

Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du  
**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

**Délivré par :**

Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

**Discipline ou spécialité :**

Dynamique des Fluides

---

**Présentée et soutenue par :**

Romain Bonhomme

**le :** vendredi 19 octobre 2012

**Titre :**

Étude expérimentale et numérique du passage de bulles de gaz au travers  
d'une interface entre deux liquides

---

**Ecole doctorale :**

Mécanique, Energétique, Génie civil et Procédés (MEGeP)

**Unité de recherche :**

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)

**Directeur(s) de Thèse :**

Jacques Magnaudet

**Rapporteurs :**

Laurent Limat

Franck Pigeonneau

**Membre(s) du jury :**

Fabien Duval

Daniel Fuster

Dominique Gobin

Olivier Masbernat

Bruno Piar



# Remerciements

Je remercie Messieurs Daniel Fuster, Olivier Masbernat, et Dominique Gobin pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse, ainsi que Messieurs Franck Pigeonneau et Laurent Limat pour leurs remarques pertinentes quant à mon mémoire.

Je désire également exprimer ma reconnaissance envers Bruno Piar et Fabien Duval qui ont toujours su se rendre disponibles et témoigner d'un intérêt sincère tout au long de ces trois années. Leur collaboration fut déterminante pour l'accomplissement de cette thèse.

Je remercie bien évidemment Jacques Magnaudet pour la confiance qu'il m'a accordée en me léguant ce sujet de thèse. Son excellence scientifique fut, et restera pour moi, une référence en la matière.

Je tiens à remercier les secrétaires et techniciens de l'IRSN et de l'IMFT qui réalisent un travail titanesque. En particulier, j'adresse un grand merci à Marie-Hélène Manzato et Marie-Claire Kallend pour leur bonne humeur constante malgré mes interrogations administratives fréquentes. Un grand merci à Jean-Pierre Escafit et Laurent Mouneix pour la qualité irréprochable de leur usinage. Et un immense merci à Sébastien Cazin, Annaïg Pedrono et Greg Ehses, sans qui rien ne se crée, sans qui la précellence n'existe pas.

Je remercie tous les chercheurs, doctorants et stagiaires qui ont contribué à ces trois chaleureuses années de par leur dynamisme et leur sympathie. Je tire d'ailleurs mon chapeau à Patricia, Véronique et Catherine pour leurs entretiens délicieux, ainsi qu'à Dominique pour son habileté tant dans le geste que dans le verbe. Merci aux collègues du bureau 217, Nicolas, Pauline, Joël, Guillaume, avec qui les échanges ont toujours été enthousiastes et fructueux. Merci aussi aux collègues débordants d'énergie qui ont partagé mes humeurs au jour le jour, Cédric, Yohann et Mélanie. Une pensée bien sûr à tous les doctorants du groupe Interface auxquels je souhaite les mêmes interactions et libertés dont j'ai bénéficiées.

J'adresse ma reconnaissance à ma famille et à mes amis qui se sont évertués à comprendre mon travail au travers d'expériences à base de breuvages pétillants.

Enfin, je remercie les nombreux sportifs invétérés du laboratoire pour leur engouement, hormis les deux comparses Thomas et René qui me doivent toujours un quatrième tour à la Marseillaise...

*« Le monde est une bulle, et la vie de l'homme moins que sa durée. »*  
Francis Bacon



## Résumé

Dans le but de prédire l'évolution d'un hypothétique accident au sein d'un réacteur nucléaire, nous nous proposons au travers de cette étude de comprendre la dynamique de bulles de gaz évoluant dans un bain stratifié constitué de deux liquides superposés.

Pour ce faire, un dispositif expérimental muni de caméras à haute cadence a été construit afin d'observer en détail la dynamique de bulles d'air isolées et de trains de bulles traversant une interface séparant deux liquides newtoniens immiscibles initialement au repos. En faisant varier la taille des bulles injectées ainsi que les contrastes de viscosité entre les liquides d'un et quatre ordres de grandeur respectivement, ce dispositif a permis d'observer une grande variété de régimes d'écoulement. Dans certaines situations, les bulles de taille millimétrique restent piégées à l'interface liquide-liquide, tandis que les bulles plus grosses parviennent à traverser l'interface, entraînant une importante colonne de liquide lourd derrière elles.

Après que l'influence des paramètres physiques a été qualitativement établie à la lumière de modèles simples, des simulations numériques de plusieurs situations sélectionnées ont été réalisées. Celles-ci ont été menées à partir de deux approches basées sur les équations de Navier-Stokes incompressibles, l'une utilisant une technique de capture d'interface, l'autre une description de type « interface diffuse » de Cahn-Hilliard. Les comparaisons entre les résultats expérimentaux et numériques ont confirmé la fiabilité des prédictions numériques dans la plupart des cas, mais ont également souligné le besoin d'améliorer la capture de phénomènes physiques à petite échelle, en particulier ceux liés au drainage de film.

**Mots clés :** bulles, écoulement triphasique, interface liquide-liquide, simulation numérique directe

## Abstract

In order to predict the evolution of a hypothetical accident in pressurized water nuclear reactors, this study aims to understand the dynamics of gas bubbles ascending in a stratified mixture made of two superimposed liquids.

To this aim, an experimental device equipped with two high-speed video cameras was designed, allowing us to observe isolated air bubbles and bubble trains crossing a horizontal interface separating two Newtonian immiscible liquids initially at rest. The size of the bubbles and the viscosity contrast between the two liquids were varied by more than one and four orders of magnitude respectively, making it possible to observe a wide variety of flow regimes. In some situations, small millimetric bubbles remain trapped at the liquid-liquid interface, whereas larger bubbles succeed in crossing the interface and tow a significant column of lower fluid behind them.

After the influence of the physical parameters was qualitatively established thanks to simple models, direct numerical simulations of several selected experimental situations were performed with two different approaches. These are both based on the incompressible Navier-Stokes equations, one making use of an interface-capturing technique, the other of a diffuse Cahn-Hilliard description. Comparisons between experimental and numerical results confirmed the reliability of the computational approaches in most situations but also highlighted the need for improvements to capture small-scale physical phenomena especially those related to film drainage.

**Key words :** bubbles, three-phase flow, liquid-liquid interface, direct numerical simulation



# Table des matières

<b>Contexte d'étude</b>	<b>11</b>
<b>I Outils pour l'étude de la dynamique de bulles dans des systèmes triphasiques</b>	<b>17</b>
<b>1 Méthode expérimentale</b>	<b>19</b>
1 La colonne d'essai . . . . .	19
2 Les systèmes d'injection . . . . .	21
3 Propriétés des liquides . . . . .	22
4 Le dispositif de visualisation pour l'ombroscopie . . . . .	24
5 Le dispositif de visualisation pour la Vélocimétrie par Images de Particules (PIV) . . . . .	26
6 Traitement d'images . . . . .	27
6.1 Étapes du passage de bulles isolées à travers une interface liquide-liquide . . . . .	27
6.2 Détection et suivi des entités . . . . .	28
6.3 Post-traitement : volumes et positions . . . . .	31
6.4 Post-traitement : décomposition des formes de bulles en modes de Legendre . . . . .	32
6.5 Acquisition des champs de vitesse . . . . .	33
7 Validations du dispositif expérimental . . . . .	35
7.1 Erreurs de détection . . . . .	35
7.2 Répétabilité de l'injection par pousse-seringue . . . . .	36
7.3 Ascension de bulles dans la phase lourde . . . . .	37
7.4 Répétabilité dans la phase légère avec entraînement de liquide lourd . . . . .	38
<b>2 Éléments d'analyse théorique</b>	<b>47</b>
1 Adimensionnalisation du problème . . . . .	47
2 Bulle piégée à une interface liquide-liquide . . . . .	48
3 Bulle entraînant du liquide lourd au-dessus de l'interface . . . . .	51
3.1 À faible $RB_I$ . . . . .	54
3.2 À grand $RB_I$ . . . . .	54
<b>3 Approches de simulation</b>	<b>57</b>
1 Description générale - équations d'évolution . . . . .	57
2 L'approche « Volume Of Fluid » sans reconstruction d'interface : le code JADIM . . . . .	59
2.1 Étapes de résolution des équations d'évolution . . . . .	59
2.2 Résolution des équations des taux de présence . . . . .	60
2.3 Conservation du volume . . . . .	61
2.4 Résolution des équations de Navier-Stokes . . . . .	62
3 Le modèle de Cahn-Hilliard / Navier-Stokes triphasique : la plate-forme PELICANS . . . . .	65
3.1 Étapes de résolution des équations de transport . . . . .	68
3.2 Résolution des équations de Cahn-Hilliard . . . . .	68
3.3 Résolution des équations de Navier-Stokes . . . . .	69
4 Mise en œuvre des deux codes dans le cadre du problème considéré . . . . .	71

4.1	Influence de la proximité initiale des bulles par rapport à la paroi inférieure . . . . .	71
4.2	Influence de la largeur du domaine de calcul . . . . .	71
4.3	Influence des rapports de masse volumique et viscosité . . . . .	72
<b>II</b>	<b>Observations et résultats</b>	<b>75</b>
<b>4</b>	<b>Observations expérimentales</b>	<b>77</b>
1	Cartographie d'écoulement . . . . .	78
1.1	Cartographie générale . . . . .	78
1.2	Cartographie détaillée . . . . .	82
2	Extrapolations aux trains de bulles . . . . .	88
2.1	Trains à faible fréquence . . . . .	88
2.2	Trains à forte fréquence . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Prédictions numériques</b>	<b>93</b>
1	Comparaisons avec les résultats de Manga & Stone . . . . .	93
2	Comparaisons avec les résultats de Shopov & Minev . . . . .	94
3	Prédictions comparées des deux codes . . . . .	101
4	Drainage de film et influence du nombre de Bond . . . . .	105
5	Discussion sur les limitations des deux codes : le problème des films minces . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Analyse d'une sélection de résultats expérimentaux et numériques</b>	<b>107</b>
1	Bulles sphéroïdales . . . . .	107
2	Calottes sphériques . . . . .	115
3	Bulles toriques . . . . .	122
4	Discussion sur les prédictions numériques des observations expérimentales . . . . .	126
	<b>Conclusion</b>	<b>129</b>
	<b>Annexes</b>	<b>135</b>
1	Caractéristiques du verre optique B 270 Superwite® . . . . .	136
2	Caractéristiques du pousse-seringue perfusant monocanal KD Scientific KDS100 . . . . .	137
3	Caractéristiques d'une caméra PCO1200 HS . . . . .	137
4	Caractéristiques de l'objectif télécentrique TC 4M 120 . . . . .	138
5	Caractéristiques du laser Pegasus de New Wave Research utilisé pour la PIV . . . . .	138
6	Caractéristiques des particules Microparticles de rhodamine B encapsulées dans du PMMA utilisées pour la PIV . . . . .	139
7	Caractéristiques de la caméra Photron FASTCAM-Ultima APX-RS utilisée pour la PIV . . . . .	139
8	Équilibre des énergies mécaniques . . . . .	140
9	Extension du modèle « Continuum Surface Force » (CSF) pour un système triphasique . . . . .	141
10	Discussion de l'expression des forces capillaires issues du modèle de Cahn-Hilliard triphasique . . . . .	143
11	Images, images ... . . . .	145
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>147</b>



# Nomenclature

## Acronymes

- BIM** « Boundary Integral Method »  
**CSF** « Continuum Surface Force »  
**DNS** Simulation Numérique Directe  
**FCT** « Flux Corrected Transport »  
**IMFT** Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse  
**IRSN** Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire  
**PELICANS** Plate-forme Évolutive de Bibliothèques de Composants pour l'Analyse Numérique et Statistique  
**PIV** Vélocimétrie par Images de Particules  
**VOF** « Volume Of Fluid »

## Général

- $\Omega$  domaine ouvert borné, connexe, de frontière régulière  
 $\partial\Omega$  frontière de  $\Omega$   
 $\mathbf{n}$  vecteur normal à  $\partial\Omega$   
 $\kappa$  courbure moyenne

## Notations relatives aux paramètres physiques

- $\rho$  masse volumique  
 $\eta$  viscosité dynamique  
 $\sigma$  tension interfaciale

## Notations relatives aux problèmes triphasiques d'écoulements de bulles

- $d$  diamètre d'une bulle  
 $\mathcal{V}$  volume d'une bulle  
1 indice de phase du liquide inférieur  
2 indice de phase de la bulle  
3 indice de phase du liquide supérieur  
 $S_i$  paramètre d'étalement associé à la phase  $i$  ( $S_i = \sigma_{jk} - \sigma_{ij} - \sigma_{ik}$ )

## Notations relatives aux bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie

- $c_i$  fraction volumique de la phase  $i$   
 $p$  pression  
 $\mathbf{u}$  vecteur vitesse  
 $u$  norme de  $\mathbf{u}$   
 $\mathbf{g}$  accélération de la pesanteur  
 $g$  norme de  $\mathbf{g}$   
 $\boldsymbol{\tau}$  tenseur des contraintes visqueuses

### Notations des paramètres du modèle de Cahn-Hilliard

$\mu_i$	potentiel chimique généralisé associé à la phase $i$
$\mathcal{F}$	énergie libre de Cahn-Hilliard
$F$	potentiel de Cahn-Hilliard
$M$	mobilité
$\epsilon$	épaisseur d'interface
$\Sigma_i$	coefficient de capillarité associé à la phase $i$ ( $= -S_i$ )

### Notations relatives à la discrétisation en volumes finis

$F$	flux numérique
$\mathcal{V}$	volume d'une maille

### Notations relatives à la discrétisation en éléments finis

$N_{\text{unk}}^{\mathbf{a}}$	nombre des degrés de liberté de la représentation discrète du champ $\mathbf{a}$ qui sont des inconnues du problème discret
$\varphi_I^{\mathbf{a}}$	$I^{\text{ème}}$ fonction de base éléments finis associée au champ $\mathbf{a}$
$\mathbf{C}$	vecteur des composantes de $c$
$\mathbf{M}$	vecteur des composantes de $\mu$

### Nombre adimensionnels pour des systèmes triphasiques

$Bo$	nombre de Bond de la bulle dans la phase inférieure ( $= \rho_1 g d^2 / \sigma_{12}$ )
$Bo_u$	nombre de Bond de la bulle dans la phase supérieure ( $= \rho_3 g d^2 / \sigma_{23}$ )
$B_I$	nombre de Bond interfacial ( $= \rho_1 g d^2 / \sigma_{23}$ )
$Ar$	nombre d'Archimède de la bulle dans la phase inférieure ( $= \rho_1 g^{\frac{1}{2}} d^{\frac{3}{2}} / \eta_1$ )
$Ar_u$	nombre d'Archimède de la bulle dans la phase supérieure ( $= \rho_3 g^{\frac{1}{2}} d^{\frac{3}{2}} / \eta_3$ )
$Re$	nombre de Reynolds particulaire dans la phase inférieure ( $= \rho_1 u d / \eta_1$ )
$R$	rapport de masses volumiques ( $= (\rho_1 - \rho_3) / \rho_1$ )
$\Lambda$	rapport de viscosités ( $= \eta_3 / \eta_1$ )
$S$	rapport de tensions superficielles ( $= \sigma_{23} / \sigma_{12}$ )
$I$	rapport de tensions interfaciales ( $= \sigma_{13} / \sigma_{12}$ )

# Contexte de l'étude

*Le béton des enceintes de trois réacteurs serait entamé à Fukushima.*

*Le combustible nucléaire qui se trouvait dans les réacteurs 1, 2 et 3 de la centrale accidentée de Fukushima a rongé une partie du béton de l'enceinte de confinement, sans toutefois traverser la coque en acier, selon des hypothèses de l'opérateur Tokyo Electric Power (Tepco).*

*Dans un rapport d'analyses rendu public mercredi soir [30 novembre 2011], Tepco explique que ses nouveaux calculs laissent supposer que le combustible du réacteur 1 a entièrement fondu, percé la cuve sous pression et est tombé sur le sol en béton de l'enceinte de confinement, le traversant sur une profondeur qui pourrait atteindre 65 centimètres.*

*Le combustible fondu se trouverait ainsi par endroits à 37 centimètres de la coque en acier, elle-même entourée d'un bâtiment de béton reposant sur une dalle de 7,6 mètres d'épaisseur.*

*Une partie du combustible des deux autres réacteurs (2 et 3) a également fondu, percé la cuve sous pression et commencé de tomber sur le béton, le rongant sur quelques centimètres. Tepco estime cependant que grâce à l'eau déversée, le processus d'érosion du béton est stoppé. L'opérateur ne peut pour le moment qu'échafauder des hypothèses à partir de simulations informatiques, sur la base de diverses mesures effectuées par des instruments de télécontrôle. Nul ne peut se rendre compte de visu de l'état réel des réacteurs, à cause de rayonnements si élevés qu'ils interdisent à l'homme d'approcher le cœur des installations. Il faudra des années avant d'y parvenir.*

*Le Monde, jeudi 01 décembre 2011.*

## Interaction corium-béton

Au sein d'un réacteur à eau pressurisée, l'une des situations accidentelles consiste en la perte de réfrigérant primaire, entraînant un échauffement du cœur et pouvant conduire à une rupture de la cuve qui l'entoure. Suite à cette rupture, le cœur fondu, appelé corium, se déverse dans le puits de cuve composé de béton (figure 1). Le corium ablate peu à peu les parois du puits de cuve, entraînant des relâchements importants de gaz : vaporisation de l'eau contenue dans le béton et formation de dioxyde de carbone par décomposition du calcaire principalement. Le bain de corium est alors traversé par un flux de bulles. Cette étape de l'accident est appelée interaction corium-béton. Le puits de cuve étant l'une des barrières de confinement du corium, il est primordial de connaître la vitesse et la direction de l'ablation du béton.

Le corium liquide est un mélange complexe, qui peut être constitué de plusieurs phases. Il est communément admis que l'on peut supposer une séparation en deux phases principales, l'une majoritairement oxyde et l'autre majoritairement métallique, de masses volumiques différentes.

Cette étude s'intéresse plus particulièrement à un scénario probable de l'accident où le bain atteint une configuration stratifiée composée d'une phase inférieure principalement métallique, et d'une phase supérieure majoritairement oxyde, comme schématisé sur la figure 2. Ce phénomène de stratification a un impact majeur sur le déroulement de l'accident : la couche métallique, beaucoup plus conductrice, constitue un pont thermique entre la couche oxyde dans laquelle est généré l'essentiel de la puissance et les parois ; la progression de la

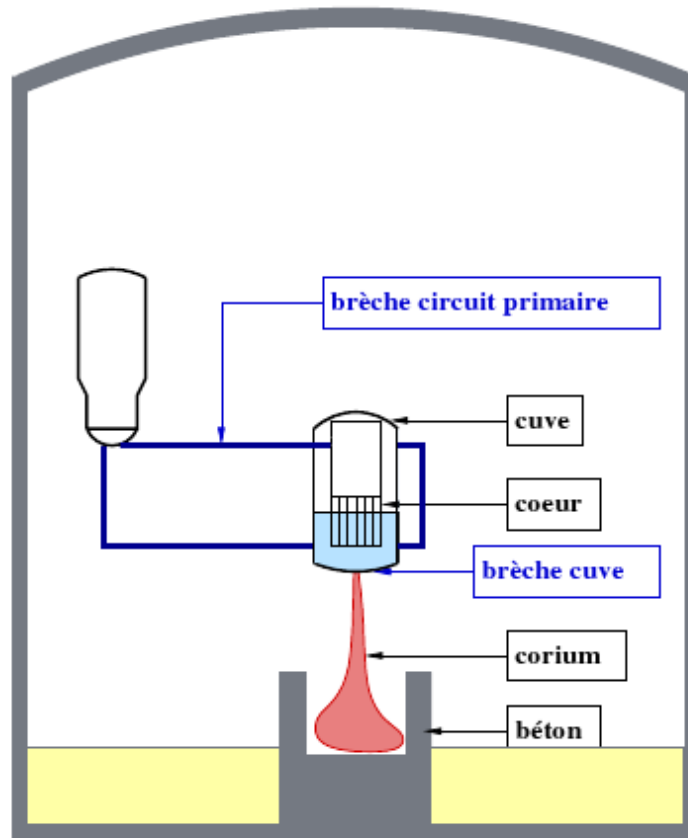


FIGURE 1 – Déversement du corium dans le puits de cuve.

cavité en est fortement affectée ainsi que les modes et temps de percée du puits de cuve (percée axiale ou radiale). De plus, le flux gazeux influence grandement les transferts entre les deux phases (modification des couches limites thermiques, changements topologiques de l'interface oxyde/métal avec entraînement éventuel du métal), pouvant accélérer l'ablation du béton dans une direction (horizontale ou verticale). La quantification de ces échanges reste un problème ouvert qui limite la fiabilité des simulations d'accident actuelles.

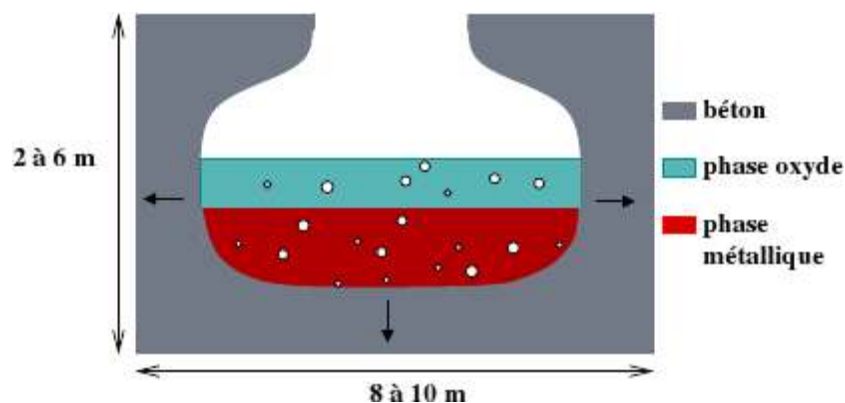


FIGURE 2 – Configuration stratifiée du corium dans le puits de cuve.

L'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN) a souhaité financer cette étude afin de pouvoir décrire l'évolution des topologies des interfaces entre phases métallique et oxyde traversées par un flux gazeux, ou plus généralement, de comprendre l'évolution des interfaces entre deux liquides stratifiés en présence d'un flux de bulles.

## Validation des codes de simulation

Afin de résoudre le problème d'approche et de traversée de bulles vers une interface liquide-liquide, l'IRSN dispose d'un code de simulation numérique directe baptisé PELICANS et basé sur un modèle à interfaces diffuses Cahn-Hilliard / Navier-Stokes discrétisé selon une méthode d'éléments finis. Ce modèle a été développé au cours des thèses de Lapuerta [39] et Minjeaud [55] au sein du Laboratoire d'étude de l'Incendie et de développement de Méthodes pour la Simulation et les Incertitudes (LIMSI) et a déjà été soumis à plusieurs tests qualitatifs dans des configurations diphasiques et triphasiques. La validation quantitative des simulations numériques triphasiques demeure donc au cœur de cette étude.

Ce projet entièrement financé par l'IRSN a été réalisé à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT) qui possède un ensemble de compétences théoriques, numériques et expérimentales sur les écoulements à bulles. L'IMFT dispose en particulier de caméras rapides et de chaînes de Vélocimétrie par Images de Particules (PIV) permettant d'acquérir les images de l'évolution de bulles et gouttes dans des configurations triphasiques. Ce laboratoire a également développé son propre code de simulation numérique directe, baptisé JADIM, basé sur une approche de capture d'interface et une discrétisation en volumes finis. L'analyse d'écoulements triphasiques à partir de ce code a déjà fait l'objet d'une thèse (Cranga [18]) et a été brièvement abordée dans une autre (Bonometti [4]).

Ainsi, l'objectif de cette étude est double. D'une part il vise à comprendre la physique globale du phénomène de la dynamique de bulles au passage d'une interface liquide-liquide, à la fois de manière expérimentale et numérique. D'autre part il s'agit de contribuer à la validation des deux codes de calculs JADIM et PELICANS en les confrontant aux cas expérimentaux faisant référence pour un large éventail de configurations (figure 3).

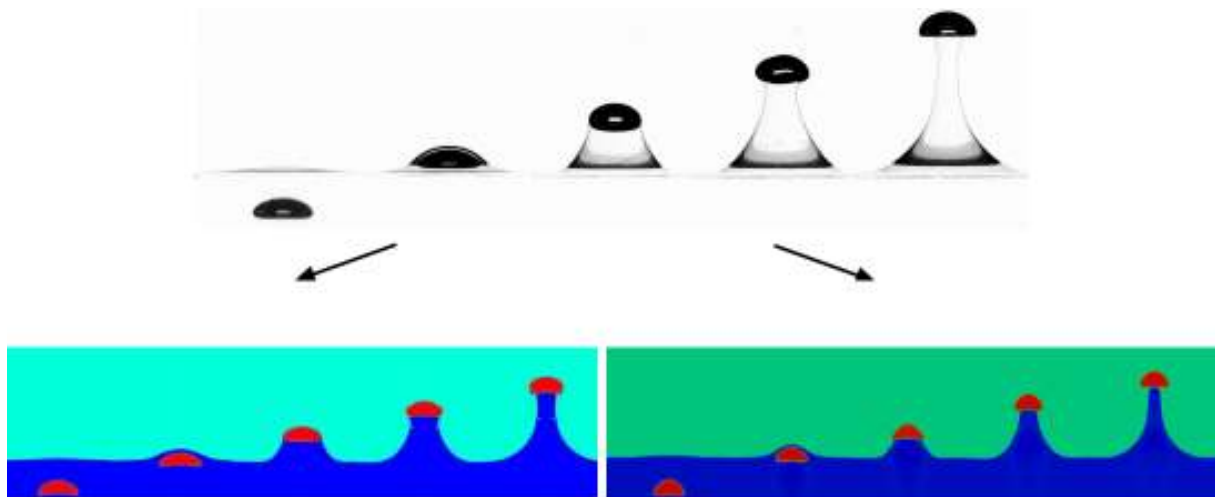


FIGURE 3 – Évolution d'une bulle de volume 0.70 ml à travers une interface séparant une phase inférieure constituée d'un mélange d'eau et de glycérol en concentration massique de 85% d'une phase supérieure constituée d'huile de silicone 47v100. L'écart de temps entre deux images est de 0.057 s. En haut, visualisation de la séquence expérimentale. À gauche, simulation d'une bulle par une méthode de capture d'interface (JADIM). À droite, simulation selon un modèle à interfaces diffuses Cahn-Hilliard / Navier-Stokes (PELICANS).

## Études antérieures d'approche de bulles vers une interface liquide-liquide

Outre le problème ouvert d'accident dans des réacteurs nucléaires décrit précédemment, ces phénomènes de traversée d'une interface par des bulles se rencontrent dans nombre de situations, notamment en ingénierie des procédés. Plusieurs exemples peuvent être cités comme les procédés d'émulsification ou de fabrication d'acier au moyen du procédé de brassage en poche avec injection d'argon dans un mélange bi-couche métal/laitier (Kobayashi [36], Chevrier & Cramb [15]).

Les premières études expérimentales et théoriques de cette configuration triphasique ont porté sur la dynamique du drainage du film de liquide inférieur séparant le haut de la bulle de l'interface liquide-liquide (Princen [61], Princen & Mason [63]). Cette situation a beaucoup été étudiée en tant que problème modèle de la coalescence. Lorsque le problème a commencé à être traité numériquement, c'est la limite des écoulements en régimes de Stokes qui a tout d'abord été considérée afin d'utiliser des méthodes d'intégrales de frontière (Chi & Leal [16], Manga & Stone [48]). Une seule étude à nombre de Reynolds fini semble avoir été menée en résolvant les équations de Navier-Stokes complètes (Shopov & Minev [68]). Toutefois, ces différentes approches ne pouvant pas décrire la rupture du film, seule la phase durant laquelle la bulle approche l'interface liquide-liquide était donc décrite.

Plus récemment, le développement de caméras à haute cadence et de techniques de PIV a permis d'aborder expérimentalement les écoulements à grands nombres de Reynolds en configuration triphasique (Reiter & Schwerdtfeger [64], Kemiha *et al.* [33], Dietrich *et al.* [23]). En particulier, les évolutions des formes des bulles ainsi que de la colonne de liquide lourd entraîné dans la phase supérieure ont été caractérisées dans plusieurs régimes.

Une configuration très proche qui a reçu beaucoup d'attention est celle d'une sphère rigide approchant une interface liquide-liquide initialement horizontale. Ici encore, la motivation de beaucoup d'études résidait dans la compréhension de l'évolution du drainage du film liquide. Le problème a été initialement considéré pour de petites déformations de l'interface liquide-liquide (Smith & Ven [69]). Cependant quelques investigations dans le cas de fortes déformations de l'interface ont également été menées dans la limite des écoulements de Stokes (Leal & Lee [40], Geller *et al.* [27]).

Enfin il est important de mentionner que des systèmes pseudo-triphasiques de configurations similaires ont été étudiés pour comprendre l'entraînement de fluides par des bulles en ascension. Dans ces cas, les deux liquides sont identiques mais la partie basse est marquée par un colorant afin d'évaluer le volume de liquide déplacé. Lorsque l'écoulement est proche d'un écoulement potentiel, le volume de déplacement peut être relié au concept classique de dérive de Darwin (« Darwin drift ») (Eames & Duursma [26], Bush & Eames [12]).

## Structure du mémoire

L'originalité de cette étude réside dans le fait que la dynamique de bulles traversant une interface liquide-liquide est étudiée sur une large plage de régimes expérimentalement, théoriquement, et numériquement par l'intermédiaire de deux codes de simulation directe fondés sur deux approches radicalement différentes. Ces trois approches distinctes apportent par conséquent des réponses complémentaires à l'analyse du phénomène.

Ce mémoire s'articule en deux parties principales. Une première partie décrit les outils expérimentaux, théoriques et numériques (chapitres 1, 2, 3 respectivement). La deuxième partie recense et analyse les résultats établis au cours de ces trois années (chapitres 4, 5, 6).

Le premier chapitre décrit le dispositif et le protocole expérimental mis en place pour l'étude de nombreuses configurations d'évolution de bulles et de gouttes à la traversée d'une interface. De par son système d'injecteurs interchangeable, le dispositif permet l'étude de bulles isolées dans plusieurs régimes (bulles sphéroïdales, ellipsoïdales, toroïdales...) ou encore de trains de bulles de géométrie et fréquence variables. Par ailleurs, six fluides de propriétés différentes sont utilisés, qui ont notamment permis de faire varier les rapports de viscosité entre les liquides de plusieurs ordres de grandeur.

Deux modèles théoriques statiques sont ensuite développés dans le chapitre 2, permettant de prédire l'évolution du système pour des bulles « posées » sur l'interface ou surmontées d'un film de liquide lourd.

Le chapitre 3 décrit les deux approches numériques utilisées dans le code JADIM et la plate-forme PELICANS : alors que la première repose sur une méthode de capture d'interface discrétisée selon une méthode volumes finis, la deuxième dérive du modèle de Cahn-Hilliard étendu aux systèmes triphasiques et utilise une discrétisation basée sur une méthode de Galerkin en éléments finis.

Nos observations expérimentales sont ensuite répertoriées dans le chapitre 4. On observe, entre autres, des situations où les bulles restent piégées à l'interface mais surtout de nombreux cas où les bulles réussissent à traverser l'interface en entraînant derrière elles une colonne de fluide lourd dans le fluide léger. Certaines expériences menées avec des trains de bulles sont également décrites qualitativement.

En ce qui concerne les approches de simulation, les prédictions de chacun des deux codes sont comparées à celles issues de méthodes d'intégrales de frontière (« Boundary Integral Method ») dans le chapitre 5 afin d'évaluer les erreurs commises dans nos prédictions numériques. Une courte étude confronte également entre eux les deux codes JADIM et PELICANS sur des situations difficilement réalisables expérimentalement.

Enfin, plusieurs configurations expérimentales sont sélectionnées et analysées en détail dans le chapitre 6. Elles sont aussi simulées numériquement dans le double but d'accéder à des grandeurs (vorticité par exemple) ou à des régions (partie concave des bulles par exemple) inaccessibles à l'expérience mais aussi d'appréhender la précision de JADIM et PELICANS dans des situations réelles. Les comparaisons simulation / expérience montrent un très bon accord dans la majorité des cas, mais mettent aussi en lumière les limitations des approches numériques pour reproduire la dynamique des films minces.





## **Première partie**

# **Outils pour l'étude de la dynamique de bulles dans des systèmes triphasiques**



# Chapitre 1

## Méthode expérimentale

Le dispositif expérimental exposé sur les figures 1.1 et 1.2 permet l'étude du passage d'une ou plusieurs bulles à travers une stratification bi-couche de solution aqueuse de glycérol pour la phase inférieure, et d'huile de silicone pour la phase supérieure. Il peut être décomposé en trois parties fonctionnelles distinctes :

- ▷ Le dispositif d'injection de bulles permettant la formation d'une ou plusieurs bulles de volumes différents, la formation de trains de bulles de fréquences variables.
- ▷ La colonne d'essais qui renferme les liquides et où se déroule l'ascension des bulles.
- ▷ Le système de visualisation prévu pour enregistrer le phénomène par caméras haute cadence.



FIGURE 1.1 – Colonne d'essais filmée par une caméra rapide PCO1200 HS.

### 1 La colonne d'essai

La colonne d'essai renfermant le mélange stratifié est de section carrée, de dimensions  $20 \times 20 \times 40 \text{ cm}^3$ , composée de deux faces en verre classique et deux faces en verre de qualité optique B 270 Superwite<sup>®</sup>. Les caractéristiques de ce verre B 270 Superwite<sup>®</sup> destiné à limiter les aberrations optiques lors de l'acquisition d'images sont référencées en annexe 1.

Par ailleurs, chacune des faces de la colonne est traitée avec un composé hydrophobe Rain-X<sup>®</sup> dans sa partie supérieure dans le but d'obtenir une interface liquide-liquide totalement plane. En effet, l'importance

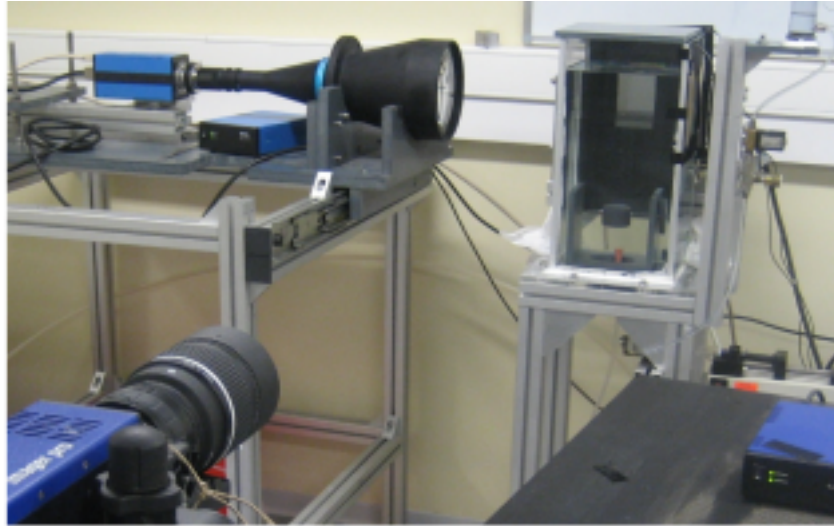


FIGURE 1.2 – Visualisation frontale et latérale de la colonne d’essai intégrant le dispositif d’injection avec demi-coque.

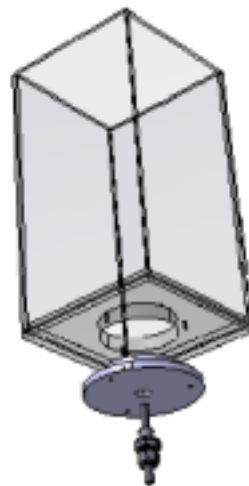


FIGURE 1.3 – Schéma de la colonne d’essai.

du ménisque issu du mouillage eau / huile / verre non traité empêche toute visualisation tangente à l’interface comme exposé sur la figure 1.4. Le ménisque peut remonter jusqu’à 1 cm de hauteur pour certains couples de liquides et les bulles millimétriques sont alors invisibles.

En ce qui concerne l’assemblage des différents éléments, le silicone étant attaqué par l’huile de silicone, il est nécessaire d’utiliser une colle à ultraviolets pour la jonction des parois latérales. Le socle, a contrario, est lié aux parois latérales grâce à des joints en silicone puisque seulement en contact avec une phase aqueuse. Ce socle est en PMMA ; il intègre le système d’injection (figure 1.3).

La colonne est destinée à contenir un mélange bi-couche de phase aqueuse de hauteur 30 cm, et de phase huileuse plus légère de hauteur comprise entre 4 et 6 cm. Après chaque série de mesures et tous les deux jours au maximum, les liquides purs sont retirés de la colonne grâce à un siphon et entreposés dans des bidons hermétiques. Les résidus de liquides dans la cuve sont jetés, la colonne est ensuite nettoyée avec un produit ménager de type liquide à vaisselle, rincée à l’eau du robinet une dizaine de fois pour ensuite être essuyée à l’aide d’un chiffon sec.

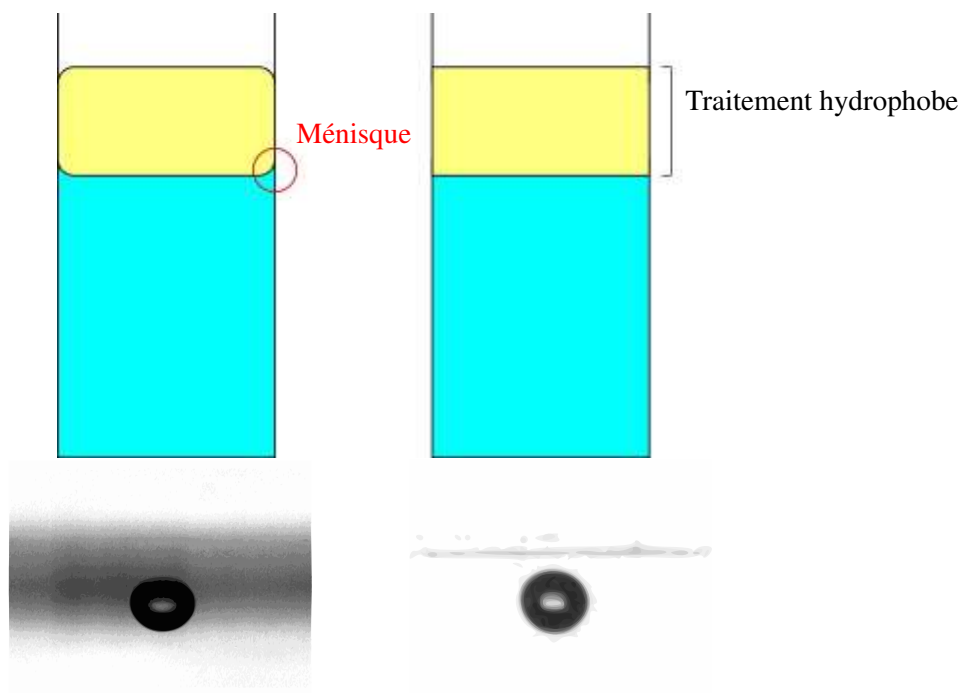


FIGURE 1.4 – À gauche, verre brut et formation d’un ménisque. À droite, verre traité avec une solution hydrophobe dans la partie supérieure. Les bulles sur les images du bas, à l’approche d’une interface liquide-liquide (eau / huile 47V10), ont toutes deux un volume de 0.02 ml.

## 2 Les systèmes d’injection

Le socle de la colonne d’essai possède une partie amovible destinée à intégrer les différents systèmes d’injection. Une vue éclatée de celui-ci est exposée sur la figure 1.3. Il permet une interchangeabilité aisée des dispositifs d’injection. À l’heure actuelle, trois systèmes différents sont utilisés :

- ▷ un système d’injection avec pousse-seringue
- ▷ un système avec demi-coque
- ▷ un système d’injection par buses avec air comprimé.

Afin de contrôler précisément le volume des bulles d’air isolées de taille moyenne (inférieure à 1 cm de diamètre) le dispositif avec pousse-seringue est privilégié. Au-delà, notamment pour des bulles en forme de calotte sphérique, le système avec demi-coque est utilisé car il évite la fragmentation du gaz en sortie d’injecteur. Le dispositif d’injection avec air comprimé est quant à lui uniquement utilisé pour la formation de trains de bulles.

### Système d’injection avec pousse-seringue

Le premier dispositif d’injection est destiné au contrôle précis du volume d’air injecté. Un schéma de ce dispositif est montré sur la figure 1.5. Il est composé d’un pousse-seringue monocanal KD Scientific KDS100 (annexe 2) surmonté d’une seringue remplie d’air qui est elle-même directement reliée au circuit liquide de la cuve. Après injection du volume adéquat de gaz alors emprisonné dans le tube à destination de la colonne, le liquide est mis en mouvement grâce à une surpression lors de l’ouverture d’un réservoir situé en hauteur. L’air poursuit son trajet le long du tube pour arriver enfin sous forme de bulle dans le liquide lourd du mélange bi-couche. Le volume de liquide injecté est négligeable devant le volume de la cuve et aucun impact sur la hauteur de l’interface liquide n’est détecté sur les caméras enregistrant l’évolution du phénomène.

Avec ce dispositif, les bulles formées peuvent avoir des diamètres équivalents (diamètre d’une bulle sphérique de même volume) compris entre 1 mm et 1 cm.

Trois seringues sont utilisées sur le pousse seringue :

- ▷ une microseringue Gastight série 1700 de volume 50  $\mu\text{l}$
- ▷ une microseringue Gastight série 1000 de volume 1 ml
- ▷ une microseringue Gastight série 1000 de volume 10 ml.

La première seringue est utilisée pour la formation des bulles de diamètres équivalents de 1 mm à 3 mm. La seconde, pour des diamètres équivalents de 2 mm à 7 mm. Enfin la dernière, pour des diamètres de 4 mm à 20 mm. Chaque seringue possède un piston en acier partiellement revêtu en PTFE, de longueur 51 mm, équipé d'un joint de précision en PTFE. Les pièces en contact avec l'échantillon sont en verre borosilicaté et/ou en PTFE, l'embout est de type « Luer Lock ».

Ce système fournit un excellent contrôle du volume des bulles injectées, et donc de la répétabilité des expériences. Cet aspect sera discuté ultérieurement (section 7).

