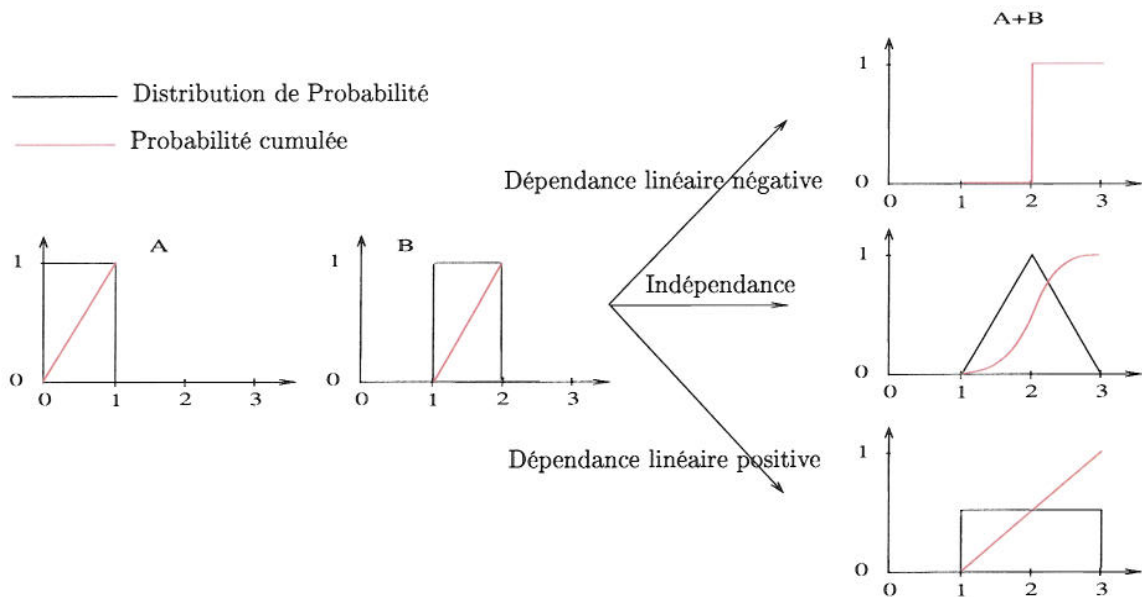


FIG. 3 – Influence des dépendances lors du processus de propagation sur les résultats du modèle $A + B$.

2.2 Théorie des probabilités

La théorie des probabilités permet de représenter de l'information précise entachée de variabilité. C'est à dire que l'on peut observer de façon précise les résultats d'une expérience mais ceux-ci sont différents à chaque observation (exemple pluviométrie). Toute mesure de probabilité P peut se définir à partir d'une distribution de probabilité p sur un ensemble $\Omega : p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ telle que $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ dans le cas discret, et $\int_{\Omega} p(\omega) d\omega$ dans le cas continu.

On a pour tout sous-ensemble $A \subseteq \Omega$, appelé événement :

$$\text{Dans le cas discret } P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \quad \forall A \subseteq \Omega \quad (6)$$

$$\text{Dans le cas continu } P(A) = \int_A p(\omega) d\omega, \quad \forall A \text{ mesurable} \quad (7)$$

Le nombre $p(\omega)$ représente la fréquence d'apparition de ω après plusieurs essais dans le cas discret, et la densité de ω dans le cas continu. La mesure de probabilité P vérifie :

$$\forall A, B \subseteq \Omega \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (8)$$

$$\forall A \subseteq \Omega \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad (9)$$

Une variable aléatoire réelle X associée à P est définie comme variable dans \mathbb{R} , dont la valeur dépend du résultat ω de l'expérience aléatoire. La probabilité cumulée de X est $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, définie à partir de p telle que :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(\omega) d\omega, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (10)$$

2.3 Théorie des possibilités

La théorie des possibilités fournit des outils mathématiques qui permettent de représenter de l'information incomplète, imprécise ou vague. Elle a été formalisée par Zadeh en 1978, puis développée par Dubois-Prade en 1985 [9].

On peut définir une distribution de possibilité comme une superposition d'intervalles emboîtés de valeurs du paramètre incertain auxquels sont attribués des degrés de confiance (confiance attribuée par exemple aux appareils de mesure ou avis d'experts). Prenons l'exemple suivant : un expert donne son avis sur les valeurs possibles du pH d'un sol.

Je suis certain que $pH \in [6, 8.6]$.
 Je suis sûr à 80% que $pH \in [6.2, 8.4]$.
 Je suis sûr à 60% que $pH \in [6.4, 8.2]$.
 Je suis sûr à 40% que $pH \in [6.6, 8]$.
 Je suis sûr à 20% que $pH \in [6.8, 7.8]$.

Interprétation :

Je suis sûr à 20% que $pH \in [6.8, 7.8]$ signifie que la probabilité que $pH \in [6.8, 7.8]$ est au **moins égale** à 20% ou encore que la probabilité que $pH \notin [6.8, 7.8]$ est au **plus égale** à 80%. On construit ainsi une distribution de possibilité π et on définit un ensemble de probabilités $\mathcal{P}(\pi)$ tel que $\forall P \in \mathcal{P}(\pi)$, $20\% \leq P(pH \in [6.8, 7.8]) \leq 100\%$ (voir Figure 4). Le degré bas, égal à 20% dans notre exemple, sera nommé degré de nécessité N . Le degré haut, égal à 100%, sera nommé degré de possibilité Π . On remarque que plus la longueur de ces intervalles est grande et plus l'expert est sûr de lui. Ceci est

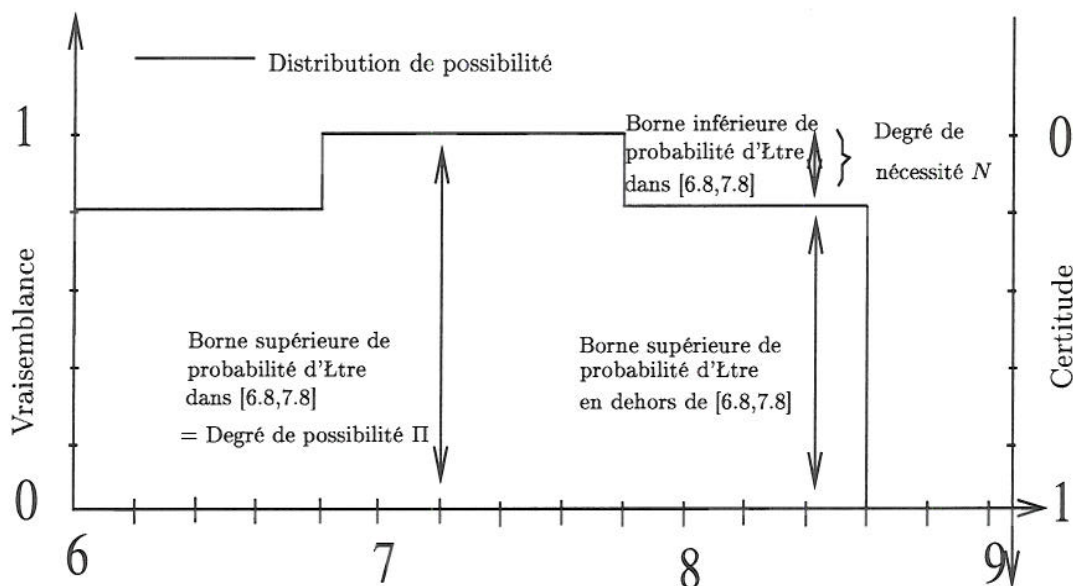


FIG. 4 – Distribution de possibilité définie à partir de l'avis d'expert : je suis sûr à 20% que $pH \in [6.8, 7.8]$

logique dans le sens où plus on est imprécis et plus on est certain de contenir l'information. Les valeurs à l'intérieur de l'intervalle associées au degré de confiance faible à 20% peuvent également s'interpréter comme les valeurs les plus vraisemblables du pH . La figure 5 représente la distribution de possibilité π qui a été définie à partir de la totalité de l'avis d'expert.

La mesure de possibilité Π (ou de nécessité N) normalisée se définit à partir d'une distribution de possibilité $\pi : \Omega \rightarrow [0, 1]$ telle que $\sup_{w \in \Omega} \pi(w) = 1$. Le calcul de la mesure de possibilité Π et de

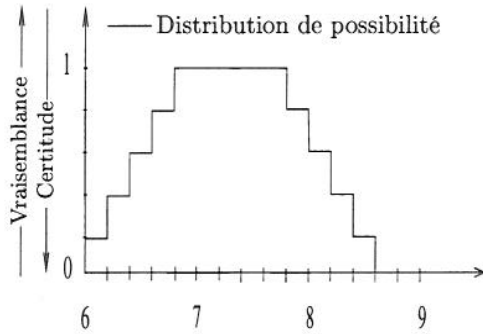


FIG. 5 – Exemple d’une distribution de possibilité définie à partir de l’avis d’expert sur l’exemple précédent.

Cette distribution de possibilité nous informe que les valeurs les plus vraisemblables (valeurs risquées mais informatives) sont situées dans $[6.8, 7.8]$ (appelé noyau de π) sans qu’il y ait de préférence à l’intérieur de l’intervalle. On retrouve les valeurs prudentes mais peu informatives dans l’intervalle $[6, 8.6]$ aussi appelé support de π . L’intervalle $[6.2, 8.4]$ est une α -coupe de π avec $\alpha = 0.2$.

nécessité N se fait de la manière suivante :

$$\Pi(A) = \sup_{w \in A} \pi(w) \quad (11)$$

$$N(A) = \inf_{w \notin A} (1 - \pi(w)) \quad (12)$$

où A est un ensemble mesurable.

– La mesure de possibilité Π vérifie :

$$\forall A, B \subseteq \Omega \text{ mesurable} \quad \Pi(A \cup B) = \sup(\Pi(A), \Pi(B)) \quad (13)$$

– La mesure de nécessité N vérifie :

$$\forall A, B \subseteq \Omega \text{ mesurable} \quad N(A \cap B) = \inf(N(A), N(B)) \quad (14)$$

Pour revenir à notre exemple d’expert, les degrés de confiance fournis par celui-ci sont en fait des degrés de nécessité et on obtient la distribution de possibilité π correspondante par :

$$\forall u \in \mathfrak{R} \quad \pi_{pH}(u) = \min_i \max(1 - \lambda_i, \mathcal{X}_{A_i}(u)) \quad (15)$$

où A_i sont les intervalles fournis par l’expert, $\lambda_i = N(A_i)$ les degrés de confiance associés aux A_i et $\mathcal{X}_{A_i}(u) = 1$ si $u \in A_i$ 0 sinon.

On peut plonger la théorie des possibilités dans un cadre probabiliste tout en représentant l’imprécision. Soit \mathcal{P} une famille de probabilités sur un référentiel Ω . Pour tout $A \subseteq \Omega$ mesurable, on définit sa probabilité supérieure $P^*(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A)$ et sa probabilité inférieure $P_*(A) = \inf_{P \in \mathcal{P}} P(A)$. On peut interpréter tout couple de fonctions duales nécessité/possibilité $[N, \Pi]$ comme des probabilités inférieures et supérieures induites par une famille de probabilités :

- Soit π une distribution de possibilité induisant un couple de fonctions $[N, \Pi]$. On définit une famille de probabilités $\mathcal{P}(\pi) = \{P, \forall A, N(A) \leq P(A)\} = \{P, \forall A, P(A) \leq \Pi(A)\}$. Dans ce cas on a : $\sup_{P \in \mathcal{P}(\pi)} P(A) = \Pi(A)$ et $\inf_{P \in \mathcal{P}(\pi)} P(A) = N(A)$.

- Réciproquement, étant donné $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n$ des sous ensembles de Ω mesurables avec leur degré de confiance $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. On définit la famille de probabilité suivante : $\mathcal{P} = \{P, \forall A_i, \lambda_i \leq P(A_i)\}$. On sait alors que $P^* = \Pi$ et $P_* = N$ (voir [10], et dans le cas infini,[7]) .

En résumé, une distribution de possibilité π code une famille de probabilités $\mathcal{P}(\pi)$. Elle permet ainsi de représenter de la connaissance probabiliste incomplète et d'obtenir des encadrements de probabilités [1] [11] [12] [17]. On peut ainsi définir une fonction de répartition (probabilité cumulée) supérieure F^* et inférieure F_* (voir Figure 6) tel que $\forall x \quad F_*(x) \leq F(x) \leq F^*(x)$ avec :

$$F^*(x) = \Pi(-\infty, x] \tag{16}$$

$$F_*(x) = N(-\infty, x] \tag{17}$$

L'écart entre les fonctions de répartition haute et basse reflète le caractère imprécis de l'information, donc ce que l'on ne sait pas. On a ainsi par exemple (voir Figure 6) :

$$N_{pH}([6, pH]) = F_*(pH) \leq P_{pH}([6, pH]) \leq F^*(pH) = \Pi_{pH}([6, pH]) \quad \forall \quad pH. \tag{18}$$

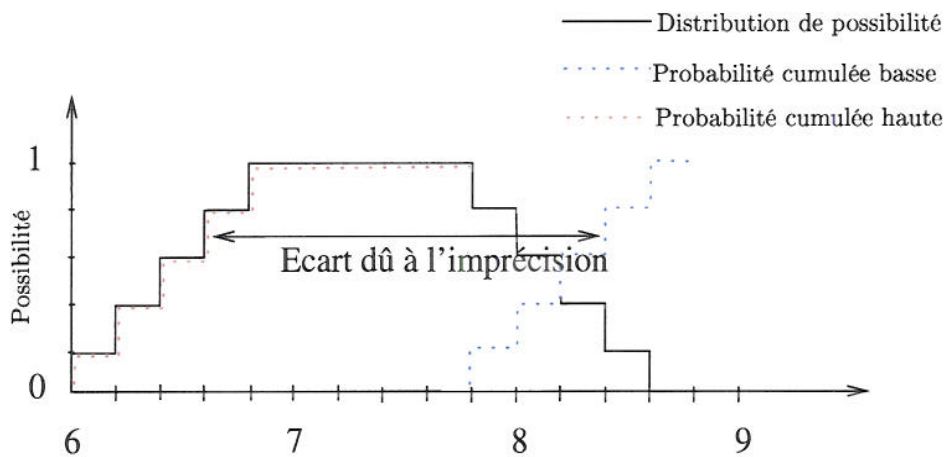


FIG. 6 – Fonctions de répartition haute et basse induites par la distribution de possibilité π définie à partir de l'avis d'expert sur le pH .

2.4 Théorie des fonctions de croyance

La théorie des fonctions de croyance de Shafer [27] fournit des outils mathématiques qui permettent à la fois de traiter de l'information de nature aléatoire et imprécise. Introduisons la notion de fonction de croyance sur un exemple : soit un appareil de mesure qui présente une erreur aléatoire (variabilité) et une erreur systématique (imprécision). On effectue N mesures imprécises d'un paramètre M . On obtient ainsi N intervalles $([m_i - \delta, m_i + \delta])_{i=1 \dots N}$ quelconques contenant la vraie valeur avec une probabilité ν_i d'obtenir chaque intervalle où δ est l'erreur systématique et m_i la mesure i . La probabilité ν_i peut être interprétée comme la fréquence d'apparition de l'intervalle $[m_i - \delta, m_i + \delta]$ parmi les N mesures. On définit une distribution de poids de probabilité (appelée distribution de masse) $(\nu_i)_{i=1 \dots N}$ sur des intervalles. Attardons nous plus en détail sur la signification de ν_i ; ν_i **représente la probabilité que la seule chose que l'on sache est que la mesure $M \in [m_i - \delta, m_i + \delta]$** ou encore

$\nu_i =$ masse de probabilité re-distribuable sur l'intervalle $[m_i - \delta, m_i + \delta]$;
sans pour autant comment savoir répartir cette masse sur l'intervalle.
 $\nu_i =$ Proba(l'intervalle $[m_i - \delta, m_i + \delta]$ représente bien l'information).

On ne travaille plus avec des variables aléatoires mais des ensembles aléatoires où l'ensemble caractérise l'imprécision de notre connaissance. Ainsi la seule chose que l'on sache est que : $Proba(M \in [m_i - \delta, m_i + \delta]) = \nu_i$ et rien d'autre. La différence entre une distribution de probabilité et une distribution de masse est que l'on met des poids non plus sur des singletons (valeurs précises) mais sur des atomes (intervalles).

Supposons que l'on obtienne les intervalles $[1, 5]$, $[2, 6]$, $[3.5, 6.5]$ et $[0, 4]$ après quatre mesures avec les probabilités respectives associées ν_1, ν_2, ν_3 et ν_4 (voir Figure 7). Cherchons à estimer la probabilité que la mesure M soit dans l'intervalle $[3, 7]$. D'après notre information, on sait que $M \in [3.5, 6.5]$ avec une probabilité de ν_3 ; de plus, si $M \in [3.5, 6.5]$ alors $M \in [3, 7]$. Ainsi, on est certain avec une probabilité de ν_3 que $M \in [3, 7]$; on obtient donc une borne inférieure de la probabilité que $M \in [3, 7]$ (cf. Figure 7). Comme l'intersection des quatre intervalles avec $[3, 7]$ est non vide, ils ne contredisent pas le fait que $M \in [3, 7]$. Ainsi, la probabilité que $M \in [3, 7]$ peut potentiellement atteindre $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 1$; on obtient une borne supérieure de la probabilité (voir Figure 7). La probabilité supérieure $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4$ est appelée degré de plausibilité Pl . La probabilité inférieure ν_3 est appelée degré de crédibilité Bel . L'écart entre $Bel(M \in [3, 7])$ et $Pl(M \in [3, 7])$ caractérise l'imprécision de l'information (cf. Figure 7).