### Système d'injection avec demi-coque

Le système d'injection avec demi-coque, ou demi-sphère, dont le schéma est représenté sur la figure 1.5, permet la formation de bulles de taille importante dont les diamètres équivalents peuvent dépasser 1 cm. Il consiste à rajouter au système avec pousse seringue décrit précédemment, un dispositif de demi-coque inspiré de l'expérience de Davies & Taylor [20]. Ce dispositif se compose d'une cuiller d'un diamètre intérieur de 60 mm pouvant tourner autour d'un axe horizontal. L'air est emprisonné dans cette cuiller immédiatement après injection dans le liquide lourd, et la cuiller est alors retournée manuellement pour libérer la bulle. Cette dernière prend préférentiellement une forme de calotte sphérique.

### Système d'injection avec buses et air comprimé

Le système d'injection par air comprimé a pour but la formation de trains de bulles de fréquences et géométries variables. Le schéma du dispositif est exposé sur la figure 1.5. Les buses utilisées sont de diamètres intérieurs variables : 0.2 cm, 0.3 cm, 0.6 cm, et 1.0 cm. L'air comprimé n'est toutefois pas directement relié aux buses, il passe au préalable par un détendeur et un régulateur de débit réglables manuellement. La présence d'un retour entre le détendeur et le débitmètre est facultative (régulateur de débit n°4 du schéma de montage) mais préférable car elle fournit une meilleure précision sur la fréquence des trains : elle assure un débit de gaz minimum en sortie d'injecteur, évitant au liquide de s'immiscer dans le capillaire lors de l'échappée d'une bulle.

## 3 Propriétés des liquides

Les liquides utilisés dans cette étude sont de deux natures. Les phases lourdes, aqueuses, sont composées de mélanges de glycérine codex 98% de Gaches Chimie et d'eau non-distillée en différentes concentrations. Les trois mélanges employés préférentiellement sont composés d'eau seule, d'eau mélangée à de la glycérine en concentration massique de 85%, et d'eau mélangée à de la glycérine en concentration massique de 95%. Ces mélanges aqueux ont été choisis dans le but d'obtenir des phases de viscosités respectives de 1, 100 et 500 cP. Aucun traitement particulier n'est appliqué pour l'eau. De ce fait les tensioactifs déjà présents peuvent abaisser la vitesse terminale des petites bulles sphériques en comparaison des prédictions théoriques. Cet aspect sera traité en détail dans la partie validation du dispositif expérimental (section 7).

En ce qui concerne les liquides légers, immiscibles et inertes en présence des phases aqueuses décrites ci-dessus, l'emploi d'huiles de silicone s'est imposé. Trois huiles, 47V10, 47V100 et 47V500 Gaches Chimie ont été principalement employées, de viscosités respectives avoisinant les 10, 100 et 500 cP.

Les propriétés physiques de l'ensemble de ces liquides sont répertoriées dans le tableau 1.1 et ont été déterminés dans une pièce climatisée à une température de  $20 \pm 1^\circ\text{C}$  *i.e.* dans les mêmes conditions que les expérimentations de cette étude. Les viscosités ont été mesurées grâce à un viscosimètre Bohlin de type cône/plateau, les tensions de surface à partir d'un tensiomètre à lame de Wilhelmy. Les tensions interfaciales entre les différents liquides ont été déterminées grâce à tensiomètre Kruss DSA100 par méthode de la goutte

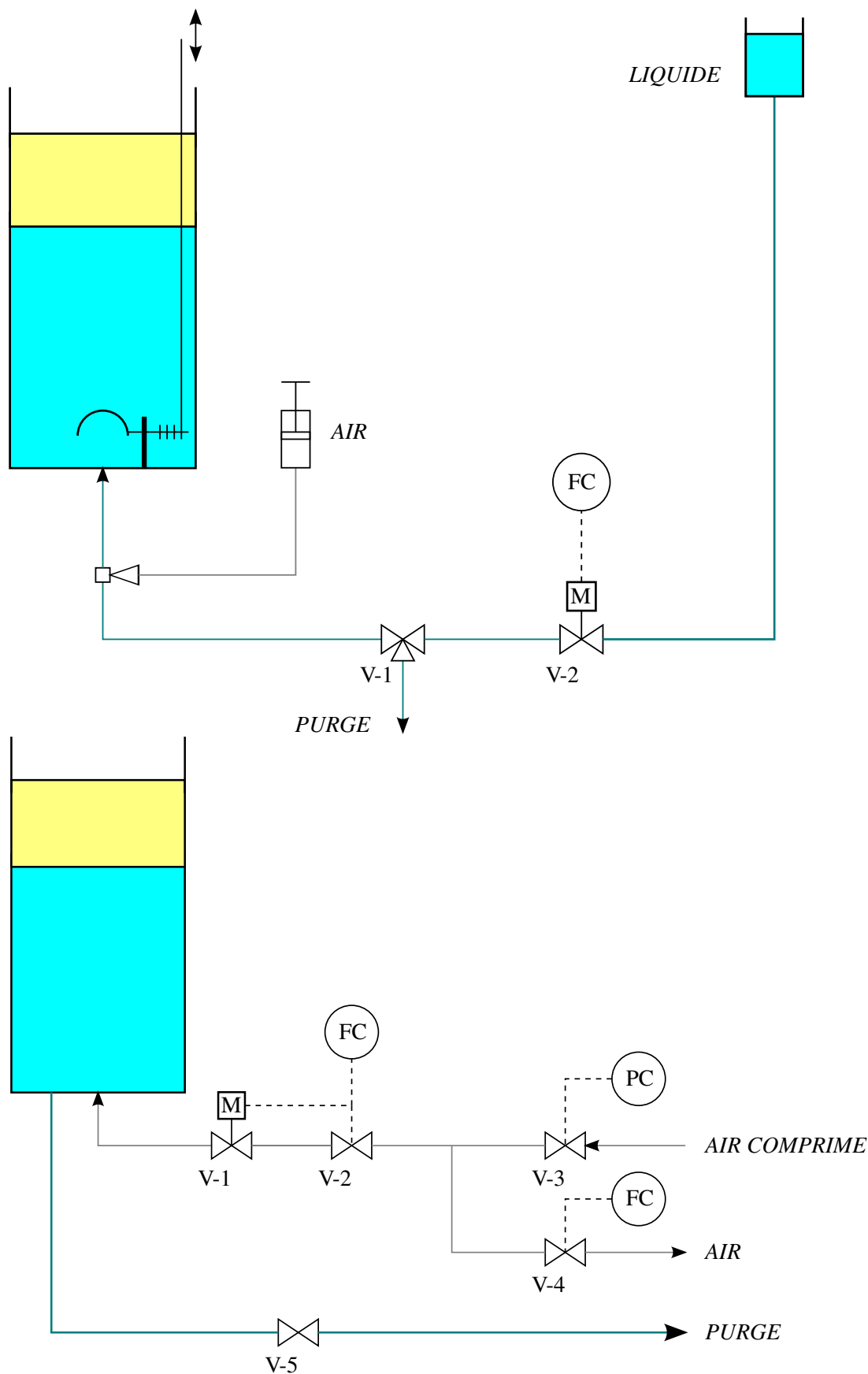


FIGURE 1.5 – Schéma de montage du dispositif avec pousse-seringue (en haut) et illustration du système de demi-coque. Schéma du dispositif avec air comprimé (en bas).

pendante (une image de goutte pendante est représentée sur la figure 1.6 pour un couple eau-glycérine 95% / huile 47V10). Les masses volumiques ont été déterminées en pesant 100 ml de liquide contenu dans une fiole jaugée, la précision de la balance étant de 0.1 g.

Les incertitudes sur les viscosités sont de 5% pour les huiles les moins visqueuses, mais décroissent en fonction de la viscosité. Les tensions interfaciales recèlent une incertitude de  $1.5 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ , ce qui correspond à une erreur relative comprise entre 2% pour le système air/eau, et 11% pour le système eau/huile 47V100. Les incertitudes sur les masses volumiques sont minimales avec moins de 0.1% en erreur relative.



FIGURE 1.6 – Détermination des tensions interfaciales par méthode de la goutte pendante. Ici, visualisation d’une goutte extraite du mélange eau-glycérine 95% plongée dans une huile de silicone 47V10.

Liquide	Masse volumique ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	Viscosité ( $\text{mPa} \cdot \text{s}$ )	Tension de surface ( $\text{mN} \cdot \text{m}^{-1}$ )
Eau	997	1.002	69.4
Glycérine 85% + eau	1211	102.6	48.7
Glycérine 95% + eau	1244	550.1	45.2
Huile 47V10	932	9.6	20.2
Huile 47V100	961	113.8	20.7
Huile 47V500	965	530.7	21.0

Tensions interfaciales ( $\text{mN} \cdot \text{m}^{-1}$ )	Huiles de silicone		
	Huile 47V10	Huile 47V100	Huile 47V500
Eau	19.7	14.3	13.7
Glycérine 85% + eau	28.8	30.0	29.9
Glycérine 95% + eau	27.8	27.1	28.0

TABLE 1.1 – Propriétés mesurées des liquides à  $20 \pm 1^\circ \text{C}$ .

## 4 Le dispositif de visualisation pour l’ombroscopie

Afin d’obtenir une vision tridimensionnelle de l’écoulement, deux caméras sont positionnées perpendiculairement aux faces frontales et latérales de la cuve, comme schématisé sur la figure 1.7. Ces caméras proviennent de la gamme Photon Lines PCO1200 HS de résolution  $1024 \times 1280$  pixels. Leurs caractéristiques sont données en annexe 3. Elles sont synchronisées à 350 images par seconde. La caméra frontale qui fait office de référence est connectée à un objectif télécentrique Opto Engineering TC 4M 120, décrit en annexe 4, dans le but d’amenuiser les distorsions. La caméra latérale est quant à elle connectée à un objectif 150 mm ainsi qu’à un doubleur de focale afin de reproduire la visualisation de la première caméra, faute d’avoir obtenu dans les délais un deuxième objectif télécentrique. Le système a été calibré afin que chaque optique détecte un champ fixe de  $108.9 \times 87.2 \text{ mm}^2$ .

Par ailleurs, de par le fort contraste d’indices de réfraction entre les différents milieux, une technique de visualisation par phénomène d’ombroscopie est préférable. Les deux « backlights » éclairant la scène à cet effet sont positionnés de part et d’autre de la cuve, et ajustés pour que les caméras reçoivent la même intensité d’éclairage. Les caractéristiques du système complet sont données dans le tableau 1.2.



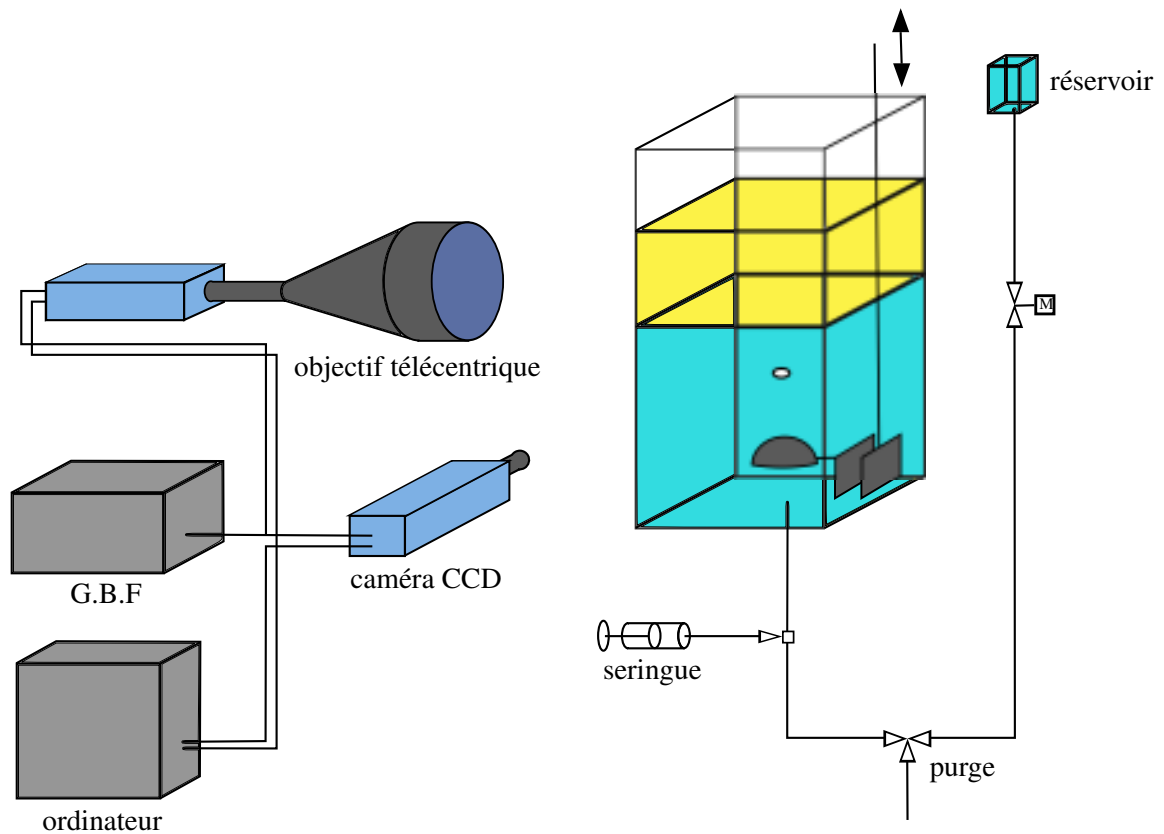


FIGURE 1.7 – Schéma du dispositif complet avec système d'injection par demi-coque.

	Visualisation frontale	Visualisation latérale
Caméra	PCO1200 HS	PCO1200 HS
Objectif	Télécentrique TC 4M 120	Objectif 150 mm + doubleur de focale
Distance de travail	0.03 m	2 m
Résolution	1024 × 1280 pixels	1024 × 1280 pixels
Fréquence	350 fps	350 fps
Exposition	0.5 ms	0.5 ms
Ouverture	f/16	f/16
Dimension backlight	20 × 20 cm <sup>2</sup>	10 × 10 cm <sup>2</sup>
Intensité backlight	1 A	0.8 A

TABLE 1.2 – Caractéristiques du système de visualisation par ombroscopie.

## 5 Le dispositif de visualisation pour la PIV

Afin de déterminer le champ de vitesse dans les différents liquides, une chaîne de Vélocimétrie par Images de Particules (PIV) est mise en place. Le principe consiste à ensemencer de particules fortement lumineuses les fluides du dispositif et à suivre image par image leurs évolutions. La vitesse des particules déduite de deux images consécutives donne une bonne approximation de la vitesse des particules fluides en ces points sous réserve que la fréquence d'acquisition des images soit suffisamment élevée pour négliger la vitesse de sédimentation des particules.

Le dispositif PIV consiste en un laser Pegasus-PIV de New Wave Research, de puissance  $2 \times 10 \text{ mJ}$  à 1 Hz, émettant une nappe laser verticale de longueur d'onde 527 nm qui traverse la colonne d'essai. Les particules d'ensemencement qui réémettent cette lumière sont des molécules de rhodamine B encapsulées dans du polystyrène, de tailles comprises entre 1 et  $20 \mu\text{m}$ . Le système est filmé à une cadence de 500 images par secondes par une caméra Photron FASTCAM-Ultima APX-RS. Une fiche complète de la chaîne de PIV est donnée dans les annexes 5, 6 et 7.

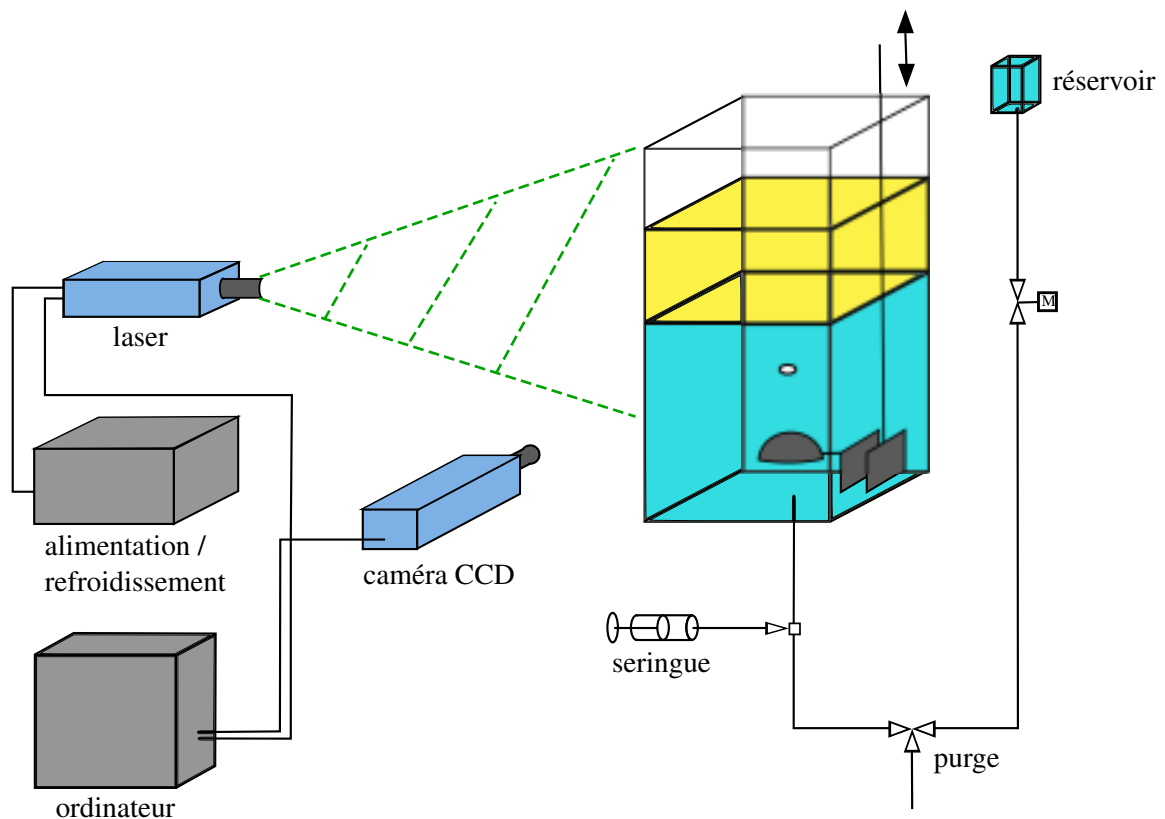


FIGURE 1.8 – Schéma du dispositif avec chaîne de Vélocimétrie par Images de Particules (PIV).

## 6 Traitement d'images

### 6.1 Étapes du passage de bulles isolées à travers une interface liquide-liquide

Afin de comprendre les mécanismes de traitements d'images, il est nécessaire de discerner auparavant les différentes étapes du passage de bulles à travers une interface liquide-liquide. Un cas d'exemple est exposé sur la figure 1.9. Après l'injection de gaz dans le liquide inférieur, l'évolution du système peut se décomposer en quatre étapes principales :

- 1 ascension des bulles dans le liquide inférieur
- 2 approche des bulles vers l'interface liquide-liquide et drainage du film de liquide lourd séparant le gaz et le liquide léger
- 3 si les bulles ne restent pas piégées à l'interface, il y a extraction de celles-ci dans le liquide supérieur avec possibilité d'entraînement de liquide inférieur
- 4 descente de la colonne avec possibilité de rupture en gouttelettes, et ascension libre (ou suivie par une goutte pendant un temps) des bulles dans le liquide léger.

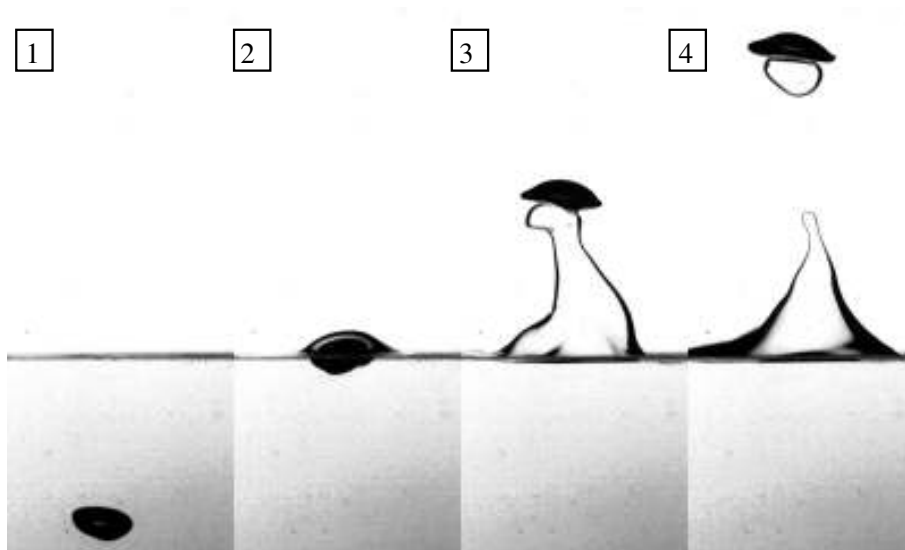


FIGURE 1.9 – Étapes de la traversée d'une bulle de 7 mm de diamètre équivalent à travers une interface eau / huile 47V10. Temps entre deux images : 0.11 s

Lors de la première étape, les bulles en ascension dans le liquide inférieur sont suffisamment éloignées de l'interface liquide-liquide pour ne pas subir l'influence de cette dernière. Les bulles peuvent, par conséquent, être considérées comme évoluant dans un seul fluide. Les quantités qui sont d'intérêt dans cette étude sont les formes et positions des bulles (ou les vitesses qui en découlent). Dans le but de quantifier ces formes, une décomposition en polynômes de Legendre du contour détecté est établie et dont les détails sont divulgués ultérieurement dans cette section. Les positions de références concernent les centres de masse et/ou le sommet des bulles.

Pour la deuxième étape, l'influence de l'interface liquide-liquide est évidente, et le drainage du film liquide est de premier intérêt. Hormis les formes et positions des bulles qui étaient essentielles dans l'étape précédente, la hauteur de liquide lourd est également d'importance. En effet, la conjonction de ces informations fournit l'épaisseur de liquide lourd compris entre les bulles et le fluide léger selon l'axe vertical. Toutefois en pratique, cette épaisseur étant très fine, elle sera peu étudiée en deçà d'une valeur de 0.3 mm du fait des fortes incertitudes sur les positions : les incertitudes proviennent non seulement des évaluations des interfaces par le processus de

traitement d'images, mais surtout de la déformation optique lors du changement de phase et donc d'indice de réfraction. Par ailleurs, il est à remarquer que pour de petites bulles sphériques, typiquement de diamètres inférieurs à 3 mm, celles-ci peuvent rester piégées à l'interface liquide-liquide pendant un temps long et le processus de traversée s'arrête à cette deuxième étape sur nos enregistrements vidéo.

Si la troisième étape est atteinte par le système, les bulles s'extrait dans le fluide supérieur grâce au drainage partiel du liquide lourd. À ce moment il est possible qu'elles entraînent à leur suite une colonne de liquide lourd, ce qui survient dans la majorité des cas. Cette étude se contente de décrire cette colonne d'un point de vue géométrique à partir de son volume  $V_e$ , correspondant au volume de liquide lourd déplacé au-dessus de la position initiale horizontale de l'interface liquide-liquide, et de sa hauteur  $h$  définie comme la hauteur du point le plus haut de la colonne en prenant pour origine la position initiale de l'interface liquide-liquide.

Enfin lors de la quatrième étape avec la retombée de la colonne, l'étirement de celle-ci, dont la partie supérieure est entraînée vers le haut par le sillage des bulles et dont la partie inférieure s'affaisse sous son propre poids, est tel que la colonne peut éclater en plusieurs gouttelettes. Ici encore, le volume de liquide lourd déplacé de la colonne et des gouttelettes est de premier intérêt.

## 6.2 Détection et suivi des entités

Les images obtenues en sortie des caméras ont des résolutions de  $1024 \times 1280$  pixels et sont codées sur 16 bits de niveaux de gris en format TIFF. Une routine de post-traitement a été implémentée dans le logiciel Matlab afin de détecter les contours des différentes entités (bulles et liquide lourd entraîné dans la phase supérieure) et de les suivre au cours de l'expérience.

La détection des phases est réalisée par une méthode de seuillage, en prenant soin de choisir une valeur seuil différente pour les bulles beaucoup plus sombres et les gouttes plus claires, afin de séparer la phase gazeuse de la phase liquide. Cette détection par seuillage est réalisée indépendamment sur les deux images synchronisées des deux caméras. Ainsi, chaque image est binarisée comme indiqué sur la figure 1.10 pour donner d'une part les positions de la phase gazeuse, et d'autre part celles de la phase aqueuse.

Les deux images des deux vues sont alors mises en confrontation afin de relier les contours issus d'une même entité selon des critères de position et d'aire détectées (figure 1.11). Bien que deux caméras permettent une visualisation partiellement tridimensionnelle du phénomène, ce nombre restreint de vues ne permet pas d'obtenir une information complète sur l'écoulement. En effet, l'exemple de la figure 1.13 montre qu'une bulle partiellement cachée par une goutte sur une caméra peut induire une incompréhension lors de la routine de post-traitement. Certaines séries expérimentales sont alors partiellement, voire totalement, rejetées lors de cette étape.

Enfin un processus de « tracking » permet un suivi des entités individuellement entre deux prises successives. Ce processus s'appuie sur une minimisation des distances entre les entités détectées ainsi que des volumes que génère leur déplacement. Par ailleurs, une mise en mémoire des informations permet de raccrocher le processus de suivi à une entité temporairement cachée. Le processus de suivi sait donc gérer les phénomènes de

- ▷ disparition-réapparition
- ▷ fragmentation
- ▷ coalescence.

Une illustration de disparition-réapparition est donnée dans la figure 1.12, une fragmentation est illustrée dans la figure 1.11.

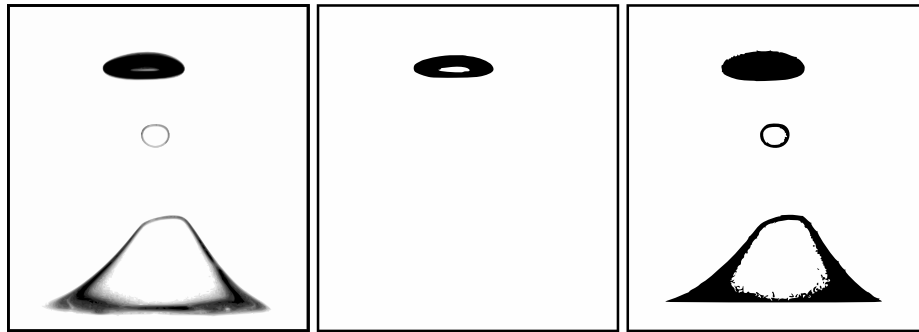


FIGURE 1.10 – Traversée d'une bulle de 5.5 mm de diamètre équivalent à travers une interface eau / huile 47V10. De gauche à droite, image brute, image binarisée de la phase gazeuse par seuillage  $s_1$ , image binarisée de la bulle et colonne par seuillage  $s_2 > s_1$ .

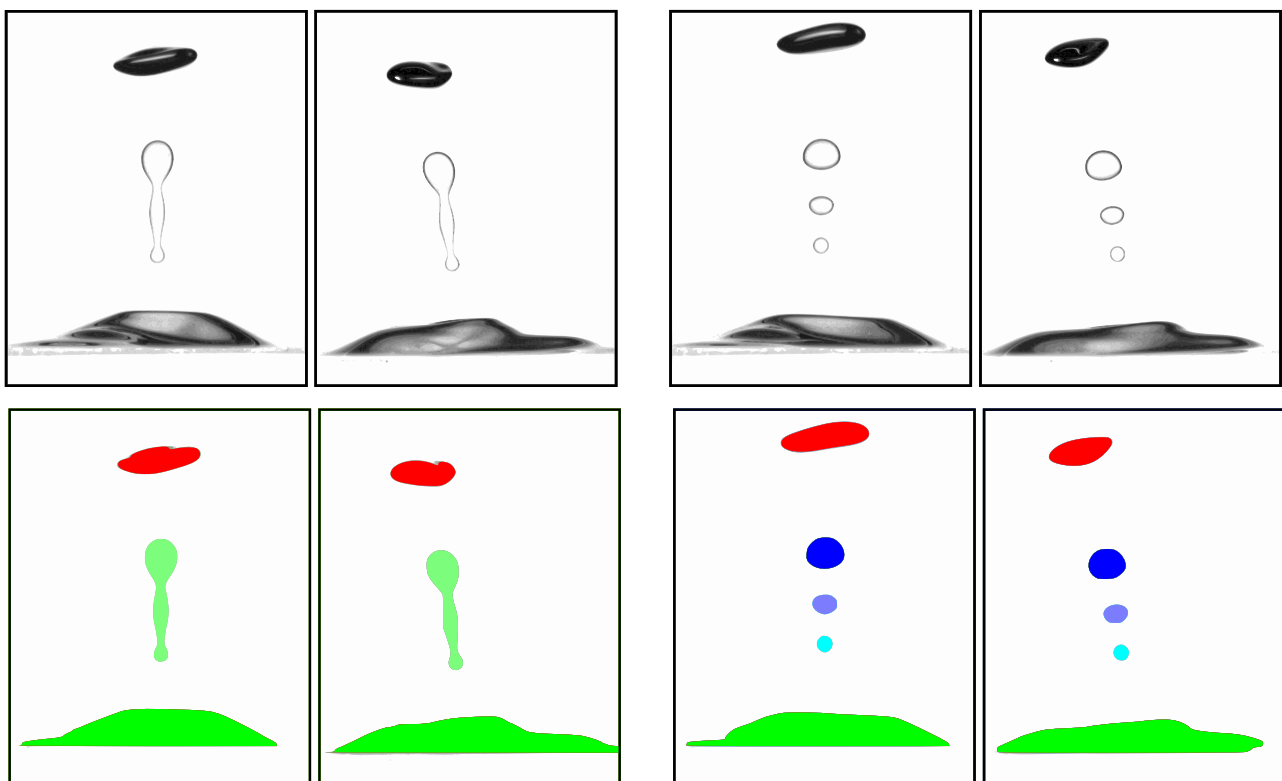


FIGURE 1.11 – Confrontation des deux vues et séparation des entités, pour une bulle d'un diamètre équivalent de 13 mm à la traversée d'une interface eau / huile 47V10. En haut sont exposées les images brutes, en bas les images en sortie de post-traitement. L'écart de temps entre les deux détections gauche et droite est de 0.0143 s.

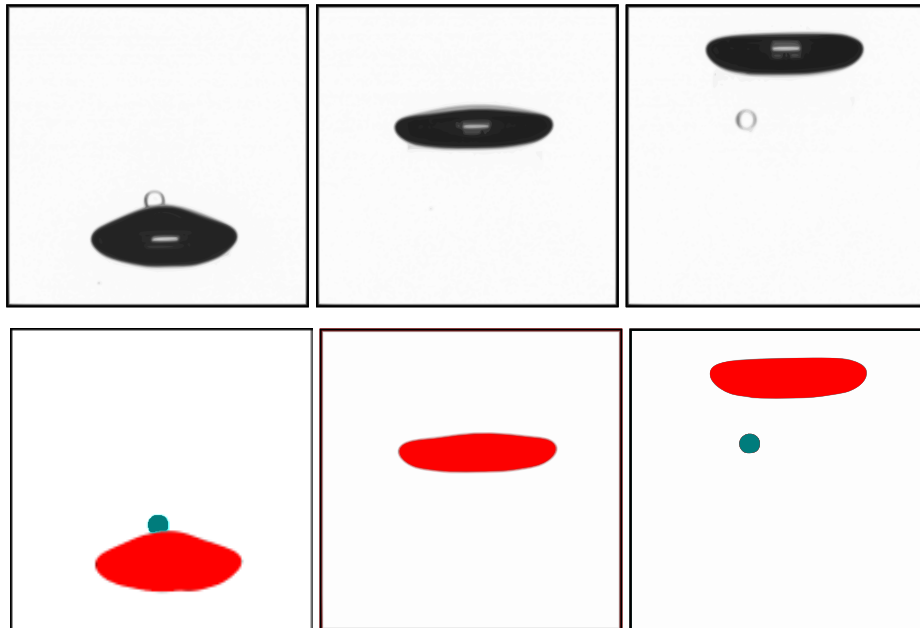


FIGURE 1.12 – Tracking d’une goutte avec disparition sur l’image intermédiaire (la goutte est cachée par une bulle d’un diamètre équivalent de 5.5 mm). L’écart de temps entre deux images est de 0.02 s.

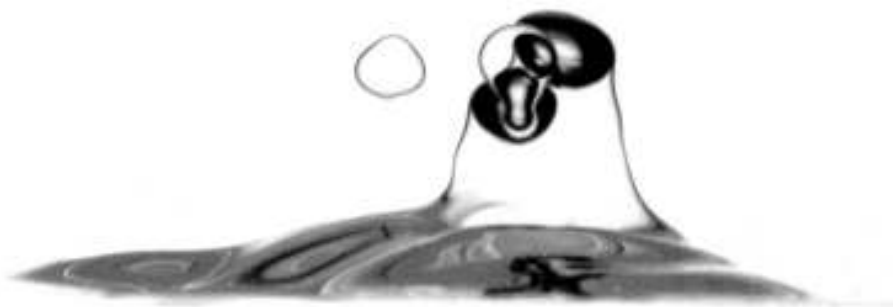


FIGURE 1.13 – Possibilité de manque d’information sur une séquence. Dans cette situation, les bulles d’un diamètre équivalent de 6 mm environ sont cachées par une goutte, ce qui empêche la reconstruction des entités. Les oscillations de la base de la colonne sont également trop importantes pour permettre un calcul correct du volume de liquide lourd entraîné : certaines parties ne sont pas observables.

### 6.3 Post-traitement : volumes et positions

#### Bulles et gouttes non toriques

Les contours des bulles et gouttes étant donnés à partir de deux vues différentes, deux coupes transversales distinctes sont à analyser. Une hypothèse de symétrie est donc nécessaire dans le but d'une reconstruction des interfaces et d'un calcul de volume. L'hypothèse la plus simple est de considérer les coupes longitudinales elliptiques, comme montrées sur la figure 1.14. Seul le sommet des entités est toujours repérable avec une vue de côté et ne souffre pas de cette hypothèse. Les études qui suivront feront par conséquent majoritairement intervenir le sommet des bulles.

Le volume d'une bulle ou de la phase aqueuse est calculé par addition de volumes élémentaires cylindriques de base elliptique, de hauteurs 1 pixel, et ayant pour grand et petit axes les longueurs détectées des images binarisées. Par exemple, si à même hauteur la caméra frontale détecte une largeur de 50 pixels et la caméra latérale une largeur de 40 pixels, le volume élémentaire est alors un cylindre elliptique de hauteur 1 pixel, de grand axe 50 pixels et de petit axe 40 pixels.

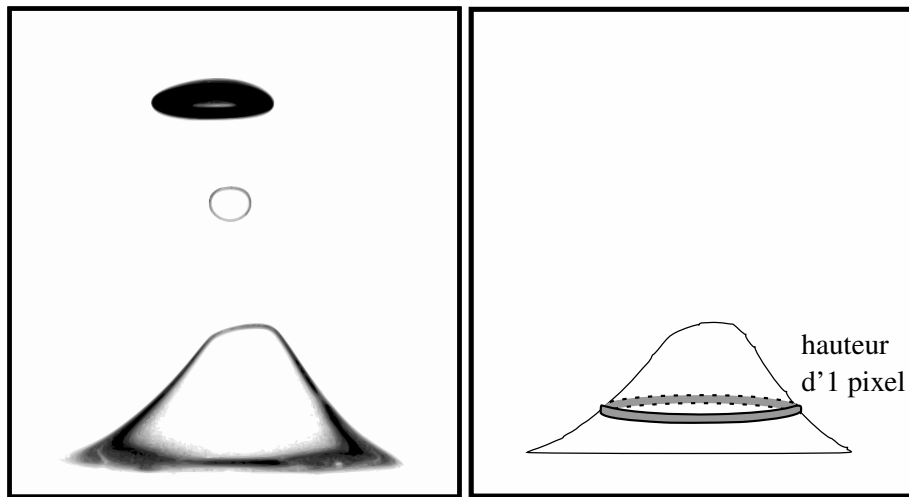


FIGURE 1.14 – Reconstruction de la colonne liquide. Les coupes horizontales sont considérées elliptiques. La surface apparente d'un volume élémentaire cylindrique est représentée en gris.

**Remarque.** Dans le cas où une entité n'est détectée que sur une seule caméra, une hypothèse de sphéricité est obligatoire.

#### Bulles et gouttes toriques

Dans le cas d'une bulle de forme torique, la partie intérieure est entièrement cachée car aucune vue plongeante n'est disponible. Les paramètres connus sont le périmètre extérieur  $\mathcal{P}$ , la surface apparente  $\mathcal{S}$ , ainsi que le volume injecté  $\mathcal{V}$ . On peut alors essayer d'approcher la forme réelle par un tore parfait simplement caractérisé par deux paramètres géométriques. En notant  $a$  le rayon du coeur du tore et  $R$  le rayon de l'anneau, schématisés sur la figure 1.15, le périmètre détecté s'exprime alors par :

$$\mathcal{P} = 2\pi a + 4R, \quad (1.1)$$

la surface latérale apparente par :

$$\mathcal{S} = \pi a^2 + 4Ra, \quad (1.2)$$

et le volume du tore par :

$$\mathcal{V} = 2\pi^2 a^2 R. \quad (1.3)$$

Cherchant  $a$  et  $R$ , la première intuition est d'utiliser les expressions (1.2) et (1.3) des volume et surface apparente, car ces grandeurs fluctuent peu au cours du temps. Ceci fournit un système d'inconnues  $a$  et  $R$  liées notamment par la relation

$$\mathcal{V}\mathcal{S}^{-\frac{3}{2}} = 2\pi^2 \frac{R}{a} \left( \pi + 4 \frac{R}{a} \right)^{-3/2}. \quad (1.4)$$

Malheureusement, une faible erreur de mesure sur le volume injecté peut induire une forte variation des solutions. Par exemple, dans l'expression (1.4), si  $\mathcal{V}\mathcal{S}^{-\frac{3}{2}}$  est égal 1, le rapport de forme  $R/a$  vaut 3, tandis que  $R/a$  vaut 1.5 si  $\mathcal{V}\mathcal{S}^{-\frac{3}{2}}$  est égal 1.071. Ainsi une erreur de 7% sur le volume peut engendrer une erreur de 100% sur les rapports de forme.

Ne pouvant exclure des erreurs sur le volume d'une bulle torique à cause de phénomènes secondaires de fragmentation lors de la formation de la bulle initiale, une autre approche a été privilégiée, combinant périmètre et surface détectés. Les équations (1.1) et (1.2) donnent ainsi les solutions

$$\begin{cases} R = \frac{1}{4} \sqrt{\mathcal{P}^2 - 4\pi\mathcal{S}} \\ a = \frac{\mathcal{P} - \sqrt{\mathcal{P}^2 - 4\pi\mathcal{S}}}{2\pi}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Cette détermination en fonction de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{S}$  s'est avérée beaucoup moins sensible à de faibles variations de quantités.

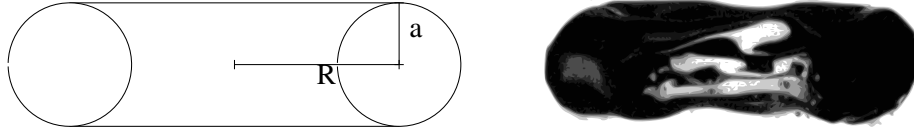


FIGURE 1.15 – Géométrie d'un tore en vue de profil, à gauche. Bulle torique de volume 2.5 ml dans de l'eau à droite.

#### 6.4 Post-traitement : décomposition des formes de bulles en modes de Legendre

Dans le but de quantifier l'évolution de formes des bulles lors de l'approche puis de la traversée de l'interface liquide-liquide, il est nécessaire de décomposer les contours détectés en éléments simplifiés. Pour ce faire, une décomposition en modes de Legendre est réalisée, inspirée de la méthode décrite par Duineveld dans sa thèse « Bouncing and coalescence of two bubbles in water » [25]. Seuls les six premiers coefficients de la décomposition sont gardés, notés  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  et  $a_5$ , associés aux six premiers polynômes  $P_i, i = 0...5$ . Les cinq premiers modes associés sont représentés dans la figure 1.16. Dans certains cas, les formes de bulles observées sont décrites en se limitant aux premiers modes de déformation, afin d'obtenir une représentation simple des formes rencontrées.

À partir de la détection du contour d'une bulle par méthode de seuillage, une première approximation du barycentre de cette même bulle est calculée selon les formules

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{1}{N_c} \sum_{n=1}^{N_c} X_n, \\ Y_c &= \frac{1}{N_c} \sum_{n=1}^{N_c} Y_n \end{aligned} \quad (1.6)$$

où  $N_c$  est le nombre total de points détectés sur le contour,  $(X_i, Y_i)$  les coordonnées d'un point du contour, et  $(X_c, Y_c)$  les coordonnées du barycentre. Ce contour peut alors être repéré en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  avec pour origine du repère les coordonnées barycentriques  $(X_c, Y_c)$  calculées précédemment. Le rayon  $r$  étant une



fonction périodique de  $\theta$  de période  $\pi$  dans le cas de bulles axisymétriques,  $r(\theta)$  peut s'écrire par décomposition en polynômes de Legendre sous la forme :

$$r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\sin \theta) \quad (1.7)$$

où  $P_n$  est le  $n^{\text{ème}}$  polynôme de Legendre. Les coefficients  $a_n$  sont ainsi calculés à partir du système d'équations issu de la détection de contour. Toutefois, seuls sont gardés les premiers modes, jusqu'au mode 5, afin de lisser la forme la bulle. Le nouveau rayon  $R$  est alors exprimé sous la forme

$$R(\theta) = \sum_{n=0}^5 a_n P_n(\sin \theta). \quad (1.8)$$

Le terme  $a_0$  représente donc le volume de la bulle étudiée et présente peu d'intérêt pour notre étude puisque généralement constant au cours du temps. Le coefficient  $a_1$  représente quant à lui le déplacement du contour par rapport à l'origine du repère ;  $a_1$  est donc nul en théorie. Cependant en pratique, le nombre de points détectés étant fini, une erreur est réalisée sur le calcul du barycentre, et  $a_1$  n'est pas égal à zéro. Une première approximation donnée à partir de la formule

$$r(\theta) \simeq R(\theta) - a_1 P_1(\sin \theta), \quad \forall \theta \quad (1.9)$$

permet d'améliorer la précision sur le centre du repère grâce à l'expression

$$(x - X_c)^2 + (y - Y_c)^2 = [R(\theta) - a_1 P_1(\sin \theta)]^2, \quad \forall x, y \text{ sur le contour}. \quad (1.10)$$

(1.10) fournit ainsi un nouveau centre de coordonnées  $(X_{c,2}, Y_{c,2})$  où le coefficient  $a_1$  est plus faible. Le procédé est itéré jusqu'à la précision désirée. Dans cette étude, une précision sur  $a_1/a_0$  inférieure à 0.01 a été choisie, ce qui correspond à moins d'une dizaine d'itérations.