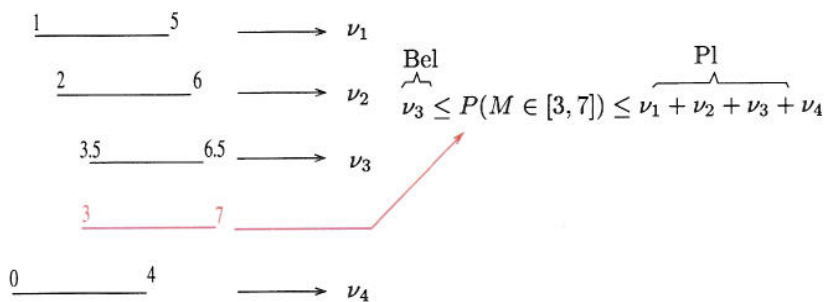


FIG. 7 – Mesures imprécises d'un paramètre variable.

La mesure de plausibilité Pl et la mesure de crédibilité Bel se définissent donc à partir d'une distribution de masse $\nu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ telle que $\sum_{E \in \mathcal{P}(\Omega)} \nu(E) = 1$ de la manière suivante :

$$Bel(A) = \sum_{E, E \subseteq A} \nu(E)$$

$$Pl(A) = \sum_{E, E \cap A \neq \emptyset} \nu(E)$$

$Bel(A)$ évalue à quel point il est certain que l'information disponible, modélisée par la fonction ν , implique " $x \in A$ ".

$Pl(A)$ évalue à quel point l'information disponible ne contredit pas " $x \in A$ ".

E est appelé élément focal de $\mathcal{P}(\Omega)$. $\nu(\Omega)$ est la probabilité qu'on ne sache rien (elle vaut 1 quand on n'a pas d'information du tout). La mesure duale d'une plausibilité est une crédibilité, on a :

$$Pl(A) = 1 - Bel(\bar{A}) \quad Bel(A) = 1 - Pl(\bar{A}) \quad (19)$$

Comme pour les possibilités, la distribution de masse ν permet de coder la famille de probabilités $\mathcal{P} = \{P, \forall A, Bel(A) \leq P(A)\} = \{P, \forall A, P(A) \leq Pl(A)\}$. Dans ce cas on a

$$P^* = Pl \quad \text{et} \quad P_* = Bel$$

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad Bel \leq P \leq Pl$$

L'écart entre les deux mesures définit le caractère imprécis de l'information. De plus,

- Si les éléments focaux de ν sont emboîtés, la mesure de crédibilité (respectivement de plausibilité) est une mesure de nécessité (respectivement de possibilité).
- Si les éléments focaux sont disjoints et précis, les mesures de plausibilité, crédibilité coïncident avec la mesure de probabilité pour tout élément focal ou unions d'éléments focaux.

Ainsi on peut modéliser toute distribution de probabilité et toute distribution de possibilité à l'aide d'une fonction de masse ν . Ceci aura pour avantage de travailler dans un cadre commun pour traiter l'information (imprécision-variabilité) dans les modèles.

2.5 Propagation des incertitudes

Nous avons présenté les outils mathématiques disponibles pour représenter au mieux l'information sur les paramètres qu'elle soit de nature aléatoire ou imprécise.

Utilisant ces outils mathématiques, nous pouvons nous intéresser au fait de comment propager l'information à travers un modèle mathématique déterministe T tout en essayant de tenir compte des dépendances entre les paramètres.

La première méthode, simple à mettre en oeuvre uniquement dans le cas de fonctions monotones, consiste à calculer toutes les valeurs possibles de T par un calcul d'intervalle (méthodologie qui répond au principe de précaution). On obtient ainsi un encadrement ($min - max$) de T . L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne permet pas de mesurer la vraisemblance d'événements du type $T \in [t_1, t_2]$ $\forall t_1, t_2; min < t_1 \leq t_2 < max$. Le calcul d'intervalle n'est pas informatif, il peut être trop conservatif compte tenu de l'information disponible. En effet, nous pouvons disposer de distributions de probabilité pour certains paramètres qui fournissent une information très riche.

La seconde approche est de se placer dans un cadre purement probabiliste et d'utiliser la méthode Monte-Carlo. La méthode Monte-Carlo est toujours applicable quelle que soit la monotonie de la fonction et permet de prendre en considération les dépendances connues. Conover et al. [5] [6] ont mis au point une technique d'échantillonnage qui permet de tenir compte des coefficients de corrélation des rangs (dépendance monotone non linéaire) entre variables aléatoires lorsqu'ils sont connus.

La méthode Monte-Carlo a été critiquée par Ferson [16] dans le sens où elle peut générer des résultats trop optimistes. En effet, supposer par exemple les variables incertaines indépendantes quand on ne connaît pas leurs dépendances revient à accorder peu de poids aux scénarios extrêmes. Cette illusion de précision est renforcée par le fait que l'information est parfois imprécise ou incomplète et nous avons vu que le cadre classique probabiliste ne permet pas de représenter de façon rigoureuse ce type d'information. Nous présentons dans la suite une méthode de propagation, nommée calcul hybride, qui tient compte du caractère aléatoire et imprécis de l'information. Cette méthodologie a évidemment les avantages et restrictions liées à Monte-Carlo et au calcul d'intervalles.

Le calcul hybride [2] [13] [14] [20] permet de propager de l'information hétérogène (aléatoire-imprécise). Il combine la technique dite de Monte-Carlo et le calcul possibiliste.

Nous allons décrire brièvement la **méthodologie du calcul hybride** :

Soit $T : (X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n) \mapsto T(X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n)$ un modèle mathématique déterministe où X_1, \dots, X_k sont des variables probabilistes et X_{k+1}, \dots, X_n sont des variables possibilistes. La procédure est schématisée dans la figure 9.

1. On génère k nombres aléatoires (p_1, \dots, p_k) à partir de la loi uniforme sur $[0, 1]$ et on obtient une réalisation (x_1, \dots, x_k) des k variables aléatoires (voir Figure 9).
2. Maintenant que l'on a fixé les valeurs pour les k variables probabilistes, on effectue un calcul possibiliste pour estimer T (voir Figure 9) et on obtient une distribution de possibilité pour la réalisation (x_1, \dots, x_k) . Le calcul possibiliste [8] est une extension du calcul d'intervalle qui est résumé dans la figure 8 et s'exprime de la manière suivante :

$$\pi_T(u) = \sup_{x_{k+1}, \dots, x_n, T(x_1, \dots, x_n) = u} \min(\pi_{k+1}(x_{k+1}), \dots, \pi_n(x_n)) \quad (20)$$

C'est à dire que pour chaque α -coupe, on effectue un calcul d'intervalle.

3. Retour à l'étape 1 pour générer une autre réalisation de (X_1, \dots, X_k) . On obtient ainsi une famille

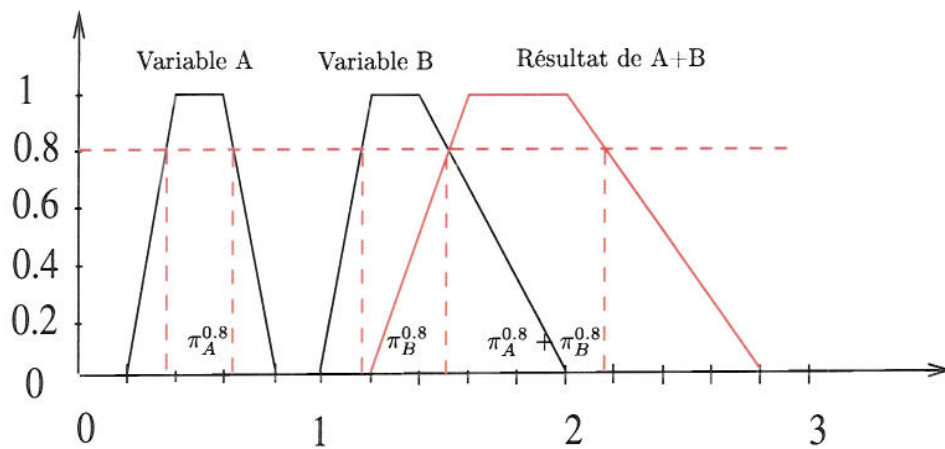


FIG. 8 – Calcul possibiliste de A+B.

(échantillon) de distributions de possibilité auxquelles sont affectés des poids de probabilité $1/H$ où H est la taille de l'échantillon (voir Fig. 9).

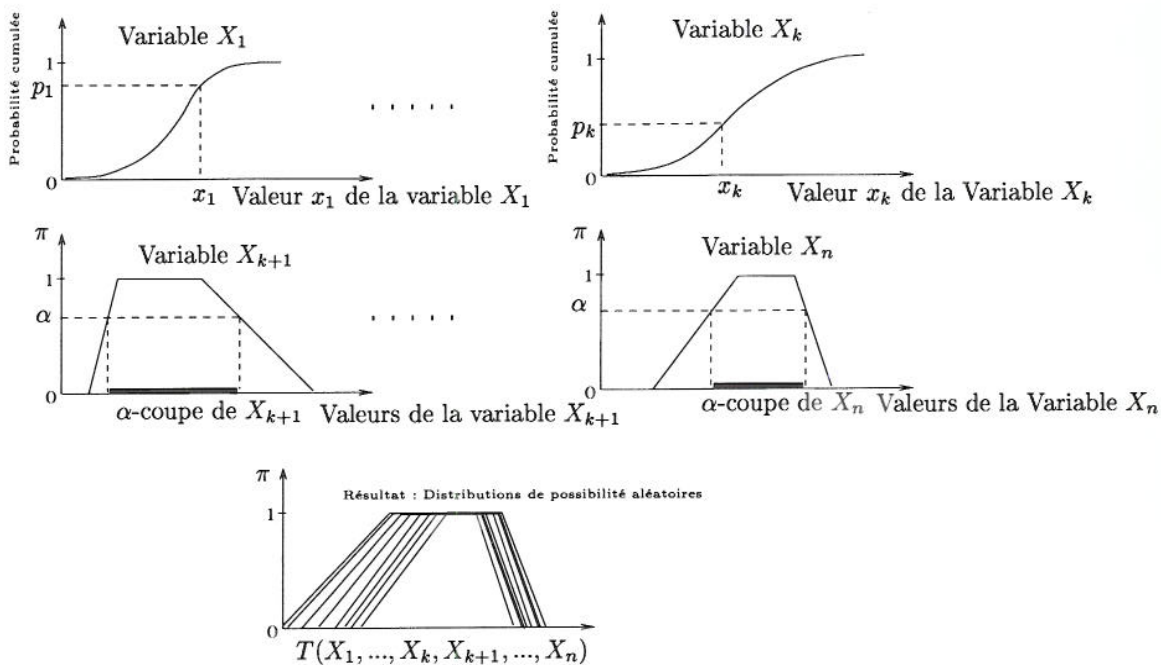


FIG. 9 – Schéma du calcul hybride où $(X_i)_{i=1...k}$ sont les variables probabilistes (variabilité), $(X_i)_{i=k+1...n}$ les variables possibilistes (imprécision) et T le modèle mathématique.

La présence d'imprécision concernant les variables possibilistes génèrent deux niveaux de dépen-

dances. Le premier niveau concerne une dépendance sur les sources d'information attachées aux variables X_{k+1}, \dots, X_n , le second niveau concerne la dépendance entre les variables X_{k+1}, \dots, X_n elles mêmes. Le calcul possibiliste suppose une dépendance totale entre les sources d'information concernant les variables X_{k+1}, \dots, X_n , i.e, sur les degrés de confiance (α -cuts). Par exemple, un expert donne les intervalles de confiance $(\pi_X)_\alpha$ et $(\pi_Y)_\alpha$ sur deux variables possibilistes X et Y pour un même degré de confiance $1 - \alpha$. C'est à dire qu'une faible imprécision sur X implique une faible imprécision sur Y . Cependant, cette forme de dépendance n'implique pas de dépendance objective entre les variables possibilistes elles-mêmes à l'intérieur du domaine $(\pi_X)_\alpha \times (\pi_Y)_\alpha$. L'utilisation du *min* dans le calcul possibiliste suppose la non-interactivité entre X_{k+1}, \dots, X_n qui exprime un manque de connaissance et d'engagement sur les liens qui pourraient exister entre les variables possibilistes.

Pour résumer, la méthode hybride décrite est une méthode de Monte-Carlo classique pour les variables probabilistes, elle suppose une indépendance stochastique entre le groupe des variables probabilistes et le groupe des variables possibilistes et suppose une dépendance totale sur les degrés de confiances entre les variables possibilistes. L'information fournie par la famille de distributions de possibilité obtenue à partir du calcul hybride n'est pas évidente au premier abord à exploiter pour une prise de décision. Il semble alors intéressant de répondre à la question suivante :

Comment extraire de l'information à partir de l'ensemble des distributions de possibilité résultant du calcul hybride.

L'idée est de post-traiter [2] les résultats obtenus à savoir un échantillon d'intervalles aléatoires pour estimer des événements du type $T \leq \text{seuil}$. Nous allons utiliser la théorie des fonctions de croyance qui va nous permettre de travailler dans un cadre commun. Nous avons vu dans la Section 2.4 que la théorie des fonctions de croyance englobait la théorie des possibilités et des probabilités. A partir de l'ensemble des distributions de possibilités issues du calcul hybride, chaque distribution de possibilité $(\pi_i)_{i=1\dots H}$ est sélectionnée et discrétisée horizontalement (voir Figure 10 avec $H = 3$ pour plus de clarté). Un ensemble aléatoire d'intervalles emboîtés $(\pi_i^j)_{j=1\dots d}$ est obtenu pour chaque distribution $(\pi_i)_i$ (voir Figure 10 avec $d = 10$ pour plus de clarté). Nous rappelons que chaque distribution de possibilité est affectée d'un poids de probabilité de $1/H$. On obtient au final un ensemble d'intervalles aléatoires $(\pi_i^j)_{i=1\dots H, j=1\dots d}$ pour tout l'échantillon avec une distribution de masse associée $\nu_i^j = \frac{\text{hauteur entre 2 coupes}}{H}$ (voir Figure 10 avec $\nu_i^j = \frac{0.1}{3}$). On peut ainsi calculer les degrés de plausibilité Pl (probabilité haute), crédibilité Bel (probabilité basse) pour n'importe quels types d'évènement et obtenir un encadrement de sa probabilité (voir Section 2.4). Ainsi, d'après la figure 10, on obtient par exemple :

$$\frac{1}{3} = \sum_{i,j;\pi_i^j \subseteq]-\infty,30]} \leq P(T \leq 30) \leq \sum_{i,j;\pi_i^j \cap]-\infty,30] \neq \emptyset} \nu_i^j = \frac{8}{15}$$

L'écart entre la probabilité haute Pl et la probabilité basse Bel est dû au caractère imprécis de l'information. La méthode hybride permet de traiter simultanément l'incertitude aléatoire (ou variabilité) et l'incertitude épistémique (ou imprécision) dans un cadre formel homogène basé sur les fonctions de croyance de Dempster-Schafer.

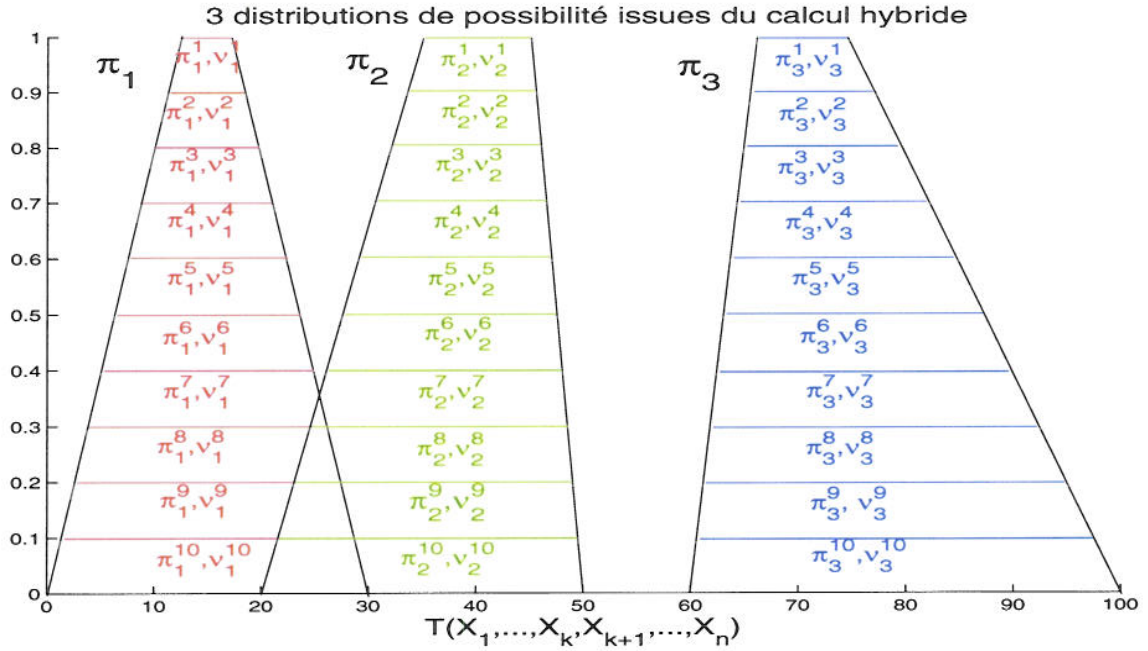


FIG. 10 – Idée du post-traitement du calcul hybride pour extraire de l'information.