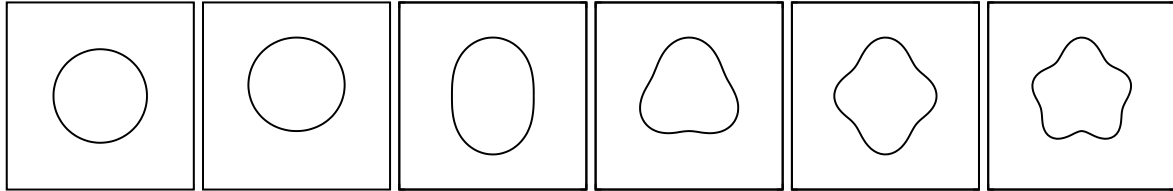


FIGURE 1.16 – Modes de Legendre. Dans les six cas  $a_0 = 1$ , et de gauche à droite : les coefficients  $a_i$  sont nuls pour  $i > 0$ ,  $a_1 = 0.25$ ,  $a_2 = 0.25$ ,  $a_3 = 0.25$ ,  $a_4 = 0.25$ , et  $a_5 = 0.25$ .

## 6.5 Acquisition des champs de vitesse

Les champs de vitesse déterminés à partir de la chaîne de Vélocimétrie par Images de Particules (PIV) sont calculés par le code PIVIS développé à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT). Ce code de calcul est une application spécifiquement destinée au post-traitement de photographies en sortie de chaîne PIV. Il permet le calcul d'un champ de vitesse à partir de deux images successives. Contrairement à des mesures par Particle Tracking Velocimetry (PTV), la densité surfacique de traceurs présents dans les liquides est trop importante pour permettre un suivi individuel des particules. La détermination des déplacements, schématisée sur la figure 1.17, est donc réalisée en considérant un ensemble de particules par reconnaissance de motifs. Pour ce faire, chaque image est découpée en « mailles d'interrogation », de  $16 \times 16$  pixels pour cette étude, et un processus d'intercorrélacion entre les mailles de deux images successives est utilisé. Le pic de corrélation issu de ce processus correspond au déplacement le plus probable des traceurs à l'intérieur d'une maille. Par ailleurs, le rapport entre la valeur du pic de corrélation de plus grande amplitude et le second pic définit le rapport signal sur bruit qui sert d'indicateur de qualité. Dans PIVIS, l'intercorrélacion bidimensionnelle est réalisée dans le plan spectral par une transformée de Fourier rapide, en non par des méthodes directes coûteuses en temps de calcul.

La précision de la position du pic de corrélation est optimisée grâce à un algorithme itératif décrit par Maurel [50] qui consiste à décaler les mailles d'interrogation afin de conserver le maximum de particules communes aux mailles de deux images distinctes. Toutefois, dans les écoulements présentant de forts gradients de vitesse à l'échelle de la maille, la procédure itérative peut diverger en raison d'un mauvais résultat du prédicteur. Pour y remédier, une déformation est appliquée sur l'image lors des différentes itérations. Les détails de ce schéma de déformation sont développés par Lecordier & Trinité [41]. Enfin, dans le but d'augmenter le nombre de points de calcul et donc la précision finale, un maillage supplémentaire est créé avec un taux de chevauchement d'un demi sur les mailles adjacentes.

Une image générée grâce à l'application PIVIS est présentée dans la figure 1.18.

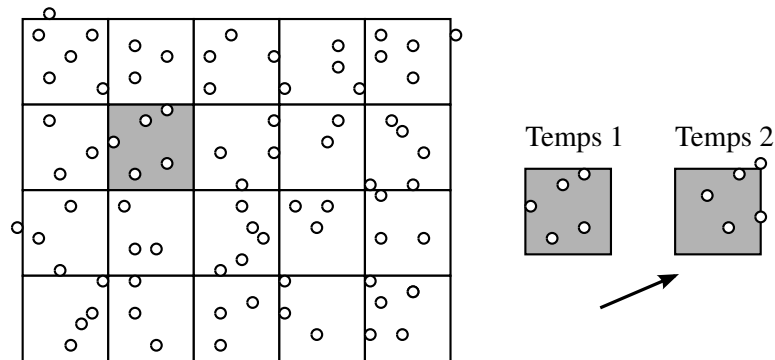


FIGURE 1.17 – Processus d'intercorrélation utilisé par le code PIVIS. En sombre est représentée une aire d'interrogation : le vecteur vitesse résultant sur cette aire est déduit du déplacement des particules traçantes.

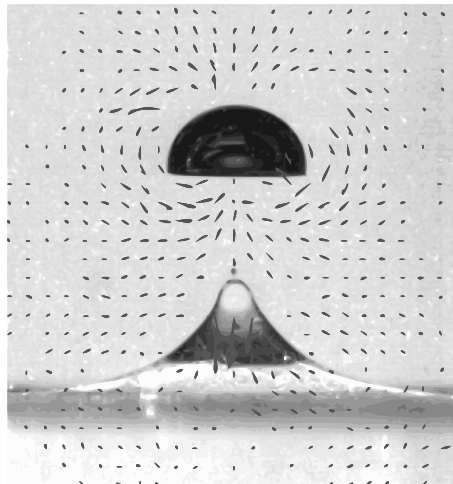


FIGURE 1.18 – Bulle d'un diamètre équivalent de 7 mm à la traversée d'un système composé d'eau+glycérine 95% et d'huile de silicone 47V10. Le champ de vitesse calculé sur l'image brute est issu du logiciel PIVIS.

## 7 Validations du dispositif expérimental

### 7.1 Erreurs de détection

Afin de valider le processus de traitement d'images, deux billes de verre Sigmund Lindner SiLibeads® de diamètres  $1.125 \pm 0.125$  mm et  $2.15 \pm 0.15$  mm sont lâchées dans une huile de silicone 47V100 et filmées par deux caméras rapides. La détection du contour ainsi que le traitement de données qui s'ensuit fournissent en sortie de processus le volume de l'entité étudiée. Les figures 1.19 et 1.20 montrent la position de chacune des billes au cours de leur descente dans l'huile, ainsi que les fluctuations des mesures sur ce volume.

Après traitement d'images, la moyenne temporelle des diamètres détectés est respectivement de 1.11 mm et 2.12 mm. Toutefois, la limite de fiabilité du système est atteinte avec la plus petite, car des écarts de plus de 3% par rapport à la moyenne des diamètres apparaissent. Par conséquent, dans le cadre de cette étude, les diamètres des bulles et gouttes dépasseront rarement le seuil minimal de 2 mm, ce qui correspond à une fluctuation maximale de 1% sur la détection du diamètre équivalent  $d = (6V/\pi)^{1/3}$  pour des bulles et gouttes suffisamment régulières (sphériques, ellipsoïdales, axisymétriques...). Une attention toute particulière est toutefois à préconiser pour des cas plus complexes (bulles oscillantes en mode « wobbling »).

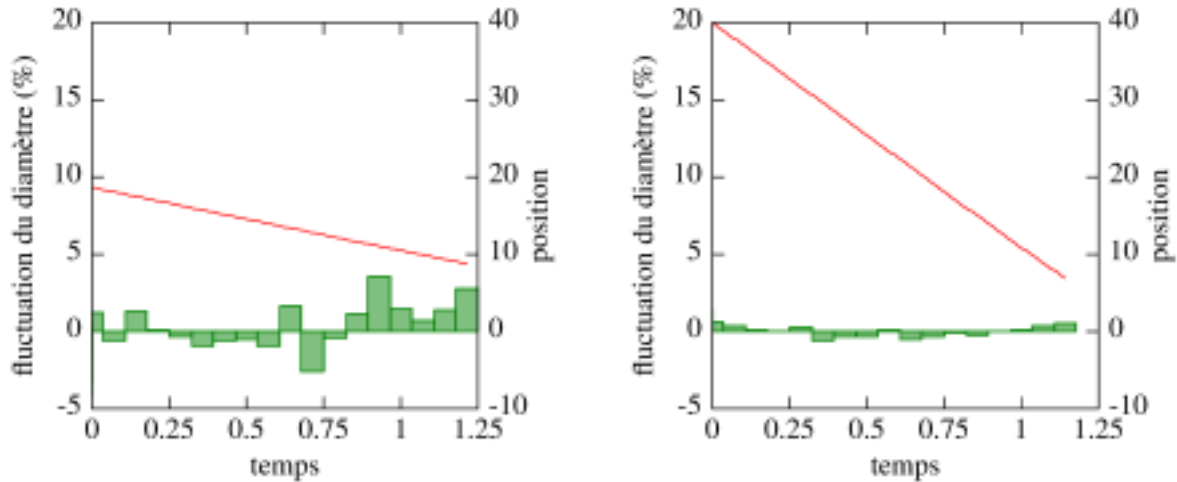


FIGURE 1.19 – Fluctuation du diamètre détecté de deux billes de diamètre équivalent  $1.125 \pm 0.125$  mm à gauche et  $2.15 \pm 0.15$  mm à droite au cours de leur descente dans une huile de silicone 47V100. La position du centre de masse est référencée en trait plein, les barres d'erreurs montrent les fluctuations des diamètres.

Pour s'assurer du bien fondé des mesures précédentes, les vitesses de chute des deux billes sont comparées avec les prédictions de la corrélation de Schiller & Naumann décrite par Clift *et al.* [17]. En égalant traînée et poids apparent, cette corrélation prédit que le nombre de Reynolds  $Re = \rho_1 u_T d / \eta_1$  de la sphère est donné par

$$Re^2 \left[ \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.687}) \right] = \frac{4 \rho (\rho_p - \rho) g d^3}{3 \eta^2}. \quad (1.11)$$

Une bille de diamètre 1.11 mm (resp. 2.12 mm) a donc, selon cette expression, une vitesse de chute de  $0.886 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  (resp.  $3.01 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ). Les vitesses enregistrées et reprises dans la figure 1.20 diffèrent de moins de  $0.1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  de cette prédiction.

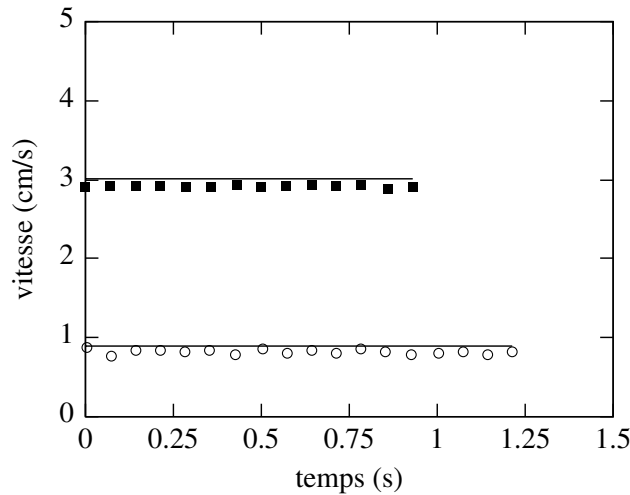


FIGURE 1.20 – Comparaisons des vitesses détectées de billes de diamètres  $1.125 \pm 0.125$  mm en bas, et  $2.15 \pm 0.15$  mm en haut, avec les corrélations de Schiller & Naumann associées (1.11).

## 7.2 Répétabilité de l’injection par pousse-seringue

L’injection contrôlée de bulles, notamment de bulles isolées, est primordiale pour la répétabilité des expériences. Le volume des bulles influe directement sur la poussée d’Archimède et donc sur leur vitesse. Un écart d’un millimètre sur le diamètre équivalent peut entraîner des évolutions radicalement différentes de l’écoulement. Par exemple, une bulle isolée de diamètre équivalent 4 mm restera piégée à l’interface du système eau+glycérine 85% / huile 47V100, alors qu’une bulle d’un diamètre de 5 mm ne sera pas arrêtée (voir chapitre 4).

Afin d’estimer les incertitudes de volume sur des bulles isolées, une étude de répétabilité est menée dans des configurations diphasiques air/eau sur dix bulles injectées. Après le traitement d’images décrit dans la section précédente, les diamètres équivalents trouvés sont comparés aux diamètres équivalents théoriques (figure 1.21). Pour les trois cas comparés,  $d = 2.7, 6.6$  et  $12$  mm, l’écart maximal « |diamètre équivalent – diamètre détecté | » est inférieur à 1 mm (0.748 mm, 0.798 mm et 0.997 mm respectivement) et l’écart type est inférieur à 0.3 mm (0.25, 0.27 et 0.26 mm respectivement).

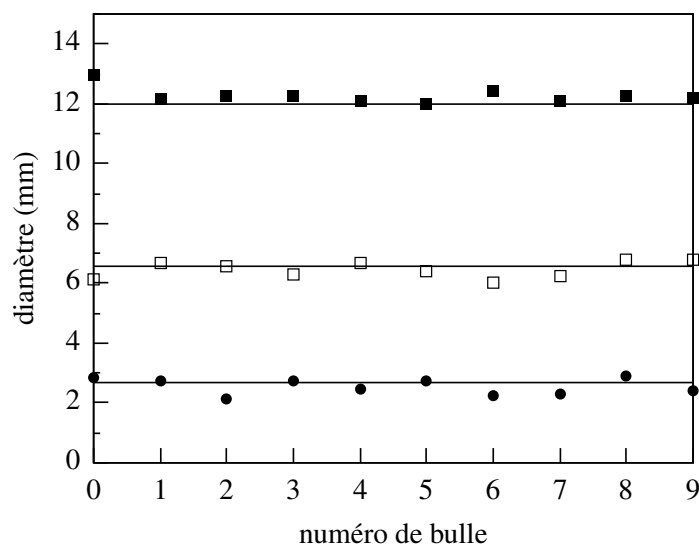


FIGURE 1.21 – Répétabilité du diamètre équivalent de bulles isolées. Les diamètres équivalents théoriques sont de 2.7 mm (●), 6.6 mm (□) et 12 mm (■).

Une deuxième étude d’incertitude concerne cinquante-quatre tests d’injection de bulles de volumes différents dans trois phases aqueuses de propriétés variables. Les diamètres équivalents détectés sont répertoriés

sur la figure 1.22 et comparés avec les volumes théoriquement injectés. Sachant, d'après la section précédente, que les erreurs commises lors du traitement d'images sont négligeables pour des bulles axisymétriques, une étude de répétabilité fournit l'erreur statistique due au dispositif d'injection. La figure 1.22 montre alors que l'estimation en moyenne de l'erreur sur le diamètre équivalent est de 5% pour les plus petites bulles et décroît jusqu'à 2.5% pour les bulles d'un diamètre équivalent de 12 mm.

Toutefois dans certains cas, notre technique conduit indéniablement à une surestimation du volume. En effet, certaines déformations de surfaces enregistrées ne permettent pas de reconstruire la forme des bulles, comme par exemple le cas de la déformation d'une calotte sphérique dont l'arrière est invisible selon une vue de côté (figure 1.23). Cette surestimation est estimée à une valeur comprise entre 5% et 10% pour des bulles de diamètre compris entre 13 mm et 20 mm dans cette étude. La courbe 1.22 montre l'augmentation notable du volume détecté lorsque le diamètre de la bulle injectée est supérieur à 15 mm.

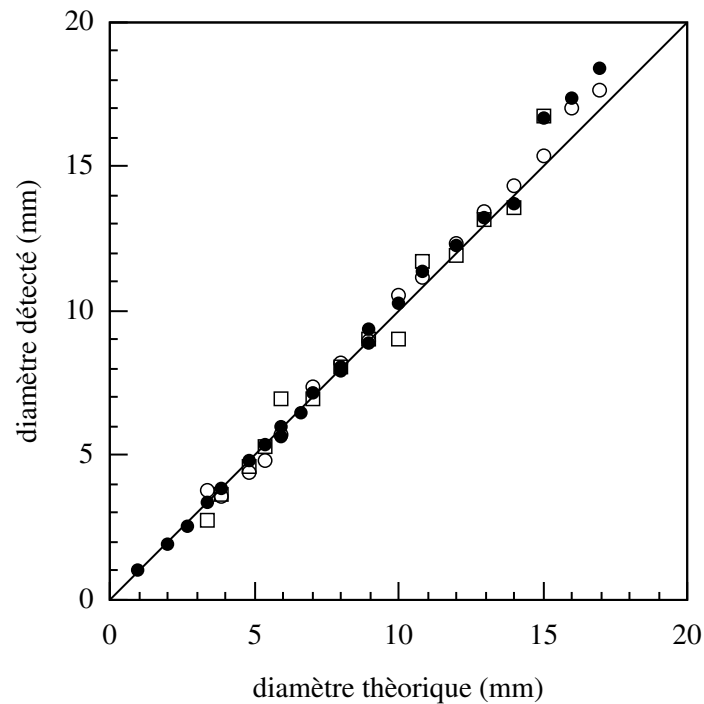


FIGURE 1.22 – Diamètres équivalents détectés en fonction des diamètres équivalents injectés.

● eau, ○ mélange eau-glycérine 85%, □ mélange eau-glycérine 95%. Les faibles écarts à la droite  $y = x$  en trait plein sont dus aux incertitudes des systèmes d'injections par pousse-seringue. Les incertitudes au-delà d'un diamètre équivalent de 15 mm sont la conséquence d'une mauvaise appréciation des volumes détectés lors de fortes déformations de surface.



FIGURE 1.23 – Bulle d'un diamètre équivalent de 15 mm évoluant dans un mélange eau-glycérine 95%. Sa forme en calotte sphérique est à l'origine d'une surestimation du volume détecté : la partie concave à l'arrière est invisible pour la caméra.

### 7.3 Ascension de bulles dans la phase lourde

Les vitesses terminales de bulles sont estimées ici à partir de la vitesse de leur centre d'inertie. Les vitesses correspondantes aux trois cas considérés au paragraphe précédent, *i.e.* l'ascension de bulles de diamètres équiv-

alents 2.7 mm, 6.6 mm et 12 mm dans de l'eau, sont représentées sur la figure 1.24. Une bonne reproductibilité de la vitesse d'ascension est constatée avec un écart à la moyenne de moins de  $1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

L'observation des vitesses d'ascension de bulles dans différents liquides reportées dans la figure 1.25 dénote une contamination des bulles dans l'eau. Les vitesses enregistrées par les caméras, comparées à celles compilées par Clift *et al.* [17], sont en effet légèrement inférieures à celles attendues dans de l'eau pure. Par contre, les bulles en ascension dans les mélanges de glycérine semblent peu affectées par la contamination, comme le montre la comparaison avec le développement asymptotique de Taylor & Acrivos [71] prédisant la vitesse de chute ou d'ascension d'une goutte faiblement déformée dans le régime des faibles nombres de Reynolds  $Re(= \rho_1 u_T d / \eta_1)$  et de Weber  $We(= \rho_1 u_T^2 d / \sigma)$  :

$$u_T^2 \left[ \frac{3\kappa+2}{\kappa+1} + \frac{Re}{16} \left( \frac{3\kappa+2}{\kappa+1} \right)^2 + \frac{1}{160} \left( \frac{3\kappa+2}{\kappa+1} \right)^3 Re^2 \ln \frac{Re}{2} + \frac{\lambda We}{10(\kappa+1)^2} (3\kappa^2 - \kappa + 8) \right] \approx \frac{gd(1-\rho_2/\rho_1)Re}{6}, \quad (1.12)$$

avec  $\kappa = \eta_2/\eta_1$  et  $\lambda = \frac{1}{4(\kappa+1)^3} \left[ \left( \frac{81}{80}\kappa^3 + \frac{57}{20}\kappa^2 + \frac{103}{40}\kappa + \frac{3}{4} \right) - \frac{\rho_2/\rho_1-1}{12}(\kappa+1) \right]$ .

Ce développement, appliqué au cas d'une goutte sans masse ( $\rho_2 = 0$ ) et de viscosité nulle ( $\eta_2 = 0$ ) s'écrit

$$u_T \left[ 1 + \frac{Re}{8} + \frac{Re^2}{40} \ln \frac{Re}{2} + \frac{We}{12} \right] \approx \frac{1}{12} \frac{\rho_1 g d^2}{\eta_1}. \quad (1.13)$$

La résolution itérative de (1.13) par un second membre donné permet d'obtenir  $u_T$ .

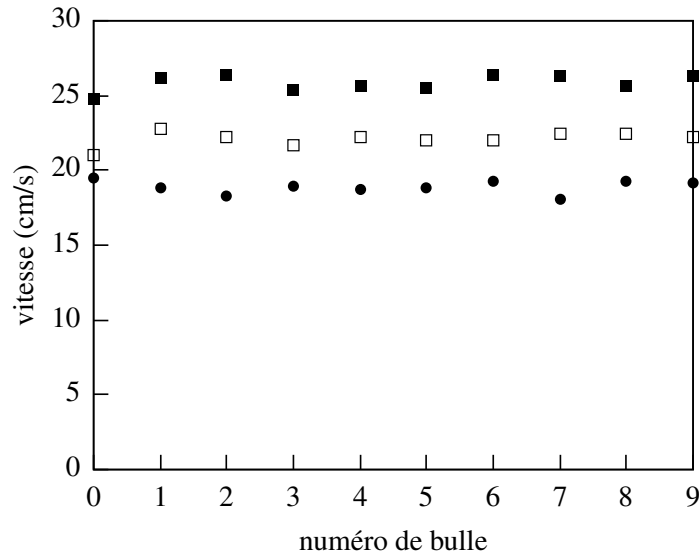


FIGURE 1.24 – Répétabilité de la vitesse terminale de bulles isolées. Les diamètres équivalents théoriques sont de 2.7 mm (●), 6.6 mm (□) et 12 mm (■).

## 7.4 Répétabilité dans la phase légère avec entraînement de liquide lourd

### Configuration eau-glycérine 95% / huile 47V100

Une première étude de reproductibilité dans la configuration triphasique est menée sur trois essais, lors du passage d'une bulle de diamètre équivalent de 5.5 mm à travers une interface eau-glycérine 95% / huile 47V100. Dans cette situation, l'écoulement est axisymétrique, comme exposé sur les images de la figure 1.26, et la bulle sphérique, avec vitesse d'ascension faible dans le liquide inférieur. Toutefois, à son arrivée à l'interface liquide-liquide, la bulle subit un saut de vitesse : de  $4.5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  dans le liquide inférieur, la vitesse passe brutalement à  $13 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Malgré ces changements abrupts, les fluctuations de vitesses entre les différents essais sont faibles, comme le démontre la figure 1.27, de même que celles du volume de liquide lourd entraîné (figure 1.28) défini comme

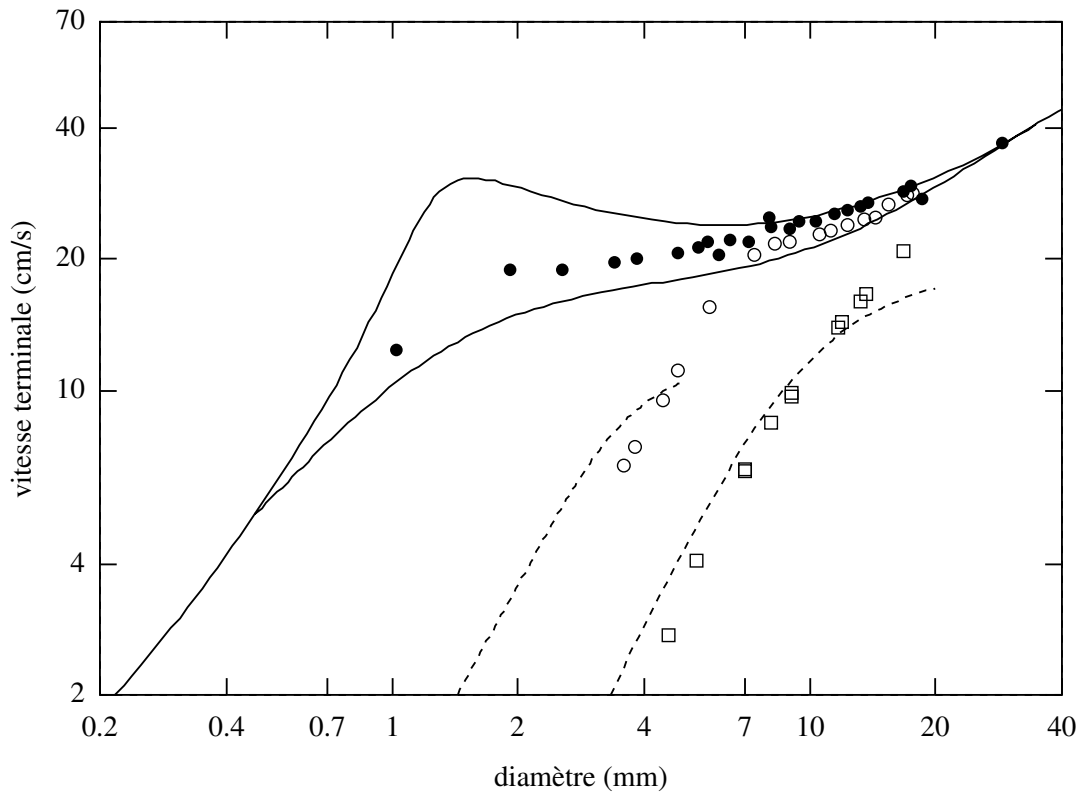


FIGURE 1.25 – Vitesses terminales de bulles en fonction de leur diamètre équivalent. Résultats dans :  
 ● l'eau, ○ le mélange eau-glycérine 85%, □ le mélange eau-glycérine 95%. En traits pleins sont représentées les corrélations de Clift *et al.* [17] pour une eau pure (courbe supérieure) et contaminée (courbe inférieure). En pointillés sont tracées les corrélations de Taylor & Acrivos [71].

le volume de liquide lourd déplacé au-dessus de la position initiale horizontale de l'interface liquide-liquide. En ce qui concerne la hauteur de la colonne de liquide lourd, également représentée sur la figure 1.28, les écarts sont légèrement plus importants mais restent raisonnables. La géométrie de l'écoulement est donc reproductible avec des erreurs à la moyenne évaluées à  $0.05 \text{ cm}^3$  sur le volume, et  $0.25 \text{ cm}$  sur la hauteur de colonne liquide (la hauteur est définie comme nulle lorsque l'interface liquide-liquide est plane). Les vitesses de bulles sont quant à elle déterminées avec une précision de moins de  $1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  dans la phase supérieure.

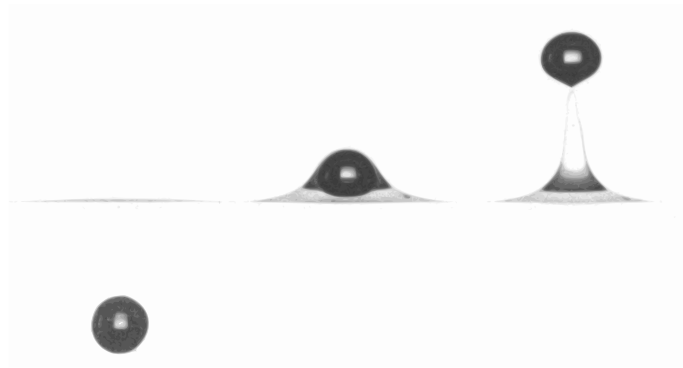


FIGURE 1.26 – Passage d'une bulle de diamètre équivalent  $5.5 \text{ mm}$  au travers d'une interface eau+glycérine 95% / huile 47V100. Écart de temps entre deux images de  $0.0429 \text{ s}$ .

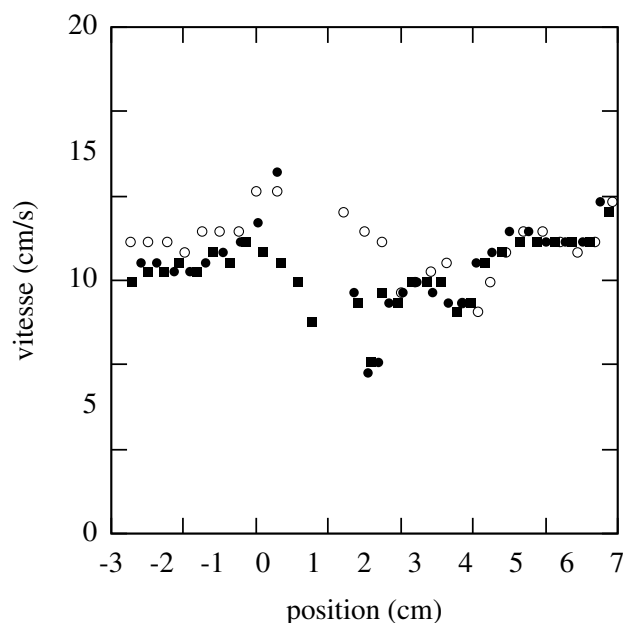


FIGURE 1.27 – Vitesses des sommets de trois bulles (●, ○, ■), de diamètre équivalent 5.5 mm au passage d’une interface eau+glycérine 95% / huile 47V100, en fonction de leur position.

### Configuration eau-glycérine 85% / huile 47V10

La deuxième étude de reproductibilité concerne le passage de trois bulles de diamètre équivalent 5.5 mm à travers une interface eau-glycérine 85% / huile 47V10. L’écoulement est ici encore axisymétrique et les bulles sont ellipsoïdales (voir figure 1.29). Les valeurs des vitesses, volumes et hauteurs intervenant dans le phénomène sont représentés sur les figures 1.30 et 1.31.

La première remarque concerne les courbes de vitesses : à cause des oscillations des bulles dans la phase supérieure, il est plus intéressant dans le cas présent d’étudier la répétabilité des vitesses des centres d’inertie, bien que celles-ci ne soient pas calculables à la traversée, lorsque la bulle est partiellement cachée. Ici encore, une précision de  $1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  est notée.

La deuxième remarque concerne les erreurs sur les volumes des colonnes de liquide lourd observées entre les différents essais : les écarts sont plus importants, jusqu’à  $0.1 \text{ cm}^3$ , que dans le cas précédent beaucoup plus visqueux. Cette tendance se confirmera tout au long de l’étude : plus le régime est inertiel, plus les incertitudes sur la reproductibilité du phénomène sont importantes.

### Configuration eau / huile 47V10

Une dernière étude de répétabilité est menée dans une configuration eau / huile 47V10 sur dix traversées de bulles isolées de diamètre équivalent 5.5 mm. L’écoulement visualisé est pleinement tridimensionnel : les bulles injectées prennent une trajectoire en zigzag dans l’eau comme le montrent les deux trajectoires représentées dans la figure 1.33.

À première vue, l’étude révèle deux régimes distincts : dans un premier cas (bulles n°2,3,5,7) une partie de la colonne de liquide lourd se détache pour se « coller » à la bulle lors de son ascension dans l’huile ; dans le deuxième cas (bulles n°1,4,6,8,9,10) cette même bulle se libère entièrement de la colonne. Les deux phénomènes sont visualisés dans la figure 1.32. La poussée d’Archimède nette étant moindre dans le premier cas, la bulle correspondante monte moins vite comme le montre la figure 1.34 où est représentée la position du sommet de la bulle en fonction du temps. Dans la première configuration, le temps de passage de la bulle à l’interface liquide-liquide est plus important d’environ 0.05 s. Par ailleurs, à la traversée de l’interface, la vitesse de la bulle avec « goutte accrochée » est deux fois moindre que celle observée dans l’autre configuration ( $12 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  au lieu de  $23 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ , figure 1.35). Nous estimons que la différence entre ces deux cas provient de l’ascension en zigzag des bulles dans l’eau : les conditions d’approche ne sont pas les mêmes suivant que les



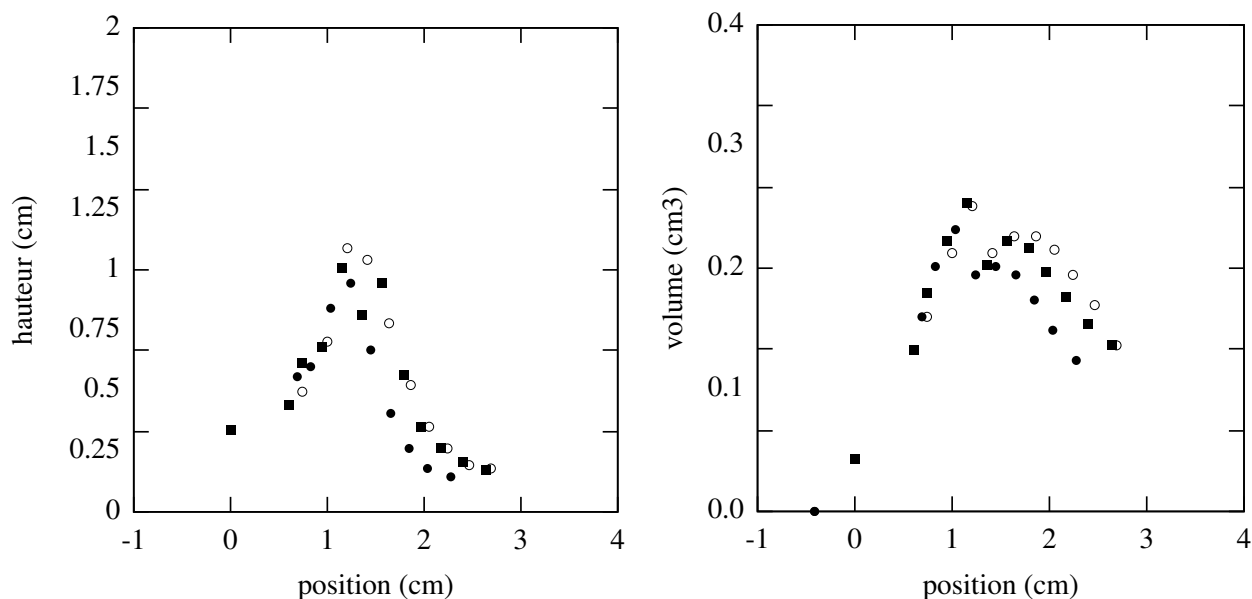


FIGURE 1.28 – À gauche, hauteur de colonnes liquides des trois essais décrits sur la figure 1.27 en fonction du sommet des bulles. À droite, volume de liquide lourd entraîné dans la phase supérieure.



FIGURE 1.29 – Passage d’une bulle de diamètre équivalent 5.5 mm au travers d’une interface eau+glycérine 85% / huile 47V10. L’écart de temps entre deux images est de 0.0571 s.

bulles arrivent au niveau de l’interface liquide-liquide avec une trajectoire verticale ou au contraire suivant un angle de  $45^\circ$ .

**Remarque.** *La vitesse d’ascension sera souvent celle du sommet de la bulle car lors de la traversée de l’interface liquide-liquide, une partie de la bulle est cachée, entraînant des erreurs dans le calcul des positions du centre d’inertie. Toutefois, comme vu précédemment, cette vitesse est plus sensible aux oscillations de forme de la bulle.*

Une fois distingués les deux cas qualifiés ici de « goutte accrochée » et d’ « extraction rapide », on constate que trois grandeurs obéissent à une bonne répétabilité : la vitesse d’ascension de la bulle, la hauteur et le volume de la colonne de liquide lourd (*i.e.* le volume total entraîné car les volumes des gouttes qui se détachent sont négligeables). On notera toutefois sur l’ensemble des figures 1.35 et 1.36 le cas (♦), pour lequel le volume de liquide entraîné suit une tendance intermédiaire entre celles des deux scénarios (augmentation forte puis rapide stagnation pour la « goutte accrochée », augmentation monotone pour l’ « extraction rapide »).

A contrario, une mauvaise répétabilité du volume des gouttelettes formées est observée. Leur nombre varie de 1 à 3 et les volumes de celles-ci varient du simple au double (figure 1.36).

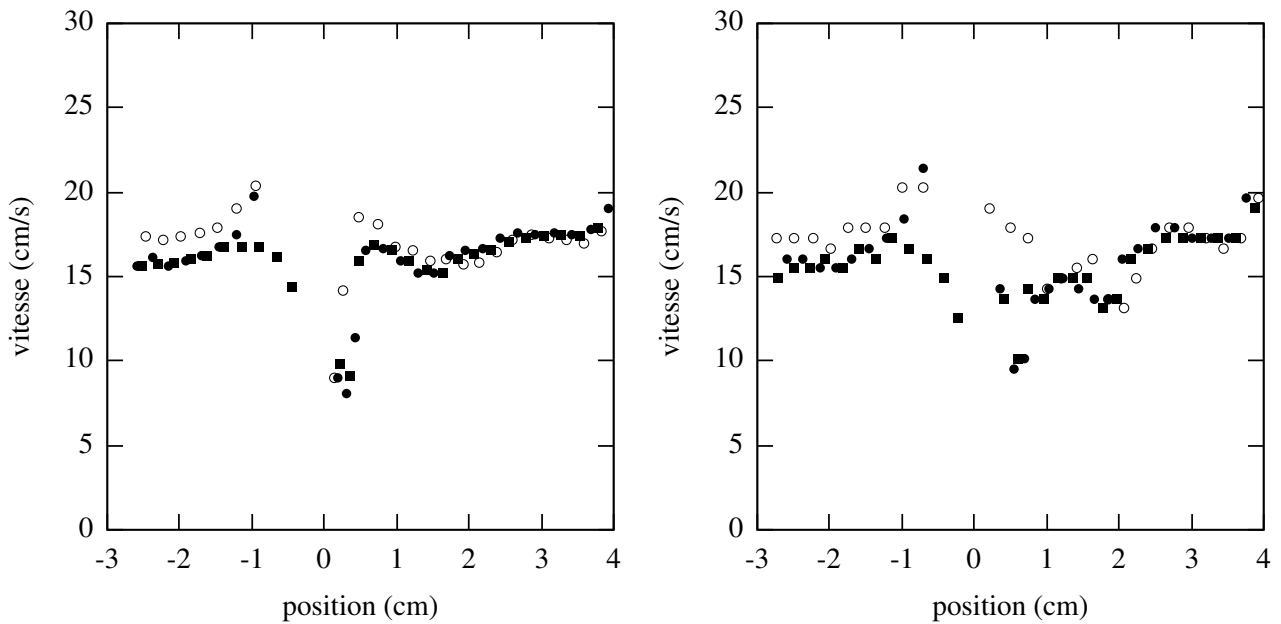


FIGURE 1.30 – À gauche, vitesses des centres d’inertie de trois bulles (●, ○, ■), de diamètre équivalent 5.5 mm environ, au passage d’une interface eau+glycérine 85% / huile 47V10, en fonction de la position des sommets des bulles. À droite, vitesses des sommets dans les mêmes essais.

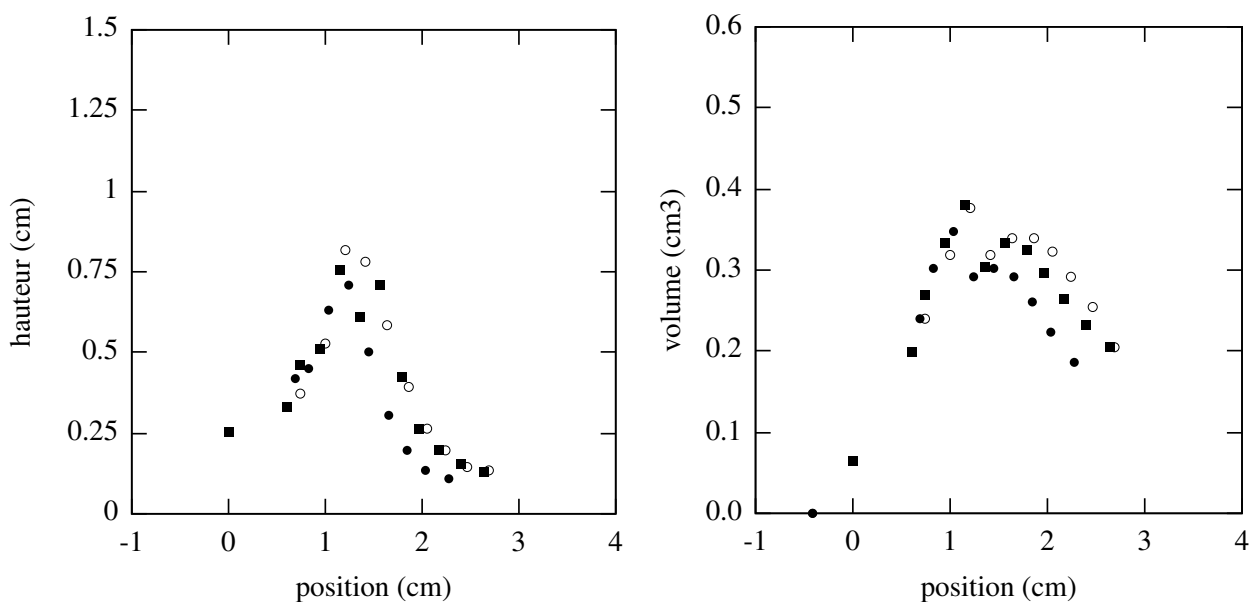


FIGURE 1.31 – À gauche, hauteur des colonnes de liquide lourd dans les trois essais décrits sur la figure 1.30 en fonction de la position du sommet des bulles. À droite, volume de liquide lourd entraîné dans la phase supérieure.

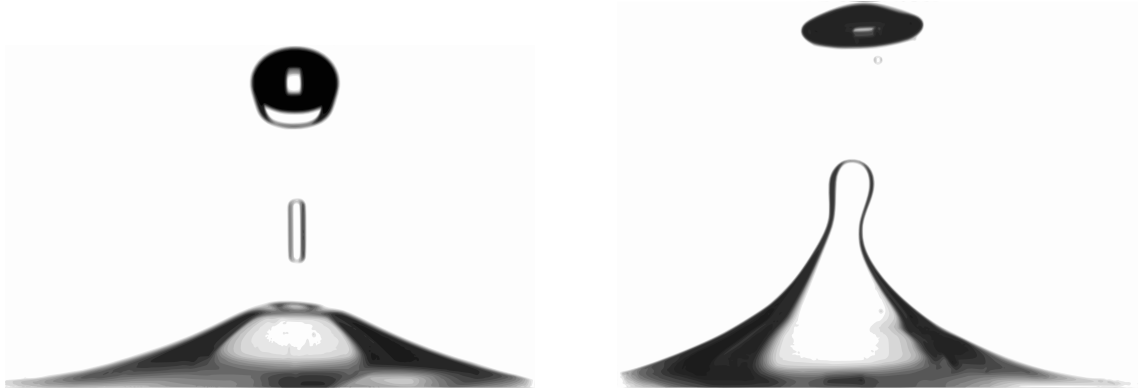


FIGURE 1.32 – Bulles de diamètre équivalent 5.5 mm s'extrayant d'une interface eau / huile 47V10. Pour les « mêmes » conditions initiales, deux phénomènes différents peuvent survenir : à gauche, une goutte reste attachée à la bulle, à droite, la bulle s'échappe seule.

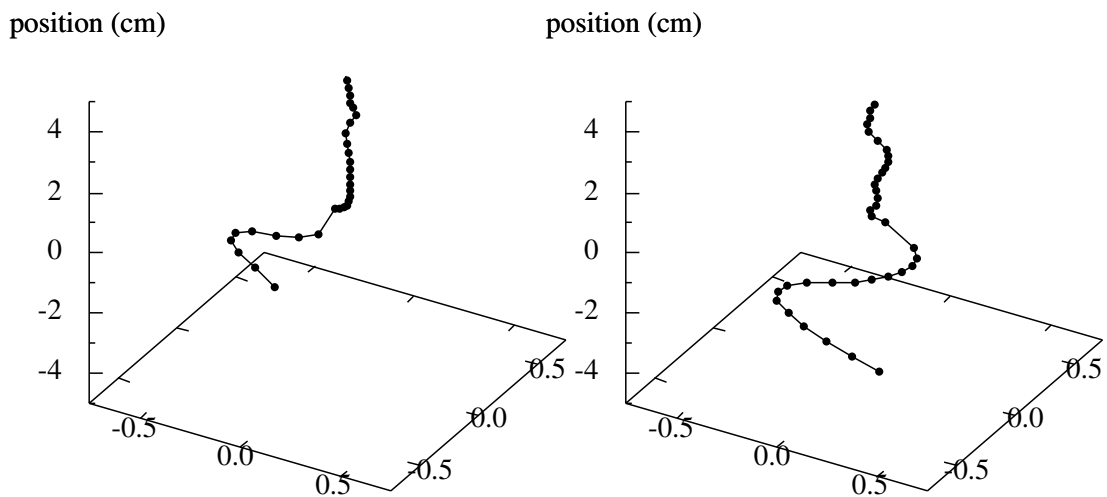


FIGURE 1.33 – Trajectoires du centre d'inertie de bulles de diamètre 5.5 mm traversant une interface eau / huile 47V10. À gauche, phénomène de « goutte accrochée ». À droite, la bulle s'extrait seule de la colonne. La position zéro est définie par le niveau de l'interface liquide-liquide initialement au repos.

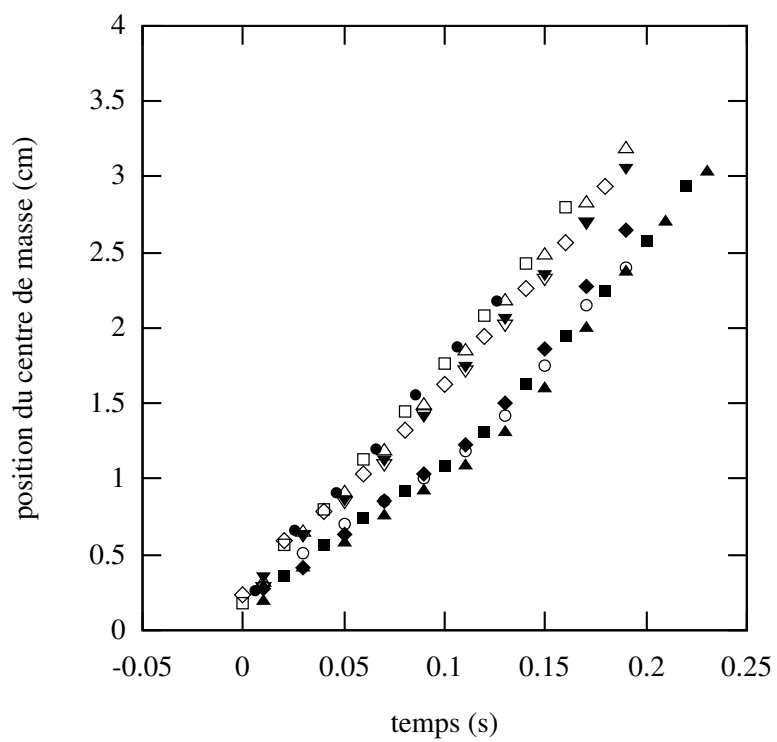


FIGURE 1.34 – Position du sommet de la bulle en fonction du temps, pour dix bulles de diamètre équivalent 5.5 mm traversant une interface eau / huile de silicone 47V10.

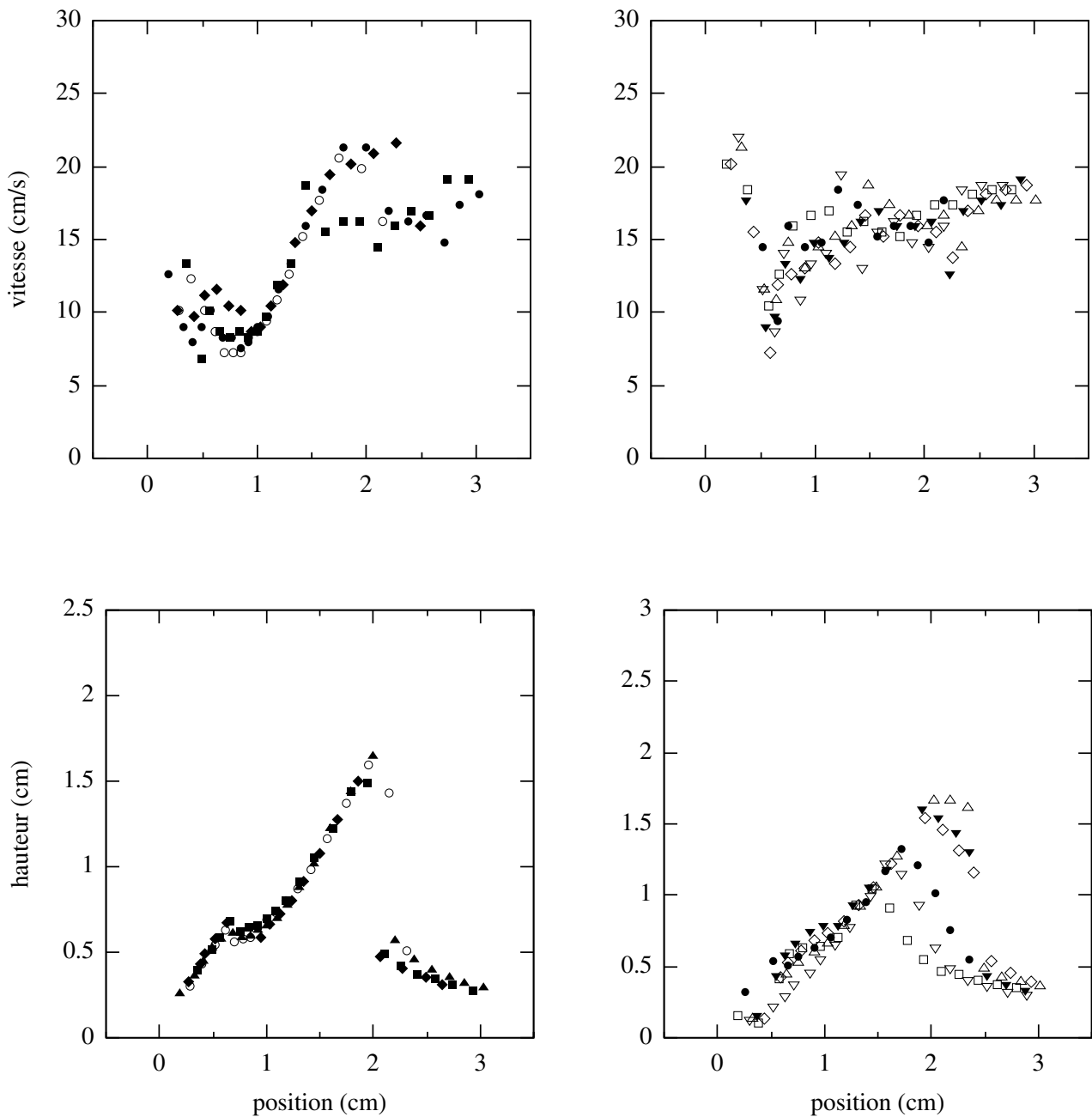


FIGURE 1.35 – À gauche, vitesses de bulle et hauteurs de colonne liquide pour des configurations de « goutte accrochée ». À droite, mêmes grandeurs dans les configurations d'« extraction rapide ».

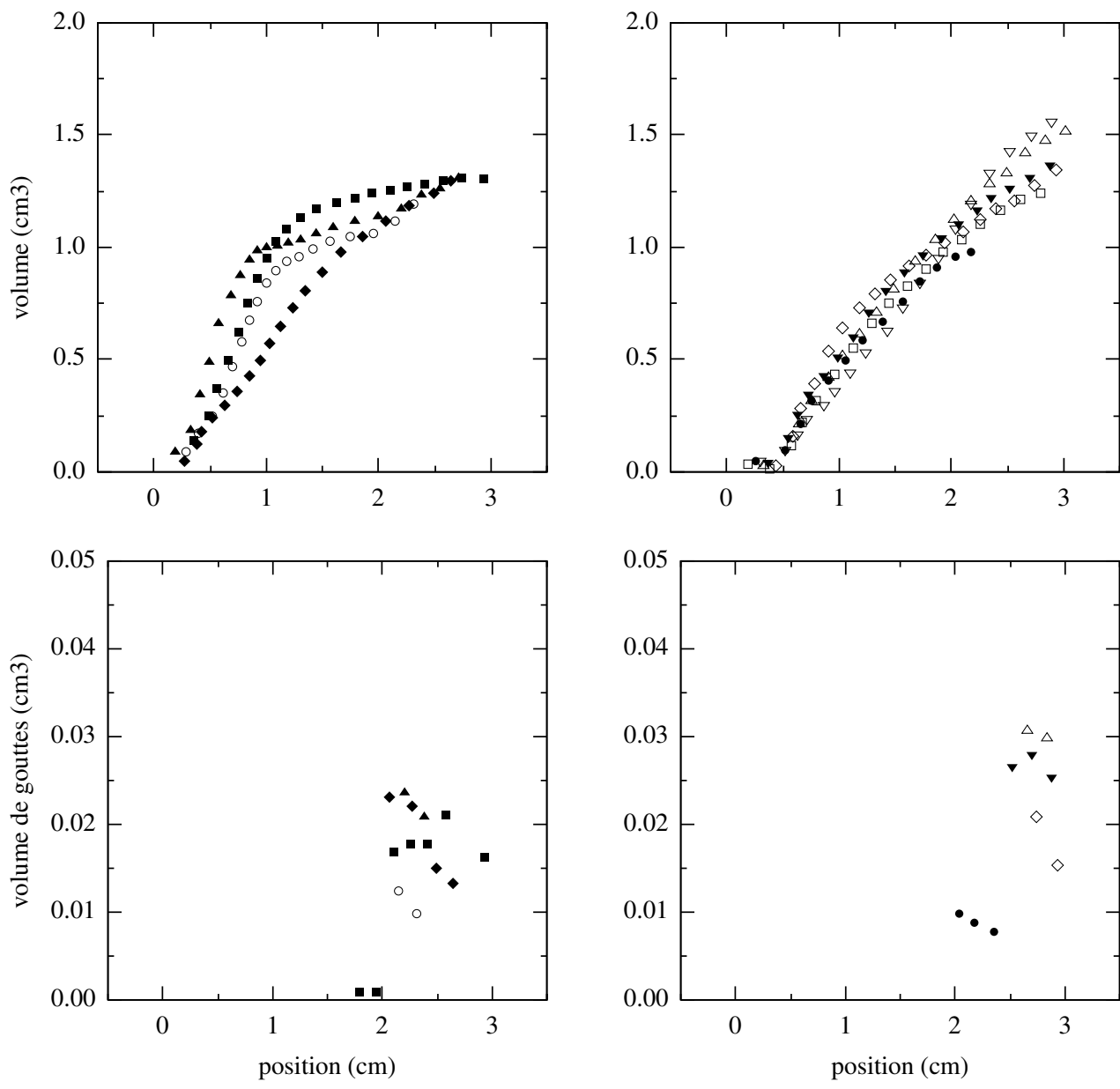


FIGURE 1.36 – À gauche, volumes de colonne liquide et volumes de gouttelette pour des configurations de « goutte accrochée ». À droite, mêmes grandeurs pour les configurations d’« extraction rapide ».

## Chapitre 2

# Éléments d'analyse théorique

Afin de comprendre l'évolution des systèmes triphasiques que nous allons rencontrer, deux situations canoniques doivent maintenant être examinées en détail. La première concerne les petites bulles, dont les nombres de Bond sont de l'ordre d'unité, qui restent piégées à l'interface liquide-liquide pendant une période variable. La deuxième, caractérisée par des nombres de Bond modérés, concerne les bulles qui, encore surmontées d'un film de liquide lourd, parviennent à monter dans le liquide léger entraînant une colonne de fluide lourd à leur suite.

### 1 Adimensionnalisation du problème

Dans toute la suite, les paramètres associés au liquide lourd auront pour indice 1, ceux associés au gaz auront pour indice 2, et ceux associés au liquide léger auront pour indice 3 (figure 2.1).

Un système triphasique de fluides newtoniens est caractérisé par neuf paramètres physiques, qui comprennent les masses volumiques des différents fluides, les viscosités ainsi que les tensions interfaciales supposées constantes. Par ailleurs le problème dynamique dépend de la gravité et de la géométrie du système. Considérant une bulle initialement sphérique suffisamment éloignée de l'interface liquide-liquide et évoluant dans un domaine infini, une seule échelle de longueur apparaît, directement liée au diamètre de la bulle.

Onze paramètres sont par conséquent nécessaires pour décrire ce type d'écoulement à savoir

- ▷ les trois masses volumiques  $\rho_2, \rho_1, \rho_3$  [kg. m<sup>-3</sup>]
  - ▷ les trois viscosités  $\eta_2, \eta_1, \eta_3$  [kg. m<sup>-1</sup>. s<sup>-1</sup>]
  - ▷ les trois tensions interfaciales  $\sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{13}$  [kg. s<sup>-2</sup>]
  - ▷ l'accélération de la pesanteur  $g$  [m. s<sup>-2</sup>]
  - ▷ le diamètre de la bulle  $d$  [m].
- (2.1)

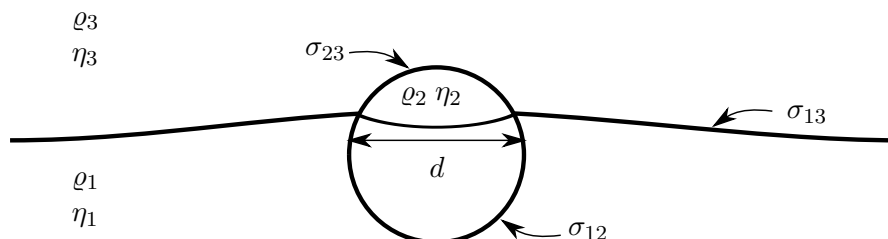


FIGURE 2.1 – Géométrie d'un problème de traversée de bulle ou de goutte à une interface fluide-fluide. Initialement, l'interface fluide-fluide est horizontale, plane, au repos.

D'après le théorème de Vaschy-Buckingham, huit nombres adimensionnels indépendants peuvent être construits à partir des trois grandeurs fondamentales impliquées : masse, temps et espace. Les variables de référence utilisées sont

- la masse volumique du liquide inférieur  $\rho_1$
- le diamètre de la bulle  $d$
- l'échelle de vitesse gravitationnelle  $\sqrt{dg}$ .

Toutefois, la masse volumique  $\rho_2$  et la viscosité  $\eta_2$  de la bulle étant négligeables par rapport aux autres fluides, avec un écart minimum de deux ordres de grandeurs,  $\rho_2$  et  $\eta_2$  peuvent être retirés de la liste des paramètres indépendants ( $\rho_2 \approx 0$  et  $\eta_2 \approx 0$ ). Ainsi le problème du passage d'une bulle isolée à travers une interface liquide-liquide peut se restreindre aux grandeurs adimensionnelles

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho_1 - \rho_3}{\rho_1} & Bo &= \frac{\rho_1 g d^2}{\sigma_{21}} & Ar &= \frac{\rho_1 g^{\frac{1}{2}} d^{\frac{3}{2}}}{\eta_1} \\ \Lambda &= \frac{\eta_3}{\eta_1} & I &= \frac{\sigma_{13}}{\sigma_{12}} & S &= \frac{\sigma_{23}}{\sigma_{12}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

## 2 Bulle piégée à une interface liquide-liquide

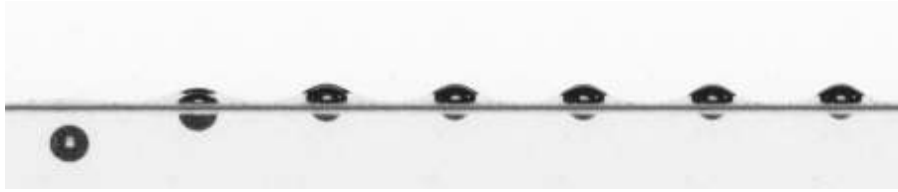


FIGURE 2.2 – Évolution d'une bulle de diamètre équivalent 3.5 mm dans un mélange composé d'eau+glycérine 85% et d'huile 47V100.  $Bo = 3.0$ ,  $Ar = 7.65$ . Le temps adimensionnel entre deux images est de  $\Delta t \sqrt{g/d} = 4.1$ .

Considérons la petite bulle de la figure 2.2 dont l'ascension dans le liquide inférieur est caractérisée par des nombres de Bond  $Bo = 3.0$  et de nombre d'Archimède  $Ar = 7.65$ . Une fois arrivée à une interface séparant un mélange d'eau et de glycérine à 85%, d'une huile de silicone 47V100, cette bulle est piégée et reste immobile pour une durée variable pouvant dépasser la période d'observation. Bien que la bulle soit originellement sphérique, sa forme finale montre une asymétrie entre haut et bas, avec une partie supérieure plutôt plate, et une partie inférieure plus ronde. Puisque le système est au repos, c'est une indication que les variations de la pression hydrostatique influencent la courbure locale de la surface de la bulle, ce qui peut être confirmé par la comparaison entre la longueur capillaire  $l_c = (\sigma_{12}/\rho_1 g)^{\frac{1}{2}}$  et le rayon de la bulle  $d/2$  : le rapport entre les deux quantités pour la situation de la figure 2.2 est  $d/(2l_c) = Bo^{\frac{1}{2}}/2 = 0.87$ . Forces capillaire et gravitationnelle sont donc du même ordre de grandeur. Bien que les images de la figure 2.2 semblent suggérer que la partie supérieure de la bulle est recouverte par un film, l'incertitude de la technique de détection des contours recommande la prudence. On peut cependant le montrer par le raisonnement par l'absurde ci-dessous dans lequel le film est supposé inexistant.

Soit  $\theta_1$  (resp.  $\theta_3$ ) l'angle entre le plan horizontal ( $\mathcal{P}$ ) contenant la ligne de contact dont le périmètre est  $2\pi l_{\mathcal{P}}$ , et la tangente à la surface de la bulle située en-dessous (resp. au-dessus). Soit  $\mathcal{V}_3$  le volume de la partie de la bulle délimitée par ( $\mathcal{P}$ ) et par la fraction de la surface de la bulle en contact avec le fluide supérieur, et soit  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$  le volume renfermé par le cylindre dont la surface latérale est obtenue en translatant verticalement la ligne de contact depuis ( $\mathcal{P}$ ) jusqu'à l'interface liquide-liquide horizontale non perturbée ( $\mathcal{P}_{\infty}$ ), les deux bases du cylindre étant les deux bases horizontales (avec  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}} > 0$  si ( $\mathcal{P}$ ) est au-dessus de ( $\mathcal{P}_{\infty}$ ) et inversement). Un schéma reprenant ces notations est exposé sur la figure 2.3.

Les conditions de Neumann exprimant l'équilibre de la ligne de contact s'écrivent

$$\sigma_{13}^2 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 - 2\sigma_{12}\sigma_{23} \cos(\theta_1 + \theta_3). \quad (2.3)$$



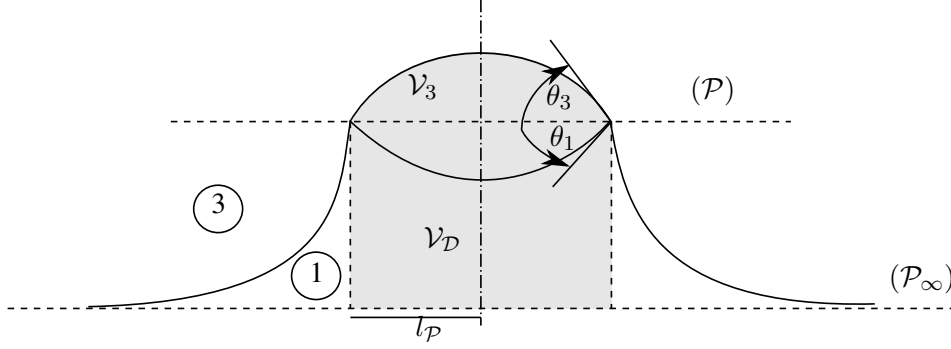


FIGURE 2.3 – Géométrie d'une bulle piégée à une interface liquide-liquide.

Par ailleurs, la force de flottabilité  $\mathbf{F}_g$  exercée sur la bulle est égale à la poussée d'Archimède du fluide 1 sur la bulle ( $= \rho_1 g \mathcal{V}$ ) corrigée de la force de pression verticale  $\mathbf{F}_p$  due à la différence de masse volumique  $\rho_3 - \rho_1$  (Keller [32], Vella *et al.* [73]). Dans le cas présent,  $\mathbf{F}_p$  est définie par

$$\mathbf{F}_p = \int_{\mathcal{S}} (\rho_3 - \rho_1) g z(x, y) dA \mathbf{e}_z \quad (2.4)$$

où  $\mathcal{S}$  désigne l'interface entre la bulle et le fluide 3,  $dA$  l'élément de surface dans le plan horizontal, et  $\mathbf{e}_z$  le vecteur unitaire ascendant. Dans (2.4),  $z$  est définie par rapport à l'interface non-perturbée de l'interface (*i.e.*  $z = 0$  sur  $(\mathcal{P}_\infty)$ ) et on a utilisé le fait que la projection verticale  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z d\mathcal{S}$  de l'élément de surface de la bulle vérifie  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z d\mathcal{S} = dA$ . Le membre de droite de (2.4) exprime le poids du fluide de masse volumique  $\rho_3 - \rho_1$  qui serait contenu dans le domaine délimité par la surface de la bulle en contact avec le fluide 3, et la surface cylindrique est obtenue en translatant verticalement la ligne de contact jusqu'au plan  $(\mathcal{P}_\infty)$  (domaine de couleur foncée sur la figure 2.3). En évaluant (2.4) on obtient

$$\mathbf{F}_p = (\rho_3 - \rho_1) g (\mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_D) \mathbf{e}_z. \quad (2.5)$$

Il en résulte que la force de flottabilité totale exercée sur la bulle est égale à

$$\mathbf{F}_g = g \{ \rho_1 (\mathcal{V} - \mathcal{V}_3) + \rho_3 \mathcal{V}_3 - (\rho_1 - \rho_3) \mathcal{V}_D \} \mathbf{e}_z. \quad (2.6)$$

Lorsque la hauteur du ménisque est bien inférieure au diamètre  $d$  de la bulle, *i.e.*  $\mathcal{V}_D / \mathcal{V} \ll 1$ , cette force se réduit à sa forme usuelle  $g \{ \rho_1 (\mathcal{V} - \mathcal{V}_3) + \rho_3 \mathcal{V}_3 \}$ .

Quant aux forces de capillarité retenant la bulle, elle s'écrivent

$$\mathbf{F}_\sigma = 2\pi l_{\mathcal{P}} (\sigma_{21} \sin \theta_1 - \sigma_{23} \sin \theta_3) \mathbf{e}_z. \quad (2.7)$$

Lorsque la bulle est en équilibre à l'interface, l'équilibre de la force de flottabilité (2.6) et de la force capillaire (2.7) conduit à

$$g [\rho_1 (\mathcal{V} - \mathcal{V}_3) + \rho_3 \mathcal{V}_3 - (\rho_1 - \rho_3) \mathcal{V}_D] = 2\pi l_{\mathcal{P}} (\sigma_{23} \sin \theta_3 - \sigma_{21} \sin \theta_1) \quad (2.8)$$

qui, adimensionnée par  $2\pi d \sigma_{12}$ , équivaut à

$$\frac{\rho_1 g d^3}{12} \left[ 1 - \frac{\rho_1 - \rho_3}{\rho_1} \frac{6}{\pi d^3} (\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_D) \right] = \frac{l_{\mathcal{P}}}{d} \left( \frac{\sigma_{23}}{\sigma_{12}} \sin \theta_3 - \sin \theta_1 \right). \quad (2.9)$$

En notant  $l_H = l_{\mathcal{P}} / d$  et  $\mathcal{V}_{\mathcal{H}} = 6(\mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_D) / \pi d^3$ , (2.3) et (2.9) exprimant la situation statique d'une bulle « posée » sur une interface liquide-liquide prennent la forme adimensionnelle finale

$$I^2 = 1 + S^2 + 2S \cos(\theta_1 + \theta_3) \quad (2.10)$$

$$\frac{Bo}{12} (1 - R \mathcal{V}_{\mathcal{H}}) = l_H (S \sin \theta_3 - \sin \theta_1). \quad (2.11)$$

Une extension d'un autre résultat de Keller [32] montre qu'à partir de l'intégration de l'équation de Young-Laplace sur le domaine délimité par le plan ( $\mathcal{P}_\infty$ ) et l'interface entre les fluides 1 et 3, le membre de droite de (2.11) vaut  $RB\mathcal{V}_M$  où  $\mathcal{V}_M = \int_{l_H}^{\infty} \eta(r)rdr$  désigne le volume signé du ménisque,  $\eta$  dénotant l'élévation de l'interface au-dessus de la position initiale horizontale. Autrement dit, la force de flottabilité qui s'exerce sur le volume total déplacé par la bulle (son volume propre et celui de la colonne de fluide lourd situé en-dessous d'elle) est équilibrée par le poids du volume de fluide déplacé par le ménisque. Le lecteur remarquera aussi que le cas particulier  $\theta_1 = \theta_3 = \pi/2$ ,  $l_H = 1/2$  correspond à une bulle sphérique dont le plan diamétral horizontal est confondu avec le plan du ménisque. La condition d'équilibre 2.11 se réduit alors à  $Bo = 6I/(1 - R\mathcal{V}_H)$ . On retrouvera plus tard cette condition qui, si  $\mathcal{V}_H = 1$ , n'est rien d'autre que le critère de Greene *et al.* [28] qui sera commenté plus loin.

Maintenant, la question est de déterminer si oui ou non les équations 2.10 et 2.11 peuvent être simultanément satisfaites dans les conditions expérimentales avec pour exemple la figure 2.2, c'est-à-dire une bulle d'un diamètre équivalent de 3.5 mm piégée à une interface eau+glycérine 85% / huile 47V100, et dont les paramètres  $R = 0.206$ ,  $S = 0.43$ ,  $I = 0.62$  et  $Bo = 3.0$  sont connus. Injectant les valeurs correspondantes de  $S$  et  $I$  dans 2.10, l'angle total trouvé  $\theta_T = \theta_1 + \theta_3$  doit se situer aux alentours de  $160^\circ$  pour que les conditions de Neumann soient satisfaites. Selon les images de la bulle,  $\theta_3 \approx 30^\circ$  dans la région où l'hypothétique ligne de contact doit se tenir, donc  $\theta_1 \approx 130^\circ$ . Ceci donne une composante verticale de la force capillaire  $\sin \theta_1 - S \sin \theta_3 \approx 0.55$ , clairement positive, qui agit dans le même sens que la force de flottabilité au lieu de la contre-balancer (ici  $\mathcal{V}_D/\mathcal{V} < 1$ , et la partie gauche de l'équation 2.11 est clairement positive). Ainsi, dans la configuration correspondant aux observations, la bulle ne peut pas flotter à l'interface liquide-liquide et l'équilibre qui est en réalité atteint requiert que celle-ci soit totalement immergée dans le fluide lourd.

Imaginons alors l'évolution du système si le film se casse pour quelque raison, ce qui est effectivement observé après plusieurs minutes d'immobilité. Dans ce cas, le membre de droite de l'équation 2.11 est positif seulement si  $\theta_1 \leq 13.5^\circ$ , équivalent à  $\theta_3 \geq 146.5^\circ$ , ce qui suggère que la bulle peut flotter à l'interface seulement si la majorité du volume est immergée dans le fluide du haut. Dans le cas extrême où la base de la bulle reste dans le plan ( $\mathcal{P}$ ) de la ligne de contact, *i.e.*  $\theta_1 = 0$ , deux limites opposées peuvent être considérées. La première, si la hauteur du ménisque est petite,  $\mathcal{V}_H \approx 1$  : alors  $l_H \approx (1 - R)Bo/(12S \sin \theta_T) \approx 1.37$ . Ainsi  $l_H > 1$  et  $\theta_3 \approx 160^\circ$ , ce qui correspond à une galette assez plate, une situation pour laquelle la courbure de la surface de la bulle possède un maximum dans la région intermédiaire localisée entre l'avant et l'arrière. Au contraire, si la hauteur du ménisque est grande,  $\mathcal{V}_H \gg 1$ , la bulle prend une forme de montgolfière avec un pied rétréci et une courbure qui croît de la base au sommet dans le liquide supérieur. Dans le cas limite où  $\mathcal{V}_H = R^{-1} - 1$ , la force de flottabilité sur la bulle s'annule, entraînant  $l_H = 0$  dans l'équation 2.11. L'arrière de la bulle est alors réduit à une pointe attachée en haut d'un ménisque infiniment haut comme schématisé sur la figure 2.4. Parmi ces deux configurations, la seule acceptable est la seconde. En effet, la forme de la bulle est déterminée par un équilibre entre les pressions hydrostatique et capillaire le long de sa surface. Puisque la première est une fonction linéaire de la position verticale, la courbure de la surface doit augmenter de manière monotone depuis le bas vers le haut. Cette condition élimine clairement la forme de galette. Cependant, il n'y a généralement aucune raison pour qu'une telle situation soit stationnaire comme on peut s'en convaincre en considérant l'équilibre des énergies mécaniques :

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p + E_\sigma) = -\epsilon_v. \quad (2.12)$$

où  $E_c$  est l'énergie cinétique du système,  $E_p$  son énergie potentielle,  $E_\sigma$  l'énergie interfaciale, et  $\epsilon_v$  la dissipation visqueuse (voir annexe 8 pour le détail de l'expression des différentes énergies). Par conséquent, en partant d'une situation de repos, l'état stationnaire ne peut être atteint que si  $\Delta(E_\sigma + E_p) = -\int_0^\infty \epsilon_v(t)dt$ ,  $\Delta$  désignant la variation de la quantité correspondante entre l'instant initial et l'instant final. Ainsi la variation des énergies potentielle (qui décroît) et interfaciale (qui croît car la situation initiale correspond à l'aire minimale) requise pour élever la bulle et le ménisque à une hauteur adéquate, et par ailleurs engendrer les bonnes formes de bulle et de ménisque, doit compenser exactement la dissipation visqueuse. Une telle situation ne peut survenir que dans des circonstances très particulières.

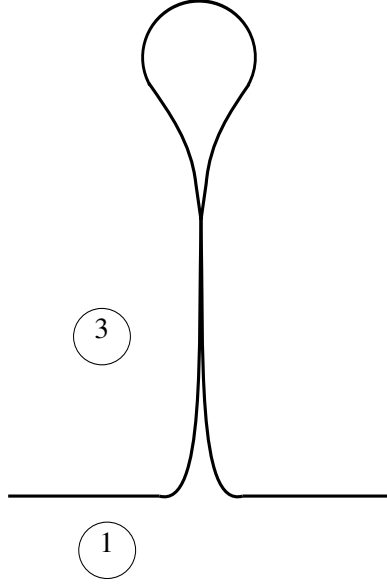


FIGURE 2.4 – Après rupture du film liquide, situation possible de traversée avec une bulle en forme de montgolfière posée au sommet d'un ménisque infiniment haut.



FIGURE 2.5 – Évolution d'une bulle de diamètre équivalent 7 mm dans un mélange composé d'eau+glycérine 95% et d'huile 47V500.  $Bo = 13.2$ ,  $Ar = 4.1$ . Le temps adimensionné entre deux images est de  $\Delta t \sqrt{g/d} = 4.3$ .

### 3 Bulle entraînant du liquide lourd au-dessus de l'interface

Nous cherchons maintenant à analyser qualitativement l'influence du nombre de Bond de la bulle dans la phase lourde sur la décroissance de la vitesse d'ascension près de l'interface. Pour ce faire, une bulle sphérique de diamètre  $d$  est considérée au moment où son point le plus haut arrive à une altitude  $z = H$  au-dessus de l'interface liquide-liquide plane non-perturbée, et reste encapsulée dans un film très mince de liquide lourd entre son point le plus haut (défini par  $\theta = 0$ ) et un certain angle  $\theta = \phi$ . Un schéma du modèle est exposé sur la figure 2.6. Supposant que le film s'amincit rapidement pour de grandes positions angulaires, celui-ci n'a aucun effet direct sur la bulle pour  $\theta > \phi$  (les quatre premières images de la figure 2.5 donnent une bonne illustration de la situation). Si les effets dynamiques ainsi que les variations de pression sont suffisamment faibles, la pression sur la partie de la surface de la bulle correspondant à  $\theta < \phi$  est donc  $\varrho_3 g z + 4\sigma_{13}/d$ . De la même manière, dans le liquide lourd, la pression à la surface pour  $\theta > \phi$  est  $-\varrho_1 g z$ . Utilisant les résultats qui ont mené à (2.6) et avec des considérations géométriques simples, la force de flottabilité  $\mathbf{F}_g$  exercée sur la bulle s'écrit

$$\mathbf{F}_g = g \{ \varrho_1 (\mathcal{V} - \mathcal{V}_{cal}) + \varrho_3 \mathcal{V}_{cal} - (\varrho_1 - \varrho_3) \mathcal{V}_{cyl} \} \mathbf{e}_z = g \{ \varrho_1 \mathcal{V} - (\varrho_1 - \varrho_3) \mathcal{V}_D(\phi) \} \mathbf{e}_z \quad (2.13)$$

où  $\mathcal{V}_D$  (partie grisée sur la figure 2.6) est composé du volume  $\mathcal{V}_{cyl}$  du cylindre dont la surface latérale correspond à la translation verticale de la ligne  $\theta = \phi$  de détachement du film, auquel s'ajoute le volume  $\mathcal{V}_{cal}$  de la calotte sphérique correspondant à la partie supérieure de la bulle au-dessus du cylindre où  $\theta < \phi$ . Le film de liquide est considéré d'épaisseur nulle, c'est pourquoi il n'intervient pas dans l'expression de  $\mathcal{V}_D$ . Le rayon  $l_p$  du cylindre,

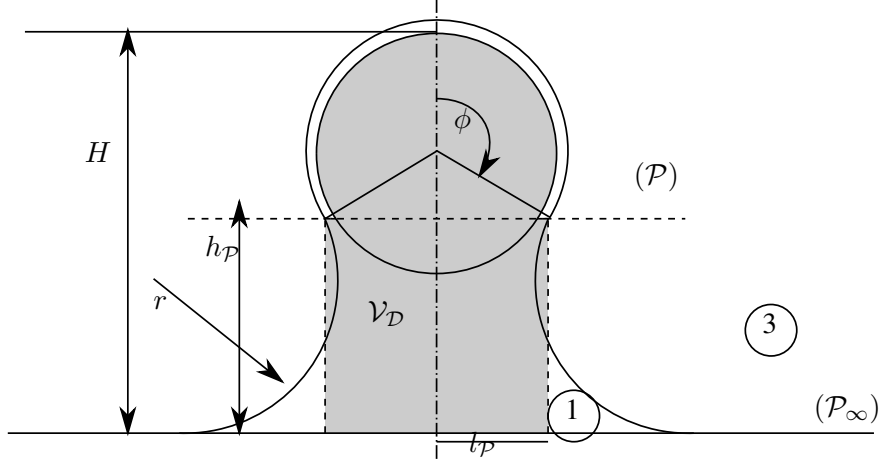


FIGURE 2.6 – Schéma d'un modèle de bulle sphérique avec entraînement de liquide lourd.

sa hauteur  $h_P$ , ainsi que la hauteur  $a$  de la calotte sphérique valent

$$l_P = \frac{d}{2} \sin \phi \quad (2.14)$$

$$h_P = H - \frac{d}{2}(1 - \cos \phi) \quad (2.15)$$

$$a = \frac{d}{2}(1 - \cos \phi), \quad (2.16)$$

par conséquent le volume  $\mathcal{V}_{cyl}$  du cylindre s'écrit

$$\mathcal{V}_{cyl} = \pi l_P^2 h_P = \frac{\pi d^2}{4} \sin^2 \phi \left( H - \frac{d}{2}(1 - \cos \phi) \right), \quad (2.17)$$

et le volume  $\mathcal{V}_{cal}$  de la calotte sphérique vaut

$$\mathcal{V}_{cal} = \frac{\pi}{3} a^2 \left( \frac{3d}{2} - a \right) = \frac{\pi d^3}{24} (2 - 3 \cos \phi + \cos^3 \phi). \quad (2.18)$$

Le volume  $\mathcal{V}_D$  vaut donc

$$\mathcal{V}_D = \mathcal{V}_{cyl} + \mathcal{V}_{cal} = \frac{\pi d^2}{4} H \sin^2 \phi - \frac{\pi d^3}{24} (1 - 3 \cos^2 \phi + 2 \cos^3 \phi). \quad (2.19)$$

En posant ensuite  $h(\phi) = H/d$ , et  $\mathcal{V}_H = 6\mathcal{V}_D/\pi d^3$ , on a

$$\mathcal{V}_H = \frac{3}{2} h(\phi) \sin^2 \phi - \frac{1}{4} (1 - 3 \cos^2 \phi + 2 \cos^3 \phi). \quad (2.20)$$

Par ailleurs, les forces s'exerçant sur la bulle ne se limitent pas aux forces de flottabilité. Il est également nécessaire de prendre en compte la force capillaire  $\mathbf{F}_\sigma$  qui engendre une surpression dans le film et dont la résultante s'écrit

$$\mathbf{F}_\sigma = -2\sigma_{13}\pi \left( \frac{d}{2} \sin \phi \right) \sin \phi \mathbf{e}_z = -\sigma_{13}\pi d \sin^2 \phi \mathbf{e}_z. \quad (2.21)$$

Ainsi, (2.13) et (2.21) normées par le volume de la bulle  $\mathcal{V} = \pi d^3/6$ , et l'expression (2.20) du volume  $\mathcal{V}_H$  permettent de trouver la gravité effective  $g_e(\phi)$  s'exerçant sur la bulle :

$$g_e(\phi) = g \left\{ 1 - R\mathcal{V}_H(\phi) - \frac{6I}{Bo} \sin^2 \phi \right\}. \quad (2.22)$$

En introduisant le nombre de Bond interfacial  $B_I = Bo/I$ , la gravité effective s'écrit donc

$$g_e(\phi) = g \left\{ 1 - R \left[ \frac{3}{2} h(\phi) \sin^2 \phi - \frac{1}{4} (1 - 3 \cos^2 \phi + 2 \cos^3 \phi) \right] - \frac{6}{B_I} \sin^2 \phi \right\}. \quad (2.23)$$

Deux scénarios différents peuvent alors avoir lieu. Si  $g_e$  s'annule pour un angle critique  $\phi_0$ , la bulle s'arrête à une altitude  $h(\phi_0)$  au-dessus de l'interface horizontale et ne peut pas aller plus avant tant que le drainage n'est pas complet. On parle alors de configuration de drainage (« film-drainage »). Au contraire, si  $g_e$  reste positive quelque soit  $\phi$ , la bulle peut monter tandis que le film est en train d'être drainé. Dans ce cas, l'ascension de la bulle est seulement ralentie par la décroissance de  $g_e$  dans les valeurs intermédiaires de  $\phi$ , et le temps de résidence de la bulle près de l'interface horizontale peut être beaucoup plus court que celui nécessaire pour drainer le film. Si  $h(\phi) \sin^2 \phi \rightarrow 0$  lorsque  $\phi \rightarrow \pi$ , l'expression de  $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}(\phi)$  indique que  $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}(\pi) = 1$ , et la gravité effective  $g_e$  tend vers  $(1 - R)g$ . Ainsi, bien que la bulle soit encore complètement encapsulée par le film, elle évolue de la même manière que si elle était en ascension libre dans le liquide supérieur. Néanmoins,  $\phi$  peut ne pas atteindre la valeur  $\pi$  en pratique, mais peut rapidement atteindre une valeur intermédiaire entre  $\pi/2$  et  $\pi$ , puis augmenter bien plus lentement. C'est notamment le cas sur la figure 2.5. Alors, une colonne de liquide lourd se développe progressivement derrière la bulle pendant qu'elle poursuit son ascension. Geller *et al.* [27] ont qualifié cette configuration de « tailing ». Le film peut ensuite se rompre devant la bulle, ou d'autres mécanismes hydrodynamiques (tels que l'étirement visqueux) peuvent rompre la colonne plus tôt, sa partie supérieure continuant à monter avec la bulle alors que sa partie inférieure retombe vers la position initiale de l'interface.