2.6 Représentation de notre état de connaissance

Dans ce paragraphe, nous présentons les représentations mathématiques (distributions de possibilité) utilisées pour représenter l'information disponible sur les paramètres quand celle-ci est imprécise, vague ou incomplète.

2.6.1 Intervalle

Un intervalle I peut être vu comme une distribution de possibilité particulière π (voir exemple Figure 11). Quand on modélise la connaissance d'un paramètre X par π , on définit alors une famille de probabilité $\mathcal{P}(\pi)$ qui contient toutes les probabilités de support I ([11] [12]). C'est à dire que :

$$\mathcal{P}_I = \mathcal{P}(\pi) \quad , \quad \forall A \text{ mesurable}, \forall P \in \mathcal{P}_I \quad P_X(A) \leq \Pi_X(A) \quad (21)$$

où \mathcal{P}_I est la famille de probabilité de support I . Notamment π domine la distribution de probabilité uniforme sur I dans le sens de l'équation 21 (Figure 12).

2.6.2 Distribution de possibilité triangulaire

Quand on modélise la connaissance sur un paramètre X par une distribution de possibilité triangulaire π (voir exemple Figure 13), on définit alors une famille de probabilités $\mathcal{P}(\pi)$ qui contient toutes les probabilités unimodales de mode M et de support I ([1] [11]). C'est à dire que :

$$\mathcal{P}_I^M \subseteq \mathcal{P}(\pi) \quad , \quad \forall A \text{ mesurable}, \forall P \in \mathcal{P}_I^M \quad P_X(A) \leq \Pi_X(A) \quad (22)$$

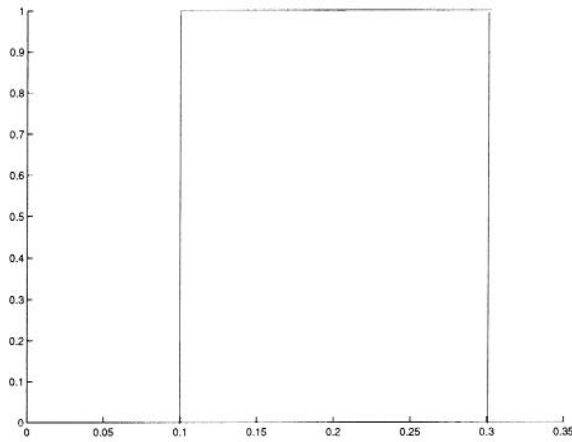


FIG. 11 – Distribution de possibilité de support $[0.1,0.3]$.

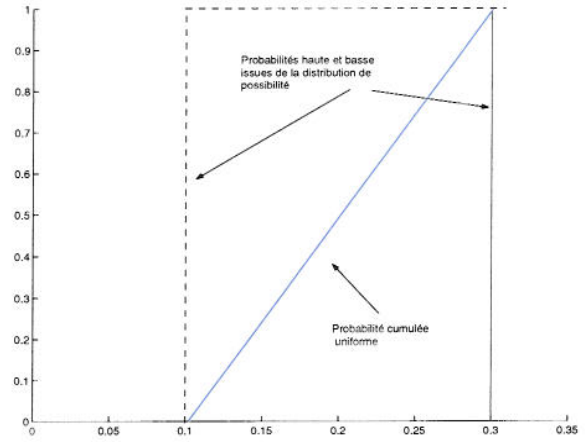


FIG. 12 – Encadrement de la probabilité cumulée Uniforme sur $[0.1,0.3]$.

où \mathcal{P}_I^M est la famille de probabilité unimodale de mode M et de support I . Notamment π domine la distribution de probabilité triangulaire de mode M et de support I dans le sens de l'équation 22 (voir Figure 14). C'est à dire que la famille de probabilité définie par la distribution de possibilité triangulaire contient la distribution de probabilité triangulaire. La figure 14 permet de visualiser sur un même graphique la distribution de probabilité triangulaire (densité en noir) avec sa probabilité cumulée en bleu et les probabilités cumulées haute et basse en rouge issues de la distribution de possibilité triangulaire.

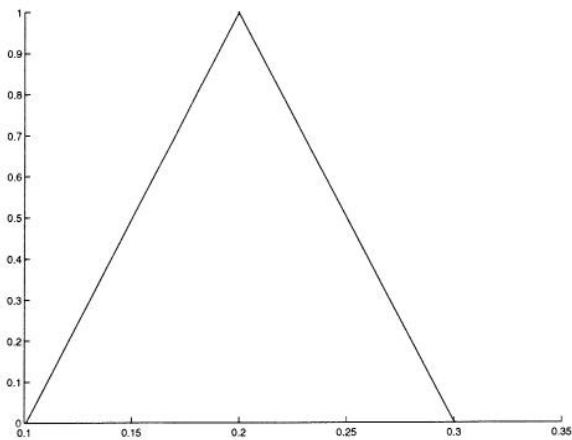


FIG. 13 – Distribution de possibilité triangulaire de support= $[0.1,0.3]$ et de noyau= $\{0.2\}$.

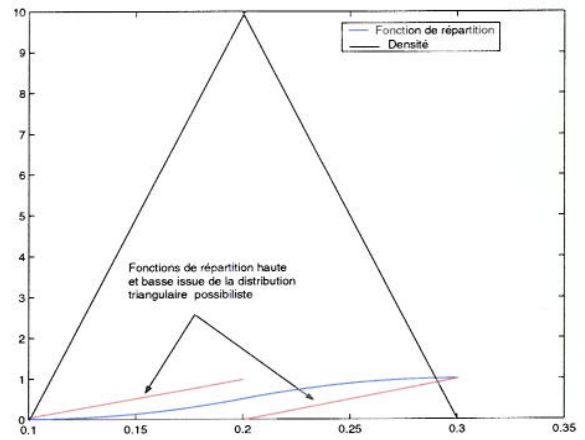


FIG. 14 – Distribution de probabilité triangulaire de support= $[0.1,0.3]$ et de mode= 0.2 .

2.6.3 Distribution de possibilité trapézoïdale

La représentation de la connaissance sur un paramètre X par une distribution de possibilité trapézoïdale π de noyau J et de support I définit une famille de probabilité $\mathcal{P}(\pi)$ qui contient toutes les

probabilités unimodales de mode M appartenant à J et de support I . En notant \mathcal{P}_I^M la famille de probabilité unimodale de mode M et de support I , on a :

$$\bigcup_{M \in J} \mathcal{P}_I^M \subseteq \mathcal{P}(\pi) \quad , \quad \forall A \text{ mesurable}, \forall P \in \bigcup_{M \in J} \mathcal{P}_I^M \quad P_X(A) \leq \Pi_X(A) \quad (23)$$

En particulier, la distribution de probabilité trapézoïdale est dominée par π dans le sens de l'équation 23 (voir exemple Figures 15 et 16).

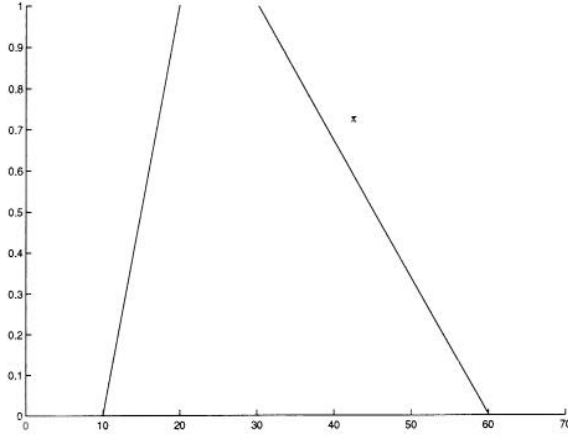


FIG. 15 – Distribution de possibilité trapézoïdale π de support $[10,60]$ et de noyau $[20,30]$.

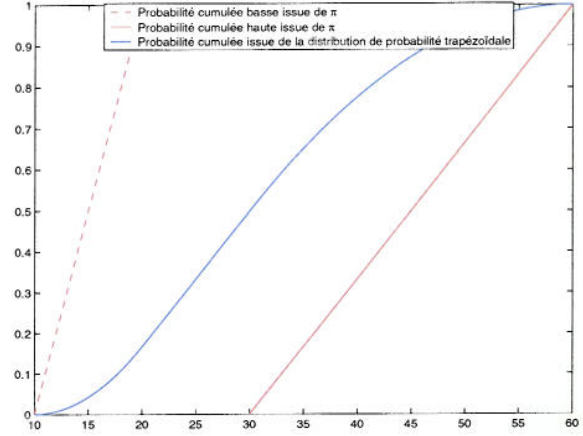


FIG. 16 – Encadrement de la probabilité cumulée trapézoïdale.

2.6.4 Distribution de possibilité déduite de fractiles

On s'intéresse à représenter l'information sur un paramètre X du type :

- Les valeurs du paramètre X sont comprises entre a et b (support $[a, b]$).
- On connaît les fractiles à 5%, 50% et 95% par exemple.
- On connaît la valeur moyenne et on considère que la valeur modale est comprise entre la moyenne et la médiane (fractile à 50%).

La distribution de possibilité π (voir Figure 17) définit une famille de probabilité $\mathcal{P}(\pi)$ qui contient toutes les probabilités unimodales de mode appartenant à [médiane,moyenne], de support $[a, b]$ ([1]) et de fractiles connus. C'est à dire que :

$$\bigcup_{M \in [\text{médiane}, \text{moyenne}]} \mathcal{P}_{[a,b]}^{M, \text{fractiles}} \subseteq \mathcal{P}(\pi) \quad (24)$$

$$\forall A \text{ mesurable}, \quad \forall P \in \bigcup_{M \in [\text{médiane}, \text{moyenne}]} \mathcal{P}_{[a,b]}^{M, \text{fractiles}} \quad P_X(A) \leq \Pi_X(A) \quad (25)$$

où $\mathcal{P}_{[a,b]}^{M, \text{fractiles}}$ est la famille de probabilité unimodale de mode M , de support $[a, b]$ et avec ses fractiles connus.

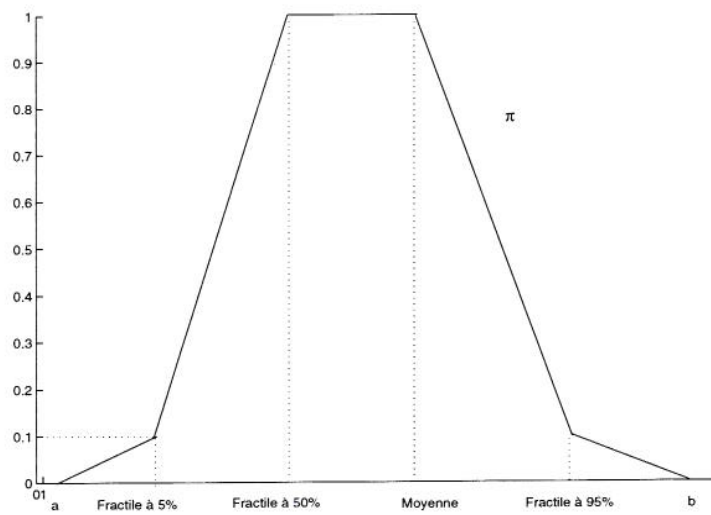


FIG. 17 – Exemple de distribution de possibilité π de support $[a, b]$ de noyau [moyenne,médiane] tenant compte des fractiles à 5%, 50% et 95%.

3 Application : transfert d'un polluant (^{90}Sr) du sol vers l'homme à travers la consommation du lait de vache

3.1 Transfert du sol vers les plantes (activité racinaire)

Le transfert du sol vers les plantes, que ce soit pour le maïs ensilage ou pour l'herbe, est modélisé selon l'équation suivante :

$$\text{Activité}_{\text{racinaire}} = D \frac{\text{Frac}}{R_o \cdot P_r} \quad (26)$$

D	Dépôt ($\text{Bq} \cdot \text{m}^{-2}$).
Frac	Facteur de transfert sol/plante ($\text{Bq} \cdot \text{kg} \text{ sec de végétal}^{-1} / \text{Bq} \cdot \text{kg de sol}^{-1}$).
R_o	Masse volumique des sols cultivés ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$).
P_r	Profondeur racinaire (m).
$\text{Activité}_{\text{racinaire}}$	Activité racinaire ($\text{Bq} \cdot \text{kg} \text{ sec}^{-1}$).

Pour cette application, le dépôt est considéré comme fixe ($=1 \text{Bq} \cdot \text{m}^{-2}$).

3.1.1 Représentation de l'information disponible

3.1.1.1 Facteur de transfert sol/plante Frac ($\text{Bq} \cdot \text{kg} \text{ sec de végétal}^{-1} / \text{Bq} \cdot \text{kg de sol}^{-1}$)

Le facteur de transfert sol/plante Frac , représente la fraction d'activité présente dans le sol qui parvient à la partie consommée du végétal (grain, fruit, racine, tubercule). Les valeurs de ce paramètre dépendent du végétal et du sol. La principale source d'incertitude, pour le facteur de transfert Frac , est la variabilité naturelle qui est due aux types de sols. De nombreuses mesures de ce paramètre sont disponibles et la forme de la distribution retenue a priori pour l'herbe et le maïs ensilage a été la loi log-normale (voir Table 1) [26].

	Maïs	Herbe
Log-normale	(-0.84, 0.516)	(0.028, 0.557)

TAB. 1 – Représentation pour le facteur de transfert sol/plante Frac ($\text{Bq} \cdot \text{kg}^{-1} \text{ sec de végétal} / \text{Bq} \cdot \text{kg}^{-1}$ de sol).

3.1.1.2 Masse volumique des sols cultivés R_o ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)

Comme pour le facteur de transfert sol/plante, la principale source d'incertitude pour la masse volumique R_o est la variabilité naturelle due aux types de sols. De nombreuses données de ce paramètre sont disponibles [26] et la distribution de probabilité retenue pour l'application à l'herbe et au maïs a été la loi normale de moyenne 1410 et d'écart type 356.

3.1.1.3 Profondeur racinaire P_r (m)

Pour les plantes cultivées, la profondeur racinaire P_r est déterminée par la profondeur de labour. Le labour permet de créer une couche de sol meuble et aérée dans laquelle les racines se développent facilement. Si le labour est fait sur une profondeur suffisante, les racines n'ont pas à pénétrer dans la couche plus profonde, non remaniée et beaucoup plus compacte. La nature intrinsèque du paramètre P_r est la variabilité naturelle due aux conditions de cultures (climat, engrais, ...) et au type de sol.

Cependant, la profondeur de labour est rarement précisée dans les manuels agricoles qui la considère comme une information triviale. Les valeurs de référence de la bibliographie fournissent un encadrement. Il est de plus considéré que les valeurs centrales sont les plus vraisemblables. L'information disponible sur la profondeur racinaire P_r est donc de nature imprécise [26]. Dans le cadre habituel, cette information est représentée par une distribution de probabilité uniforme (respectivement triangulaire) pour l'intervalle (resp. quand on rajoute en plus les valeurs centrales préférées). Cependant, étant donné le caractère imprécis de l'information, il est plus cohérent de la représenter par une famille de probabilités à l'aide d'une distribution de possibilité. La table 2 répertorie les différents modèles pour représenter notre état de connaissance sur la profondeur racinaire P_r . Les indices dans la dernière colonne permettent d'identifier les différents modèles utilisés et ainsi étudier leurs influences sur les résultats de l'activité racinaire de la plante.

	Maïs	Herbe	Indice
Intervalle classique=Possibilité Rectangulaire	[0.15, 0.3]	[0.1, 0.3]	1
Probabilité uniforme	[0.15, 0.3]	[0.1, 0.3]	2
Distribution de possibilité triangulaire	[0.15, 0.225, 0.3]	[0.1, 0.2, 0.3]	3
Distribution de probabilité triangulaire	[0.15, 0.225, 0.3]	[0.1, 0.2, 0.3]	4

TAB. 2 – Différentes représentations pour la profondeur racinaire P_r (m).