Le fait qu'un angle critique  $\phi_0$  existe ou non dépend du maximum de  $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}(\phi)$  et des valeurs de  $R$  et  $B_I$ . Afin de déterminer comment varie  $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$  selon  $\phi$ , il est nécessaire de connaître la forme de la colonne de liquide lourd, qui est elle-même dépendante de l'équilibre des forces dans cette région. Un modèle très simple de forme, proposé initialement par Maru *et al.* [49], consiste à supposer que la section verticale de la colonne est limitée par un arc de cercle tangent au film en  $\theta = \phi$  et tangent à l'horizontale au point où la colonne rejoint l'interface non perturbée. Une approche plus satisfaisante a été développée par Jones & Wilson [30], mais elle ne donne une relation explicite entre  $h$  et  $\phi$  que pour des configurations bidimensionnelles.

En haut de la colonne, la loi de Laplace est satisfaite. On a donc

$$(\rho_1 - \rho_3)gz(\phi) = -\sigma_{13}\kappa(\phi), \quad (2.24)$$

où  $\kappa$  désigne la courbure moyenne et  $z$  la hauteur en ce point. Ces grandeurs sont reliées au rayon de courbure  $r$  du ménisque (adimensionné par  $d$ ) par les expressions

$$\kappa = \frac{2}{d} - \frac{1}{rd} \quad (2.25)$$

$$z = rd(1 - \cos \phi). \quad (2.26)$$

Ainsi, (2.24), (2.25) et (2.26) impliquent que

$$r^2(1 - \cos \phi)RB_I + 2r - 1 = 0, \quad (2.27)$$

ce qui permet de déterminer le rayon de courbure :

$$r = \left[ -1 + (1 + RB_I(1 - \cos \phi))^{\frac{1}{2}} \right] / [RB_I(1 - \cos \phi)]. \quad (2.28)$$

À partir de (2.16) et (2.26), la hauteur adimensionnée de la bulle vaut quant à elle

$$h(\phi) = \frac{z + a}{d} = \left( r + \frac{1}{2} \right) (1 - \cos \phi). \quad (2.29)$$

En combinant (2.23), (2.28) et (2.29), on est en mesure de prédire la gravité effective s'exerçant sur la bulle en fonction des paramètres  $R$  et  $B_I$ . Il est intéressant de voir comment l'expression générale dégénère dans les deux cas extrêmes.

### 3.1 À faible $RB_I$

Lorsque les forces capillaires prédominent dans ce modèle, *i.e.* lorsque  $RB_I = RB_0/I \rightarrow 0$ , (2.28) indique que

$$r(\phi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}RB_I(1 - \cos \phi) + o(RB_I), \quad (2.30)$$

d'où

$$h(\phi) = (1 - \cos \phi) \left( 1 - \frac{1}{8}RB_I(1 - \cos \phi) \right) + o(RB_I). \quad (2.31)$$

Ceci implique que  $h(\phi = \pi/2) \approx 1$ , autrement dit que la partie haute de la bulle est entièrement recouverte par le film quand l'arrière est dans le plan de l'interface au repos. C'est en effet approximativement ce qui est observé sur la figure 2.5 qui fait référence dans cette section. Il apparaît que l'expression (2.29) de  $h$  est donc réaliste dans ce cas, bien qu'elle soit irréaliste lorsque  $\phi \rightarrow \pi$  puisque dans cette limite le véritable comportement correspond à  $h \rightarrow \infty$ . Combinant l'expression générale (2.20) de  $\mathcal{V}_H$  et l'approximation (2.31) de  $h$ , on a

$$\mathcal{V}_H = \frac{5}{4} - \frac{3}{16}RB_I - \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{8}RB_I \right) \cos \phi - \frac{3}{4} \cos^2 \phi + \left( 1 - \frac{9}{16}RB_I \right) \cos^3 \phi + o(RB_I) \quad (2.32)$$

qui atteint son maximum ( $\approx 27/16$ ) lorsque  $\phi \approx 2\pi/3$ . Par conséquent  $g_e$  donné par (2.22) atteint son minimum  $g_m$  pour un angle  $\phi_m$  compris entre  $\pi/2$  et  $2\pi/3$ . Le développement limité de  $g_e$  aux petits nombres de Bond interfaciaux ainsi qu'aux petites valeurs de  $\cos \phi$  donne

$$g_e(\phi) = g \left\{ 1 - R \left[ \frac{5}{4} - \frac{3}{16}RB_I + \frac{6}{RB_I} - \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{8}RB_I \right) \cos \phi - \left( \frac{3}{4} + \frac{6}{RB_I} \right) \cos^2 \phi \right] \right\} + o(RB_I) + o(\cos^2 \phi) \quad (2.33)$$

qui est minimal quand la quantité entre crochets est maximale, autrement dit, lorsque

$$\cos \phi_m = - \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{8}RB_I \right) \left( \frac{3}{2} + \frac{12}{RB_I} \right)^{-1} \approx - \frac{RB_I}{8}. \quad (2.34)$$

Alors, avec les approximations précédentes (2.33) et (2.34),  $g_m$  vaut approximativement

$$g_m \approx g \left\{ 1 - \frac{5}{4}R \left[ 1 - \frac{3}{40}RB_I \right] - \frac{6}{B_I} \right\}. \quad (2.35)$$

### 3.2 À grand $RB_I$

Les effets capillaires sont maintenant faibles mais sont encore supposés contrôler la forme de la colonne de fluide entraîné. Le développement au premier ordre de  $r$  donne

$$r(\phi) = B_I^{-\frac{1}{2}}(1 - \cos \phi)^{-\frac{1}{2}} + o(B_I^{-\frac{1}{2}}), \quad (2.36)$$

d'où d'après (2.29) :

$$h(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \cos \phi) + (RB_I)^{-\frac{1}{2}}(1 - \cos \phi)^{\frac{1}{2}} + o((RB_I)^{-\frac{1}{2}}). \quad (2.37)$$

Par ailleurs, les effets capillaires étant faibles, l'interface liquide-liquide peut se déformer facilement et l'angle  $\phi_m$  minimisant  $g_e$  dans (2.22) est attendu aux alentours de  $\pi$ . Afin de calculer le maximum de  $\mathcal{V}_H$  dans (2.20), qui minimise également la gravité effective  $g_e$  car  $\phi_m \approx \pi$ , on doit poser  $x = 1 + \cos \phi \ll 1$ . On obtient alors

$$\mathcal{V}_H = 1 + 3 \left( \frac{RB_I}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} x - \left( \frac{3}{4} + \frac{9}{4} \left( \frac{RB_I}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right) x^2 + o((RB_I)^{-\frac{1}{2}}) + o(x^2) \quad (2.38)$$

qui est maximal lorsque

$$x \approx 2 \left( \frac{RB_I}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.39)$$

$\mathcal{V}_H$  est donc maximal lorsque  $\cos \phi \approx -1 + 2 \left( \frac{RB_I}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}$ , *i.e.* lorsque  $\phi \approx \pi - 2 \left( \frac{RB_I}{2} \right)^{-\frac{1}{4}}$ , avec pour valeur  $\mathcal{V}_H \approx 1 + 6(RB_I)^{-1}$ . Le minimum  $g_m$  de  $g_e(\phi)$  en découle directement :

$$g_m \approx g \left\{ 1 - R - \frac{6}{B_I} \right\}. \quad (2.40)$$

On remarque immédiatement que  $g_m$  s'annule si  $B_I = 6/(1 - R)$ , ce qui n'est rien d'autre que le critère dérivé par Greene *et al.* [28] qui sera discuté plus loin.

### Discussion des modèles de « film-drainage » et « tailing »

En combinant les résultats obtenus dans les deux limites  $RB_I \rightarrow 0$  et  $RB_I \rightarrow \infty$ , ce modèle montre que le rôle majeur de la tension interfaciale est, en augmentant  $r$ , d'augmenter le volume déplacé  $\mathcal{V}_H$  pour un angle  $\phi$  donné. Ainsi, pour un contraste de masse volumique  $R$  donné, plus  $B_I$  est grand, moins la gravité effective décroît quand la bulle est proche de la position de l'interface au repos. C'est pourquoi dans toutes les situations considérées plus loin, l'augmentation de  $B_I$  entraîne une réduction des effets visibles de l'interface liquide-liquide sur la dynamique des bulles. Ce raisonnement est également valable pour le contraste de masses volumiques : pour un nombre de Bond interfacial  $B_I$  donné, plus  $R$  est grand, et plus les effets sont sévères. Bien qu'aucune configuration à grand contraste de densité ne soit étudiée ici, celles-ci sont rencontrées dans certaines applications, notamment dans les cas mettant en jeu des métaux liquides ( $R \approx 0.93$  pour des systèmes mercure / eau ou  $R \approx 0.49$  pour le cas du corium). Dans de tels systèmes, la configuration de « film-drainage » est possible si  $\mathcal{V}_H$  se rapproche de  $1/R \approx 1$ . Par ailleurs toujours dans ces systèmes, seules les bulles avec un nombre de Bond très grand peuvent former une configuration « tailing » car  $\mathcal{V}_H$  peut prendre des valeurs bien plus grandes que l'unité pour des nombres de Bond interfaciaux modérés. C'est pourquoi les configurations correspondant à des nombres de Bond de plusieurs dizaines, *i.e.* des bulles en forme de calotte sphérique, peuvent rester piégées à l'interface, comme observé dans les simulations de Cranga *et al.* [19].

Le modèle général (2.23)-(2.29) montre en outre que, pour des nombres de Bond interfaciaux modérés, la valeur critique de  $B_I$  pour que des configurations « tailing » apparaissent est plus grand que prédit par le critère de Greene *et al.* [28] (*i.e.*  $B_I \geq 6/(1 - R)$ ) car la force de flottabilité est en général moins importante qu'estimée à cause de la présence du ménisque.

En explorant numériquement une large gamme de  $R$ ,  $B_I$ , et  $\Lambda$ , Geller *et al.* [27] montrent qu'en conditions de Stokes ( $Ar \ll 1$ ) et pour une certaine gamme de valeurs de  $R$  et  $B_I$ , une sphère rigide approchant une interface liquide-liquide peut donner naissance aussi bien à une configuration « film-drainage » qu'à une configuration « tailing », selon que le rapport des viscosités  $\Lambda$  est grand ou petit. À partir de ces observations, ils critiquent les modèles statiques tels que celui de Maru *et al.* [49]. La même critique s'applique à l'analyse ci-dessus dans laquelle les effets dynamiques sont totalement ignorés. Le point le plus discuté est bien entendu l'expression de fermeture utilisée pour relier  $h$  à  $\phi$ , car elle rend la géométrie de la colonne entièrement dépendante des effets capillaires alors que ce type de structure peut exister pour des fluides miscibles (Srdic-Mitrovic *et al.* [70] et Camassa *et al.* [14] figure 2.7). L'espoir ici, renforcé par la comparaison avec les résultats expérimentaux, est que cette fermeture est une approximation valide tant que la colonne est suffisamment courte, c'est-à-dire en gros  $h \leq 3/2$ , ce qui correspond à  $\phi \leq 2\pi/3$ , car l'écart entre la région où sa forme est contrôlée par le raccordement avec le film et celle où elle est contrôlée par le raccordement avec l'interface non-perturbée est faible. Pour des hauteurs plus importantes, ou des fluides presque miscibles ( $B_I \rightarrow \infty$ ), il n'y a aucun doute que les effets dynamiques doivent être pris en compte pour prédire  $h$  (voir par exemple Lee & Kim [42] qui considèrent la traversée d'une surface libre par une sphère dans la limite des petits nombres de Reynolds). On doit donc retenir que  $g_m > 0$  est à considérer comme une condition nécessaire pour qu'une configuration « tailing » soit possible, mais il est clair d'après Geller *et al.* que si  $\Lambda$  est suffisamment grand, la configuration de drainage de film peut émerger même si  $g_m > 0$ .

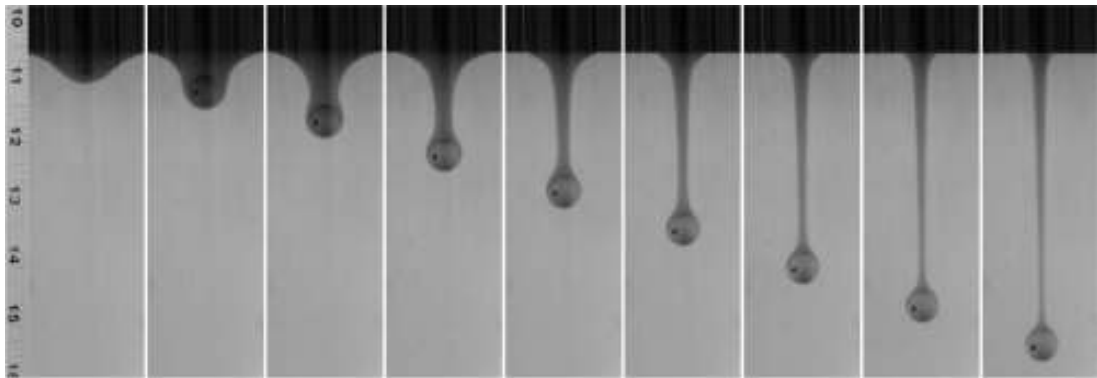


FIGURE 2.7 – Sphère de rayon 0.635 cm tombant dans un mélange stratifié de sirops de maïs miscibles (d'après Camassa *et al.* [14]).



# Chapitre 3

## Approches de simulation

Le présent chapitre décrit les approches de simulation numérique utilisées dans les codes JADIM et PELICANS, créés respectivement à l'IMFT et à l'IRSN. Alors que le code JADIM est basé sur une méthode « Volume Of Fluid » sans reconstruction d'interface, le code PELICANS est fondé sur un modèle Cahn-Hilliard couplé aux équations de Navier-Stokes.

Ce chapitre définit dans un premier temps les modèles mathématiques généraux mis en jeu dans les simulations et s'attache ensuite aux distinctions entre les différentes méthodes numériques (schémas, discrétisations, algorithmes de résolution). Ensuite, plusieurs tests sont réalisés dans des configurations diphasiques afin d'évaluer l'influence des conditions initiales de chacun des codes face à plusieurs problèmes d'ascension de bulles.

### 1 Description générale - équations d'évolution

Un écoulement triphasique peut être considéré comme un mélange constitué de trois fluides immiscibles dont chacun est caractérisé par ses propriétés physiques intrinsèques ainsi que par une fraction volumique  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) appelée également « taux de présence » ou encore « paramètre d'ordre » : un constituant  $i$  de masse volumique  $\rho_i$  et de viscosité  $\eta_i$  est ainsi représenté par une fonction continue  $c_i$  qui vaut 1 si ce constituant est présent dans sa phase pure, 0 s'il est absent, et une valeur intermédiaire à l'interface fluide-fluide si cette dernière est considérée d'épaisseur non-nulle. Le mélange global est alors entièrement décrit par des champs de masse volumique et de viscosité qui ne dépendent que de  $c_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Par ailleurs, les fractions volumiques vérifient la contrainte

$$\sum_{i=1}^3 c_i = 1 \quad (3.1)$$

en tout point du domaine fluide.

Les trois phases sont maintenant supposées newtoniennes et les interfaces caractérisées par des tensions interfaciales constantes. Il est également supposé qu'aucun glissement n'existe entre les phases, ce qui implique l'existence d'une vitesse unique  $\mathbf{u}$  en chaque point du mélange multiphasique. Le système d'équations gouvernant le mouvement au sein d'un système triphasique isotherme incompressible s'écrit alors

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.3)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot [\eta (\nabla \mathbf{u} + {}^T \nabla \mathbf{u})] + \mathbf{F}_\sigma, \quad (3.4)$$

où  $c_i$  représente la fraction volumique de la phase  $i$ ,  $\mathbf{u}$  le vecteur vitesse en tout point du mélange,  $p$  la pression,  $\mathbf{g}$  l'accélération de la pesanteur,  $\rho$  la masse volumique du mélange,  $\eta$  sa viscosité dynamique, et  $\mathbf{F}_\sigma$  la force capillaire par unité de masse. Les équations (3.2) correspondent au transport des phases, les équations (3.3) et (3.4) aux lois de conservation du volume et de la quantité de mouvement. De plus, la masse volumique  $\rho$

ainsi que la viscosité dynamique  $\eta$  du mélange sont reliées aux masses volumiques et viscosités de chacun des fluides par les lois linéaires

$$\varrho = \sum_{i=1}^3 c_i \varrho_i \quad ; \quad \eta = \sum_{i=1}^3 c_i \eta_i . \quad (3.5)$$

Il est important de noter que la relation linéaire donnant la masse volumique est un résultat exact, alors que celle concernant la viscosité est une formule d'interpolation *ad hoc*.

En ce qui concerne l'expression générale des forces capillaires, de nombreuses approches numériques utilisent déjà une formulation dite « Continuum Surface Force » (CSF) originellement proposée par Brackbill *et al.* [11]. Cette formulation utilise les propriétés du champ de taux de présence  $c$  pour exprimer la loi de Laplace qui, dans un écoulement diphasique, peut s'écrire

$$\mathbf{F}_\sigma^{diph} = -\sigma \mathbf{n} \kappa \delta_A \quad (3.6)$$

où  $\sigma$  désigne la tension interfaciale entre les deux fluides en présence,  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à l'interface,  $\kappa$  la courbure de l'interface et  $\delta_A$  la fonction de Dirac non-nulle uniquement sur l'interface d'aire  $A$ . Brackbill *et al.* considérant alors que  $\mathbf{n} \approx \nabla c / |\nabla c|$ ,  $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$  et  $\delta_A \approx |\nabla c|$ , ont montré que l'expression des forces capillaires par unité de volume prend la forme

$$\mathbf{F}_\sigma^{diph} = -\sigma \nabla \cdot \left( \frac{\nabla c}{|\nabla c|} \right) \nabla c . \quad (3.7)$$

Une extension directe de (3.6) aux milieux triphasiques peut s'écrire

$$\mathbf{F}_\sigma = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i} \sigma_{ij} (\nabla \cdot \mathbf{n}_{ij}) \mathbf{n}_{ij} \delta_{A_{ij}} , \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{n}_{ij}$  désigne la normale à l'interface entre les fluides  $i$  et  $j$ , et où  $\delta_{A_{ij}}$  est la fonction de Dirac non-nulle uniquement à l'interface d'aire  $A_{ij}$ , et satisfaisant la condition  $\int_\Omega \delta_{A_{ij}} d\mathcal{V} = A_{ij}$  où  $\Omega$  désigne le domaine fluide.

Une expression de  $\mathbf{F}_\sigma$  issue de (3.8) et faisant intervenir les trois coefficients d'étalement  $S_i = \sigma_{jk} - \sigma_{ij} - \sigma_{ik}$  avec  $i \neq j \neq k \neq i$  a récemment été proposée par Kim & Lowengrub [35] et Kim [34] dans le contexte d'une approche de champ de phase (« phase-field »).

Une expression équivalente, mais directement généralisable aux milieux à  $n$  phases avec  $n > 3$  peut être obtenue en introduisant la grandeur  $c_{ij} = c_i / (c_i + c_j) = 1 - c_{ji}$ . Cette expression, établie dans l'annexe 9 s'écrit :

$$\mathbf{F}_\sigma = -\frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i}^3 (c_i + c_j)^2 \sigma_{ij} \nabla \cdot \left( \frac{\nabla c_{ij}}{|\nabla c_{ij}|} \right) \nabla c_{ij} . \quad (3.9)$$

## 2 L'approche « Volume Of Fluid » sans reconstruction d'interface : le code JADIM

Le code de calcul JADIM a vu le jour au début des années 1990 à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, et est développé actuellement au sein du groupe INTERFACE. Il est composé d'un noyau principal destiné à la résolution des équations tridimensionnelles et instationnaires de Navier-Stokes en coordonnées curvilignes orthogonales. Il a servi notamment à la simulation directe de l'écoulement autour de bulles isolées dans des écoulements instationnaires ou cisailés (Rivero [66], Legendre & Magnaudet [44]) ou encore l'étude de l'interaction entre deux bulles (Legendre *et al.* [43]). Plusieurs modules se sont rajoutés à ce noyau, comme le module de « simulation des grandes échelles de la turbulence » (Calmet & Magnaudet [13], Merle *et al.* [52]), le module « suivi lagrangien de particules et couplage inverse », et le module « suivi d'interfaces mobiles » (Benkenida [1], Cranga [18], Bonometti [4]). La simulation numérique du passage de bulles à travers une interface liquide-liquide s'effectue grâce au module « suivi d'interfaces mobiles » par une méthode « Volume Of Fluid » (VOF) sans reconstruction d'interface.

Afin de résoudre les équations d'évolution (3.2)-(3.4) le code JADIM utilise l'expression (3.9) des forces capillaires.

### 2.1 Étapes de résolution des équations d'évolution

Connaissant à l'étape de temps  $n$  les trois taux de présence  $c_i$  associés aux trois phases  $i = 1, 2, 3$ , la vitesse du mélange  $\mathbf{u}$ , ainsi que la pression  $p$ , notés respectivement  $c^n$ ,  $\mathbf{u}^n$ , et  $p^{n-1/2}$ , les étapes de résolution des équations de transport sont les suivantes :

- ▷ Résolution des équations des taux de présence  $c_i$  par un schéma de type « Flux Corrected Transport » (FCT) en utilisant le champ de vitesse initial  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Ce champ est en fait modifié sur les interfaces afin conserver la raideur des fronts lors du transport des taux de présence. Cette étape est détaillée par Bonometti & Magnaudet [6]. À l'issue de celle-ci, une correction est apportée aux champs  $c_i$  afin de satisfaire la contrainte  $\sum_i c_i^{n+1} = 1$  en tout point.
- ▷ Calcul de la masse volumique et de la viscosité du mélange à l'étape  $n + 1$ ,  
 $\varrho^{n+1} = \sum_i c_i^{n+1} \varrho_i$  ;  $\eta^{n+1} = \sum_i c_i^{n+1} \eta_i$ .
- ▷ Calcul des grandeurs intermédiaires  
 $c_i^{n+1/2} = (c_i^{n+1} + c_i^n)/2$  ;  $\varrho^{n+1/2} = (\varrho^{n+1} + \varrho^n)/2$  ;  $\eta^{n+1/2} = (\eta^{n+1} + \eta^n)/2$ .
- ▷ Calcul du terme de la force capillaire  $\mathbf{F}_\sigma^{n+1/2}$  à partir de  $c_i^{n+1/2}$  avec un filtre de lissage appliqué aux champs  $c_i$  pour le calcul de la courbure (Bonometti & Magnaudet [6]).
- ▷ Calcul d'une vitesse intermédiaire  $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$  issue des équations de Navier-Stokes par un schéma hybride de Runge Kutta (RK3) / Crank-Nicolson à partir de  $\mathbf{u}^n$ ,  $p^{n-1/2}$ ,  $\varrho^{n+1/2}$ ,  $\eta^{n+1/2}$  et  $\mathbf{F}_\sigma^{n+1/2}$ . Cette vitesse  $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$  n'a aucune raison d'être à divergence nulle.
- ▷ Calcul du champ  $\mathbf{u}^{n+1}$  à divergence nulle, et  $p^{n+1/2}$  par une méthode de projection à partir du prédicteur  $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$ .

Le schéma global de résolution est précis à l'ordre 1 en temps et à l'ordre 2 en espace.

## 2.2 Résolution des équations des taux de présence

Lors de la résolution des équations de transport, celles-ci sont considérées indépendantes les unes des autres. Il y a donc autant d'équations à résoudre que de phases dans le mélange.

### Schéma FCT

L'équation de transport pour le taux de présence  $c$  ( $c \equiv c_1, c_2, c_3$ ) s'écrit

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla c = 0 \quad (3.10)$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}$  désigne ici le vecteur vitesse connu *a priori*. Cette équation est résolue par un schéma issu de celui développé par Zalesak [75] et qui fait partie de la famille des schémas de type « Flux Corrected Transport » (FCT). L'équation est tout d'abord mise sous forme conservative

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\tilde{\mathbf{u}}) = c\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.11)$$

pour exploiter au mieux les propriétés des maillages décalés et calculer précisément les flux advectifs. Elle est ensuite décomposée en sous-étapes unidimensionnelles afin de réduire la distorsion des fronts, principal problème du schéma de Zalesak initial, comme l'ont montré Bonometti & Magnaudet [6].

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c\tilde{u}_x}{\partial x} &= c \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c\tilde{u}_y}{\partial y} &= c \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c\tilde{u}_z}{\partial z} &= c \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Cette approche à directions découplées à l'avantage de garantir un transport des fronts correct, mais le désavantage de ne plus conserver rigoureusement le volume des fluides au cours du temps sur l'ensemble du domaine  $\Omega$ . Les trois équations (3.12) sont alors résolues successivement. Toutefois l'ordre de résolution est modifié à chaque pas de temps par permutation circulaire afin de ne privilégier aucune direction.

### Discrétisation temporelle

Les trois équations unidimensionnelles sont résolues successivement par des schémas d'Euler explicites à partir de l'étape  $n$ . En reprenant arbitrairement l'ordre de (3.12),  $c^{n+1}$  est calculé suivant la séquence

$$\frac{c^* - c^n}{\Delta t} + \frac{\partial c^n \tilde{u}_x}{\partial x} = c^n \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} \quad (3.13)$$

$$\frac{c^{**} - c^*}{\Delta t} + \frac{\partial c^* \tilde{u}_y}{\partial y} = c^* \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} \quad (3.14)$$

$$\frac{c^{n+1} - c^{**}}{\Delta t} + \frac{\partial c^{**} \tilde{u}_z}{\partial z} = c^{**} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} \quad (3.15)$$

où  $c^*$  et  $c^{**}$  sont des variables intermédiaires.

La condition de stabilité associée à la résolution des équations de transport s'écrit

$$CFL_1 = \max(|\tilde{u}_x|, |\tilde{u}_y|, |\tilde{u}_z|) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (3.16)$$

## Discrétisation spatiale

Le domaine est discrétisé selon une méthode de type Volumes Finis sur un maillage décalé (figure 3.2). En notant  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , et  $\Delta z$  les pas d'espace selon les trois directions, tout nœud  $(x, y, z)$  du maillage s'écrit  $x = i\Delta x$ ,  $y = j\Delta y$  et  $z = k\Delta z$ , et tout champ  $X$  de l'étape  $n$  au point  $(x, y, z)$  est noté  $X^{n,i,j,k}$  ou pour des raisons de simplification,  $X^{n,i}$  (resp.  $X^{n,j}$  et  $X^{n,k}$ ) dans l'équation faisant intervenir la coordonnée  $x$  (resp.  $y$  et  $z$ ). En intégrant les équations sur un élément de volume et en notant  $F_x = c\tilde{u}_x \frac{\Delta t}{\Delta x}$  (respectivement  $F_y$  et  $F_z$ ) le flux à travers une frontière de la cellule de calcul selon la direction  $x$  (respectivement  $y$ ,  $z$ ), on a alors

$$c^{*,i} = c^{n,i} - \left( F_x^{n,i+1/2} - F_x^{n,i-1/2} \right) + c^{n,i} \frac{\tilde{u}_x^{i+1/2} - \tilde{u}_x^{i-1/2}}{\Delta x} \Delta t \quad (3.17)$$

$$c^{**,j} = c^{*,j} - \left( F_y^{*,j+1/2} - F_y^{*,j-1/2} \right) + c^{*,j} \frac{\tilde{u}_y^{j+1/2} - \tilde{u}_y^{j-1/2}}{\Delta y} \Delta t \quad (3.18)$$

$$c^{n+1,k} = c^{**,k} - \left( F_z^{**,k+1/2} - F_z^{**,k-1/2} \right) + c^{**,k} \frac{\tilde{u}_z^{k+1/2} - \tilde{u}_z^{k-1/2}}{\Delta z} \Delta t. \quad (3.19)$$

Les flux  $F$  sont calculés en utilisant une somme de deux flux  $FL$  et  $FH$ . Le premier,  $FL$ , rend le schéma dissipatif mais stable et est qualifié d'ordre faible ( $L$  pour « Low »). Le deuxième,  $FH$ , rend le schéma dispersif mais précis et est qualifié d'ordre élevé ( $H$  pour « High »). Les expressions des différents termes sont explicités par Bonometti & Magnaudet [6]. Le flux  $FL$  est typiquement précis à l'ordre 1 en espace, tandis que le flux  $FH$  est le plus souvent précis à l'ordre 8.

## 2.3 Conservation du volume

Du fait de l'éclatement selon les directions d'espace de (3.12), le volume de chacune des phases n'est pas rigoureusement conservé sur le domaine  $\Omega$ . Il en résulte de faibles fluctuations du volume total des fluides qui peuvent s'accumuler dans le temps et mener à des variations de masse inacceptables sur le long terme. Une procédure contrôlant la variation de volume total dans chaque phase a été développée par Bonometti & Magnaudet [6]. Dans un écoulement diphasique, il est de coutume de ne résoudre qu'une seule équation de transport (3.2), par exemple pour le fluide 1, et d'utiliser ensuite la relation  $c_1 + c_2 = 1$  pour en déduire la fraction de volume locale du fluide 2. Il est possible d'appliquer une procédure similaire pour des écoulements triphasiques grâce à la résolution de deux équations de transport pour les fluides 1 et 2 et d'en déduire ensuite  $c_3$  à partir de la relation  $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ . Néanmoins, à cause de la non conservativité de l'algorithme, la résolution des équations de transport pour les deux premiers fluides peut mener à la solution  $c_1 + c_2 = 1 - \epsilon_c$  avec  $0 < \epsilon_c \ll 1$  alors que seuls les fluides 1 et 2 sont présents à cet endroit, ou même dans le domaine entier  $\Omega$ . Dans de tels cas, une fraction de volume  $c_3 = \epsilon_c$  apparaît spontanément. Dans les écoulements qui vont nous intéresser, il est alors par exemple possible que des gouttes de liquide léger apparaissent dans le sillage d'une bulle lors de son ascension dans le fluide lourd : un exemple probant de ce phénomène est exposé sur la figure 3.1. Dans le but de remédier à cette création artificielle de phase purement numérique, il est nécessaire de calculer l'évolution de chacune des fractions volumiques  $c_i^*$  en résolvant les trois équations (3.2). En dépit du fait que cette procédure augmente légèrement les temps de calcul et les coûts en mémoire des simulations, elle a l'avantage de traiter toutes les fractions volumiques de manière similaire et d'éviter une création artificielle de phase issue de l'accumulation des erreurs faites lors du transport des autres phases. Le désavantage majeur de cette procédure est que, non seulement l'algorithme n'assure pas la stricte conservation du volume de chaque phase en sortie, mais la relation  $c_1^* + c_2^* + c_3^* = 1$  n'est pas non plus satisfaite. Afin de remédier à ces problèmes nous appliquerons dans ce qui suit une correction sur le volume de la bulle (ou goutte), garantissant sa conservation. La raison pour laquelle la conservation du volume de la bulle est privilégié est que ce paramètre est de première importance dans le problème étudié puisqu'il détermine la force de flottabilité qui elle-même détermine l'évolution du système global. Au contraire, les deux liquides dans lesquels la bulle monte successivement sont quasi-stagnants hormis dans la région traversée par la bulle, de telle sorte que si l'on note 2 la phase correspondante à la bulle, la conservation des phases 1 et 3 n'a aucune incidence sur la dynamique de l'écoulement. Ainsi, l'étape de conservation du volume de la phase gazeuse consiste à trouver

un coefficient  $\alpha$  tel que pour chaque cellule  $K$  du maillage,

$$c_{2,K} = \max(\alpha c_{2,K}^*, 1) \quad \text{avec} \quad \sum_K c_{2,K} = \sum_K c_{2,K}^0, \quad (3.20)$$

en notant  $c_{2,K}^0$  la fraction volumique de gaz dans la cellule  $K$  à l'instant initial. La recherche de  $\alpha$  est réalisée de manière itérative grâce à un algorithme de dichotomie jusqu'à obtenir la précision désirée sur le volume global. Dans cette étude, la précision choisie est de 1‰. Enfin, pour assurer la conservation globale  $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ , une renormalisation des fractions volumiques des deux liquides est effectuée sous la forme

$$c_i = c_i^*(1 - c_2)/(c_1^* + c_3^*) \quad \text{avec} \quad i = 1, 3. \quad (3.21)$$

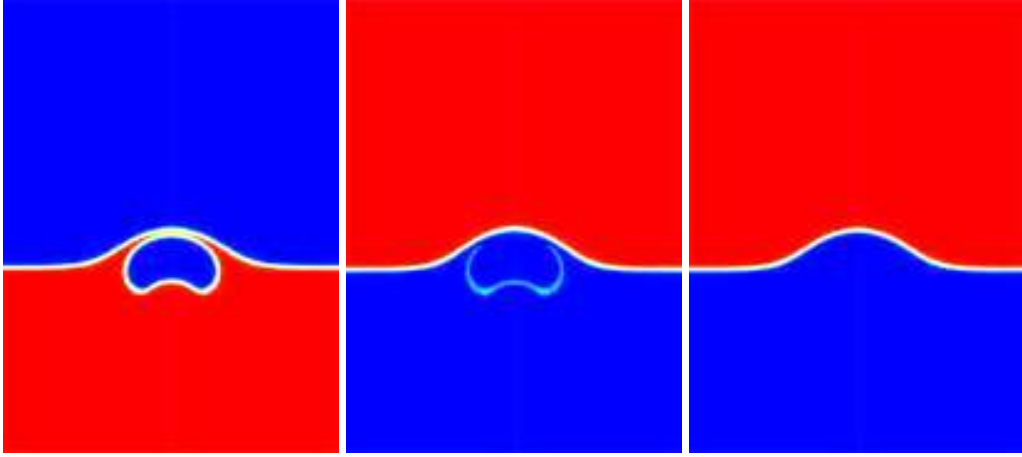


FIGURE 3.1 – Méthode de conservation des volumes pour une bulle d'air ( $Bo = 100$ ,  $Ar = 10$ ) approchant une interface liquide-liquide ( $\eta_3/\eta_1 = 0.037$ ,  $R = 0.8$ ,  $I = 0.77$ ). À gauche et au centre, visualisation de  $c_1$  et  $c_3$  respectivement, calculées à partir de la résolution des deux équations de transport des fluides 1 et 2 et de la déduction de  $c_3$  par la relation  $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ . L'image du milieu montre clairement une création artificielle de la phase 3 autour de la bulle. À droite, visualisation de  $c_3$  calculée à partir de la résolution des trois équations de transport et renormalisée grâce à (3.21).

## 2.4 Résolution des équations de Navier-Stokes

Les équations de continuité et de quantité de mouvement sont formulées dans un système général de coordonnées curvilignes  $(\zeta_i, \zeta_j, \zeta_k)$ . Elles sont ensuite intégrées sur le domaine de calcul  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ , et de normale extérieure  $\mathbf{n}$  (Calmet & Magnaudet [13]). Le système d'équations définissant l'incompressibilité et l'évolution dynamique du mélange triphasique s'écrit alors

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u_i n_i &= 0 \\ \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \zeta_i} + L(\mathbf{u})_i + N(\mathbf{u})_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.22)$$

où  $L$  désigne l'opérateur regroupant les termes visqueux traités par une méthode de Cranck-Nicolson semi-implicite (la somme sur l'indice  $j$  est sous-entendue)

$$L(\mathbf{u})_i = \frac{1}{\rho} \int_{\partial\Omega} \eta \frac{\partial u_i}{\partial \zeta_j} n_j, \quad (3.23)$$

et  $N$  les termes qui seront traités par un schéma de type Runge-Kutta à trois pas de temps

$$\begin{aligned}
N(\mathbf{u})_i &= \int_{\Omega} g_i \\
&+ \frac{1}{\varrho} \int_{\partial\Omega} \eta \frac{\partial u_j}{\partial \zeta_i} n_i \\
&- \int_{\partial\Omega} u_i u_j n_i \\
&+ \frac{1}{\varrho} \int_{\partial\Omega} \left[ -\mathbf{H}_j^i u_i - \mathbf{H}_i^j u_i + 2\mathbf{H}_i^k u_k \delta_{ij} \right] n_j \\
&+ \int_{\Omega} \mathbf{H}_j^i (u_j u_j - \tau_{jj}) - \int_{\Omega} \mathbf{H}_i^j (u_j u_i - \tau_{ii}) \\
&+ \int_{\Omega} \frac{1}{\varrho} \mathbf{F}_{\sigma}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Dans cette dernière expression, les termes  $\mathbf{H}_i^j$  désignent les facteurs de courbure associés aux vecteurs de base  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}_j$  du repère curviligne, et  $\tau_{ij}$  désigne les composantes du tenseur des contraintes visqueuses données par

$$\tau_{ij} = \frac{\eta}{\varrho} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial \zeta_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \zeta_i} - \mathbf{H}_j^i u_j - \mathbf{H}_i^j u_i + 2\mathbf{H}_i^k u_k \delta_{ij} \right]. \tag{3.25}$$

**Remarque.** Les expressions des facteurs de courbures sont données par Rivero [66] et Magnaudet et al. [47].

### Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle des équations d'évolution (3.22) est effectuée selon un algorithme hybride Runge-Kutta/Cranck-Nicolson à trois pas de temps : alors que les termes non linéaires  $N$  définis précédemment sont traités explicitement, les termes diffusifs  $L$  sont calculés à l'aide d'un algorithme de Cranck-Nicolson semi-implicite. Ainsi, les champs de vitesse  $\mathbf{u}^{n,k}$  aux étapes intermédiaires  $k = 1, 2, 3$  ( $\mathbf{u}^{n,0} = \mathbf{u}^n$ ) du pas de temps  $t^n = n\Delta t$  obéissent à

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^{n,k} - \mathbf{u}^{n,k-1}}{\Delta t} = -(\alpha_k + \beta_k) \int_{\Omega} \frac{1}{\varrho} \nabla p^{n-1/2} + \alpha_k L [\mathbf{u}^{n,k}] + \beta_k L [\mathbf{u}^{n,k-1}] + \gamma_k N [\mathbf{u}^{n,k-1}] + \zeta_k [\mathbf{u}^{n,k-2}] \tag{3.26}$$

où les coefficients  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$  et  $\zeta_k$  valent

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \beta_1 = \frac{4}{15}; & \gamma_1 &= \frac{8}{15}; & \zeta_1 &= 0; \\
\alpha_2 &= \beta_2 = \frac{1}{15}; & \gamma_2 &= \frac{5}{15}; & \zeta_2 &= -\frac{17}{60}; \\
\alpha_3 &= \beta_3 = \frac{1}{6}; & \gamma_3 &= \frac{3}{4}; & \zeta_3 &= -\frac{5}{12}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

### Discrétisation spatiale

Les équations de Navier-Stokes incompressible sont intégrées sur chaque volume élémentaire  $\mathcal{V}$  ( $\mathcal{V}_p$  pour l'équation de continuité,  $\mathcal{V}_u$  pour les équations de quantité de mouvement) pour un maillage décalé représenté sur la figure 3.2. Les dérivées spatiales sont quant à elles calculées grâce à un schéma centré d'ordre 2.

La condition de stabilité associée à la résolution des équations de Navier-Stokes s'écrit

$$CFL_2 = \max(|u_x|, |u_y|, |u_z|) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \sqrt{3}. \tag{3.28}$$

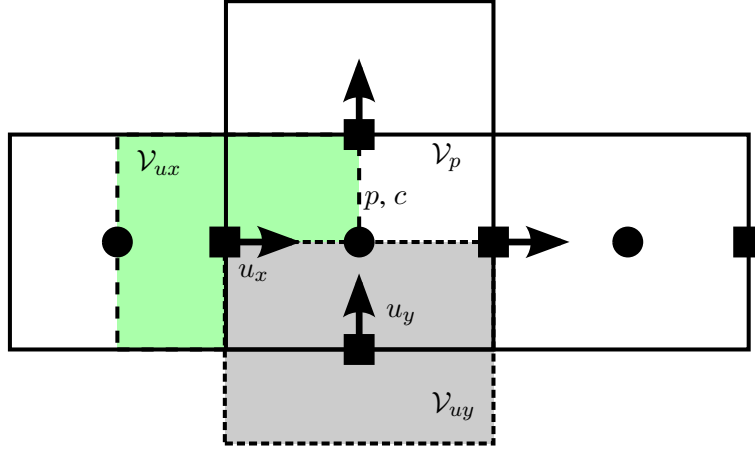


FIGURE 3.2 – Positions des nœuds de pression  $p$ , de fraction volumique  $c$ , et de vitesse  $\mathbf{u}$  sur un maillage décalé.

### Méthode de projection

À l'issue du dernier pas de temps intermédiaire dans (3.26), la contrainte d'incompressibilité n'est pas respectée. Une méthode de projection est alors utilisée pour projeter le champ prédicteur  $\mathbf{u}^{n,3}$  sur le sous-espace des solutions à divergence nulle : un potentiel auxiliaire  $\Phi^{n+1}$  est défini par

$$\varrho^{n+1/2} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n,3}}{\Delta t} = -\nabla \Phi^{n+1} \quad (3.29)$$

et, afin que  $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ , doit vérifier la pseudo-équation de Poisson

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\varrho^{n+1/2}} \nabla \Phi^{n+1} \right) = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n,3}. \quad (3.30)$$

L'équation (3.30) est résolue dans les configurations 2D et axisymétriques par une méthode directe constituée par l'algorithme de Cholesky. Dans les configurations 3D une méthode itérative est utilisée (aucune configuration 3D ne sera toutefois simulée dans cette étude). Connaissant  $\Phi^{n+1}$ ,  $\mathbf{u}^{n+1}$  s'obtient grâce à (3.29) et la pression à l'instant  $(n + \frac{1}{2})\Delta t$  est déterminée par la relation

$$p^{n+1/2} = p^{n-1/2} + \Phi^{n+1}. \quad (3.31)$$



### 3 Le modèle de Cahn-Hilliard / Navier-Stokes triphasique : la plate-forme PELICANS

En 1958, J. W. Cahn et J. E. Hilliard décrivent un modèle « à interface diffuse » qui porte depuis leurs noms. Celui-ci est destiné à modéliser le comportement d'un mélange de deux fluides, considérant que l'interface entre les deux constituants en présence est d'épaisseur non nulle. Autrement dit, il existe une interface de taille finie composée à la fois de la première et de la deuxième phase.