3.1.2 Etude des incertitudes de l'activité racinaire

Nous détaillerons l'étude des incertitudes sur l'activité racinaire uniquement pour le maïs. En effet, les phénomènes observés sont similaires pour l'herbe. Le but est de montrer les effets de la modélisation de la connaissance imprécise sur le résultat de l'activité racinaire comparativement au cadre purement probabiliste.

3.1.2.1 Calcul d'intervalles

Tous les paramètres sont modélisés par des intervalles (min-max), puis on calcule l'ensemble des valeurs possibles de l'activité racinaire par un calcul d'intervalles (voir résultats Table 3). Cette méthode permet d'obtenir un encadrement (min-max) de l'activité racinaire sans pour autant nous informer dans quelle mesure on peut atteindre telle ou telle valeur à l'intérieur de cet encadrement. Pour les paramètres modélisés par des lois de probabilité (facteur de transfert sol/Plante $Frac$ et masse volumique R_o), on prendra comme bornes les fractiles à 0.5% et 99.5%.

	Maïs	
$Frac$ ($Bq.kg$ sec de végétal ⁻¹ / $Bq.kg$ de sol ⁻¹)	0.114	1.63
R_o ($kg.m^{-3}$)	493.005	2327
P_r (m)	0.15	0.3
$Activite_{racinaire}$ ($Bq.kg^{-1}$ sec)	$1.63e10^{-4}$	0.022

TAB. 3 – Résultats du calcul d'intervalles pour l'activité racinaire du maïs ($Bq.kg$ sec⁻¹).

3.1.2.2 Calcul de référence

Le calcul de référence correspond à un calcul déterministe. Les valeurs modales de chaque paramètre sont sélectionnées et on calcule l'activité racinaire du maïs à partir de celles-ci. Le mode d'une loi log-normale de paramètre (m, σ) est donnée par $e^{m-\sigma^2}$. Ainsi, la valeur modale, pour le facteur de transfert sol/plante $Frac$, est de 0.33. La table 4 répertorie les valeurs modales de chaque paramètre et le résultat du calcul de l'activité racinaire du maïs.

	Maïs
$Frac$ ($Bq.kg$ sec de végétal ⁻¹ / $Bq.kg$ de sol ⁻¹)	0.33
R_o ($kg.m^{-3}$)	1410
P_r (m)	0.225
$Activité_{racinaire}$ ($Bq.kg$ sec ⁻¹)	$1.04e10^{-3}$

TAB. 4 – Résultat de l'activité racinaire du maïs ($Bq.kg$ sec⁻¹) pour une sélection des valeurs modales de chaque paramètre.

3.1.2.3 Calcul purement probabiliste (variabilité)

Dans ce paragraphe, l'incertitude sur l'activité racinaire du maïs est uniquement due au caractère aléatoire (supposé) de l'information (incertitude=variabilité). La figure 18 nous montre les effets de la variabilité sur les résultats de l'activité racinaire du maïs comparativement au calcul de référence (voir Section 3.1.2.2). L'incertitude sur les paramètres : profondeur racinaire, rendement et facteur de transfert est modélisée par des lois de probabilités (voir Section 3.1.1) et on utilise la technique dite Monte-Carlo avec hypothèse d'indépendance pour estimer l'incertitude sur l'activité racinaire du maïs. Pour caractériser l'incertitude sur l'activité racinaire, on utilisera l'intervalle $[F_{activite_{racinaire}}^{-1}(0.5), F_{activite_{racinaire}}^{-1}(0.95)]$ où $F_{activite_{racinaire}}$ est la fonction de répartition (probabilité cumulée) de l'activité racinaire. La table 14 répertorie les fractiles à 5% et 95% de l'activité racinaire du maïs en injectant progressivement de la variabilité dans le modèle au travers des paramètres P_r , R_o et $Frac$. Cette table et la figure 18 montrent que plus on injecte de la variabilité dans le modèle (activité racinaire du maïs) et plus la variabilité de l'activité racinaire du maïs est importante i.e $\{1.04e10^{-3}\}_{ref} \subseteq [7.99e10^{-4}, 1.49e10^{-3}]_{P_r} \subseteq [6.58e10^{-4}, 1.96e10^{-3}]_{(P_r, R_o)} \subseteq [5.28e10^{-4}, 3.94e10^{-3}]_{(P_r, R_o, Frac)}$.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport Fractiles à 95% / 5%
P_r (indice=2)	$7.99e10^{-4}$	$1.49e10^{-3}$	1.86
P_r (indice=2), R_o	$6.58e10^{-4}$	$1.96e10^{-3}$	2.98
P_r (indice=2), R_o , $Frac$	$5.28e10^{-4}$	$3.94e10^{-3}$	7.46

TAB. 5 – Synthèse des effets de la variabilité sur l'activité racinaire du maïs ($Bq.kg$ sec⁻¹).

La figure 19 met en évidence (comparativement à la figure 18) que lors d'une analyse de sensibilité du modèle, l'ordre dans lequel on injecte la variabilité au travers des paramètres du modèle génère des résultats différents. Cela montre notamment la quasi-impossibilité d'avoir des indicateurs de sensibilité pertinents à partir d'études monoparamétriques.

La figure 19 montre également les effets sur l'activité racinaire du maïs selon différentes représentations de la profondeur racinaire P_r (uniforme, triangulaire, constant). On peut conclure à ce stade de l'analyse (cadre purement probabiliste) que quelle que soit la représentation du paramètre P_r (valeur

fixe, probabilité uniforme ou triangulaire), celle-ci n'a pas de conséquence sur l'activité racinaire (notamment sa variabilité). Ceci est dû d'une part au fait que la variabilité de la profondeur racinaire P_r est faible devant celle du facteur de transfert $Frac$ et de la masse volumique R_o et d'autre part à l'hypothèse d'indépendance entre les paramètres incertains. Ainsi, on constate sur la figure 19 que prendre le paramètre P_r égal à sa valeur nominale ou modélisé par une loi uniforme n'influe quasiment pas sur la distribution de probabilité de l'activité racinaire. L'incertitude du paramètre P_r est donc noyée dans l'incertitude provenant des paramètres R_o et $Frac$. Cependant, ceci ne signifie pas que la valeur de P_r est sans effet sur l'activité racinaire, mais seulement que sa variabilité n'apparaît pas. Pour illustrer

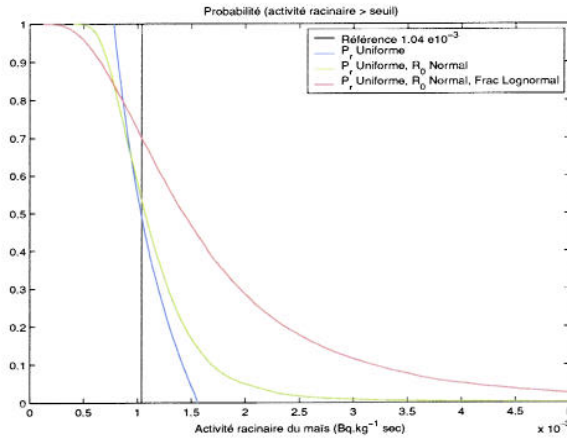


FIG. 18 – Effets de la variabilité sur l'activité racinaire du maïs dans le cadre probabiliste.

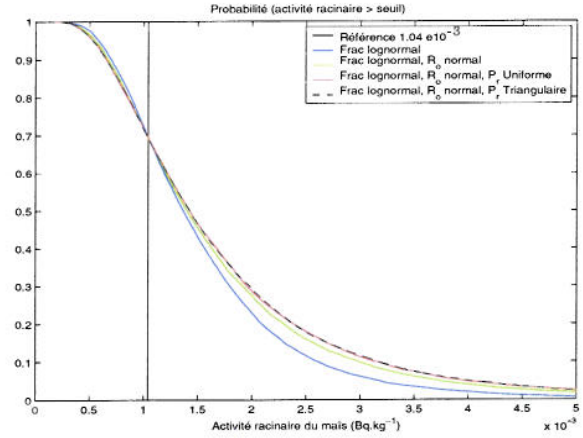


FIG. 19 – Effets du paramètre P_r sur l'activité racinaire du maïs dans le cadre probabiliste.

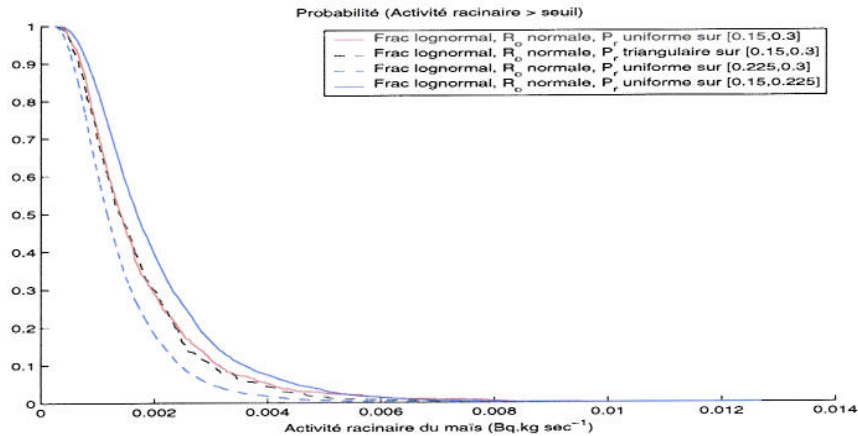


FIG. 20 – Effet sur l'activité racinaire du maïs selon différentes lois de probabilité de P_r .

ce point, supposons par exemple que l'incertitude sur P_r soit modélisée par une loi de probabilité uniforme sur $[0.15, 0.225]$ mètre ou par une loi de probabilité uniforme sur $[0.225, 0.3]$ mètre. Ces deux modélisations : P_r entre $[0.15, 0.225]$ et P_r entre $[0.225, 0.320]$ correspondent à des informations plus précises que P_r entre $[0.15, 0.30]$ mètre et en première analyse on pourrait s'attendre à ce que les valeurs possibles de l'activité racinaire résultant de ces deux modélisations du paramètre P_r soient incluses dans

la gamme de valeurs obtenues avec P_r variant entre $[0.15, 0.30]$. Ce n'est pas le cas comme le met en évidence la figure 20. Le résultat visualisé sur la figure 19, à savoir que la variabilité du paramètre P_r est négligeable devant la variabilité des paramètres R_0 et F_{rac} est encore davantage vrai si on réduit la variabilité de P_r . Il est donc important de retenir que la figure 19 montre l'effet de la variabilité de P_r et la figure 20 montre l'effet de P_r . L'effet de la variabilité d'un paramètre et l'effet d'un paramètre sont des notions bien différentes et c'est pour les distinguer de façon naturelle que nous allons utiliser une méthode combinant la théorie des probabilités (effet de la variabilité des paramètres) et la théorie des possibilités (effet des paramètres).

3.1.2.4 Calcul hybride (combine imprécision-variabilité).

On considère à présent que l'information sur la profondeur racinaire P_r n'est plus de nature aléatoire mais de nature imprécise. Ce paramètre sera donc modélisé à l'aide d'un intervalle ou d'une distribution de possibilité triangulaire (Indice 1 ou 3) qui sera plus cohérente avec notre état de connaissance sur P_r (voir Section 2.6). Nous allons donc combiner de l'information de nature aléatoire au travers du facteur de transfert sol/plante $Frac$, de la masse volumique R_0 et de l'information de nature imprécise au travers de la profondeur racinaire P_r à l'aide du calcul hybride (voir Section 2.5). La prise en compte de l'imprécision et de la variabilité, traitée par la méthode hybride, génère un ensemble de distributions de possibilité (voir Figure 21). Pour mettre en évidence que le calcul hybride ne génère pas un ensemble de distributions de possibilité emboîtées, nous avons décidé, dans la figure 21 de représenter le côté gauche des distributions de possibilité en bleu et le côté droit en vert.

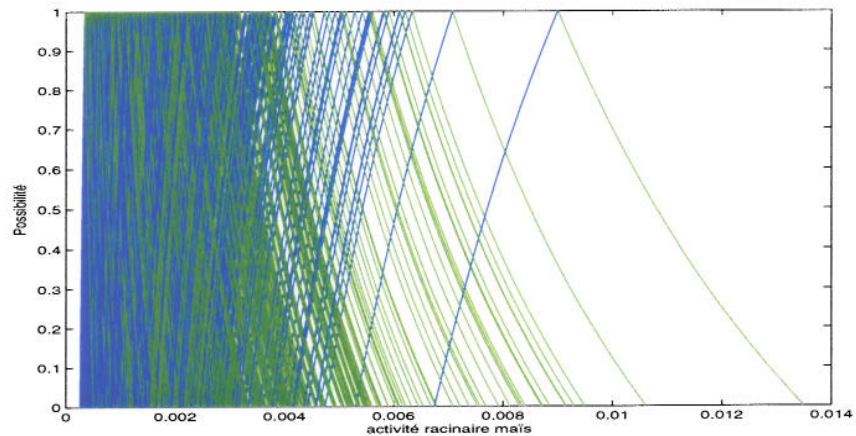


FIG. 21 – Echantillon aléatoire de distributions de possibilité résultant du calcul hybride de l'activité racinaire du maïs avec une distribution de possibilité triangulaire pour la profondeur racinaire P_r .

La prise en compte de l'imprécision dans le traitement des incertitudes, traitée par la théorie des possibilités ou des fonctions de croyance, génère non plus une probabilité unique mais une famille de probabilités. Le post-traitement du calcul hybride fournit une probabilité haute et basse (voir Section 2.5). L'écart entre la probabilité haute et basse reflète le caractère imprécis de l'information sur les valeurs des paramètres. La probabilité basse comme la probabilité haute montre l'effet de la variabilité des paramètres. La figure 22 permet d'apprécier les effets sur l'incertitude pour le modèle de l'activité racinaire du maïs suivant la modélisation de la connaissance sur la profondeur racinaire P_r à savoir une modélisation probabiliste ou possibiliste. L'incertitude sur l'activité racinaire du maïs n'est plus uniquement due à la variabilité des paramètres : R_0 , F_{rac} et P_r , mais est due à la variabilité des

paramètres : R_0 , F_{rac} et à l'imprécision sur les valeurs possibles du paramètre P_r . Ainsi, à l'aide de la table 6, on remarque que l'incertitude totale augmente de 57% dans le cadre du calcul hybride. Dans le cadre purement probabiliste, on avait conclu que l'incertitude sur la profondeur racinaire P_r , modélisée par de la variabilité n'avait pas d'influence sur l'incertitude de l'activité racinaire du maïs. En revanche, le fait de modéliser l'incertitude sur la profondeur racinaire P_r comme de l'imprécision conduit à une augmentation significative de l'incertitude totale sur l'activité racinaire.

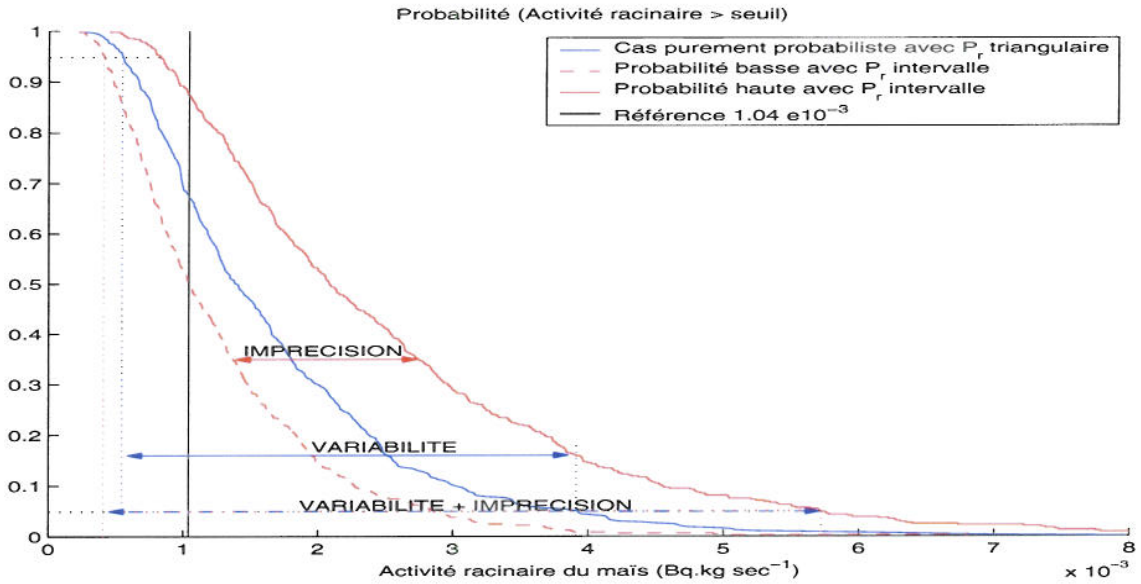


FIG. 22 – Impact sur les probabilités de l'activité racinaire du maïs selon que l'on considère l'information sur la profondeur racinaire P_r de nature aléatoire ou imprécise.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport Fractiles à 95% / 5%
Cas purement probabiliste	$5.48e10^{-4}$	$3.92e10^{-3}$	7.15
indice $P_r=1$, Probabilité haute	$8.23e10^{-4}$	$5.70e10^{-3}$	13.83
indice $P_r=1$, Probabilité basse	$4.12e10^{-4}$	$2.85e10^{-3}$	

TAB. 6 – Impact sur les fractiles de l'activité racinaire du maïs ($Bq.kg sec^{-1}$) selon la représentation mathématique de la connaissance sur la profondeur racinaire P_r (aléatoire ou imprécise).