Les équations de Cahn-Hilliard diphasiques ont ensuite été étendues aux mélanges de trois phases. Le modèle utilisé dans le code de simulation numérique PELICANS développé à l'IRSN est issu du modèle triphasique de Boyer & Lapuerta [8]. L'objectif de cette plate-forme PELICANS (acronyme pour Plate-forme Evolutive de Librairies de Composants pour l'Analise Numérique et Statistique) est avant tout de réduire la complexité et le coût l'implémentation informatique : elle met à disposition une bibliothèque de composants logiciels adaptables pour la mise en œuvre d'un ensemble de méthodes numériques dédiées à la résolution des équations aux dérivées partielles. Plusieurs modules se greffent à ce noyau dont celui utilisé dans cette étude qui concerne la résolution numérique directe d'écoulements à bulles décrits par un modèle Cahn-Hilliard / Navier-Stokes, élaboré par Lapuerta [38] et amélioré par la suite par F. Duval, C. Introïni, S. Minjeaud, B. Piar, notamment grâce à l'intégration de plusieurs schémas temporels [9] ainsi que d'un maillage adaptatif [10].

Les modèles de Cahn-Hilliard reposent sur la minimisation d'une énergie libre  $\mathcal{F}$  d'un mélange à plusieurs constituants. Celle-ci dépend des fractions volumiques  $c_i$  de chaque fluide  $i$ , des tensions interfaciales  $\sigma_{ij}$  entre les fluides  $i$  et  $j$ , de l'épaisseur caractéristique des régions interfaciales  $\epsilon$ , ainsi que d'un potentiel  $F(c_1, c_2, c_3)$  appelé « potentiel de Cahn-Hilliard » positif ou nul pour tout  $(c_1, c_2, c_3)$  lorsque  $0 \leq c_i \leq 1$  pour  $i = 1, 2, 3$ , et destiné à décrire la séparation des phases en présence. L'énergie libre proposée par Boyer & Lapuerta [8] prend la forme

$$\mathcal{F} = \int_{\Omega} \frac{12}{\epsilon} F + \frac{3}{8} \Sigma_1 \epsilon |\nabla c_1|^2 + \frac{3}{8} \Sigma_2 \epsilon |\nabla c_2|^2 + \frac{3}{8} \Sigma_3 \epsilon |\nabla c_3|^2 \quad (3.32)$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} \Sigma_1 \Sigma_2 + \Sigma_1 \Sigma_3 + \Sigma_2 \Sigma_3 &> 0 \\ \Sigma_i + \Sigma_j &> 0, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (3.33)$$

où  $\Sigma_i = \sigma_{ij} + \sigma_{ik} - \sigma_{jk}$  désigne l'opposé du paramètre d'étalement (De Gennes *et al.* [21]). En effet, la contribution des termes capillaires dans l'énergie doit être positive *i.e.* la création d'interface doit coûter de l'énergie au système faute de quoi il évolue en créant de l'aire interfaciale. Ainsi, si l'un des coefficients  $\Sigma_i$  est négatif il est nécessaire d'ajouter les hypothèses (3.33) assurant la positivité de  $\mathcal{F}$ .

L'évolution en temps du mélange découle de la minimisation de l'énergie libre  $\mathcal{F}$  sous la contrainte  $c_1 + c_2 + c_3 = 1$  suivant la formulation diffusivité classique (Jacqmin [29]). On obtient ainsi les équations de Cahn-Hilliard / Navier-Stokes triphasiques

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c_i &= \nabla \cdot \left( \frac{M}{\Sigma_i} \nabla \mu_i \right) && \text{pour } i = 1, 2, 3 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla p &= \mathbf{F}_\sigma + \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

où le potentiel chimique  $\mu_i$  est donné par

$$\mu_i = -\frac{3}{4} \Sigma_i \epsilon \nabla^2 c_i + \frac{4 \Sigma_T}{\epsilon} \sum_{j \neq i} \left( \frac{1}{\Sigma_i} \left( \frac{\partial F}{\partial c_i} - \frac{\partial F}{\partial c_j} \right) \right) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3. \quad (3.35)$$

Dans (3.34),  $\boldsymbol{\tau}$  désigne le tenseur des contraintes visqueuses,  $M = 2Pe \epsilon |\mathbf{u}| \prod_{i=1}^3 (1 - c_i^2)$  est la mobilité ( $Pe$  est un nombre de Péclet numérique choisi en pratique de l'ordre de 10),  $\mathbf{F}_\sigma$  représente la force capillaire par unité de volume, et  $\Sigma_T$  est relié aux paramètres d'étalement par la relation

$$\frac{3}{\Sigma_T} = \frac{1}{\Sigma_1} + \frac{1}{\Sigma_2} + \frac{1}{\Sigma_3}. \quad (3.36)$$

La formulation de la force capillaire  $\mathbf{F}_\sigma$ , détaillée dans l'annexe 10, est choisie sous la forme

$$\mathbf{F}_\sigma = \sum_{i=1}^3 \mu_i \nabla c_i. \quad (3.37)$$

Cette expression provient de la définition globale

$$\mathbf{F}_\sigma^{triph} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Sigma_i \mathbf{n}_i \nabla \cdot \mathbf{n}_i \delta_{Ai} \quad (3.38)$$

où  $\mathbf{n}_i$  est approchée par  $\nabla c_i / |\nabla c_i|$  et  $\delta_{Ai}$  désigne la fonction de Dirac non-nulle uniquement à une interface en contact avec le fluide  $i$  et qui vaut  $3\epsilon |\nabla c_i| / 2$  d'après la solution analytique donnant le profil d'une interface plane en dimension 1 à l'équilibre  $c(x) = (1 + \tanh(2x/\epsilon)) / 2$  (Lapuerta [38]). En supposant alors que  $c_i$  ne dépende que de la coordonnée normale à l'interface  $\mathbf{n}_i$  il en résulte (3.37) exacte à un gradient près qui sera au final ajouté à la définition de la pression.

### Le potentiel de Cahn-Hilliard triphasique

La minimisation de l'énergie libre triphasique (3.32) est effectuée sous l'unique contrainte  $c_1 + c_2 + c_3 = 1$  : aucune contrainte de signe n'est imposée sur les fractions volumiques  $c_i$ , ce qui implique que le modèle de Cahn-Hilliard triphasique peut accepter une solution où il existe une phase telle que  $c_i$  soit négatif. Or, les fractions volumiques étant représentatives des concentrations des fluides, il est physiquement nécessaire qu'elles soient comprises entre 0 et 1. C'est pourquoi le potentiel de Cahn-Hilliard  $F$  est construit pour empêcher le système d'évoluer vers un état non admissible où au moins un des taux de présence serait négatif :

$$F = \sum_i \frac{\Sigma_i}{2} c_i^2 (1 - c_i)^2 + 3\Lambda_F c_1^2 c_2^2 c_3^2. \quad (3.39)$$

Le terme  $\sum_i \frac{\Sigma_i}{2} c_i^2 (1 - c_i)^2$  définit un potentiel en triple puits au sein du triangle de Gibbs (où toutes les fractions volumiques sont positives) avec pour minima les états de mélange à une seule phase. Le paramètre  $\Lambda_F$  est quant à lui un paramètre de stabilisation qui est pris nul si  $\Sigma_i$  est positif pour tout  $i$ , et fixé arbitrairement en pratique à une valeur comprise entre 1 et 10 pour un domaine numérique bi-dimensionnel lorsqu'un des paramètres  $\Sigma_i$  est négatif (Lapuerta [39]). Une valeur positive de  $\Lambda_F$  empêche notamment le système d'évoluer vers des minima globaux en dehors du triangle de Gibbs. Une représentation de différents potentiels triphasiques est exposée dans la figure 3.3 afin de visualiser l'influence du terme de stabilisation.

**Remarque.** La solution du système de Cahn-Hilliard peut varier selon la valeur de  $\Lambda_F$  dans le terme de stabilisation  $3\Lambda_F c_1^2 c_2^2 c_3^2$ . Il est alors possible de diminuer l'influence de ce terme au sein du triangle de Gibbs et ainsi préserver la forme du potentiel pour l'ensemble des états admissibles : le terme de stabilisation est « tronqué » en remplaçant  $\Lambda_F$  par la fonction  $\Lambda_F K(c_1, c_2, c_3)$  avec  $K$  nul si pour tout  $i$ ,  $c_i$  est compris entre 0 et 1.

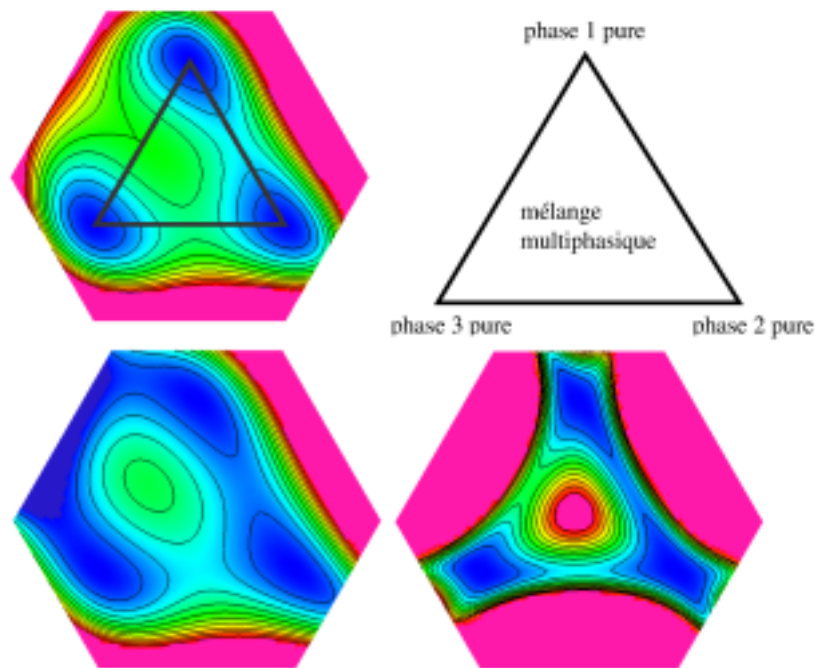


FIGURE 3.3 – Isocontours du potentiel de Cahn-Hilliard avec  $\Sigma_1 = 0.01$ ,  $\Sigma_2 = 0.03$ ,  $\Sigma_3 = 0.05$ ,  $\Lambda_F = 0$ , avec superposition du triangle de Gibbs, en haut à gauche. Triangle de Gibbs en haut à droite. Isocontours du potentiel de Cahn-Hilliard avec  $\Sigma_1 = -0.005$ ,  $\Sigma_2 = 0.025$ ,  $\Sigma_3 = 0.045$  en bas, pour  $\Lambda_F = 0$  à gauche et  $\Lambda_F = 1$  à droite. Les zones en bleu foncé correspondent à des valeurs proches de zéro.

### 3.1 Étapes de résolution des équations de transport

La discrétisation temporelle des équations de Cahn-Hilliard / Navier-Stokes est établie de manière à obtenir un découplage entre les équations de Cahn-Hilliard et celles de Navier-Stokes incompressibles au moyen d'une discrétisation semi-explicite du terme advectif. Le problème global revient donc à résoudre deux sous-problèmes selon un processus en trois étapes :

- ▷ Résolution des équations de Cahn-Hilliard par un algorithme de Newton-Raphson pour les couples d'inconnues  $(c_1, \mu_1)$  et  $(c_2, \mu_2)$ . La valeur de la vitesse est celle calculée au pas de temps précédent.
- ▷ Calcul du couple  $(c_3, \mu_3)$  grâce aux contraintes  $c_3 = 1 - c_1 - c_2$ ,  $\mu_3 = -\left(\frac{\Sigma_3}{\Sigma_1}\mu_1 + \frac{\Sigma_3}{\Sigma_2}\mu_2\right)$ .
- ▷ Résolution des équations de Navier-Stokes par une méthode de projection incrémentale à partir des inconnues de Cahn-Hilliard venant d'être calculées.

### 3.2 Résolution des équations de Cahn-Hilliard

Compte tenu du découplage indiqué ci-dessus, la résolution des équations de Cahn-Hilliard peut se voir comme un problème indépendant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c_i &= \nabla \cdot \left( \frac{M}{\Sigma_i} \nabla \mu_i \right) && \text{pour } i = 1, 2, 3 \\ \mu_i &= -\frac{3}{4} \Sigma_i \epsilon \nabla^2 c_i + \frac{4\Sigma_T}{\epsilon} \sum_{j \neq i} \left( \frac{1}{\Sigma_i} \left( \frac{\partial F}{\partial c_i} - \frac{\partial F}{\partial c_j} \right) \right) && \text{pour } i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.40)$$

où  $\mathbf{u}$  est un champ de vecteur connu. Il est à rappeler que le potentiel chimique  $\mu_i$  peut être compris comme une variable intermédiaire de la résolution des équations de transport des fractions volumiques qui sont les variables primitives dans cette étude.

#### Discrétisation temporelle

L'intervalle de temps  $[0, T]$  est discrétisé régulièrement avec un pas de temps fixe  $\Delta t$ . Le temps à l'étape  $n$  est noté  $t^n = t + n\Delta t$  et par souci de simplification tout champ  $X$  au temps  $t^n$  est noté  $X^n$ . Les équations de Cahn-Hilliard responsables du transport des fractions volumiques sont discrétisées temporellement en un seul pas de temps selon un schéma d'Euler semi-implicite :

$$\begin{aligned} \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla c_i^{n+1} &= \nabla \cdot \left( \frac{M^n}{\Sigma_i} \nabla \mu_i^{n+1} \right) \\ \mu_i^{n+1} &= -\frac{3}{4} \Sigma_i \epsilon \nabla^2 c_i^{n+1} + \frac{4\Sigma_T}{\epsilon} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\Sigma_i} \left( \frac{\partial F^{n+1}}{\partial c_i} - \frac{\partial F^{n+1}}{\partial c_j} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

**Remarque.** Plusieurs discrétisations en temps ont été formulées par Boyer & Minjeaud [9] : convexe-concave, semi-implicite et implicite. Seule la décomposition implicite est utilisée dans cette étude.

#### Discrétisation spatiale

La discrétisation en espace est réalisée selon une approximation en éléments finis de Galerkin sur un maillage adaptatif raffiné au niveau des interfaces entre deux fluides. Les schémas numériques sont basés sur une approximation en éléments  $P1$  ou  $Q1$  pour les champs  $c_1, c_2, \mu_1, \mu_2$ . Les conditions aux bords du domaine de calcul  $\Omega$  de normale extérieure  $\mathbf{n}$  utilisées dans cette étude sont

$$\begin{aligned} \nabla c_i \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \nabla \mu_i \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \quad \text{sur } \partial\Omega \text{ avec } i = 1, 2. \quad (3.42)$$

En notant  $\varphi_I^c$  (resp.  $\varphi_I^\mu$ ) la  $I^{\text{ème}}$  fonction de base des champs scalaires  $c_1$  et  $c_2$  (resp.  $\mu_1$  et  $\mu_2$ ) à l'étape  $n + 1$ , et  $N_{\text{unk}}^c$  (resp.  $N_{\text{unk}}^\mu$ ) le nombre des degrés de liberté de la représentation discrète de  $c_1$  et  $c_2$  (resp.  $\mu_1$  et  $\mu_2$ ) à l'étape  $n + 1$ , le problème revient à résoudre le système matriciel

$[\mathbf{C}_1, \mathbf{M}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{M}_2] \in \mathbb{R}^{N_{\text{unk}}^c} \times \mathbb{R}^{N_{\text{unk}}^\mu} \times \mathbb{R}^{N_{\text{unk}}^c} \times \mathbb{R}^{N_{\text{unk}}^\mu}$  tel que

$$\begin{aligned} c_i^{n+1}(\mathbf{x}) &= \sum_{0 \leq I < N_{\text{unk}}^{c_i}} \mathbf{C}_{i,I} \varphi_I^c(\mathbf{x}) \\ \mu_i^{n+1}(\mathbf{x}) &= \sum_{0 \leq I < N_{\text{unk}}^{\mu_i}} \mathbf{M}_{i,I} \varphi_I^\mu(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \text{avec } i = 1, 2 \quad (3.43)$$

dont les composantes sont reliées par les équations

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c_i^{n+1} \right) \varphi_I^\mu + \int_{\Omega} \frac{M^n}{\Sigma_i} \nabla \mu_i^{n+1} \cdot \nabla \varphi_I^\mu &= 0 \quad 0 \leq I < N_{\text{unk}}^\mu \\ \int_{\Omega} \mu_i^{n+1} \varphi_I^c - \int_{\Omega} \frac{3}{4} \epsilon \Sigma_i \nabla c_i^{n+1} \cdot \nabla \varphi_I^c - \int_{\Omega} D_i(c_1^{n+1}, c_2^{n+1}) \varphi_I^c &= 0 \quad 0 \leq I < N_{\text{unk}}^c \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\text{avec } D_i(c_1, c_2) = \frac{4\Sigma_T}{\epsilon} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\Sigma_i} \left( \frac{\partial F}{\partial c_i} - \frac{\partial F}{\partial c_j} \right) \quad (3.45)$$

**Remarque.** En raison de l'emploi du maillage adaptatif, les fonctions de base n'ont aucune raison d'être identiques entre deux étapes temporelles.

Pour résoudre ce système, on emploie un algorithme de Newton-Raphson dont les détails sont reportés dans la thèse de Lapuerta [39].

### 3.3 Résolution des équations de Navier-Stokes

Le deuxième sous-problème concerne la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles. Ici, la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement permet un contrôle numérique de l'énergie cinétique. Par ailleurs, après avoir calculé le champ de vitesse à divergence non nulle grâce aux nouvelles fractions volumiques,  $\mathbf{u}$  est projeté sur le sous-espace des vecteurs à divergence nulle grâce à une méthode de projection incrémentale récemment développée par Minjeaud [54].

#### Discrétisation temporelle

On rappelle que les masses volumiques, viscosités, et forces capillaires du problème discrétisé sont calculées à partir des fractions volumiques et potentiels chimiques trouvés à partir de la résolution du problème de Cahn-Hilliard dans le même pas de temps.

Une discrétisation possible des équations de Navier-Stokes du problème (3.34) est :

$$\begin{aligned} \sqrt{\varrho^{n+1}} \frac{\sqrt{\varrho^{n+1}} \mathbf{u}^{n+1} - \sqrt{\varrho^n} \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \varrho^{n+1} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n+1} \nabla \cdot (\varrho^{n+1} \mathbf{u}^n) \\ - \nabla \cdot \eta^{n+1} [\nabla \mathbf{u}^{n+1} + {}^T \nabla \mathbf{u}^{n+1}] + \nabla p^{n+1} = \varrho^{n+1} \mathbf{g} + \mathbf{F}_\sigma^{n+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

**Remarque.** Cette expression des termes de convection permet d'obtenir une formulation variationnelle qui assure un contrôle de l'énergie cinétique quelque soit la règle de quadrature des éléments finis utilisés grâce à l'antisymétrie du terme  $\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\varrho \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} - \frac{1}{2} (\varrho \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$  pour tout vecteur  $\mathbf{a}$  (Boyer et al. [7]).

## Discretisation spatiale

La discretisation en espace est réalisée à partir d'une approximation en éléments finis de Galerkin. Cette approximation utilise des éléments finis  $P1$  ou  $Q1$  pour le champ de pression, alors que des éléments  $P2$  ou  $Q2$  sont employés pour le champ de vitesse  $\mathbf{u}$ . Les conditions aux limites utilisées sur le domaine  $\Omega$  de normale extérieure  $\mathbf{n}$  sont des conditions de glissement,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \mathbf{n} \times (\eta [\nabla \mathbf{u} + {}^T \nabla \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (3.47)$$

En notant  $\varphi_I^p$  (resp.  $\varphi_I^{\mathbf{u}}$ ) la  $I^{\text{ème}}$  fonction de base du champ  $p$  (resp.  $\mathbf{u}$ ) à l'étape  $n+1$ , et  $N_{\text{unk}}^p$  (resp.  $N_{\text{unk}}^{\mathbf{u}}$ ) le nombre de degrés de liberté de la représentation discrète de  $p$  (resp.  $\mathbf{u}$ ) à l'étape  $n+1$ , le problème revient à résoudre le système matriciel

$[\mathbf{P}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{U}_2] \in \mathbb{R}^{N_{\text{unk}}^p} \times \mathbb{R}^{N_{\text{unk}}^{\mathbf{u}}} \times \mathbb{R}^{N_{\text{unk}}^p} \times \mathbb{R}^{N_{\text{unk}}^{\mathbf{u}}}$  tel que

$$\begin{aligned} p^{n+1}(\mathbf{x}) &= \sum_{0 \leq I < N_{\text{unk}}^c} \mathbf{P}_I \varphi_I^p(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}) &= \sum_{0 \leq I < N_{\text{unk}}^{\mathbf{u}}} \mathbf{U}_I \varphi_I^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.48)$$

dont les composantes sont reliées par les équations

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varrho^{n+1} \mathbf{g} \cdot \varphi_I^{\mathbf{u}} + \int_{\Omega} \mathbf{F}_{\sigma}^{n+1} \cdot \varphi_I^{\mathbf{u}} &= \int_{\Omega} \frac{\sqrt{\varrho^{n+1}} \sqrt{\varrho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} - \sqrt{\varrho^n} \mathbf{u}^n}}{\Delta t} \cdot \varphi_I^{\mathbf{u}} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\varrho^{n+1} \mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1}] \cdot \varphi_I^{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\varrho^{n+1} \mathbf{u}^n \cdot \nabla \varphi_I^{\mathbf{u}})] \cdot \mathbf{u}^{n+1} \\ &+ \int_{\Omega} \eta^{n+1} [\nabla \mathbf{u}^{n+1} + {}^T \nabla \mathbf{u}^{n+1}] : \nabla \varphi_I^{\mathbf{u}} \\ &- \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot \varphi_I^{\mathbf{u}} \quad 0 \leq I < N_{\text{unk}}^{\mathbf{u}} \\ \int_{\Omega} \varphi_I^p \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0 \quad 0 \leq I < N_{\text{unk}}^p \end{aligned} \quad (3.49)$$

La satisfaction de la contrainte d'incompressibilité est assurée grâce à une méthode de projection incrémentale (Minjeaud [54]).

## 4 Mise en œuvre des deux codes dans le cadre du problème considéré

Tout au long de cette étude, les simulations exposées sont axisymétriques, réalisées dans un domaine cylindrique vertical de rayon  $6d$  et de hauteur  $12d$  où  $d$  désigne le diamètre équivalent de la bulle injectée. La position initiale de l'interface est située à une distance de  $7d$  par rapport au haut du domaine. Le maillage utilisé par JADIM emploie 1200 cellules uniformément distribuées dans la direction verticale. Dans la direction horizontale, 200 points sont uniformément distribués dans la région centrale jusqu'à une distance de  $2d$  de l'axe, et 100 points sont distribués dans la région externe suivant une loi arithmétique. Cette résolution avec 100 mailles par diamètre de bulle est utilisée par Bonometti & Magnaudet [5] qui ont montré la convergence en maillage pour divers cas de bulles en ascension dans des fluides newtoniens, y compris des bulles toriques. PELICANS utilise un raffinement adaptatif afin d'améliorer la résolution dans les régions interfaciales. Ici, le niveau de raffinement est sélectionné de manière à ce que quatre nœuds du maillage se retrouvent dans l'interface d'épaisseur  $\epsilon$ . La taille des plus petites cellules utilisées dans PELICANS est, comme pour JADIM, choisie de l'ordre de  $d/100$ , de manière à pouvoir comparer les résultats des deux codes pour des maillages équivalents. Dépendantes du degré de raffinement local qui lui-même varie avec la topologie des interfaces, les simulations numériques de PELICANS impliquent un nombre de degrés de liberté compris entre  $3 \cdot 10^4$  et  $6 \cdot 10^4$  pour chaque composante de vitesse, et entre  $8 \cdot 10^3$  et  $16 \cdot 10^3$  pour le champ de pression. Dans les deux codes, des conditions de glissement sont imposées sur l'ensemble des bords du domaine afin que le fluide entraîné par les bulles puisse redescendre le long de la paroi latérale. Les simulations sont arrêtées avant que la bulle n'arrive trop près du bord supérieur du domaine dans le but d'éviter les effets de confinement.

Les deux codes ont été validés par le passé dans de nombreuses configurations diphasiques (Bonometti [4], Lapuerta [38]). Toutefois, une étude complémentaire de validation est présentée dans cette section afin de cerner l'influence de la position initiale de la bulle ainsi que des rapports de masse volumique et de viscosité entre la bulle et le liquide lourd dans lequel elle évolue. En effet, ces paramètres peuvent concourir à une augmentation ou à une diminution du temps de calcul ainsi que du coût en mémoire, sans modification apparente de l'évolution de l'écoulement. À taille de maille fixée, il est par exemple intéressant de choisir le plus petit domaine possible afin de restreindre le nombre d'inconnues du problème.

### 4.1 Influence de la proximité initiale des bulles par rapport à la paroi inférieure

La distance entre les bulles et les parois du domaine de calcul peut influencer la vitesse locale de l'écoulement et donc la forme des interfaces. Cette influence est notable en écoulement de Stokes ou en présence de fluides très visqueux. Pour évaluer cet effet de confinement, plusieurs bulles sont étudiées numériquement dans des configurations diphasiques, immergées dans un fluide de forte viscosité ( $Ar = \rho_1 g^{1/2} d^{3/2} / \eta_1 = 1.57$ ) et initialement injectées à différentes hauteurs  $h_0$  (définie comme la distance entre le sommet de la bulle et la paroi inférieure). La figure 3.4 montre les formes des interfaces pour des hauteurs initiales  $h_0 = 1.5d, 2d, 2.5d, 3d$  après un trajet de  $d/2$ . L'influence de la proximité à la paroi est alors évidente : plus la bulle est initialement proche de celle-ci, plus elle s'allonge du fait de la différence de vitesse entre l'avant et l'arrière où l'influence de la condition d'imperméabilité  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  se fait sentir. Plus l'écoulement est lent, *i.e.*  $Ar$  petit, plus ce phénomène est visible car l'aspiration du liquide par la bulle est plus difficile. La distance minimale initiale entre la paroi inférieure et le sommet de la bulle nécessaire à l'élimination de cet artefact est d'environ  $2.5d$  dans ce cas. Néanmoins, aucune des simulations effectuées dans cette étude ne sera caractérisée par  $Ar \leq 2$ , ce qui permet de limiter la distance initiale à  $h_0 = 2.5d$  pour l'intégralité des simulations. Par ailleurs, le domaine est pris suffisamment grand dans la direction vertical (de  $12d$ ) pour empêcher toute interaction sensible entre les interfaces et le bord supérieur.

### 4.2 Influence de la largeur du domaine de calcul

Un deuxième paramètre important lié à la géométrie du domaine de calcul est sa largeur. Ce paramètre peut influencer fortement la vitesse d'ascension de la bulle, car le reflux de liquide lourd est limité par l'espace entre la bulle et la paroi latérale. La figure 3.5 montre les vitesses d'ascension de bulles caractérisées par  $Bo = 25$ ,  $Ar = 6.3$  pour différentes largeurs de domaine. Un bon compromis entre temps de calcul et influence

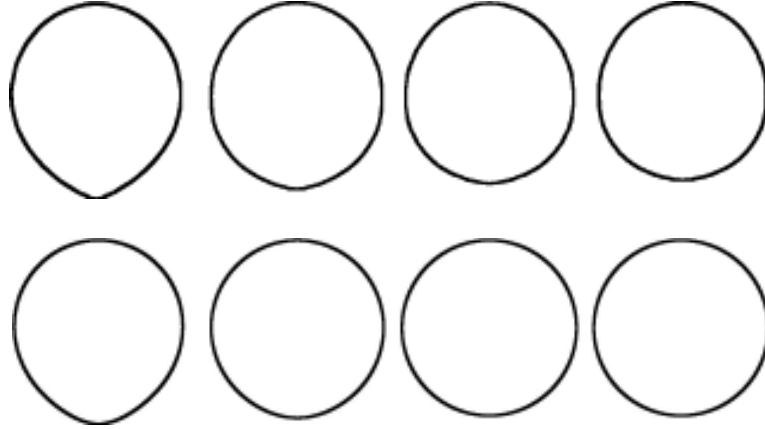


FIGURE 3.4 – Effet de la proximité de la paroi inférieure sur la forme de la bulle pour quatre simulations réalisées avec JADIM (séquence du haut) et PELICANS (séquence du bas). Les bulles ont chacune parcouru une distance de  $0.5d$  depuis leur position initiale. De gauche à droite, les distances initiales entre la paroi inférieure et le sommet des bulles sont respectivement  $h_0 = 1.5d, 2d, 2.5d$  et  $3d$ .

sur la vitesse terminale de la bulle est atteint pour un rayon du domaine cylindrique de  $r = 6d$ . Les simulations réalisées avec les deux codes montrent en effet que les vitesses terminales de bulles adimensionnées par  $\sqrt{gd}$  stagnent aux alentours de 0.34 à partir de  $r = 4d$ . Néanmoins, lors de calculs en configurations triphasiques, la largeur de la colonne de liquide lourd entraîné par la bulle peut atteindre un rayon de  $3d$  à sa base. Son évolution peut donc être influencée par la paroi latérale. La prudence recommande par conséquent de choisir  $r = 6d$  dans toute cette étude.

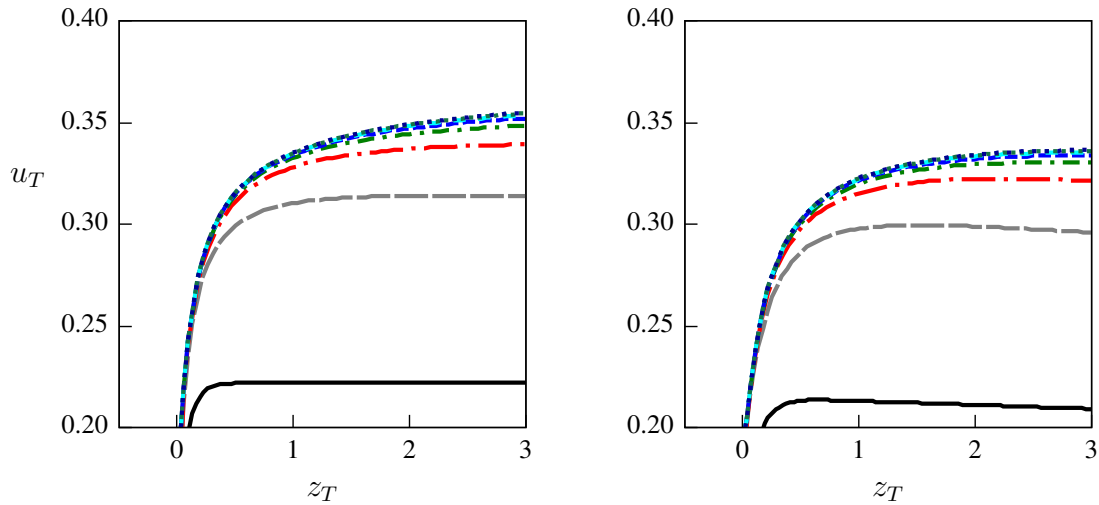


FIGURE 3.5 – Vitesses terminales dans les simulations réalisées avec JADIM à gauche, PELICANS à droite, pour différents rayons du domaine de calcul cylindrique, en fonction de la position du sommet de la bulle. Rayons de : —  $1d$ , - - -  $2d$ , — · —  $3d$ , · · ·  $4d$ , - - -  $5d$ , - - -  $6d$ , · · ·  $7d$ , · · ·  $8d$ .  $Bo = 25, Ar = 6.3$ .

### 4.3 Influence des rapports de masse volumique et viscosité

Les fluides utilisés dans nos expériences ont des masses volumiques typiquement 1000 fois plus grandes que celle des bulles, et des viscosités au minimum 50 fois plus importantes. Pour évaluer l'influence de ces rapports sur l'écoulement, nous considérons l'évolution d'une bulle correspondant à  $Bo = 25$  et  $Ar = 6.3$ . Elle évolue dans un fluide renfermé dans un cylindre de rayon égal à  $6d$ , de hauteur  $12d$ . La figure 3.6 montre les évolutions de la vitesse du sommet des bulles simulées par JADIM et PELICANS au cours de leur ascension, pour différents rapports de masse volumique  $\rho_2/\rho_1$  et de viscosité  $\eta_2/\eta_1$ . La tendance est ici évidente pour le rapport de masse volumique : plus les bulles sont « lourdes », plus la force d'Archimède qu'elles subissent est faible,



moins elles montent vite. En ce qui concerne les rapports de viscosité, plus la viscosité du fluide environnant est élevée et plus la vitesse de la bulle est faible compte tenu de la dissipation nécessaire pour déformer le liquide. Les simulations de la figure 3.6 montrent également que pour des rapports  $\rho_2/\rho_1$  et  $\eta_2/\eta_1$  de l'ordre du centième, plus aucune influence de la valeur précise de ces rapports n'est observée sur la vitesse d'ascension des bulles. Pour l'intégralité de cette étude, ces rapports seront donc fixés arbitrairement à  $\rho_2/\rho_1 = \eta_2/\eta_1 = 0.01$ .

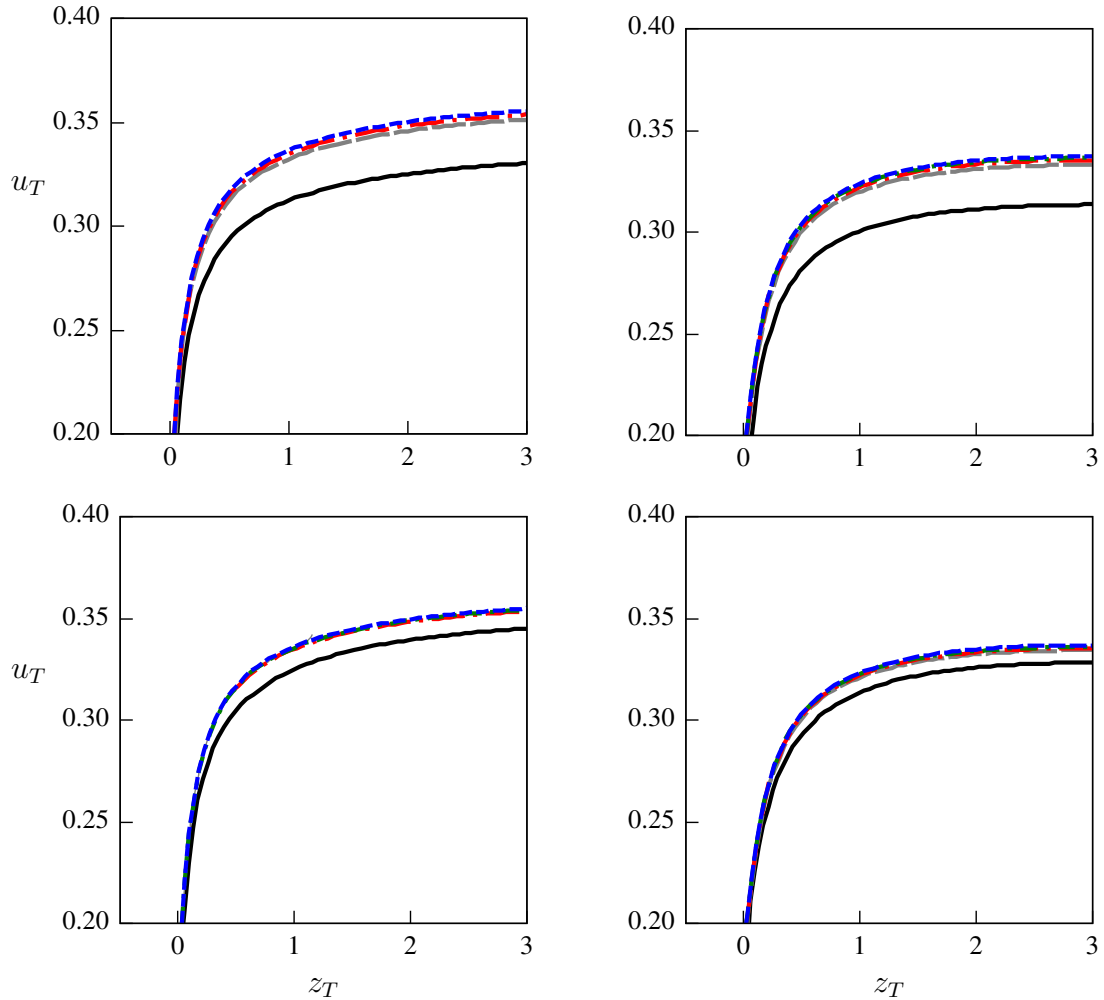


FIGURE 3.6 – Vitesses terminales des simulations réalisées avec JADIM à gauche, PELICANS à droite, pour différents rapports de masse volumique  $\rho_2/\rho_1$  en haut (rapport de viscosité fixé à  $\eta_2/\eta_1 = 1/100$ ) et rapports de viscosités  $\eta_2/\eta_1$  en bas (rapports de masses volumiques fixé à  $\rho_2/\rho_1 = 1/100$ ). Rapports de : — 1/10, — — 1/50, — · — 1/100, - · - 1/200, - - - 1/1000.  $Bo = 25$ ,  $Ar = 6.3$ .



**Deuxième partie**

**Observations et résultats**



## Chapitre 4

# Observations expérimentales

L'étude expérimentale présentée dans ce chapitre s'intéresse principalement à l'approche d'une bulle isolée vers une interface liquide-liquide initialement plane au repos, et à son éventuelle traversée et ascension dans la phase supérieure. En faisant varier la taille des bulles, les concentrations de glycérine dans la phase lourde ainsi que les caractéristiques des huiles de silicone, un large éventail de conditions physiques est exploré, menant à une grande diversité de configurations d'écoulement et de formes de bulles. Le but principal de cette étude est d'obtenir une vision générale des éléments clés de ce problème, à savoir l'influence du drainage du film sur la dynamique de bulle quand celle-ci atteint l'interface liquide-liquide, la topologie finale des trois phases, et, dans le cas où la bulle arrive à traverser l'interface, l'évolution de sa vitesse et du volume de liquide lourd entraîné durant son ascension dans la phase légère.

Afin d'examiner jusqu'où une extrapolation des analyses pour une seule bulle est possible dans le cas de plusieurs bulles, une étude qualitative est également menée pour des trains de bulles de tailles et fréquences variables.

# 1 Cartographie d'écoulement

## 1.1 Cartographie générale

Reprenant les différentes propriétés des fluides répertoriés dans le tableau 1.1 du chapitre 1, et prenant en compte une variation du diamètre équivalent des bulles de 1 mm à 2 cm, les expériences réalisées couvrent la gamme suivante de nombres adimensionnels définis par (2.2) (cf. chapitre 2) et dont la définition est rappelée ici :

$$\begin{aligned}
 0.035 &\leq R \leq 0.25 & (R &= (\varrho_1 - \varrho_3)/\varrho_1) \\
 0.14 &\leq Bo \leq 108 & (Bo &= \varrho_1 g d^2 / \sigma_{21}) \\
 0.22 &\leq Ar \leq 8815 & (Ar &= \varrho_1 g^{\frac{1}{2}} d^{\frac{3}{2}} / \eta_1) \\
 0.0175 &\leq \Lambda \leq 530 & (\Lambda &= \eta_3 / \eta_1) \\
 0.20 &\leq I \leq 0.62 & (I &= \sigma_{13} / \sigma_{12}) \\
 0.30 &\leq S \leq 0.47 & (S &= \sigma_{23} / \sigma_{12}).
 \end{aligned}$$

Conséquemment, il semble judicieux en première approximation de représenter l'ensemble des expérimentations sur un diagramme à trois axes  $(Bo, Ar, \Lambda)$ . Des coupes de ce diagramme selon l'axe  $(O, \Lambda)$  sont représentées sur la figure 4.1. Plusieurs images issues de séquences expérimentales y sont projetées lors de la traversée d'une bulle à l'interface avec possibilité d'entraînement.

**Remarque.** *Chaque coupe peut être comparée avec la cartographie diphasique de Clift et al. [17] synthétisant la forme finale de bulles de gaz évoluant dans des liquides newtoniens. Le lecteur pourra également s'intéresser à cette même cartographie complétée par Bhaga & Weber [2] qui comprend différents régimes additionnels.*

Selon leurs nombres de Bond et d'Archimède finaux, les bulles en ascension dans le liquide léger peuvent prendre des formes ellipsoïdales, présenter des queues allongées, prendre des formes de calottes sphériques, ou encore, pour des nombres de Bond et d'Archimède élevés, adopter une forme toroïdale. En définissant  $Bo_u = (1 - R)Bo/S$  et  $Ar_u = (1 - R)Ar/\Lambda$  respectivement les nombres de Bond et d'Archimède associés à l'évolution des bulles dans le liquide supérieur, les transitions entre bulles sphériques et bulles en calottes sphériques se font approximativement à  $Bo_u \approx 20$  si  $Ar_u \geq 20$ . Celles entre bulles en calottes sphériques et tores se font pour  $Bo_u \approx 125$  si  $Ar_u \geq 50$ .

La figure 4.1 indique que pour de petites bulles avec  $Bo < 6$  dans les séries B, D supérieure, E, et avec  $Bo < 7$  dans les séries A, C, D inférieure, celles-ci restent piégées à l'interface liquide-liquide pendant plusieurs dizaines de secondes, voire plusieurs minutes. Aucun changement macroscopique n'est remarqué lors de l'arrêt précoce de la caméra pour cause d'insuffisance de stockage mémoire. Ce phénomène correspond à des situations où les effets capillaires sont suffisants pour contrecarrer la force de flottabilité. Les bulles sont recouvertes d'un film de liquide lourd qui doit finalement être drainé et relâcher le gaz dans la phase supérieure après rupture. Ce problème général du drainage d'un film séparant une interface entre deux liquides et une bulle ou une goutte ne possède pas de solution théorique générale, même dans la limite des faibles nombres de Reynolds ( $Re \ll 1$ ). En effet, la forme des différentes interfaces est a priori inconnue : il s'agit d'un problème à frontières libres. Il est donc nécessaire de présupposer une donnée géométrique afin de résoudre les équations du modèle général de drainage, comme étudié par Princen [61] et Princen & Mason [62] [63] qui présupposent que le rayon de courbure du point le plus bas de la goutte est connu. Greene *et al.* [28] ont également émis la formulation d'un critère théorique selon lequel une bulle sphérique reste encapsulée dans un film de liquide lourd et piégée à l'interface lorsque

$$Bo < \frac{6I}{1 - R}. \quad (4.1)$$

Ce critère de pénétration des bulles dans le fluide supérieur est basé sur la comparaison entre la force de flottabilité ascendante des bulles et les forces capillaires de l'interface liquide-liquide qui s'y opposent. L'idée principale réside dans le fait que les forces capillaires sont maximales lorsque le ménisque est vertical et que le passage ne peut avoir lieu que si la force de flottabilité contre-balance ce seuil. Le critère (4.1) indique que pour ces séries, la limite de piégeage se situe aux alentours de  $Bo = 5$ . De la même manière, le critère de passage de Greene *et al.* appliqué aux séries F, G, H, de la figure 4.1 indique que les bulles ne sont pas stoppées lorsque

le nombre de Bond associé  $Bo$  est supérieur à 1.8, ce qui est raisonnablement en accord avec les transitions de piégeage observées.

Les bulles de volume suffisamment important qui réussissent à s'extraire de l'interface liquide-liquide évoluent dans le liquide supérieur en entraînant une colonne de liquide lourd. Les observations expérimentales montrent que la colonne est directement accrochée à l'arrière de la bulle impliquant que le drainage du film s'est réalisé auparavant. Une exception notable est néanmoins à remarquer pour des bulles toriques, complètement encapsulées dans le liquide lourd. Lorsque le fluide inférieur est très visqueux ( $\Lambda \ll 1$ ), les bulles accélèrent immédiatement après avoir passé l'interface liquide-liquide, bien que les forces de flottabilité soient moindres dans le fluide supérieur. Ce phénomène peut entraîner une suppression totale de la colonne de liquide lourd et éventuellement causer la coupure de l'arrière de la bulle encore piégé par l'interface (série A,  $Bo \approx 10$ ,  $Ar \approx 3.2$ ). Dans le cas opposé où le fluide supérieur est très visqueux et se déforme peu, *i.e.*  $\Lambda \gg 1$ , la colonne a tendance à éclater en plusieurs gouttes qui retombent ensuite vers l'interface. Puisqu'elle est directement liée à la largeur de l'arrière de la bulle, la largeur de la tête de la colonne est bien plus importante pour des calottes sphériques que pour des bulles sphériques et le volume de liquide entraîné n'en est qu'augmenté. Par ailleurs, pour un nombre de Bond donné, plus le nombre de Reynolds est grand dans le fluide supérieur, plus le sillage de la bulle est fin et plus le volume déplacé est faible.

Les configurations où les liquides ont une viscosité supérieure à 100 cP (séries A, B, C, D, E) correspondent à des écoulements axisymétriques pour des tailles de bulles inférieures à 2 cm de diamètre. Les trajectoires des bulles des séries F, G, H sont quant à elles tridimensionnelles dans la phase inférieure pour des diamètres supérieurs à 2 mm et, dans la phase supérieure, pour des nombres d'Archimède  $Ar > 3000$ . Dans ces régimes, qui correspondent à des nombres de Reynolds de l'ordre de 1000, le sillage d'objets axisymétriques est connu pour être tridimensionnel, qu'il s'agisse de sphères ou de disques obéissant à des conditions de non glissement (Natarajan & Acrivos [57]) ou de bulles ellipsoïdales (Magnaudet & Mougin [46]). Bien que les nombres de Reynolds des bulles dans la phase supérieure chûtent d'un ordre de grandeur dans ces trois séries, ils restent suffisants pour que le sillage demeure tridimensionnel. On remarquera que le volume déplacé pour les géométries des séries F ( $\Lambda = O(10)$ ) sont similaires à ceux des séries G ( $\Lambda = O(100)$ ) et H ( $\Lambda = O(500)$ ) où la viscosité est bien plus importante et où le nombre de Reynolds est donc bien plus faible. Par conséquent l'écoulement autour de la bulle est beaucoup moins sensible au nombre de Reynolds qu'en configuration diphasique, lorsque la bulle est encore proche de l'interface.

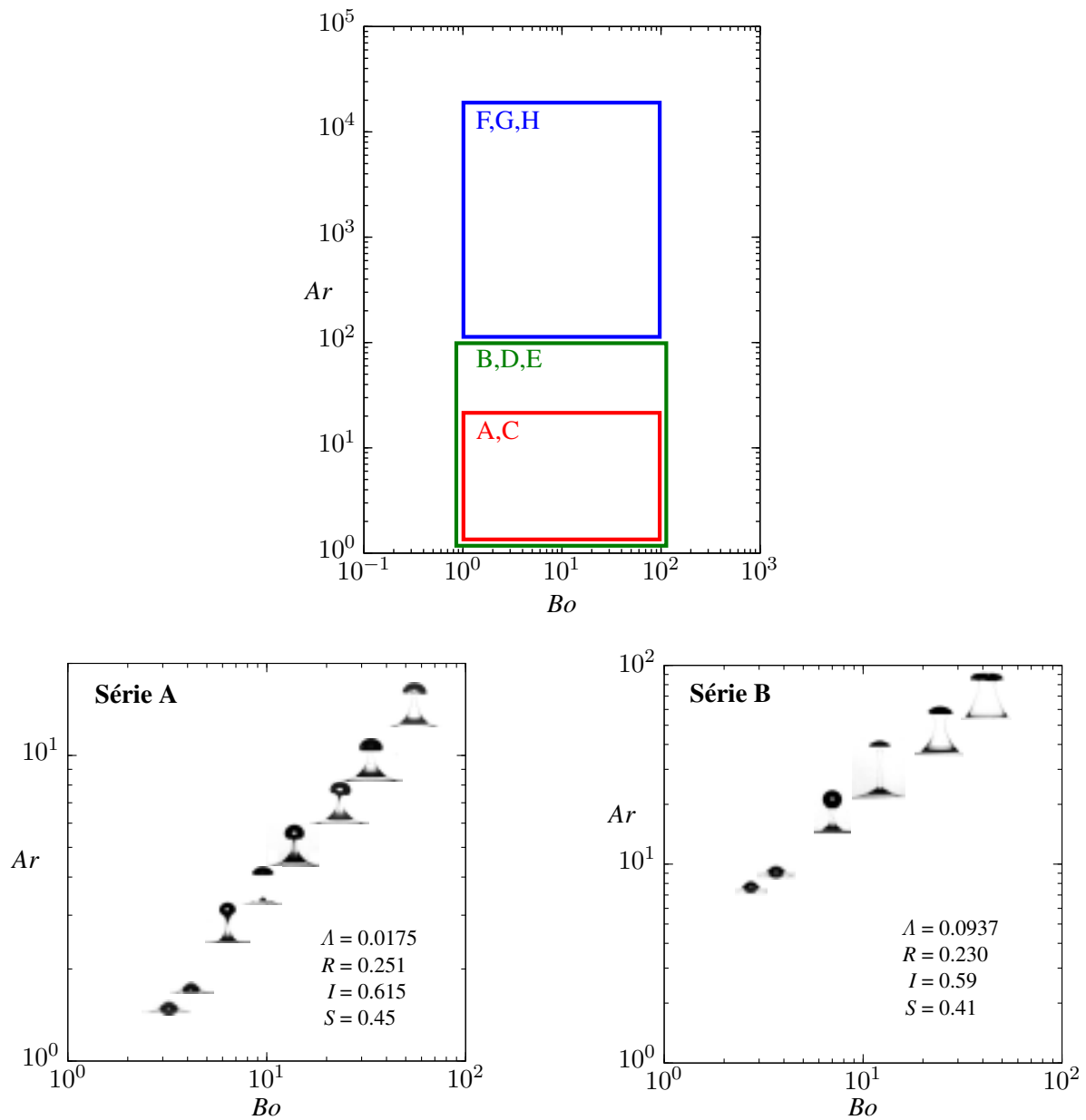
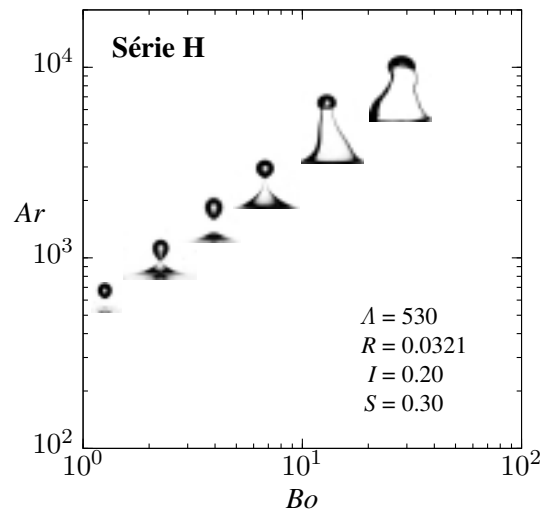
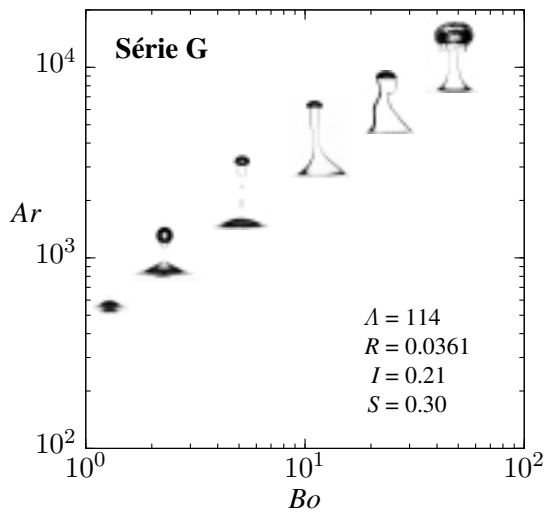
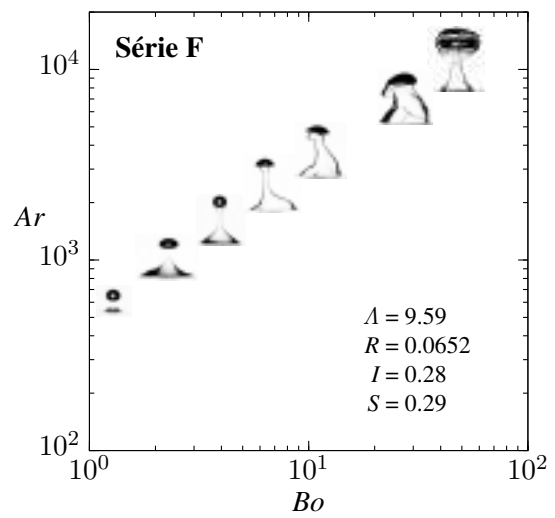
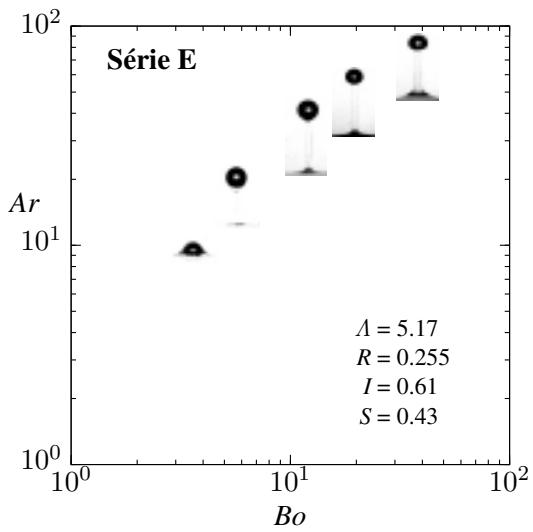
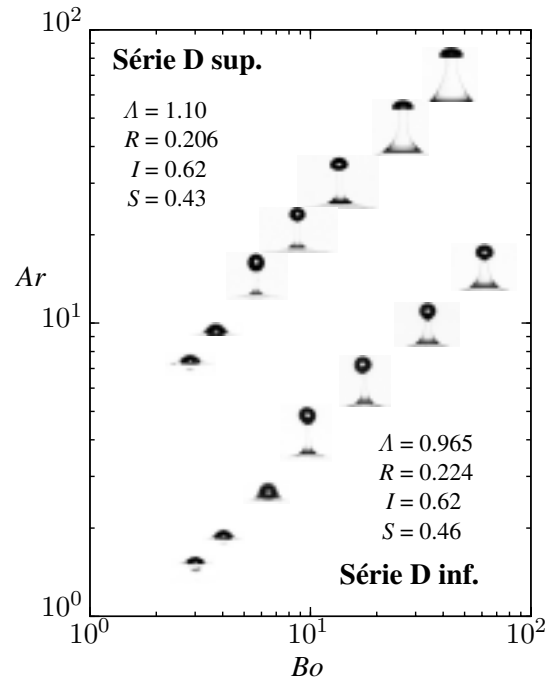
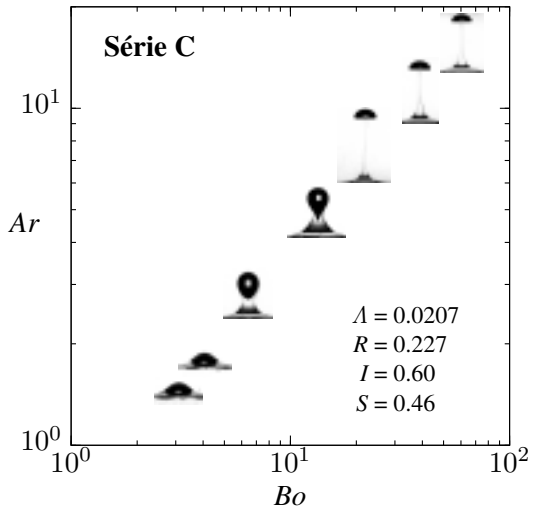


FIGURE 4.1 – Formes de bulles et entraînement de liquide lourd dans plusieurs séries d’expériences (seule la taille des bulles varie dans chaque série).

- Série A : eau+glycérine 95% / huile de silicone 47V10.
- Série B : eau+glycérine 85% / huile de silicone 47V10.
- Série C : eau+glycérine 95% / huile de silicone 47V100.
- Série D supérieures : eau+glycérine 85% / huile de silicone 47V100.
- Série D inférieures : eau+glycérine 95% / huile de silicone 47V500.
- Série E : eau+glycérine 85% / huile de silicone 47V500.
- Série F : eau / huile de silicone 47V10.
- Série G : eau / huile de silicone 47V100.
- Série D : eau / huile de silicone 47V500.





## 1.2 Cartographie détaillée

De plus amples détails sont maintenant donnés dans cette section sur les régimes d'ascension des bulles dans les différents fluides et couples de fluides utilisés. Une attention toute particulière est donnée sur la représentation des bulles puisque *les photographies sont intégralement représentées à la même échelle*.

Tout d'abord, il est intéressant de rappeler les régimes connus des configurations diphasiques exposées sur la figure 4.2 car la longueur du sillage des bulles à l'approche de l'interface, dépendant de la forme et de la vitesse d'ascension, influence directement le volume de liquide lourd entraîné. Pour chaque fluide, les paramètres physiques sont fixés, et seuls les paramètres géométriques *i.e.* les diamètres équivalents des bulles varient, entraînant la variation des nombres de Bond et d'Archimède. La première remarque concerne les transitions de forme entre petites bulles sphériques ou quasi-sphériques et les bulles plus conséquentes, ellipsoïdales voire en calottes sphériques dans les mélanges avec glycérine. Dans le cas de l'eau, cette transition entre bulles sphériques et ellipsoïdales s'opère pour un nombre de Bond de 0.5, ce qui correspond également dans cette étude à la transition entre trajectoires rectiligne et en zig-zag. Cette observation conforte l'hypothèse d'une eau contaminée (démontrée au paragraphe §7.3 du chapitre 1) car Duineveld [24] indique que cette transition dans l'eau pure intervient pour des bulles déjà ellipsoïdales de rapport de forme 1.85, *i.e.* lorsque le grand axe de l'ellipsoïde est presque deux fois plus grand que le petit axe. Pour des nombres de Bond au-delà de 6 dans l'eau, des régimes oscillants apparaissent et les trajectoires sont irrégulières. Dans le cas des configurations diphasiques avec glycérine, les transitions se font directement des bulles sphériques vers des calottes, sans régime intermédiaire oscillant, à des nombres de Bond de 20 environ. Les trajectoires sont ici entièrement axisymétriques, contrairement à celles dans l'eau, majoritairement tridimensionnelles. Ces transitions sphères / calottes sont conformes à la cartographie de Bhaga & Weber [2]. Lorsque  $Bo > 20$ , les bulles ont une partie concave significative à leur base, derrière laquelle s'accroche un sillage torique. Le fluide recircule le long de l'axe vertical, du bas vers le haut, et le point le plus haut de la partie concave correspond au point de stagnation du sillage. Bien entendu, ce point n'est pas visible sur les photographies par ombroscopie car seule la surface apparente de la bulle est révélée.

En s'intéressant maintenant à l'ascension de bulles dans des configurations stratifiées eau / huile 47V10, trois régimes sont observés sur la figure 4.3 au passage de l'interface liquide-liquide. On remarquera que ces régimes ne correspondent pas à ceux de l'ascension d'une bulle dans l'eau de la figure 4.2. Les bulles ont toutes des trajectoires tridimensionnelles dans le liquide lourd lorsque les nombres de Bond sont supérieurs à 1. Par conséquent les distinctions entre les trois régimes sont observées dans la phase supérieure. En premier lieu, jusqu'à des nombres de Bond de 2, les bulles isolées s'arrêtent à l'interface liquide-liquide pendant un temps variable de quelques secondes tout au plus, encapsulées dans le liquide lourd. Le drainage du film se réalise et une fois le film rompu, les bulles s'extraient en un laps de temps très court et s'échappent dans le liquide supérieur. En effet, le paramètre d'étalement du fluide léger est positif :  $S_3 = \sigma_{21} - \sigma_{13} - \sigma_{23} = 0.030 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . L'huile a donc tendance à s'immiscer entre l'air et l'eau (voir De Gennes *et al.* [21]). Avec des nombres de Bond compris entre 2 et 5, l'écoulement dans la phase supérieure moins déformable ( $A = \mathcal{O}(10)$ ) est axisymétrique ; un entraînement d'eau dans l'huile s'opère ainsi qu'une rupture de la colonne entraînée allant de deux à cinq gouttelettes. Mais ce n'est qu'à partir d'un nombre de Bond de 5 que la colonne prend une forme entièrement tridimensionnelle de par le fait que les bulles sont moins ralenties à l'interface et conservent pour un temps leurs trajectoires oscillantes. Ces trois différents régimes (bulle piégée, écoulement quasi-axisymétrique, écoulement tridimensionnel) se retrouvent pour des couples de fluides eau / huile 47V100, mais pour des nombres de Bond plus importants à cause de la plus forte viscosité de la phase supérieure ( $A = \mathcal{O}(100)$ ). Un apport d'énergie plus important est nécessaire pour mettre l'huile en mouvement. Ainsi, pour des nombres de Bond entre 3 et 9 l'écoulement est axisymétrique, tandis que les bulles plus petites sont bloquées à l'interface et que les plus grosses sont suivies d'une colonne tridimensionnelle. Les expériences en configuration eau / huile de silicone 47V500 n'ont par contre révélé aucun régime tridimensionnel jusqu'à des nombres de Bond de 30.

Lors de l'utilisation de glycérine dans un mélange à 85%, les régimes observés en présence des différentes huiles sont plus nombreux que ceux observés en présence d'eau seule (figure 4.4). Tout d'abord, un régime où la bulle est stoppée à l'interface se rencontre pour des nombres de Bond inférieurs à 6 ce qui, comme décelé dans la section précédente, est légèrement supérieur à la valeur critique prédite par le critère de passage de Greene *et al.* [28] qui vaut  $Bo \approx 5$  dans ce cas. Ensuite sont observées deux phases distinctes de transition respectivement pour les couples de fluides eau+glycérine 85% / huile 47V10, et eau+glycérine 85% / huile 47V500, jusqu'à des

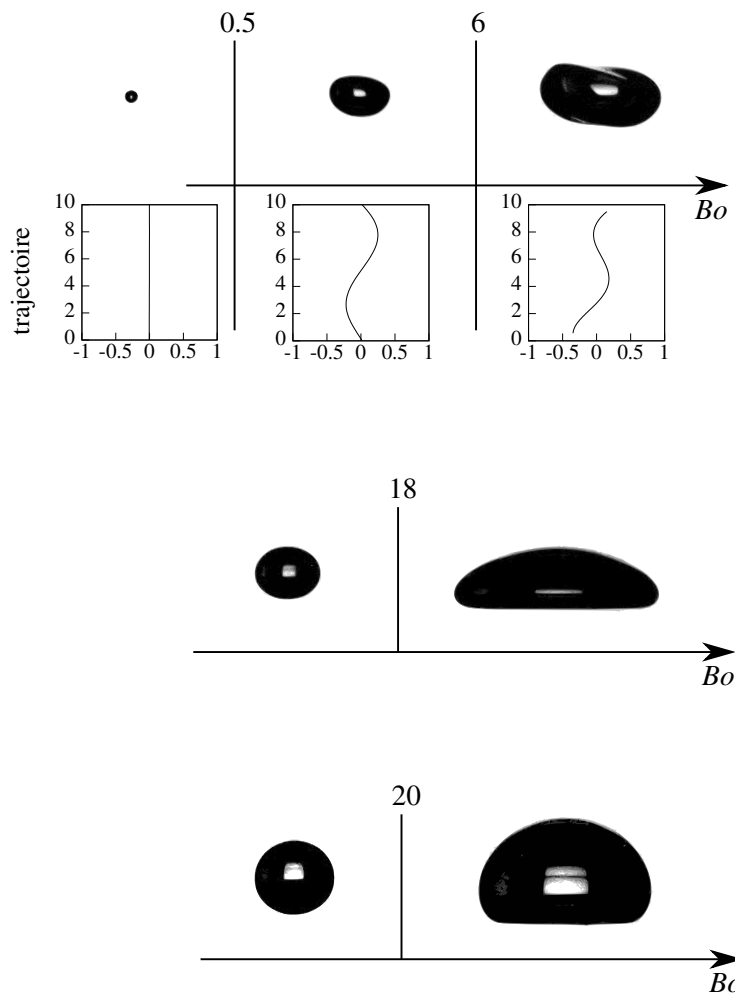


FIGURE 4.2 – Évolution des formes et trajectoires de bulles en ascension dans les différents « fluides lourds » en fonction du nombre de Bond. De haut en bas : eau, eau+glycérine 85%, eau+glycérine 95%. Les coordonnées le long des trajectoires sont adimensionnées par le diamètre équivalent des bulles. Les régimes de trajectoires en zig-zag ne sont observés que pour des écoulements diphasiques air / eau.

nombre de Bond de 10. Dans le premier cas où le fluide lourd est dix fois plus visqueux ( $\Lambda \approx 0.094$ ), le fort contraste de viscosité permet à la bulle de s'échapper plus facilement dans le liquide supérieur. À peine le film de liquide lourd commence-t-il à se rompre que la bulle s'extrait, et une colonne de faible hauteur, typiquement deux diamètres de bulle, se crée. Ce mécanisme est bien différent de celui observé avec le couple eau / huile car ici le paramètre d'étalement  $S_3 = \sigma_{21} - \sigma_{13} - \sigma_{23}$  est négatif, égal à  $-0.26 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , ce qui favorise la formation d'une ligne triple. Ceci souligne une limite du critère de passage de Greene *et al.* où la dynamique de l'écoulement est absente. Dans le cas d'une configuration eau+glycérine 85% / huile 47V500, l'ascension des bulles est tellement lente dans le liquide supérieur de viscosité cinq fois plus élevée ( $\Lambda = 5.17$ ) que le drainage complet a le temps de s'effectuer. Les bulles emportent donc peu de liquide lourd dans la phase supérieure, la colonne a une hauteur maximale très faible et est très étroite. Il est à noter qu'aucune phase de transition n'est visible lorsque les contrastes de viscosités sont faibles, *i.e.* pour le mélange eau+glycérine 85% / huile 47V100 avec  $\Lambda = 1.10$ , ce qui conforte l'hypothèse que les forces capillaires ne sont pas le moteur du phénomène. Au-delà d'un nombre de Bond de 10 (et même 6 pour le couple eau+glycérine 85% / huile 47V100) les bulles sont suffisamment grosses pour franchir l'interface liquide-liquide sans fort ralentissement, entraînant derrière elles une longue colonne de liquide lourd de plus en plus étroite à mesure de l'augmentation de la viscosité du liquide supérieur car de plus en plus cisailée par ce dernier.

Avec un mélange eau+glycérine 95% en guise de phase inférieure, différents régimes remarquables sont observés (figure 4.5), notamment lors de l'emploi d'huile 47V10 pour la phase légère. Un tel contraste de viscosité entre phases lourde et légère ( $\Lambda = 0.0175$ ) permet de visualiser trois régimes : tout d'abord, avec des nombres de Bond inférieurs à 7, les bulles sont piégées à l'interface liquide-liquide. Le temps de résidence étant de l'ordre de quelques minutes, aucune visualisation du drainage du film de liquide lourd n'est possible pour cause de manque d'espace mémoire de la caméra (encore une fois, la présence de film se démontre par l'analyse théorique de la section 2 du chapitre 2). À première vue, le phénomène semble assimilable à celui d'une configuration de piégeage avec de la glycérine à 85% de concentration (figure 4.4). Ensuite, jusqu'à des nombres de Bond de 13, la bulle est fortement étirée au moment de la traversée de l'interface : le sommet, alors dans le fluide supérieur, a tendance à s'extraire facilement à cause de la faible viscosité du fluide, contrairement à la base retenue par le liquide inférieur cinquante fois plus visqueux. Cet étirement est tel que la bulle éclate en deux ou trois bulles, une grosse qui poursuit sa montée dans la phase supérieure, et une à deux petites qui peuvent rester piégées à l'interface liquide-liquide. Enfin, au-delà d'un nombre de Bond de 13, ce qui correspond majoritairement à des formes de calotte sphérique dans le liquide lourd, les bulles restent entières et une longue colonne étroite se forme à leur suite. Ceci est dû au fait que leurs sillages et formes évoluent progressivement à la traversée de l'interface liquide-liquide et ainsi en va-t-il de la vitesse d'ascension. La transition n'étant pas abrupte, une colonne de liquide lourd a la possibilité de se former dans la phase supérieure à la suite de la bulle. Quant aux régimes observés dans des configurations eau+glycérine 95% / huile 47V100 et eau+glycérine 95% / huile 47V500, il sont fort similaires à ceux décrits pour les configurations eau+glycérine 95% / huile 47V10. Lorsque les nombres de Bond sont inférieurs à 7, les bulles sont piégées tandis qu'au-delà elles traversent l'interface en emportant une partie de liquide lourd sous forme de colonne étroite qui se scinde ensuite en gouttelettes au sein des huiles.

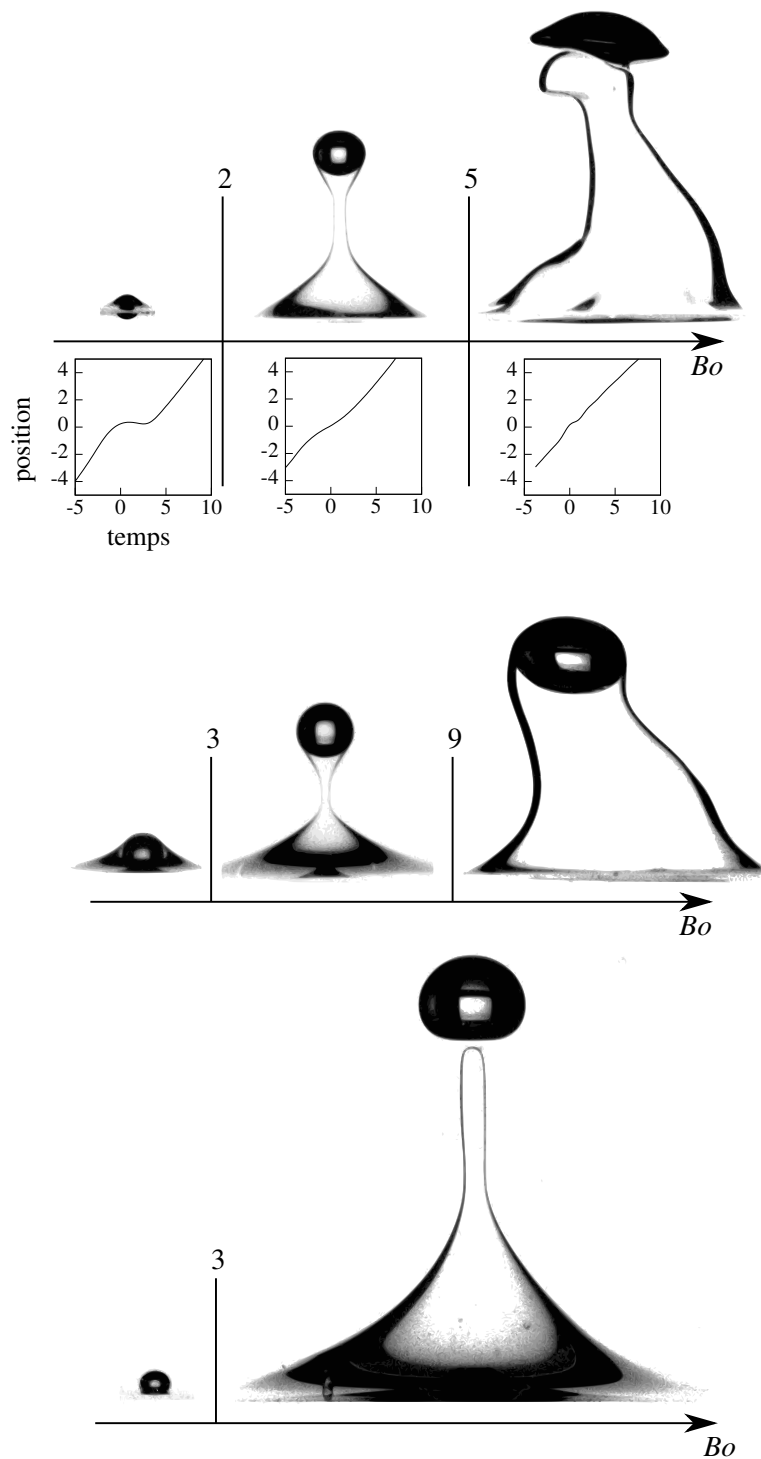


FIGURE 4.3 – Évolution des formes et temps de résidence de bulles en ascension dans différents couples de fluides en fonction du nombre de Bond. De haut en bas, eau / huile 47V10, eau / huile 47V100, eau / huile 47V500. Les courbes décrivant l'altitude du barycentre de la bulle en fonction du temps sont adimensionnées par le diamètre équivalent de la bulle  $d$  et le temps gravitationnel  $\sqrt{d/g}$ .

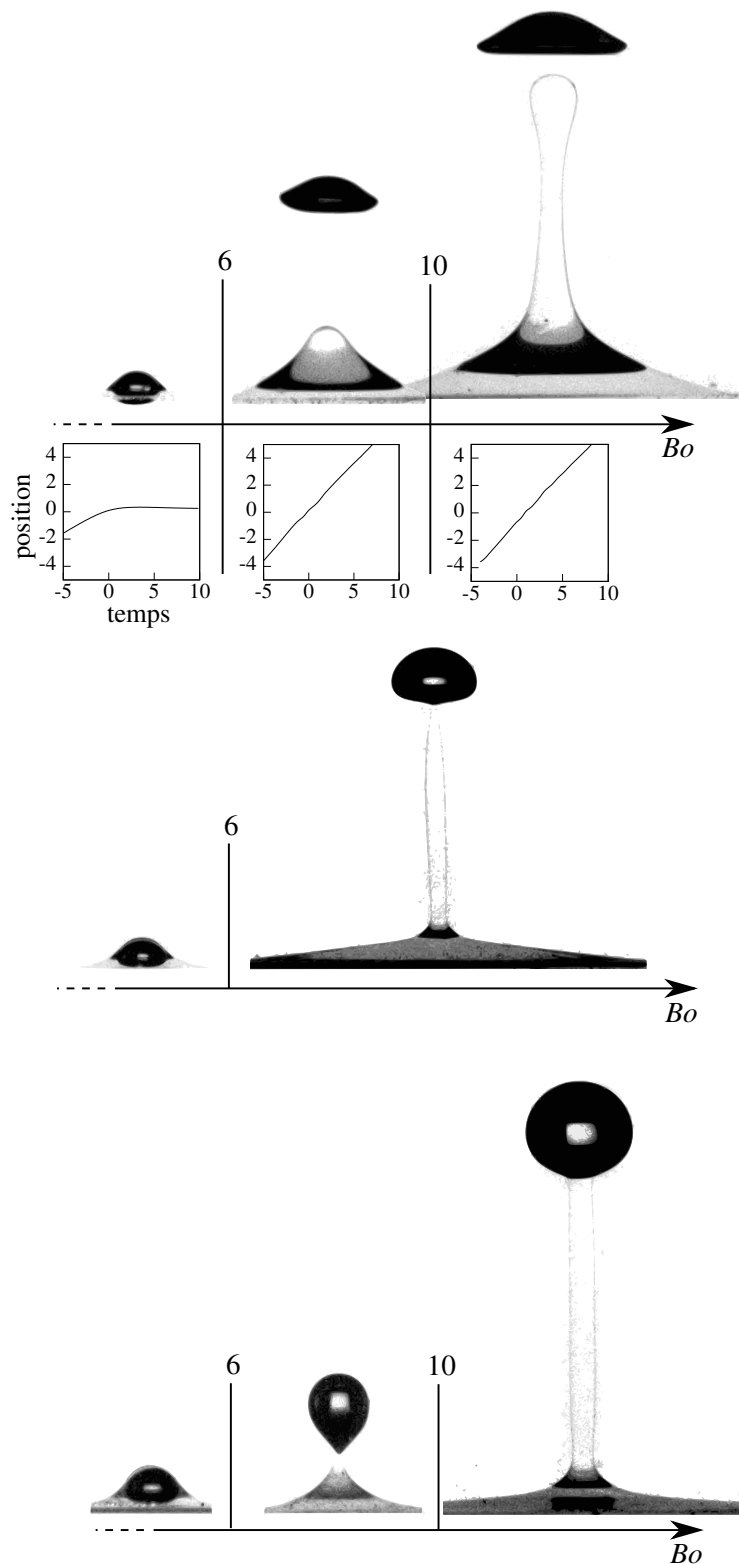


FIGURE 4.4 – Évolution des formes et temps de résidence de bulles en ascension dans différents couples de fluides en fonction du nombre de Bond. De haut en bas, eau+glycérine 85% / huile 47V10, eau+glycérine 85% / huile 47V100, eau+glycérine 85% / huile 47V500. Les courbes décrivant l'altitude du barycentre de la bulle en fonction du temps sont adimensionnées par le diamètre équivalent de la bulle  $d$  et le temps gravitationnel  $\sqrt{d/g}$ .

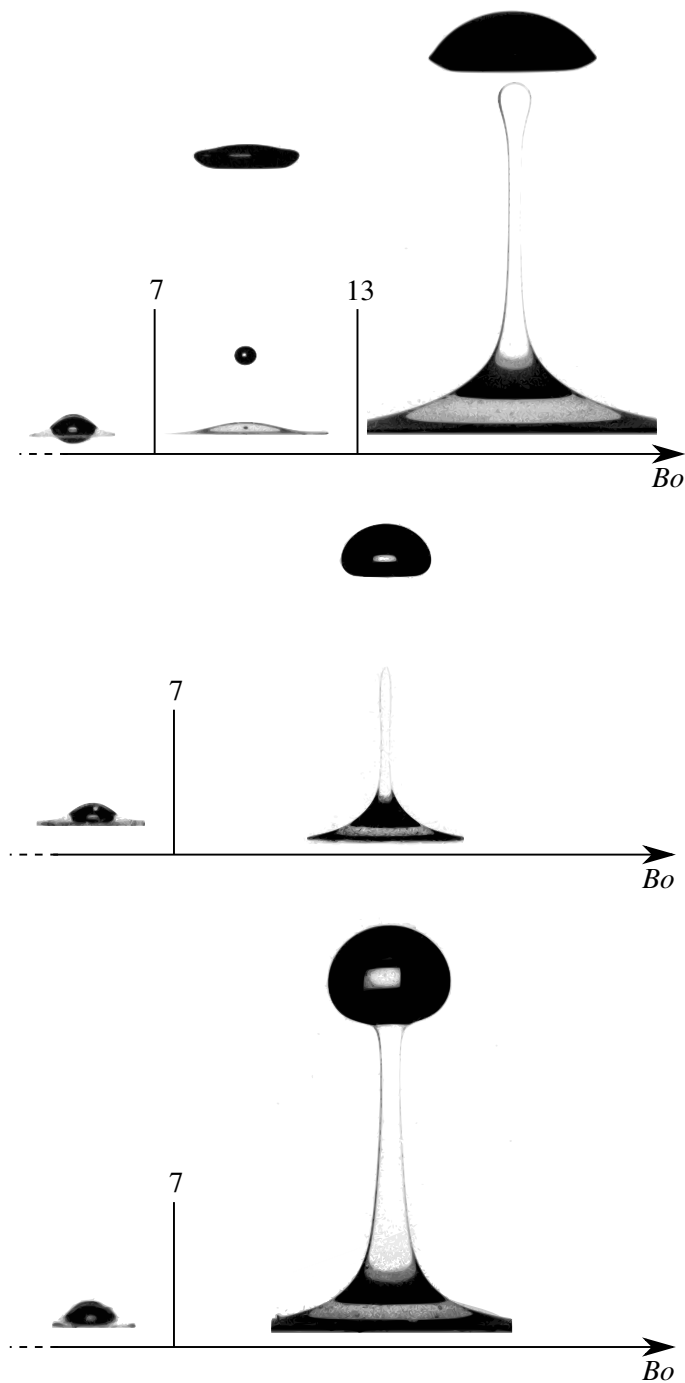


FIGURE 4.5 – Évolution des formes et temps de résidence de bulles en ascension dans différents couples de fluides en fonction du nombre de Bond. De haut en bas, eau+glycérine 95% / huile 47V10, eau+glycérine 95% / huile 47V100, eau+glycérine 95% / huile 47V500. Les courbes décrivant l'altitude du barycentre de la bulle en fonction du temps sont adimensionnées par le diamètre équivalent de la bulle  $d$  et le temps gravitationnel  $\sqrt{d/g}$ .

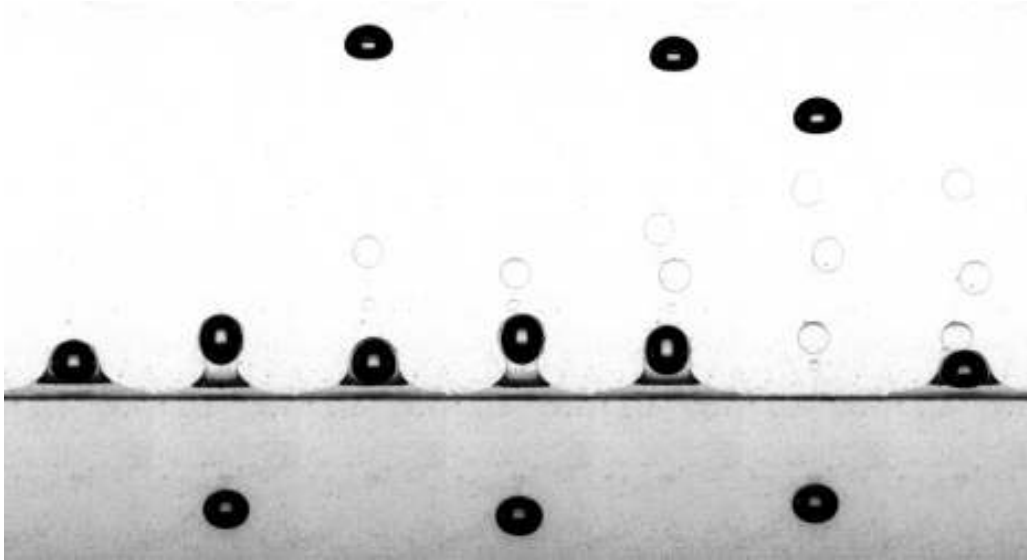


FIGURE 4.6 – Train de bulles de diamètre équivalent  $d = 5.2 \text{ mm}$  dans un mélange composé d'eau+glycérine 85% et d'huile de silicone 47v100. Fréquence : 1.40 bulles par seconde.  $Bo = 6.6$ ,  $Ar = 13.8$ ,  $A = 1.10$  (séries D sup. de la figure 4.1). Le temps adimensionné entre deux images est de  $\Delta t \sqrt{g/d} = 15.5$ .

## 2 Extrapolations aux trains de bulles

### 2.1 Trains à faible fréquence

Plusieurs trains de bulles ont été générés dans des mélanges eau+glycérine 85% / huile de silicone 47v10, et eau+glycérine 85% / huile de silicone 47v100. Dans un premier temps, seuls les trains à faible fréquence sont considérés, typiquement lorsque l'écart de temps entre le lâcher de deux bulles est supérieur au temps de résidence d'une bulle isolée de même volume à l'interface liquide-liquide. Un exemple de ce type de situation est illustré sur la figure 4.6 où un train de bulles de diamètre équivalent 5.2 mm généré à la fréquence de 1.40 bulles par seconde évolue dans un mélange eau+glycérine 85% / huile de silicone 47v100. Chaque bulle du train est caractérisée par un nombre de Bond de 6.6 et un nombre de Bond interfacial de 11 environ. À la traversée de l'interface, le temps de résidence d'une bulle isolée est au maximum de 0.7 s ce qui correspond grosso modo à l'écart de temps entre le lâcher de deux bulles du train. Ceci suggère que chaque bulle peut être étudiée de manière isolée en première approximation, et que l'analyse théorique du chapitre 2 peut être appliquée. Dans le cas présent, l'équation (2.29) permet de trouver  $h = 1.2$  pour un angle  $\phi = 115^\circ$ , ce qui est conforme aux observations des images 1 et 3. Lorsque le ménisque de liquide entraîné est plus important sur les images 2 et 4, la théorie trouve ses limites avec une sous-estimation de la hauteur  $h = 1.5$  pour un angle  $\phi = 145^\circ$ . Une remarque toutefois quant au volume de liquide entraîné : les gouttes de liquide n'ont pas le temps de retomber et donc de coalescer avec le liquide lourd avant l'arrivée de la bulle suivante. Par conséquent les gouttes s'accumulent dans la phase huileuse. Au bout de quelques minutes le problème devient tout autre, s'approchant d'un problème d'émulsification.