La figure 23 permet de comparer les incertitudes sur l'activité racinaire pour le maïs entre le calcul purement probabiliste, le calcul d'intervalle puis le calcul hybride pour différentes représentations de la profondeur racinaire P_r . On observe que plus notre information est riche concernant la profondeur racinaire P_r (intervalle → possibilité triangulaire) plus l'écart entre les probabilités hautes et basses de l'activité racinaire du maïs diminuent (diminution de 30% de l'incertitude). La représentation de la profondeur racinaire P_r par une distribution de probabilité triangulaire sous-estime l'incertitude de l'activité racinaire de 48% (resp. 18%) comparativement au cas où P_r est représenté par un intervalle (resp. une distribution de possibilité triangulaire). Pour la profondeur racinaire P_r représentée par la distribution de possibilité triangulaire, on peut dire que :

$$0.01 \leq P_{Activite_{racinaire}}([0.005, \infty]) \leq 0.03$$

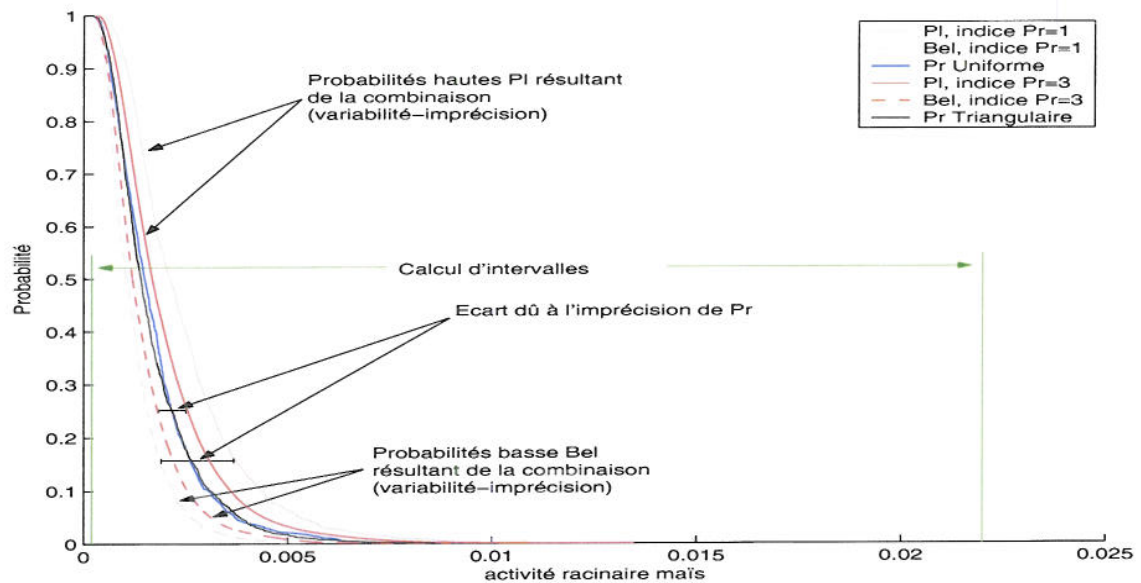


FIG. 23 – Influence de la représentation de la profondeur racinaire P_r sur la probabilité que l'activité racinaire du maïs soit supérieure à un certain seuil.

A noter que cette dernière représentation domine les deux distributions uniformes extrêmes qui avaient été utilisées pour la profondeur racinaire P_r dans la section précédente (voir Figure 20). En fait, la probabilité haute (resp. basse) en rouge de la figure 23 (indice $P_r=3$) coïncide avec la probabilité haute (resp. basse) en bleu de la figure 20.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport Fractiles à 95% / 5%
Cas purement probabiliste	$5.48e10^{-4}$	$3.92e10^{-3}$	7.15
indice $P_r=1$, Probabilité haute	$8.23e10^{-4}$	$5.70e10^{-3}$	13.83
indice $P_r=1$, Probabilité basse	$4.12e10^{-4}$	$2.85e10^{-3}$	
indice $P_r=3$, Probabilité haute	$6.57e10^{-4}$	$4.15e10^{-3}$	8.75
indice $P_r=3$, Probabilité basse	$4.73e10^{-4}$	$2.91e10^{-3}$	

TAB. 7 – Impacts sur les fractiles de l'activité racinaire du maïs ($Bq.kg\ sec^{-1}$) selon différentes représentations de la profondeur racinaire P_r .

Ces premiers résultats mettent en évidence que dans un cadre purement probabiliste, on aurait conclu que la profondeur racinaire P_r n'est pas un paramètre influent. Cependant, en restant fidèle à l'état de connaissance sur P_r à savoir une connaissance imprécise, la profondeur racinaire devient alors un paramètre influent sur l'incertitude totale. Représenter la profondeur racinaire par une distribution de probabilité unique donne des résultats informatifs (précis) mais qui sont arbitraires dans le sens où l'on a rajouté implicitement de l'information à notre état d'ignorance partielle sans justification. En procédant ainsi, on confond l'effet de l'imprécision sur les valeurs des paramètres (ici P_r) avec l'effet de la variabilité des paramètres. En tenant compte du caractère imprécis de l'information, les résultats obtenus pour l'activité racinaire du maïs sont plus discriminants que le calcul d'intervalle et plus conservatifs que le cas purement probabiliste.

3.2 Interception directe des retombées d'un rejet par les végétaux (activité foliaire)

L'interception directe des retombées d'un rejet par les végétaux est régi par le modèle suivant quels que soient les végétaux considérés (maïs et herbe).

$$Activité_{foliaire} = D \frac{R_c \cdot F_t}{RFS \cdot Rdt \cdot \lambda_{bio} \cdot 365 \text{ jours}} \quad (27)$$

D	Dépôt ($Bq \cdot m^{-2}$).
R_c	Rapport de captation (sans unité).
F_t	Facteur de translocation (sans unité).
RFS	Rapport poids Frais/poids Sec (sans unité).
Rdt	Rendement culturel ($kg \cdot m^{-2}$).
λ_{bio}	Constante de décroissance biomécanique (j^{-1}).
$Activité_{foliaire}$	Activité foliaire du fourrage ($Bq \cdot kg \text{ sec}^{-1}$).

3.2.1 Représentation de l'information disponible

3.2.1.1 Constante de décroissance λ_{bio} (j^{-1})

La constante de décroissance biomécanique λ_{bio} permet de modéliser la diminution de l'activité massique du végétal due à la croissance du végétal et au renouvellement des téguments entre le moment du dépôt et celui de la récolte. La constante de décroissance λ_{bio} est intrinsèquement variable du fait de la variabilité naturelle des végétaux. Les conditions dans lesquelles pousse le végétal (types de sols, engrais, irrigation) influent sur la rapidité de sa croissance et sur le rendement final et donc sur la diminution de son activité massique. Notre état de connaissance sur ce paramètre est défini à partir d'avis d'experts, de quelques mesures et de données bibliographiques [26]. Il ressort que l'on est certain que $\lambda_{bio} \in [0.015, 1000]j^{-1}$ et que les valeurs les plus vraisemblables sont dans $[0.025, 0.1]j^{-1}$ que ce soit pour le maïs ou pour l'herbe. Dans un cadre purement probabiliste, on peut être tenté de représenter cette connaissance par la distribution de probabilité trapézoïdale. Le problème est que les valeurs sélectionnées lors de l'échantillonnage sont principalement supérieures à 0.1 ce qui n'est pas souhaité étant donné que les valeurs les plus vraisemblables sont dans $[0.025, 0.1]$. Ainsi, nous avons décidé d'utiliser la distribution de probabilité cumulée $F_{\lambda_{bio}}$ telle que $F_{\lambda_{bio}}(0.015) = 0$, $F_{\lambda_{bio}}(0.025) = 0.05$, $F_{\lambda_{bio}}(0.1) = 0.95$ et $F_{\lambda_{bio}}(1000) = 1$ avec une interpolation linéaire entre chaque fractile (voir dans la table 8 son expression analytique). Cependant, l'information réellement disponible ne peut pas justifier l'utilisation d'une unique distribution de probabilité pour représenter la constante de décroissance λ_{bio} . La distribution de possibilité trapézoïdale, définie dans la table 8, est mieux adaptée (car plus fidèle) pour représenter λ_{bio} et elle domine la distribution de probabilité définie précédemment (voir Figures 24 et 25).

Distribution de possibilité trapézoïdale	Maïs & Herbe		Indice
	support= $[0.015, 1000]$	noyau= $[0.025, 0.1]$	
Distribution de possibilité trapézoïdale	$F_{\lambda_{bio}}(x) = 2.5(x - 0.015) \forall x \in [0.015, 0.025]$		1
Distribution de probabilité cumulée	$F_{\lambda_{bio}}(x) = \frac{95\%}{0.075}(x - 0.025) + 2.5\% \forall x \in [0.025, 0.1]$		2
	$F_{\lambda_{bio}}(x) = \frac{2.5\%}{999.9}(x - 0.1) + 97.5\% \forall x \in [0.1, 1000]$		

TAB. 8 – Différentes représentations pour la constante de décroissance biomécanique λ_{bio} (j^{-1}).

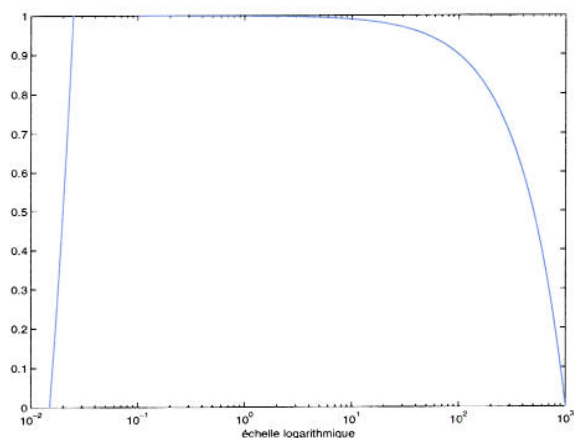


FIG. 24 – Distribution de possibilité trapézoïdale π de support $[0.015,1000]$ et de noyau $[0.025,0.1]$.

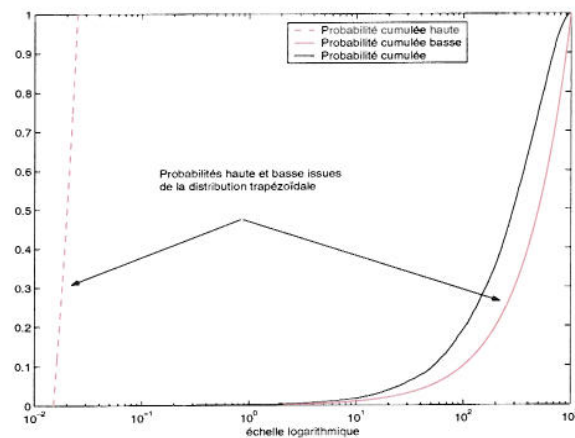


FIG. 25 – Probabilités cumulées haute et basse issues de π encadrant la probabilité cumulée trapézoïdale en noire.

3.2.1.2 Rapport de captation R_c (sans unité)

Le rapport de captation R_c désigne la fraction du dépôt exprimé en $Bq.m^{-2}$, qui est interceptée par la surface foliaire des végétaux. La connaissance sur ce paramètre est issue de la formule de Chamberlain [3] qui reconstitue le rapport de captation R_c à partir du rendement de biomasse foliaire. Cette formule a permis de reconstituer un encadrement des valeurs possibles pour ce paramètre [26] (voir table 28 pour les différentes représentations du paramètre R_c).

	Maïs	Herbe	Indice
Intervalle	[0.63, 0.82]	[0.8, 0.9]	1
Distribution de probabilité Uniforme	[0.63, 0.82]	[0.8, 0.9]	2

TAB. 9 – Différentes représentations pour le rapport de captation R_c (sans unité).

3.2.1.3 Facteur de translocation (sans unité)

Le facteur de translocation F_t rend compte du transfert des radionucléides vers les organes de la plante et notamment vers la partie consommée après absorption due à un dépôt sur les tiges ou les feuilles des végétaux. Lorsque tout ou partie de la masse foliaire est consommée (maïs, herbe), il n'y a pas lieu de considérer la translocation et on adopte une valeur de 1 pour ce paramètre.

3.2.1.4 Rendement culturel Rdt ($kg.m^{-2}$)

Le rendement culturel est une donnée agronomique variable. La connaissance concernant le paramètre Rdt est issue de la bibliographie. Les valeurs de référence fournissent un encadrement avec les valeurs centrales préférées [26]. La Table 10 présente les différentes représentations du rendement culturel Rdt .

	Maïs	Herbe	Indice
Intervalle	[4.5, 7.5]	[1, 10]	1
Distribution de probabilité Uniforme	[4.5, 7.5]	[1, 10]	2
Distribution de possibilité triangulaire	[4.5, 6, 7.5]	[1, 5.5, 10]	3
Distribution de probabilité triangulaire	[4.5, 6, 7.5]	[1, 5.5, 10]	4

TAB. 10 – Différentes représentations pour le rendement cultural Rdt ($kg.m^{-2}$).

3.2.1.5 Rapport poids Frais/poids Sec RFS (sans unité)

Le paramètre RFS est utilisé pour obtenir l'activité des végétaux en $Bq.kg^{-1}$ sec. La connaissance de ce paramètre est issue d'une base de données qui a permis d'estimer la moyenne et l'écart type et de valider l'hypothèse d'une loi normale [26] (voir Table 11).

	Maïs	Herbe
normale	[0.285, 0.04]	[0.302, 0.164]

TAB. 11 – Représentation pour le rapport poids Sec/poids Frais $\frac{1}{RFS}$ (sans unité).

3.2.2 Etude des incertitudes de l'activité foliaire

Comme pour l'activité racinaire, nous focaliserons notre étude sur l'activité foliaire du maïs. Le but est toujours de montrer les effets de différents modes de représentation de l'information disponible sur l'activité foliaire, comparativement à une représentation purement probabiliste.

3.2.2.1 Calcul d'intervalles

Par un raisonnement analogue à l'activité racinaire (voir Section 3.1.2.1), on calcule l'ensemble des valeurs possibles de l'activité foliaire par un calcul d'intervalles afin d'obtenir un encadrement (min-max) de celle-ci.

	Maïs	
$\frac{1}{RFS}$ (sans unité)	0.211	0.388
R_c (sans unité)	0.63	0.82
Rdt ($kg.m^{-2}$)	4.5	7.5
λ_{bio} (j^{-1})	0.015	1000
Activite foliaire ($Bq.kg \text{ sec}^{-1}$)	$5.086e10^{-8}$	0.0129

TAB. 12 – Résultat du calcul d'intervalles pour l'activité foliaire du maïs ($Bq.kg \text{ sec}^{-1}$).

3.2.2.2 Calcul de référence

Comme pour le calcul de référence de l'activité racinaire du maïs dans la Section 3.1.2.2, Les valeurs modales de chaque paramètre sont sélectionnées et on calcule l'activité foliaire du maïs à partir de celles-ci. La table 13 répertorie les valeurs modales de chaque paramètre et le calcul de l'activité foliaire du maïs.

	Maïs
R_c (sans unité)	0.725
$\frac{1}{RES}$ (sans unité)	0.285
Rdt ($kg.m^{-2}$)	6
λ_{bio} (j^{-1})	0.0625
Activité foliaire ($Bq.kg \text{ sec}^{-1}$)	$1.5 \cdot 10^{-3}$

TAB. 13 – Résultat de l'activité foliaire du maïs ($Bq.kg \text{ sec}^{-1}$) pour une sélection des valeurs modales de chaque paramètre.

3.2.2.3 Calcul purement probabiliste (variabilité)

Comme pour l'activité racinaire du maïs (voir Section 3.2.2.3), on se place dans le cadre purement probabiliste où l'on injecte de la variabilité, dans le modèle de l'activité foliaire, au travers de ses paramètres. La figure 26 permet de visualiser le caractère variable de l'activité foliaire du maïs comparativement au calcul de référence. L'apparition du plateau entre 10^{-7} et $3 \cdot 10^{-4} Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ s'explique par le fait que la constante de décroissance λ_{bio} peut être dans $[0.1,1000]$ avec une probabilité de 2.5% et donc peut générer (avec une probabilité faible) ces valeurs très faibles pour l'activité foliaire.

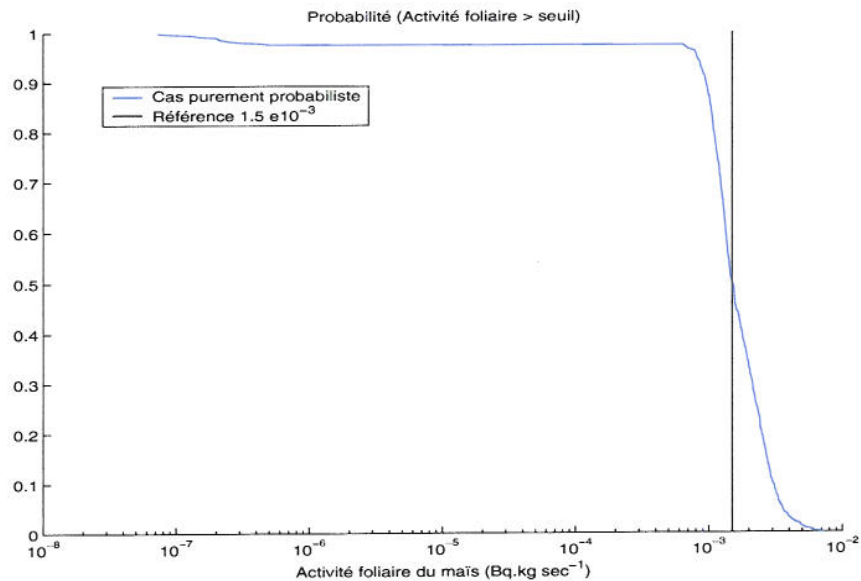


FIG. 26 – Effet de la variabilité sur l'activité foliaire du maïs dans le cadre purement probabiliste (échelle logarithmique).

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cadre purement probabiliste indice(λ_{bio}, R_c, Rdt)=(2,2,4)	$8.1 \cdot 10^{-4}$	$3.53 \cdot 10^{-3}$	4.35

TAB. 14 – Fractiles de l'activité foliaire du maïs ($Bq.kg \text{ sec}^{-1}$).

3.2.2.4 Calcul hybride (combine imprécision-variabilité)

De manière similaire à l'activité racinaire du maïs, nous allons utiliser les modèles possibilistes pour les paramètres λ_{bio} , Rdt et R_c et ainsi mettre en évidence leurs influences sur l'activité foliaire du maïs comparativement au cadre purement probabiliste.

Considérons dans un premier temps que la constante de décroissance λ_{bio} soit représentée par la distribution de probabilité définie dans la table 8. L'utilisation de la distribution de possibilité triangulaire ou l'intervalle pour le rendement culturel Rdt n'a pas de conséquence directe sur le résultat. Ceci est dû à l'étendue faible des valeurs possibles pour le paramètre Rdt . La figure 27 et la table 15 montrent que le fait de considérer notre information sur les paramètres R_c et Rdt de nature imprécise contribue à une augmentation de 53% de l'incertitude sur l'activité foliaire du maïs dans le cadre du calcul hybride.

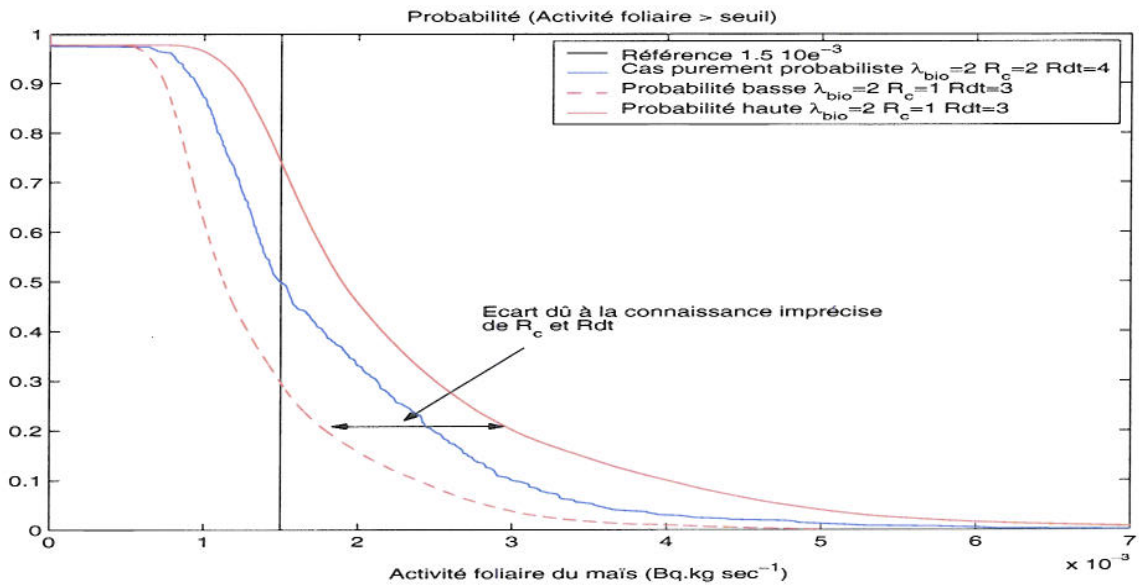


FIG. 27 – Influence de la représentation de R_c , Rdt sur la probabilité d'obtenir l'activité foliaire du maïs supérieure à un certain seuil.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cas purement probabiliste	$8.1 \cdot 10^{-4}$	$3.53 \cdot 10^{-3}$	4.35
indice($R_c = 1, Rdt = 3$), Probabilité haute	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$	7.39
indice($R_c = 1, Rdt = 3$), Probabilité basse	$6.49 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	

TAB. 15 – Impacts sur les fractiles de l'activité foliaire du maïs ($Bq.kg \text{ sec}^{-1}$) selon où l'on considère la connaissance sur le rapport de captation R_c et le rendement culturel Rdt de nature aléatoire ou imprécise.

Considérons à présent que la constante de décroissance λ_{bio} soit représentée par la distribution de possibilité trapézoïdale. La figure 28 montre que la constante de décroissance λ_{bio} est le paramètre le plus influent sur l'activité foliaire du maïs. Les effets se font surtout ressentir sur la probabilité basse de dépasser un seuil. En effet, le paramètre λ_{bio} apparait au dénominateur de l'activité foliaire ce qui a pour conséquence d'écraser les valeurs basses de l'activité foliaire pour les valeurs hautes [0.1, 1000] de

λ_{bio} lors du processus de propagation (méthodologie hybride). Dans le cadre purement probabiliste, on a $P(\lambda_{bio} \in [0.1, 1000]) = 2.5\%$, autant dire que la probabilité d'obtenir des valeurs très hautes $[0.1, 1000]$ pour la constante de décroissance λ_{bio} est très faible et donc la probabilité d'obtenir des valeurs très basses pour l'activité foliaire du maïs est très faible.

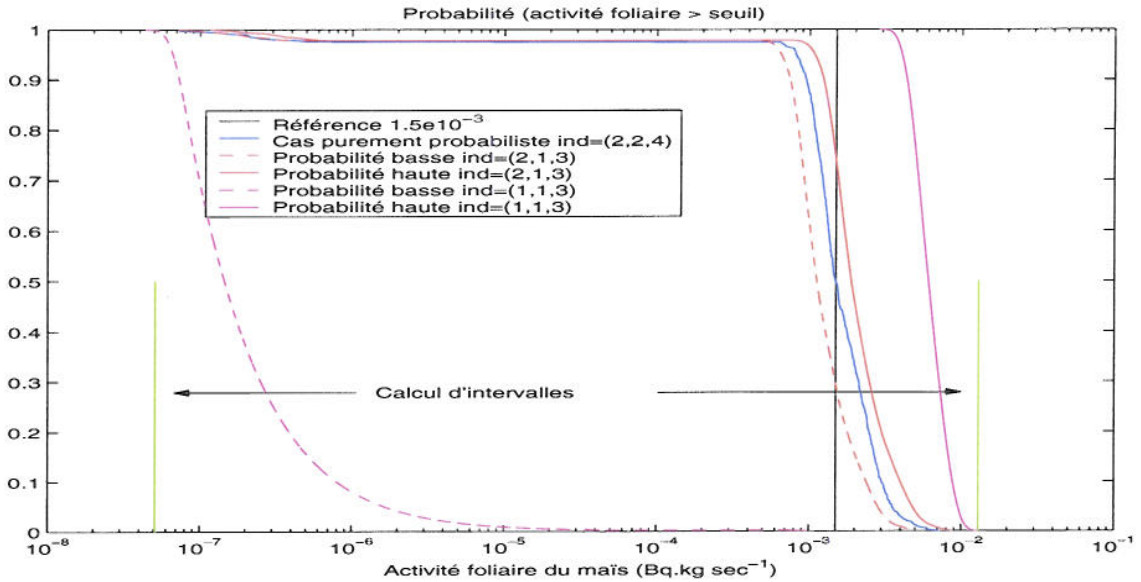


FIG. 28 – Influence de la représentation des paramètres λ_{bio} , R_c , Rdt sur la probabilité d'obtenir l'activité foliaire du maïs supérieure à un certain seuil (échelle logarithmique). Ordre des indices correspondant aux paramètres indice= $(\lambda_{bio}, R_c, Rdt)$.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cas purement probabiliste	$8.1 \cdot 10^{-4}$	$3.53 \cdot 10^{-3}$	4.35
indice($R_c = 1, Rdt = 3$), Probabilité haute	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$	7.39
indice($R_c = 1, Rdt = 3$), Probabilité basse	$6.49 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	
indice($\lambda_{bio} = 1, R_c = 1, Rdt = 3$), Probabilité haute	$4.11 \cdot 10^{-3}$	$9.59 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^5$
indice($\lambda_{bio} = 1, R_c = 1, Rdt = 3$), Probabilité basse	$0.67 \cdot 10^{-7}$	$16.63 \cdot 10^{-7}$	

TAB. 16 – Impacts sur les fractiles de l'activité foliaire du maïs ($Bq.kg \text{ sec}^{-1}$) selon la représentation des paramètres.

Le fait de rester fidèle à l'information, notamment pour la constante de décroissance λ_{bio} , augmente considérablement l'incertitude sur l'activité foliaire du maïs (à savoir une augmentation de 253%). On remarque également que dans le cadre où l'on modélise fidèlement notre état de connaissance, il est tout à fait plausible de dépasser des valeurs comme $0.005 Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ alors que dans un cadre purement probabiliste, ce dépassement est jugé quasi impossible (voir Figure 28).

3.3 Activité massique du fourrage

$$Activité_{fourrage} = Activité_{racinaire} + Activité_{foliaire} \quad (28)$$

Comme pour les sections précédentes, nous nous focaliserons sur l'activité massique du maïs.

3.3.1 Calcul d'intervalles

L'activité foliaire du maïs peut atteindre des valeurs très basses (voir Table 17) compte tenu des valeurs très hautes que peut atteindre la constante de décroissance λ_{bio} . Ainsi, l'activité foliaire du maïs n'est pas le facteur dominant de l'activité massique totale du maïs pour les valeurs basses.

	Maïs	
$Activité_{racinaire} (Bq.kg \text{ sec}^{-1})$	$1.63 \cdot 10^{-4}$	0.022
$Activité_{foliaire} (Bq.kg \text{ sec}^{-1})$	$5.086 \cdot 10^{-8}$	0.0129
$Activité_{fourrage} (Bq.kg \text{ sec}^{-1})$	$1.63 \cdot 10^{-4}$	0.0349

TAB. 17 – Résultats du calcul d'intervalles pour l'activité massique totale du maïs ($Bq.kg \text{ sec}^{-1}$).

3.3.2 Calcul de référence

Les valeurs modales de chaque paramètre sont sélectionnées et on calcule l'activité massique du fourrage.

	Maïs
$Activité_{racinaire} (Bq.kg \text{ sec}^{-1})$	$1.04 \cdot 10^{-3}$
$Activité_{foliaire} (Bq.kg \text{ sec}^{-1})$	$1.5 \cdot 10^{-3}$
$Activité_{fourrage} (Bq.kg \text{ sec}^{-1})$	$2.54 \cdot 10^{-3}$

TAB. 18 – Résultat de l'activité massique totale du maïs ($Bq.kg \text{ sec}^{-1}$) pour une sélection des valeurs modales de chaque paramètre.

3.3.3 Calcul purement probabiliste (variabilité)

L'effet de plateau remarqué sur la figure 26 concernant l'activité foliaire ne se répercute pas sur l'activité massique totale du maïs car les valeurs basses de l'activité foliaire seront écrasées par les valeurs de l'activité racinaire.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cadre purement probabiliste Indice($P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt$)=(4,2,2,4)	$1.72 \cdot 10^{-3}$	$5.83 \cdot 10^{-3}$	3.4

TAB. 19 – Fractiles de l'activité massique totale du maïs ($Bq.kg \text{ sec}^{-1}$).

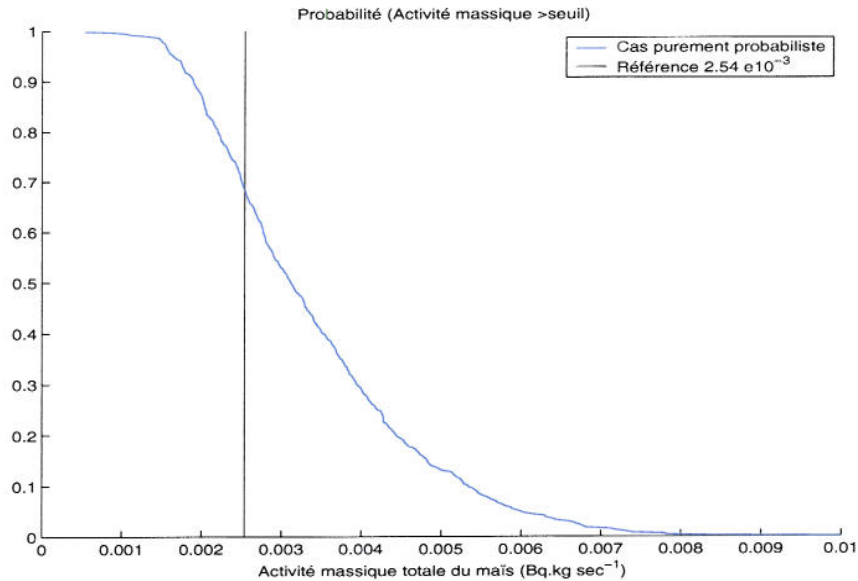


FIG. 29 – Effet de la variabilité sur l’activité foliaire du maïs dans le cadre purement probabiliste (échelle logarithmique).

3.3.4 Calcul hybride (combine imprécision-variabilité)

Dans la Section 3.1, nous avons mis en évidence que la profondeur racinaire P_r était un paramètre influent sur l’incertitude de l’activité racinaire du maïs quand celui-ci était modélisé par une distribution de possibilité. Nous décidons à présent de conserver la distribution de possibilité triangulaire car elle est cohérente avec notre information réellement disponible. Dans la Section 3.2, nous avons observé que la constante de décroissance λ_{bio} était le paramètre influent sur l’incertitude de l’activité foliaire du maïs quand celle-ci était représentée par une distribution de possibilité notamment sur les probabilités basses. En se référant aux tables 7 et 16, nous pouvons caractériser l’incertitude pour les valeurs hautes de l’activité racinaire (resp. l’activité foliaire) par l’intervalle $[6.57 \cdot 10^{-4}, 4.15 \cdot 10^{-3}] \text{ Bq.kg sec}^{-1}$ (resp. $[4.11 \cdot 10^{-3}, 9.59 \cdot 10^{-3} \text{ Bq.kg sec}^{-1}]$). On en déduit que l’activité foliaire du maïs sera donc le facteur dominant dans l’activité massique du maïs pour les probabilités hautes. En revanche, l’incertitude sur les valeurs basses caractérisée par l’intervalle $[4.73 \cdot 10^{-4}, 2.91 \cdot 10^{-3}] \text{ Bq.kg sec}^{-1}$ pour l’activité racinaire (resp. $[0.67 \cdot 10^{-7}, 16.63 \cdot 10^{-7}] \text{ Bq.kg sec}^{-1}$ pour l’activité foliaire), met en évidence que l’activité racinaire sera le facteur dominant de l’activité massique du maïs pour les probabilités basses.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cas purement probabiliste	$1.72 \cdot 10^{-3}$	$5.83 \cdot 10^{-3}$	3.4
Probabilité haute, Ind=(3,1,1,3)	$5.4 \cdot 10^{-3}$	$12.39 \cdot 10^{-3}$	25
Probabilité basse, Ind=(3,1,1,3)	$4.94 \cdot 10^{-4}$	$2.94 \cdot 10^{-3}$	

TAB. 20 – Impacts sur les fractiles de l’activité massique du maïs (Bq.kg sec^{-1}) selon la représentation des paramètres imprécis. Ordre des indices Ind=($P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt$)

La table 20 nous montre que l’incertitude totale de l’activité massique du maïs est sous-estimée de 65% dans le cadre purement probabiliste. On observe également que la probabilité de dépasser

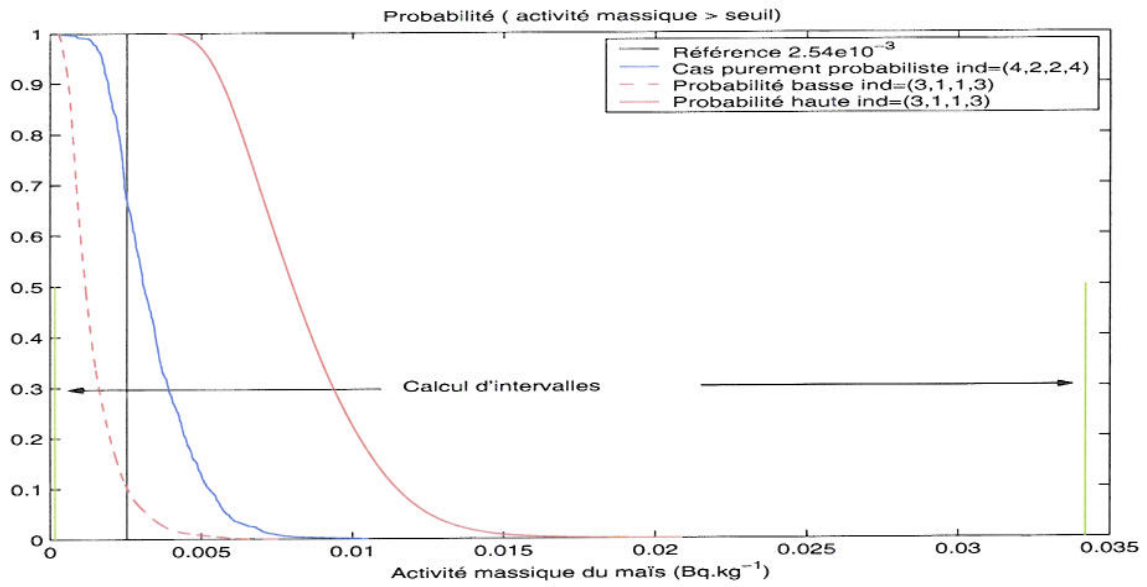


FIG. 30 – Influence de la représentation des paramètres P_r , λ_{bio} , Rc , Rdt sur la probabilité que l'activité massique du maïs soit supérieure à un certain seuil. Ordre des indices correspondant aux paramètres $ind = (P_r, \lambda_{bio}, Rc, Rdt)$.

0.007 Bq.kg.sec⁻¹ peut atteindre 70% dans le cadre où l'on essaie de conserver le caractère imprécis de l'information. Dans le cadre purement probabiliste ce dépassement de seuil est jugé quasi impossible.

3.4 Transfert vers les produits animaux

Dans un environnement contenant des radionucléides artificiels dus à une accumulation de dépôts successifs, les animaux sont contaminés principalement par ingestion de fourrages contaminés. Le transfert vers les produits animaux est régi par le modèle suivant :

$$Activité_{lait} = Ft_{lait} \cdot \sum_{fourrage} Activité_{fourrage} \cdot Ration_{fourrage} \cdot RFS_{fourrage} \quad (29)$$

Ft_{lait}	Facteur de transfert au lait de vache (j/l).
$Ration_{fourrage}$	Quantité de fourrage consommée chaque jour ($kg \text{ sec} \cdot j^{-1}$).
$Activité_{fourrage}$	Activité massique du fourrage $Bq \cdot kg \text{ sec}^{-1}$.
$Activité_{lait}$	Activité volumique du lait ($Bq \cdot l^{-1}$).
$RFS_{fourrage}$	Rapport poids Frais/poids Sec (sans unité).

3.4.1 Représentation de l'information disponible

3.4.1.1 Facteur de transfert au lait de vache Ft_{lait} (j/l).

Pour une incorporation quotidienne donnée, l'intensité du transfert au lait dépend surtout de la répartition du radionucléide dans les organes et fluides de l'animal. Le facteur de transfert à l'équilibre vers le lait dépend donc du radionucléide. Les valeurs de référence utilisées dans la table 21 sont celles issues de [26].

	Mais, Herbe	Indice
Intervalle	[0.001, 0.005]	1
Distribution de probabilité uniforme	[0.001, 0.005]	2

TAB. 21 – Représentation pour le facteur de transfert plante/lait Ft_{lait} (j/l).

3.4.1.2 Ration alimentaire d'une vache laitière $Ration_{fourrage}$ ($kg \text{ sec} \cdot j^{-1}$)

On définit deux représentations possibles afin de comparer leurs répercussions sur les résultats de l'activité volumique du lait. Nous avons seulement de la connaissance sur la matière sèche totale ingérée à savoir les valeurs les plus vraisemblables se situant dans l'intervalle [10,14] $kg \text{ sec} \cdot j^{-1}$ mais on ne peut pas exclure les valeurs contenues dans [4,35] $kg \text{ sec} \cdot j^{-1}$. Ces valeurs de référence sont issues de [26]. Il faut à présent déterminer la ration de maïs et d'herbe ingérée. Pour cela on va utiliser un *ratio* contenu dans [0,1] et déterminer le poids d'herbe ingérée en effectuant : matière sèche totale ingérée \times *ratio* et le poids du maïs ingéré en effectuant : matière sèche totale ingérée \times (1 – *ratio*). Ainsi, la variable $Ration_{fourrage}$ sera modélisée par :

Maïs, herbe	Indice
distribution de possibilité trapézoïdale aléatoire	1
combinaison d'une probabilité uniforme sur [0,1] (<i>ratio</i>) et d'une distribution de probabilité trapézoïdale (matière sèche totale)	2

TAB. 22 – Représentation pour la ration alimentaire d'une vache laitière $Ration_{fourrage}$ ($kg \text{ sec} \cdot j^{-1}$).

3.4.1.3 Rapport poids frais/poids sec RFS (sans unité)
(voir Section 3.2.1.5)

3.4.2 Etude des incertitudes de l'activité volumique du lait

3.4.2.1 Calcul d'intervalles

	Herbe		Maïs	
$Activité_{fourrage}$ ($Bq.kg\ sec^{-1}$)	$3.5e10^{-4}$	0.2060	$1.63e10^{-4}$	0.0349
$Ration_{fourrage}$ ($kg\ sec.j^{-1}$)	4	35	0	0
$Ration_{fourrage}$ ($kg\ sec.j^{-1}$)	0	0	4	35
Ft_{lait} (j/l)	0.001	0.005	0.001	0.005
RFS (sans unité)	1.38	20	2.58	4.74
$Activité_{lait}$ ($Bq.l^{-1}$)	$1.93e10^{-6}$		3.28	

TAB. 23 – Résultats du calcul d'intervalles pour l'activité volumique du lait ($Bq.l^{-1}$).

3.4.2.2 Calcul de référence

La distribution de probabilité, représentant la connaissance sur le rapport poids sec/poids frais $\frac{1}{RFS}$, est normale de paramètres connus (m, σ). La valeur modale du rapport poids frais/poids sec RFS sera donnée par $\frac{-m + \sqrt{m^2 + 4\sigma^2}}{2\sigma^2}$.

	Maïs	Herbe
$Frac$ ($Bq.kg^{-1}$ sec de végétal/ $Bq.kg^{-1}$ de sol)	0.33	0.75
R_o ($kg.m^{-3}$)	1410	1410
Pr (m)	0.225	0.2
R_c (sans unité)	0.725	0.85
$\frac{1}{RFS}$ (sans unité)	0.285	0.302
RFS (sans unité)	3.44	2.67
Rdt ($kg.m^{-2}$)	6	5.5
λ_{bio} (j^{-1})	0.0625	0.0625
Ft_{lait} (j/l)	0.003	0.003
$Ration_{fourrage}$ ($kg\ sec.j^{-1}$)	6	6
$Activité_{lait}$ ($Bq.l^{-1}$)	$3.83e10^{-4}$	

TAB. 24 – Résultat de l'activité volumique du lait ($Bq.l^{-1}$) pour une sélection des valeurs modales de chaque paramètre.

3.4.2.3 Calcul purement probabiliste (variabilité)

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cadre purement probabiliste Indice=(4,2,2,4,2,2)	2.13e10 ⁻⁴	2.71e10 ⁻³	12.71

TAB. 25 – Fractiles de l'activité volumique du lait ($Bq.l^{-1}$), Indice : $(P_r, \lambda_{bio}, R_c, R_{dt}, Ft_{lait}, Ration_{fourrage})$.

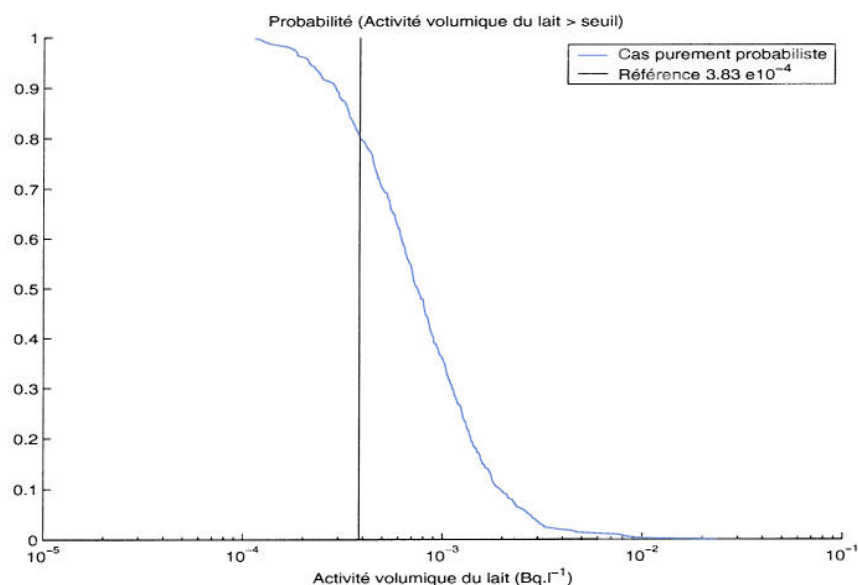


FIG. 31 – Effets de la variabilité sur l'activité volumique du lait $Bq.l^{-1}$.

3.4.2.4 Calcul hybride (combine imprécision-variabilité)

À ce stade du document, on ne présente plus que la comparaison entre le cas purement probabiliste et le cas où l'on considère l'information de nature imprécise (information réellement disponible) car les phénomènes observés en testant les combinaisons (probabilité-possibilité) pour la connaissance de nature imprécise sont les mêmes que précédemment.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cas purement probabiliste	2.13e10 ⁻⁴	2.71e10 ⁻³	12.71
Probabilité haute, Ind=(3,1,1,3,1,1)	1.88e10 ⁻³	2.01e10 ⁻²	1.24e10 ³
Probabilité basse, Ind=(3,1,1,3,1,1)	1.61e10 ⁻⁵	2.24e10 ⁻⁴	

TAB. 26 – Impact sur les fractiles de l'activité volumique du lait ($Bq.l^{-1}$) selon la représentation des paramètres. Ordre des indices Ind= $(P_r, \lambda_{bio}, R_c, R_{dt}, Ft_{lait}, Ration_{fourrage})$

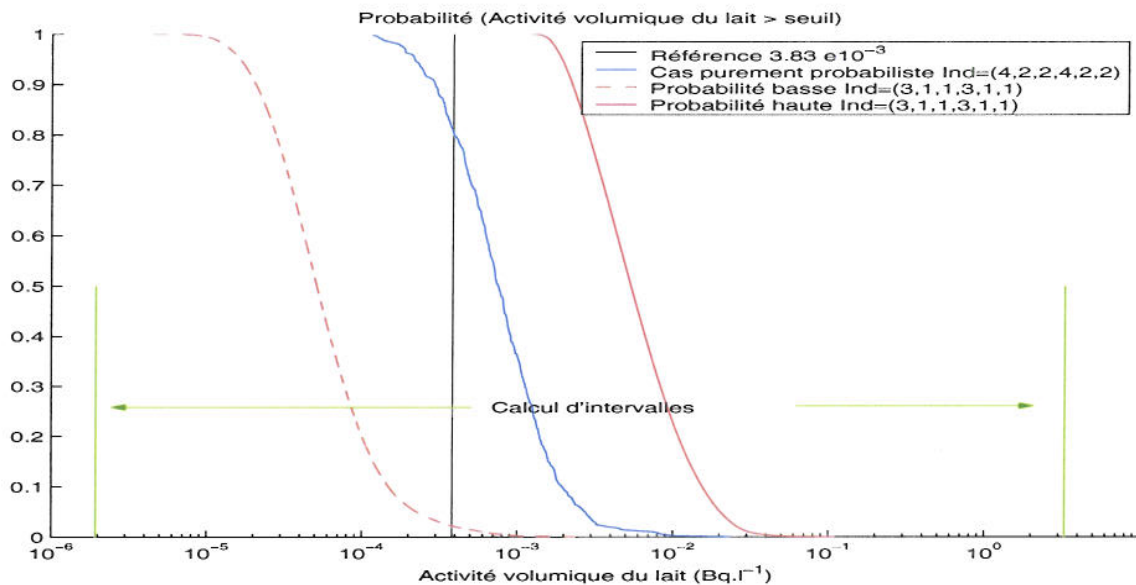


FIG. 32 – Influence de la représentation de P_r , λ_{bio} , R_c , R_{dt} , Ft_{lait} , $Ration_{fourrage}$ sur la probabilité d'obtenir l'activité massique du maïs supérieure à un certain seuil (échelle logarithmique). Ordre des indices correspondant aux paramètres (P_r , λ_{bio} , R_c , R_{dt} , Ft_{lait} , $Ration_{fourrage}$).

La figure 32 et la table 26 mettent en évidence que le cadre purement probabiliste sous-estime de 87% l'incertitude totale de l'activité volumique du lait. En effet, on peut arriver à conclure que dépasser $0.004 Bq.l^{-1}$ est quasiment impossible alors que si l'on représente l'imprécision de l'information, la probabilité de dépasser ce seuil peut atteindre 65% (probabilité haute).

3.5 Transfert à l'homme

La population concernée est constituée d'adultes. On considère que l'individu ne consomme que du lait produit par les vaches venant de la zone soumise au polluant (le strontium 90). Le transfert à l'homme est régi par le modèle suivant :

$$D_{ing} = Activité_{lait} \cdot Ration_{lait} \quad (30)$$

$Ration_{lait}$ Ration alimentaire de lait ($l.an^{-1}$).
 $Activité_{lait}$ Activité volumique du lait ($Bq.l^{-1}$).
 D_{ing} Dose ingérée ($Bq.an^{-1}$).

3.5.1 Représentation de l'information disponible

3.5.1.1 Ration alimentaire de lait $Ration_{lait}$ ($l.an^{-1}$)

L'information disponible sur la ration alimentaire de lait est issue du rapport [26] et synthétisée dans la table 27. On supposera que le mode est compris entre la moyenne et la médiane (fractile à 50%).

	Valeur observée ($l.an^{-1}$)	intervalles de confiance à 95% ($l.an^{-1}$)	
Consommation moyenne	37	33	42
Fractile à 25%	1	1	2
Fractile à 50%	12	6	26
Fractile à 75%	63	51	77
Fractile à 90%	103	93	108
Fractile à 95%	121	108	133
Fractile à 97.5%	150	122	160

TAB. 27 – Information disponible sur la ration alimentaire $Ration_{lait}$ ($l.an^{-1}$).

Etant donnée la valeur maximale de l'intervalle de confiance à 95% pour le fractile à 97.5% (à savoir $160 l.an^{-1}$), nous avons décidé que la ration de lait ne pourrait pas dépasser $170 l.an^{-1}$. En se référant à la Section 2.6.4, la distribution de possibilité π (voir Figure 33) définit une famille de probabilité $\mathcal{P}(\pi)$ qui contient toutes les probabilités unimodales de mode appartenant à [médiane,moyenne], de support $[0, 170]$ ([1]) et de fractiles connus. C'est à dire que :

$$\bigcup_{M \in [médiane, moyenne]} \mathcal{P}_{[0,170]}^{M, fractiles} \subseteq \mathcal{P}(\pi)$$

$$\forall A \text{ mesurable}, \quad \forall P \in \bigcup_{M \in [médiane, moyenne]} \mathcal{P}_{[0,170]}^{M, fractiles} \quad P_{Ration_{lait}}(A) \leq \Pi_{Ration_{lait}}(A)$$

où $\mathcal{P}_{[0,170]}^{M, fractiles}$ est la famille de probabilité unimodale de mode M , de support $[0,170]$ et avec ses fractiles connus.

On testera également la loi normale $\mathcal{N}(37, 55)$ pour le cas purement probabiliste, en la tronquant à 0. Elle sera déduite des fractiles en résolvant le problème suivant :

$$\min_{\sigma} \max_{[G_i]} G_i(\sigma)$$

où $G_i(\sigma) = F_{th}(x_i, 37, \sigma) - F(x_i)$, F_{th} est la fonction de répartition normale théorique de moyenne 37, et F est la fonction de répartition donnée aux points (fractiles) x_i . C'est à dire que l'on cherche σ qui minimise le maximum de G_i (voir Figure 34).

	Indice
Distribution de possibilité issue des fractiles	1
Loi normale $N(37,55)$	2

TAB. 28 – Différentes représentations pour la ration alimentaire de lait $Ration_{lait}$ ($l.an^{-1}$).

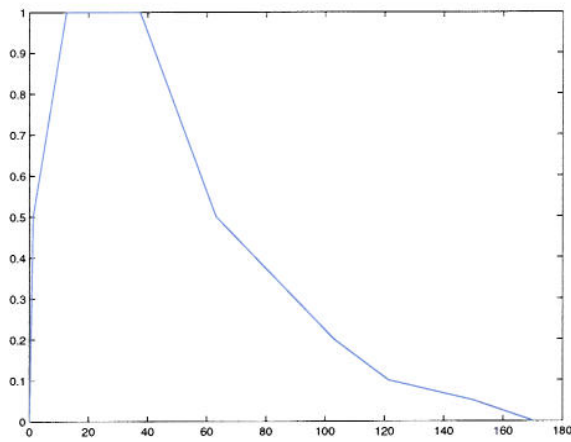


FIG. 33 – Distribution de possibilité pour la ration alimentaire de lait $Ration_{lait}$ ($l.an^{-1}$).

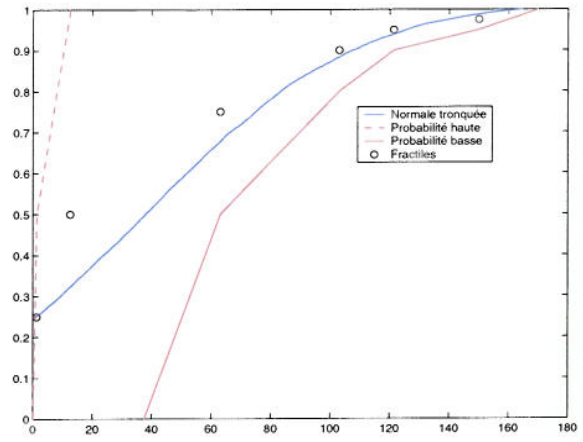


FIG. 34 – Probabilité cumulée tronquée pour la ration alimentaire de lait $Ration_{lait}$ ($l.an^{-1}$).

3.5.2 Etude des incertitudes sur la dose de strontium 90 ingérée

3.5.2.1 Calcul d'intervalles

$Ration_{lait}$ ($l.an^{-1}$)	0	170
$Activite_{lait}$ $Bq.l^{-1}$	$1.93e10^{-6}$	3.28
D_{ing} ($Bq.an^{-1}$)	0	557

TAB. 29 – Résultat du calcul d'intervalles pour la dose ingérée D_{ing} ($Bq.an^{-1}$).

3.5.2.2 Calcul de référence

$Activite_{lait} (Bq.l^{-1})$	$3.83e10^{-4}$
$Ration_{lait} (l.an^{-1})$	37.398
$D_{ing} (Bq.an^{-1})$	0.014

TAB. 30 – Résultat de la dose ingérée ($Bq.an^{-1}$) pour une sélection des valeurs modales de chaque paramètre.

3.5.2.3 Calcul purement probabiliste (variabilité)

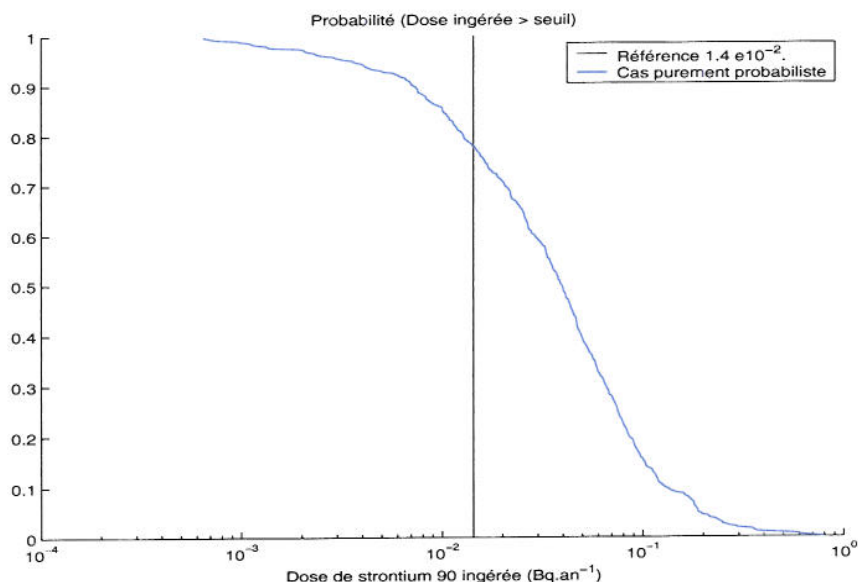


FIG. 35 – Effet de la variabilité sur la dose de strontium 90 ingérée $Bq.an^{-1}$, (échelle logarithmique).

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cadre purement probabiliste Indice=(4,2,2,4,2,2,2)	$3.5e10^{-3}$	$1.87e10^{-1}$	52.47

TAB. 31 – Fractiles de la dose de strontium ingérée ($Bq.an^{-1}$),
Indice=($P_r, \lambda_{bio}, R_c, R_{dt}, F_{t_{lait}}, Ration_{fourrage}, Ration_{lait}$).

3.5.2.4 Calcul hybride (combine imprécision-variabilité)

La figure 36 permet de comparer les incertitudes sur la dose de strontium 90 ingérée entre le cas purement probabiliste, le calcul d'intervalles et le calcul hybride. Le cadre purement probabiliste sous-estime

de 93% l'incertitude totale comparativement au cas où l'on prend en compte l'imprécision de l'information disponible (calcul hybride). La table 32 montre que l'on est sûr à 95% que la dose ingérée dépassera $2.93e10^{-6} Bq.an^{-1}$ et ne dépassera pas $2.71 Bq.an^{-1}$. Le fait de rajouter de l'information a priori afin de déterminer des distributions de probabilité sur les paramètres donne des résultats trop optimistes. En effet, la probabilité de dépasser $0.4 Bq.an^{-1}$ est jugée quasi impossible dans le cadre probabiliste alors qu'elle peut atteindre 45% dans le cas où l'on tient compte de l'imprécision de l'information. L'écart entre la probabilité haute et basse est dû à l'imprécision de notre information sur la profondeur racinaire P_r , la constante de décroissance λ_{bio} , le rapport de captation R_c , le rendement culturel Rdt , le facteur de transfert au lait Ft_{lait} , la ration alimentaire $Ration_{fourrage}$ et la ration alimentaire de lait $Ration_{lait}$. Ainsi, la probabilité de dépasser $0.04 Bq.an^{-1}$ est comprise entre 0 et 1 ce qui reflète l'ignorance totale, contrairement au cas purement probabiliste qui l'estime égale à 50% seulement.

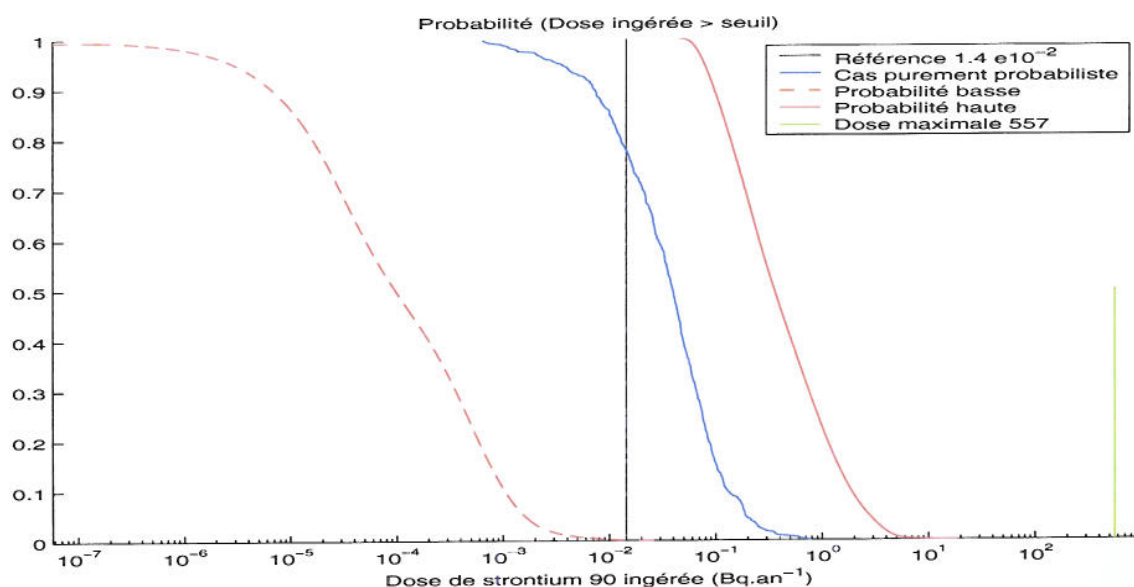


FIG. 36 – Influence de la représentation des paramètres $P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt, Ft_{lait}, Ration_{fourrage}, Ration_{lait}$ sur la probabilité d'obtenir la dose ingérée D_{ing} supérieure à un certain seuil. Indice= $(P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt, Ft_{lait}, Ration_{fourrage}, Ration_{lait})=(3, 1, 1, 3, 1, 1, 1)$ imprécis= $(4, 2, 2, 4, 2, 2, 2)$ cas purement probabiliste.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cas purement probabiliste, Ind= $(4, 2, 2, 4, 2, 2, 2)$	$3.5e10^{-3}$	$1.87e10^{-1}$	52.47
Probabilité haute, Ind= $(3, 1, 1, 3, 1, 1, 1)$	$7.79e10^{-2}$	2.71	$4.61e10^5$
Probabilité basse, Ind= $(3, 1, 1, 3, 1, 1, 1)$	$2.93e10^{-6}$	$1.58e10^{-3}$	

TAB. 32 – Impacts sur les fractiles de la dose ingérée ($Bq.an^{-1}$). Ordre des indices Ind= $(P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt, Ft_{lait}, Ration_{fourrage}, Ration_{lait})$

4 Conclusion

Ce rapport présente les différentes théories de l'incertain qui ont été utilisées pour représenter et propager l'information de nature imprécise et aléatoire sur une sous-partie du modèle d'évaluation du risque d'exposition (le transfert d'un polluant (^{90}Sr) sol/homme à travers la consommation du lait de vache). Ce document met en évidence que l'on ne peut pas toujours justifier l'utilisation de probabilité unique pour représenter notre connaissance sur les paramètres. Des théories alternatives comme les possibilités ou les fonctions de croyance permettent de définir des familles de probabilité et ainsi de mieux tenir compte du caractère souvent imprécis de notre état de connaissance.

Le calcul d'intervalles répond au principe de précaution mais est peut être trop conservatif et pas assez discriminant. A l'opposé, le calcul purement probabiliste peut générer des résultats trop optimistes dus au fait que l'on a modélisé de l'imprécision par de la variabilité. La méthode hybride permet de prendre en considération de l'information de nature hétérogène (imprécision-variabilité) et de la propager à travers des modèles mathématiques. Le post-traitement permet d'extraire par exemple, à partir du résultat du calcul hybride, la probabilité de dépassement de seuil. Le caractère imprécis de l'information ne permet plus d'obtenir une probabilité unique mais un encadrement de celle-ci. L'écart entre la probabilité haute et basse reflète notre état d'ignorance partielle sur les paramètres. Tenir compte du caractère imprécis de l'information peut avoir un réel impact pour la phase décisionnelle. Supposons que la probabilité haute de dépasser un seuil fixé par les experts soit non négligeable comparativement au cadre purement probabiliste qui la jugerait quasi nulle, le résultat obtenu par le calcul purement probabiliste est contestable dans le sens où l'on a été obligé de rajouter de l'information (sans justification) sur certains paramètres en les modélisant par une distribution de probabilité. Il serait alors peut être préférable de refaire quelques investigations de terrain afin d'obtenir plus d'information et réduire ainsi l'écart entre la probabilité haute et basse. Au contraire si la probabilité haute de dépasser le seuil est quasi nulle, cela nous reconforte dans le choix, par exemple de ne pas dépolluer un site, car nous sommes restés fidèles à l'information réellement disponible.

Cette méthode d'analyse de la nature des paramètres d'une équation d'évaluation des risques, nature variable ou nature imprécise, permet de faire évoluer notre état de connaissance sur certains paramètres cibles, dans le sens de la réduction des incertitudes ou a contrario de considérer notre état de connaissance comme optimal pour une problématique donnée.

Références

- [1] C. Baudrit, D. Dubois, H. Fargier. Représentation de la connaissance probabiliste incomplète. *Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications, Tours*, 65-72, 2003.
- [2] C. Baudrit, D. Dubois, D. Guyonnet, H. Fargier. Joint Treatment of imprecision and Randomness in Uncertainty Propagation. *Conf. on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Perugia*, 873-880, 2004.
- [3] A.C. Chamberlain. Interception and retention of radioactive aerosols by vegetation. *Atmospheric Environment*, 4, 1970.
- [4] E. Chojnacki, C. Rommens, P. Germain, A. Sugier, A. Merle-Szérémeta. Nord-Cotentin radioecological study-sensitivity and uncertainty analysis. I.R.S.N, 1999.
- [5] W.J. Conover & R.L. Iman. A Distribution-Free Approach to Inducing Rank Correlation Among Input Variables. *Technometric*, 3, 311-334, 1982.
- [6] W.J. Conover, M.D. McKay, R.J. Becknam. A Comparaison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. *Technometric*, 21, may, 1979.
- [7] G. De Cooman, D. Aeyels. Supremum-preserving upper probabilities. *Information Sciences*, 118, 173-212, 1999.
- [8] D. Dubois, E. Kerre, R. Mesiar, H. Prade .Fuzzy interval analysis. *Fundamentals of Fuzzy Sets*, Dubois, D. Prade, H., Eds : Kluwer , Boston, Mass, 483-581, 2000.
- [9] D. Dubois, H. T. Nguyen, H. Prade. Possibility theory, probability and fuzzy sets : misunderstandings, bridges and gaps. *Fundamentals of Fuzzy Sets*, Dubois, D. Prade, H., Eds : Kluwer , Boston, Mass, 343-438, 2000.
- [10] D. Dubois, H. Prade : When upper probabilities are possibility measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 49, 1992, 65-74.
- [11] D. Dubois, H. Prade, G. Mauris, L. Foulloy. Probability-possibility transformations, triangular fuzzy sets and probabilistic inequalities. Proc. Inter. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU), Annecy, 2002 (Version Longue À paraÔtre dans Reliable Computing).
- [12] D. Dubois, H. Prade, S.A. Sandri : On possibility/probability transformations. *Fuzzy Logic : State of the Art* (R. Lowen, M. Lowen, eds.), Kluwer Academic Publ., 103-112, 1993.
- [13] S. Ferson, L.R. Ginzburg. Hybrid Arithmetic. *Proceedings of ISUMA-NAFIPS'95, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California*, 619-623, 1995.
- [14] S. Ferson. Using fuzzy arithmetic in Monte Carlo simulation of fishery populations. *Management of Exploited Fish*, T. Quinn (ed.), *Proceedings of the ISMSEFP, Anchorage*, 595-608, 1992.
- [15] S. Ferson & M.A. Burman. Correlation, dependency bounds and extinction risks. *Biological Conservation*, 73, 101-105, 1995.
- [16] S. Ferson. What Monte Carlo methods cannot do. *Human and Ecology Risk Assessment*, 2, 990-1007, 1996.
- [17] S. Ferson, L. Ginzburg, R. Akcakaya. Whereof one cannot speak : when input distributions are unknown. A paraÔtre dans *Risk Analysis*, 2003.
- [18] S. Ferson, L.R. Ginzburg. Different methods are needed to propagate ignorance and variability. *Reliability Engineering and Systems Safety*, 54, 133-144, 1996.
- [19] C. Freissinet, M. Vauclin. A fuzzy logic-based approach to assess imprecision of soil water contamination modeling. *Soil & Tillage Research*, 47, 1-17, 1998.

- [20] D. Guyonnet, B. Bourgine, D. Dubois, H. Fargier, B. Côme, J.P. Chilès. Hybrid approach for addressing uncertainty in risk assessments. *Journal of Environmental Engineering*, 126, 68-78, 2003.
- [21] H. Gzyl. The Method of Maximum Entropy. *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*, 29, 1995.
- [22] A. Kaufmann, M.M. Gupta. Introduction to Fuzzy Arithmetic : Theory and Applications. *Van Nostrand Reinhold, New York*, 1985.
- [23] P. Labieniec, D. Dzombak, R. Siegrist. Evaluation of uncertainty in a site-specific risk assessment. *Journal of Environmental Engineering*, 123(3), 234-243, 1997.
- [24] P. Lagacherie, D. Cazemier, R. Martin-Clouaire, T. Wassenaar. A spatial approach using imprecise soil data for modelling crop yields over vast areas. *Agriculture, Ecosystems and Environment*, 81, 5-16, 2000.
- [25] C. Mercat-Rommens, E. Chojnacki. Prise en compte de l'incertitude dans l'évaluation du risque d'exposition : définition de cas synthétiques. *Rapport DPRE/SERNAT/2002-23. Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire, Fontenay-aux-Roses*, 2002.
- [26] C. Mercat-Rommens, P. Renaud, F. Vray, E. Chojnacki. Exemple simplifié proposé comme cas d'étude pour la représentation de la connaissance. , *Rapport DEI/SERURE/2004-02. Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire, Fontenay-aux-Roses*, 2004.
- [27] G. Shafer. A Mathematical Theory of Evidence. *Princeton University Press*, 1976.