Lorsque les bulles sont suffisamment petites pour rester piégées à l'interface liquide-liquide, pour des nombres de Bond inférieurs à 6 (conformément aux résultats pour les bulles isolées du paragraphe antérieur), les bulles s'accumulent à l'interface liquide-liquide. Pour un même volume de bulle, plus leur nombre est important, plus la force de flottabilité du système global augmente. Quand suffisamment de bulles se retrouvent à l'interface, elles parviennent à contrebalancer les forces capillaires et s'échappent alors par « paquets » dans le liquide supérieur. En toute première approximation, ces « paquets de bulles » sont assimilables à des bulles sphériques de même volume. En prenant pour illustration la situation de la figure 4.7, chaque bulle du train est caractérisée par un nombre de Bond de 2.86. Un paquet de trois (resp. quatre) bulles est assimilé à une bulle sphérique de nombre de Bond 5.95 (resp. 7.20). Par conséquent, un paquet de quatre bulles peut s'extraire de l'interface liquide-liquide, et ce indépendamment de la fréquence du train, toujours dans la limite des faibles fréquences : les figures 4.7 et 4.8 montrent deux trains de bulles dont les comportements sont identiques et



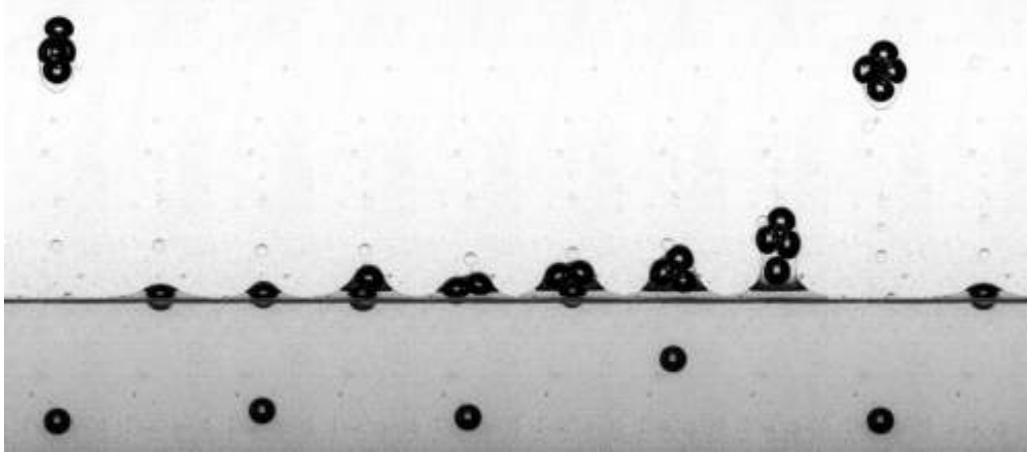


FIGURE 4.7 – Train de bulles de diamètre équivalent  $d = 3.4$  mm dans un mélange composé d'eau+glycérine 85% et d'huile de silicone 47v100. Fréquence : 1.31 bulles par seconde.  $Bo = 2.86$ ,  $Ar = 7.3$ ,  $\Lambda = 1.10$  (séries D sup. de la figure 4.1). Le temps adimensionné entre deux images est de  $\Delta t \sqrt{g/d} = 20.5$ .

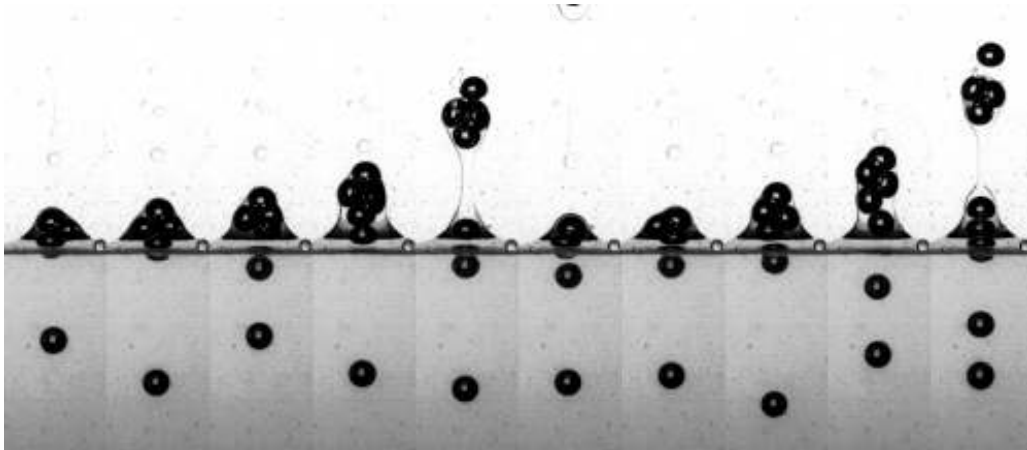


FIGURE 4.8 – Train de bulles de diamètre équivalent  $d = 3.4$  mm dans un mélange composé d'eau+glycérine 85% et d'huile de silicone 47v100. Fréquence : 4.83 bulles par seconde.  $Bo = 2.86$ ,  $Ar = 7.3$ ,  $\Lambda = 1.10$  (séries D sup. de la figure 4.1). Le temps adimensionné entre deux images est de  $\Delta t \sqrt{g/d} = 11.1$ .

dont seule la fréquence d'émission est modifiée. Dans ces deux cas, l'analyse théorique des configurations de « film-drainage » et « tailing » est plus délicate pour la simple raison que la notion même d'angle  $\phi$  décrivant le détachement du ménisque autour de l'amas de bulles qui n'est pas vraiment sphérique est incertaine. Par exemple, l'équation (2.29) indique que trois bulles devraient être piégées à une hauteur  $h = 1.25$  lorsque l'angle de détachement vaut  $\phi = 120^\circ$ , ce qui semble correct sur la septième image de la figure 4.7 avec une forte incertitude sur l'angle de détachement du ménisque.

Ce raisonnement est valable quelque soit le nombre de bulles, comme pour le cas de la figure 4.9 où des paquets de deux bulles de diamètres équivalents 4.1 mm approchent une interface eau+glycérine 85% / huile de silicone 47v100. L'absence de sphéricité globale des paires de bulles (images 3 et 7) est toutefois plus flagrante ici.

Enfin, ces approximations pour des configurations de trains de bulles ne sont pas valables lorsque la rupture du film est très rapide : pour un train de bulles de diamètre équivalent 4.3 mm dans un mélange eau+glycérine 85% / huile de silicone 47v10 (figure 4.10), chaque bulle est caractérisée par un nombre de Bond de 4.54 et donc deux bulles sont assimilées selon le raisonnement ci-dessus à une unique bulle de nombre de Bond de 7.20. Le gaz devrait donc traverser l'interface liquide-liquide par paquets de deux bulles. Mais c'est sans compter qu'avant le début du drainage de la deuxième bulle, la première s'est déjà échappée dans la phase légère. Ainsi, seule la première bulle passe, la deuxième reste piégée, condamnée à attendre la prochaine.

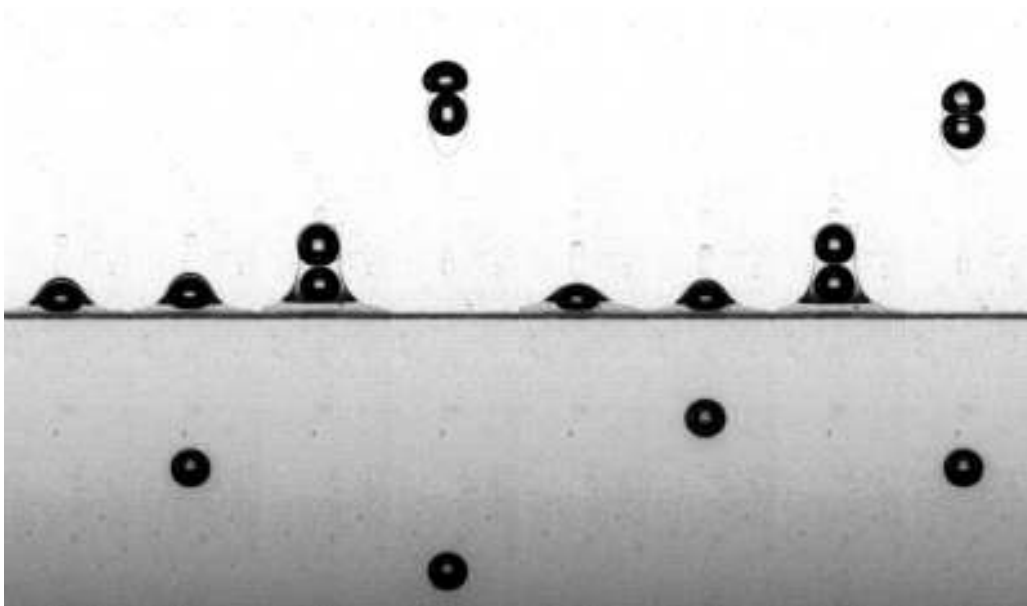


FIGURE 4.9 – Train de bulles de diamètres équivalents de  $d = 4.1$  mm dans un mélange composé d'eau+glycérine 85% et d'huile de silicone 47v100. Fréquence de 1.19 bulles par seconde.  $Bo = 4.10$ ,  $Ar = 9.7$ ,  $\Lambda = 1.10$  (séries D sup. de la figure 4.1). Le temps adimensionné entre deux images est de  $\Delta t \sqrt{g/d} = 20.6$ .

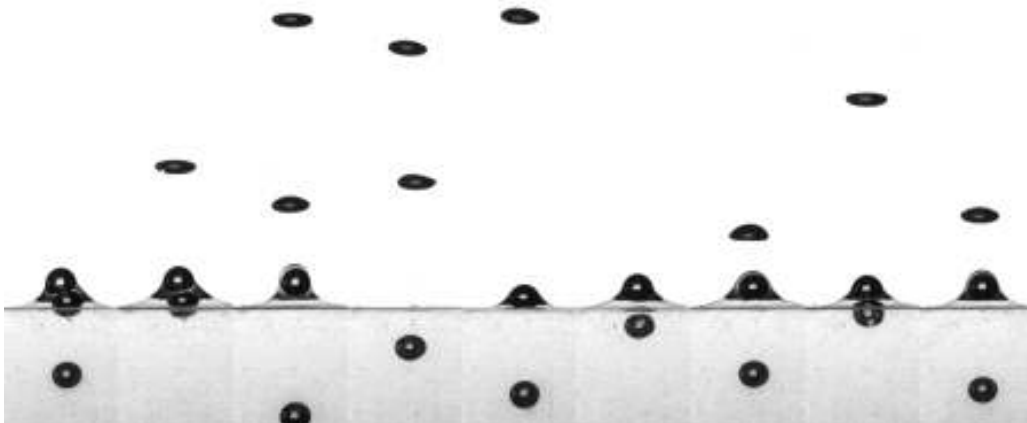


FIGURE 4.10 – Train de bulles de diamètre équivalent  $d = 4.3$  mm dans un mélange composé d'eau+glycérine 85% et d'huile de silicone 47v10. Fréquence : 4.7 bulles par seconde.  $Bo = 4.54$ ,  $Ar = 10.4$ ,  $\Lambda = 0.0937$  (séries B de la figure 4.1). Le temps adimensionné entre deux images est de  $\Delta t \sqrt{g/d} = 5.1$ .

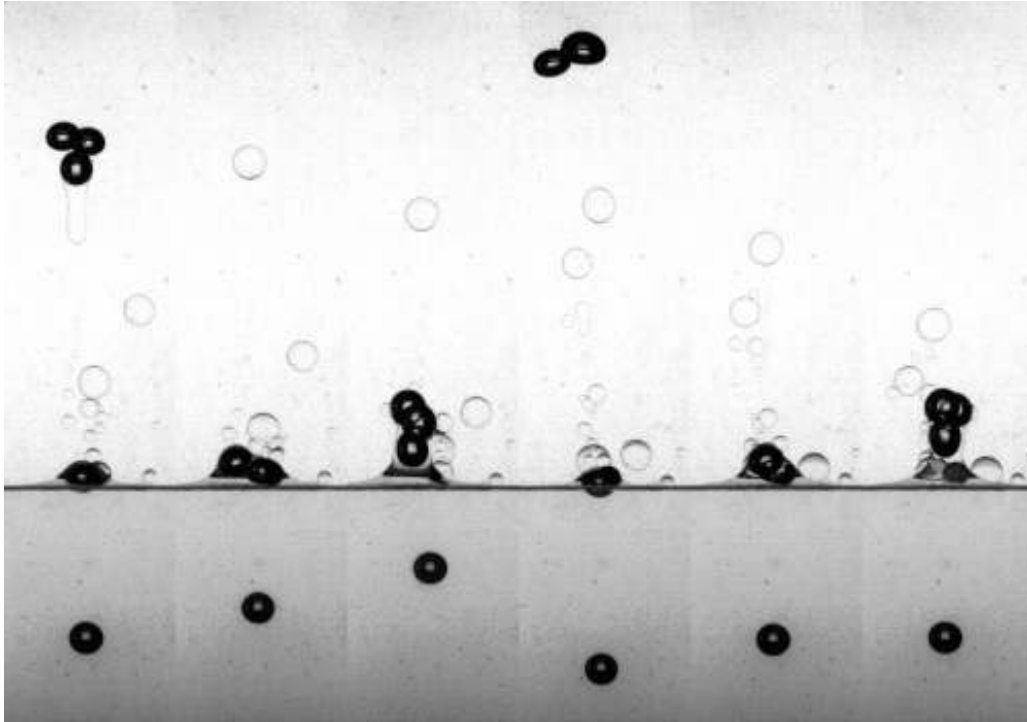


FIGURE 4.11 – Train de bulles de diamètre équivalent  $d = 4.2$  mm dans un mélange composé d'eau+glycérine 85% et d'huile de silicone 47v100. Fréquence : 2.14 bulles par seconde.  $Bo = 4.30$ ,  $Ar = 10.1$ ,  $\Lambda = 1.10$  (séries D sup. de la figure 4.1). Le temps adimensionné entre deux images est de  $\Delta t \sqrt{g/d} = 22.6$ .

## 2.2 Trains à forte fréquence

Lorsque l'écart de temps entre deux bulles est inférieur au temps de résidence d'une bulle à l'interface liquide-liquide, de nombreux scénarios sont possibles. Les deux principaux sont exposés dans la suite, de manière purement qualitative.

Le premier est illustré sur la figure 4.11 qui consiste en la traversée de bulles de 4.2 mm dans un mélange eau+glycérine 85% / huile de silicone 47v100 à une fréquence de 2.14 bulles par seconde. Selon le critère explicité plus haut, les « paquets » qui s'échappent de l'interface doivent compter deux bulles en leur sein pour un nombre de Bond global de 6.74. Or, la fréquence étant suffisamment élevée, il est possible qu'une troisième bulle vienne s'immiscer dans ce paquet avant que l'ascension dans la phase légère ne s'effectue (troisième et dernière images de la séquence). En effet, l'écart de temps entre deux bulles est de 0.466 s alors que le temps de résidence d'un paquet de deux bulles est de 0.6 s environ.

Un cas bien plus complexe est celui exposé sur la figure 4.12 pour une fréquence de bulles particulièrement élevée. Ici, la colonne n'a pas le temps de retomber. Les bulles, qui ont eu au préalable la possibilité de coalescer, s'agglutinent en continu à l'interface et pénètrent en général deux à deux dans la phase supérieure. Les gouttes de liquide lourd s'accumulent dans la phase légère jusqu'à obtenir une émulsion. Ce phénomène est évidemment bien trop complexe pour être traité dans le cadre de cette étude mais il est intéressant de noter qu'en dépit de cette complexité (fréquence élevée, contraste de viscosité élevé...), une répétabilité est notable tout au long des premières dizaines de secondes.

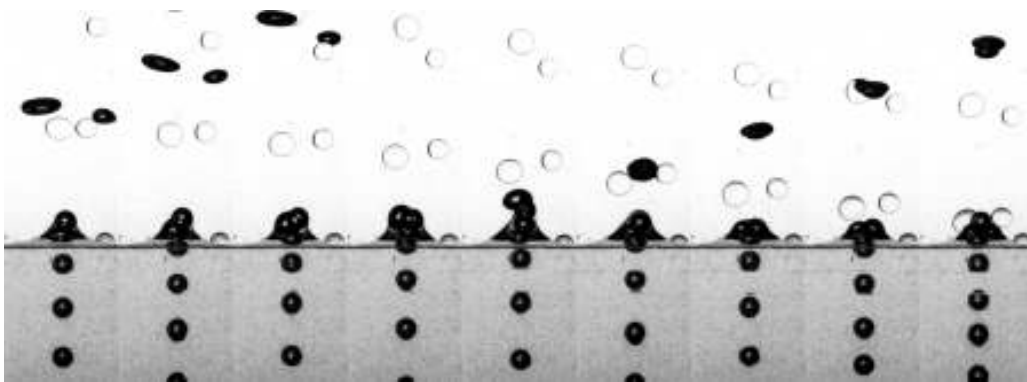


FIGURE 4.12 – Train de bulles de diamètre équivalent  $d = 3.1$  mm dans un mélange composé d'eau+glycérine 85% et d'huile de silicone 47v10. Fréquence : 13 bulles par seconde.  $Bo = 2.34$ ,  $Ar = 6.4$ ,  $\Lambda = 0.0937$  (séries B de la figure 4.1). Le temps adimensionné entre deux images est de  $\Delta t \sqrt{g/d} = 2.17$ .

# Chapitre 5

## Prédictions numériques

Les simulations de bulles ou de gouttes évoluant dans des milieux stratifiés en densité ont déjà fait l'objet de plusieurs études en régime de Stokes. Chi & Leal [16] ont étudié l'approche d'une goutte déformable vers son homophase. Shopov & Minev [68] ont étudié l'approche de bulles et de gouttes vers une interface initialement plane. Koch & Koch [37] se sont intéressés à l'approche de gouttes vers une interface libre pour de faibles déformations de celle-ci et Manga & Stone [48] ont étudié à la fois numériquement et expérimentalement l'approche de bulles, gouttes et sphères vers une interface initialement plane. La plupart de ces études ont été réalisées en utilisant des techniques d'intégrales de frontière (« Boundary Integral Method », BIM), à l'exception de celle de Shopov & Minev [68] qui n'est pas limitée au régime de Stokes car elle résout les équations de Navier-Stokes complètes par une approche éléments finis sur un maillage déformable. Nous nous proposons de comparer les résultats obtenus avec JADIM et PELICANS à certains de ceux fournis par ces approches alternatives.

### 1 Comparaisons avec les résultats de Manga & Stone

Afin de vérifier la précision de JADIM et PELICANS dans des configurations proches de celles de cette étude, nous avons reproduit certaines des configurations simulées par Manga & Stone [48] pour des écoulements à faibles nombres de Reynolds. Des gouttes initialement sphériques de diamètre  $d$  sont lâchées à une position telle que leur sommet se situe initialement à une hauteur  $h/d = -2$  par rapport à l'interface horizontale séparant le fluide lourd 1 du fluide léger 3. Les gouttes s'élèvent alors sous l'effet de la gravité, s'approchent de l'interface liquide-liquide et déforment cette dernière. Du fait des limitations de l'approche BIM, les calculs de Manga & Stone sont arrêtés avant que la bulle ne perce l'interface. Les caractéristiques des grilles de calcul sont similaires à celles mentionnées dans la section 4 du chapitre 3, avec des tailles de cellule de l'ordre de  $d/100$  dans les régions d'interface. Les simulations sont analysées en utilisant le même temps adimensionnel que dans l'article de Manga & Stone à savoir  $t^* = t(\rho_1 - \rho_3)gd/(2\eta_1)$ . Les résultats de Manga & Stone sont utilisés comme référence bien que leur précision exacte soit inconnue (les auteurs n'ont pas présenté d'étude de l'influence du nombre d'éléments disposés sur les interfaces).

Les positions et formes des différentes interfaces à plusieurs valeurs de  $t^*$  sont exposées sur la figure 5.1 pour trois valeurs du rapport de viscosité  $\lambda = \eta_2/\eta_1$ , 0.1, 1 et 10. Les résultats obtenus avec les deux codes sont assez similaires pour de faibles valeurs de  $\lambda$  : les positions finales ainsi que les formes finales prédites par JADIM sont très proches de celles reportées par Manga & Stone (les formes et positions obtenues avec PELICANS sont identiques si l'épaisseur d'interface est réduite à  $\epsilon = d/40$  au lieu de  $\epsilon = d/16$ ). Pour des valeurs plus importantes de  $\lambda$ , bien que satisfaisantes jusqu'à ce que les gouttes dépassent la position initiale de l'interface liquide-liquide (pour  $h/d \approx 1$ ), l'accord se détériore par la suite. La déformation des gouttes devient sous-estimée, en particulier à l'arrière de la goutte finale pour le cas intermédiaire  $\lambda = 1$ , et il en va de même pour l'altitude finale. Plus le rapport de viscosité  $\lambda$  est grand, plus les différences sont importantes.

Les vitesses  $u_T$  du sommet des bulles sont représentées sur les graphes 5.2 en fonction de la position du sommet de ces mêmes bulles : après que les bulles ont atteint une vitesse normalisée proche de celle prédite par la théorie de Hadamard-Rybczyinski ( $u_T = 2(1 + \lambda)/3(2 + 3\lambda)$  où la vitesse est normalisée par  $(\rho_1 - \rho_3)gd^2/4\eta_1$ ), celles-ci commencent à voir leur vitesse décroître jusqu'à ce que le sommet arrive à une position

$h_c$  située au-dessus de l'interface initialement plane. Plus  $\lambda$  est important, *i.e.* plus les gouttes sont visqueuses, plus les déformations des gouttes sont faibles et la position de  $h_c$  augmente, allant de  $h_c/d \approx 0.25$  pour  $\lambda = 0.1$ , jusqu'à  $h_c/d \approx 1.25$  pour  $\lambda = 10$ . Cette tendance est bien capturée par les deux codes. Cependant, la situation se détériore au-delà, lorsque la vitesse d'ascension subit une forte augmentation. Les deux codes prédisent en effet cette augmentation, mais son intensité est bien plus faible que celle trouvée avec la méthode BIM.

La figure 5.3 qui donne l'évolution de l'épaisseur de liquide 1 au-dessus des gouttes, montre une décroissance forte suivie par une décroissance plus faible correspondant au drainage du film. La seconde étape est bien capturée par JADIM, bien que le drainage semble plus lent (respectivement plus rapide) pour  $\lambda = 1$  (resp.  $\lambda = 0.1$ ). Au contraire, le drainage prédit par PELICANS est clairement trop rapide dans les trois cas, et plus particulièrement pour  $\lambda = 0.1$  où la rupture s'opère à  $h/d \approx 1.5$ .

Les différences observées entre les prédictions de nos deux codes dans lesquelles les gradients de  $c_i$  s'étalent sur une épaisseur petite mais finie et ceux de la méthode BIM, dans laquelle les interfaces sont infiniment fines, peuvent être facilement expliquées. En effet, l'épaisseur finie des régions interfaciales de JADIM et PELICANS résulte d'un étalement, d'une part des forces capillaires dépendantes de  $\nabla c_i$ , d'autre part des variations de viscosité dépendantes de  $c_i$ . Quand l'interface entre le fluide 1 et 2 devient proche de celle de 1 et 3, cette dernière, qui dans les simulations présentes n'a pas de tension interfaciale, commence à ressentir une force capillaire artificielle. Ainsi, elle résiste plus à la déformation qu'elle ne le devrait et retarde donc l'ascension de la goutte ainsi que sa déformation. Par ailleurs, la viscosité moyenne ressentie dans le film, dépendante des valeurs de  $\eta_2$  et  $\eta_3$ , est plus faible ou plus forte que sa vraie valeur  $\eta_1$ . De ce fait, le drainage du film nécessite suivant les cas plus ou moins de temps qu'il ne le devrait en réalité. Les deux effets ci-dessus s'ajoutent pour  $\lambda > 1$  et il en résulte une vitesse et une déformation plus faibles de la goutte. Au contraire elles s'opposent lorsque  $\lambda < 1$ . En se basant sur ce raisonnement, les prédictions des deux codes, à viscosité  $\eta_3$  donnée, sont sensées être plus précises pour des bulles avec  $\lambda \ll 1$  que pour des gouttes très visqueuses  $\lambda \gg 1$ . Les résultats exposés sur les figures 5.2 et 5.3 confirment ces affirmations. Une remarque est néanmoins à faire quant à l'évolution de l'épaisseur du film prédite par PELICANS pour  $\lambda = 0.1$  qui se démarque fortement de résultats de Manga & Stone lorsque  $e/d \lesssim 0.08$ , *i.e.*  $e/d \lesssim 2\epsilon/d$  : ce phénomène témoigne simplement du fait que les phénomènes hydrodynamiques impliquant des échelles de l'ordre de  $\epsilon$  ou plus petites ne peuvent être retrouvées dans l'approche diffuse Cahn-Hilliard / Navier-Stokes puisque les fluides ne sont plus identifiés à ces échelles. C'est pourquoi les différences significatives entre les résultats de JADIM et ceux de la méthode BIM arrivent plus tardivement, typiquement quand  $e/d$  est inférieur à 0.04.

## 2 Comparaisons avec les résultats de Shopov & Minev

Nous considérons maintenant l'approche de bulles et gouttes d'une interface déformable pour des Reynolds faibles et modérés. Trois régimes bien distincts étudiés par Shopov & Minev [68] sont simulés et représentés sur les figures 5.4, 5.5 et 5.6. Ces régimes correspondent à trois situations différentes : les deux premières concernent des approches de bulles vers des interfaces liquide-liquide de rigidités différentes alors que la troisième montre l'ascension d'une goutte de viscosité beaucoup plus importante que les liquides en présence. Il est à noter que le deuxième cas n'a pu être simulé avec PELICANS en raison de l'absence de convergence de l'algorithme de Newton-Raphson.

Il est intéressant de mettre en relation les deux premiers cas (figures 5.4 et 5.5) qui correspondent à des régimes assez similaires : ici, les écarts entre les nombres adimensionnels  $Bo$ ,  $Ar$  et  $\Lambda$  sont trop faibles pour modifier les tendances de l'écoulement contrairement au rapport des tensions interfaciales  $I$  qui est 20 fois plus important dans le deuxième cas. Lorsque la tension interfaciale est faible (figure 5.4), l'interface requiert moins d'énergie pour être déformée par la bulle. L'épaisseur du film liquide est alors plus homogène, permettant à la bulle d'atteindre la hauteur de  $0.7d$  au-dessus de la position initiale de l'interface avant rupture du film pour Shopov & Minev et JADIM. En ce qui concerne les prédictions de PELICANS, le film est déjà percé sur les côtés à  $h = 0.4d$  et le liquide restant au-dessus de la bulle s'accumule au sommet de cette dernière. Dans le cas d'une interface liquide-liquide avec  $I = 20$ , la bulle parvient à peine à une hauteur de  $0.5d$  pour la

simulation de Shopov & Minev. La déformation est encore moindre dans les simulations de JADIM : le code prédit l'apparition d'un tore lorsque le sommet de la bulle atteint la hauteur de  $0.25d$  environ et ce tore reste ensuite piégé jusqu'à la fin de la séquence. Ces différences proviennent très certainement d'une différence d'évaluation des forces capillaires qui sont vues comme plus importantes par JADIM. On peut remarquer que le diagramme de phase  $(Ar, Bo)$  établi par Bonometti & Magnaudet [5] affirme qu'une bulle en ascension dans un fluide initialement au repos ne peut devenir torique si  $Ar < 79$ . Évidemment le cas présent est différent car l'interface liquide-liquide empêche l'avant de la bulle de progresser et le fort ralentissement qui en découle n'est pas immédiatement répercuté sur le fluide à l'arrière de la bulle qui en vient à creuser cette dernière. Ce creusement est tel qu'ici le centre de la bulle se perce de part en part.

Le troisième cas, représenté sur la figure 5.6, montre l'évolution d'une goutte de viscosité plus élevée que celles des deux liquides ( $\eta_2/\eta_1 = 36$  et  $\Lambda = 0.33$ ), traversant une interface liquide-liquide caractérisée par une tension interfaciale faible avec  $I = 0.01$ . Au vu de tendances préalablement établies dans la comparaison avec les cas simulés par Manga & Stone, il est à prévoir que la goutte se déforme peu durant la traversée, contrairement à l'interface liquide-liquide. En effet, les forts contrastes de viscosité et de tension interfaciale vont dans le même sens : la déformation de l'interface et celle du liquide léger sont aisées. C'est bien ce qui est révélé par les images avant que la goutte ne perce le film de liquide lourd. Celle-ci, quasiment sphérique tout au long de son ascension, entraîne à sa suite une longue colonne de liquide lourd, jusqu'à une hauteur de  $3.9d$  pour le sommet de la bulle dans les simulations de Shopov & Minev, et  $3d$  pour JADIM et PELICANS. Ici encore, l'évaluation des tensions capillaires est probablement à l'origine de ces différences comme on l'a vu dans l'étude précédente avec  $\lambda = 10$ . Toutefois, la géométrie globale de l'écoulement est proche dans les résultats de Shopov & Minev et de JADIM, contrairement à ceux de PELICANS où la colonne subit de fortes oscillations.

En conclusion, les prédictions de JADIM sont en bon accord avec celles de Shopov & Minev dans le premier et le dernier cas tandis que le cas intermédiaire conduit à des différences étonnantes puisque le film prédit par JADIM est très rapidement beaucoup plus mince. En revanche, PELICANS est en difficulté dans les trois simulations, prédisant des topologies d'interface bien différentes de celles observées avec les deux autres codes dans deux cas et ne parvenant pas à converger dans le troisième.

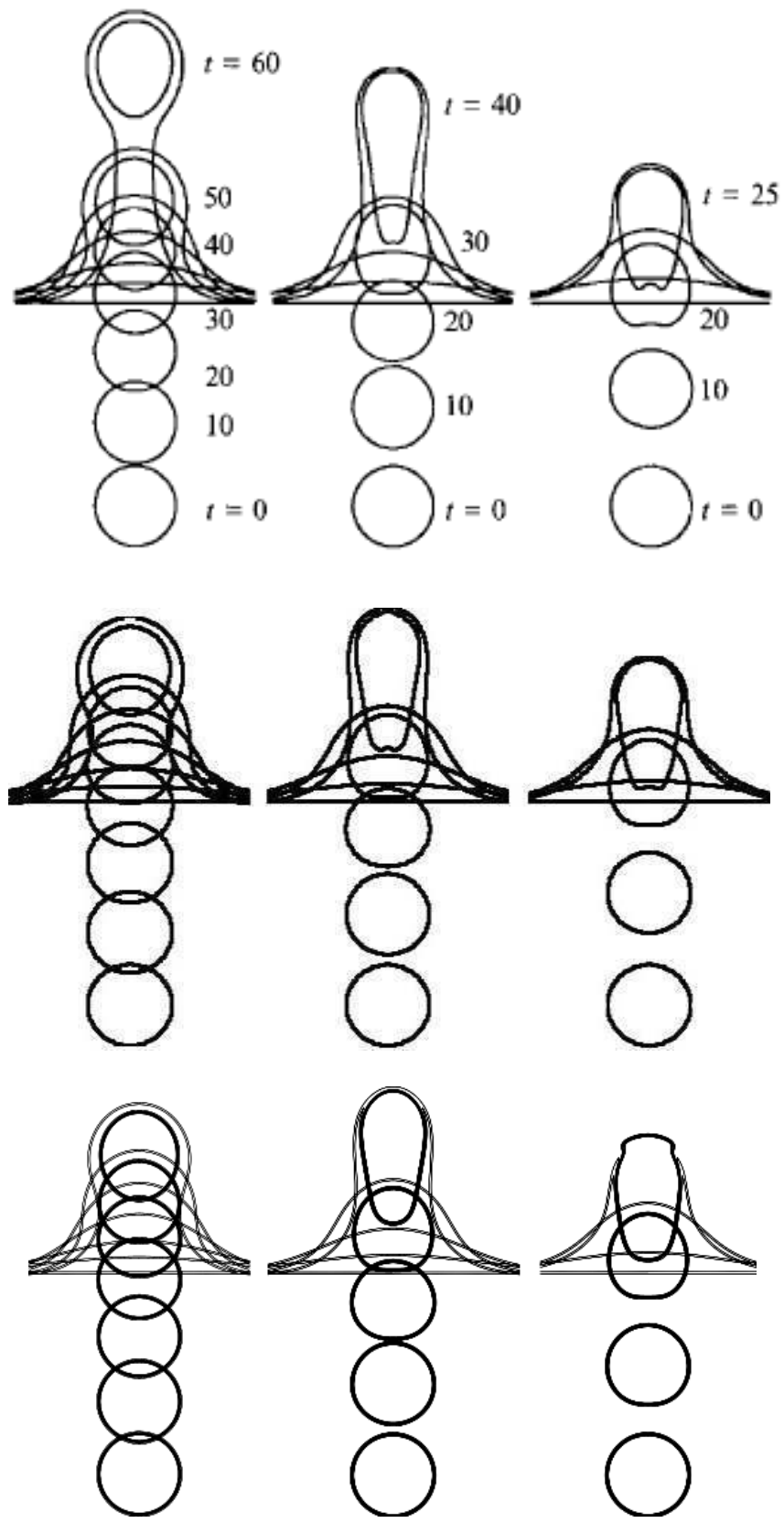


FIGURE 5.1 – Évolution des formes et positions de gouttes dans les simulations BIM de Manga & Stone (en haut), JADIM (au centre), et PELICANS (en bas) pour  $\eta_3/\eta_1 = 0.1$ ,  $(\rho_3 - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1) = 0.2$ ,  $(\rho_1 - \rho_2)gd^2 = 80$ ,  $\sigma_{13}/\sigma_{12} = 0$  et trois rapports de viscosité différents  $\eta_2/\eta_1 = 10$  (à gauche), 1 (au milieu), et 0.1 (à droite). Les temps sont normalisés par l'échelle visqueuse  $2\eta_1/(\rho_1 - \rho_2)gd$ .



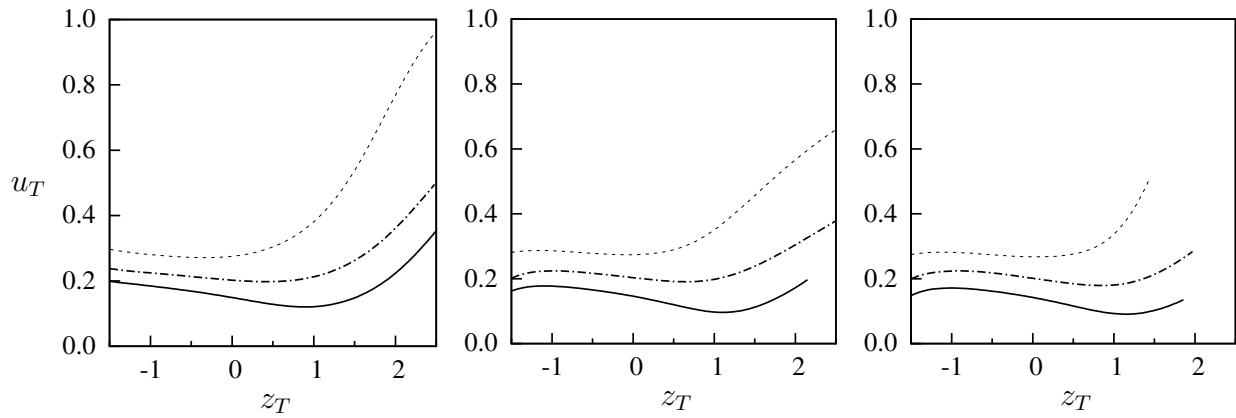


FIGURE 5.2 – Évolution de la vitesse du sommet des gouttes de la figure 5.1 dans les simulations BIM de Manga & Stone (à gauche), JADIM (au centre), et PELICANS (à droite).  
 —  $\lambda = 10$ , — · —  $\lambda = 1$ , - - -  $\lambda = 0.1$ . Les vitesses  $u_T$  sont normalisées par l'échelle visqueuse  $(\rho_1 - \rho_2)gd^2/4\eta_1$ , les positions  $z_T$  par le diamètre initial  $d$  de la goutte en prenant pour origine la position initiale de l'interface entre les fluides 1 et 3.

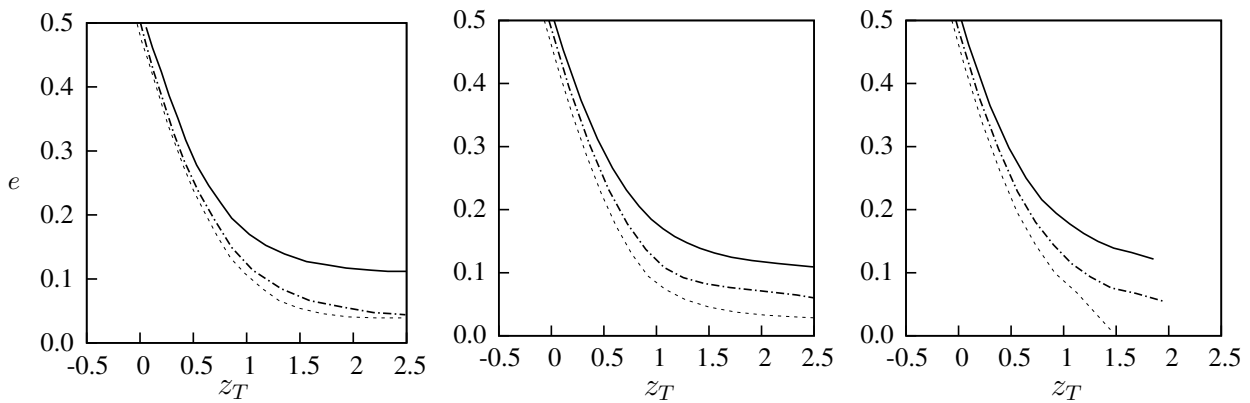


FIGURE 5.3 – Évolution de l'épaisseur  $e$  du film compris entre le sommet de la goutte et le fluide supérieur dans les simulations BIM de Manga & Stone (à gauche), JADIM (au centre), et PELICANS (à droite) de la figure 5.1. —  $\lambda = 10$ , — · —  $\lambda = 1$ , - - -  $\lambda = 0.1$ . Les quantités sont normalisées par le diamètre initial  $d$  de la goutte ( $z_T$  est nul lorsque le sommet de la goutte se situe au niveau de la position initiale de l'interface entre les fluides 1 et 3).

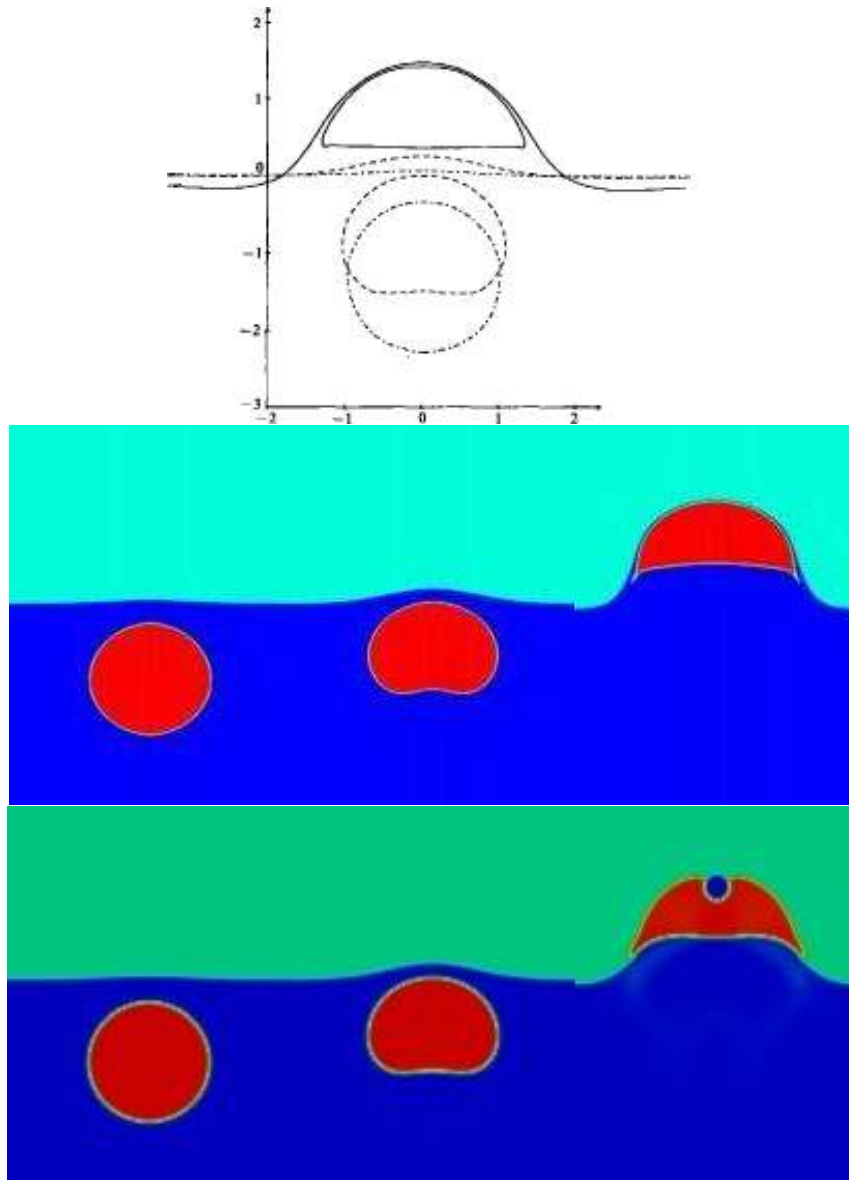


FIGURE 5.4 – Approche d’une interface liquide-liquide par une bulle,  $\rho_3/\rho_1 = 0.5$ ,  $\Lambda = 3$ ,  $Bo = 78$ ,  $Ar = 46.5$ ,  $I = 1$ . Simulations de Shopov & Minev en haut, JADIM au centre, et PELICANS en bas.

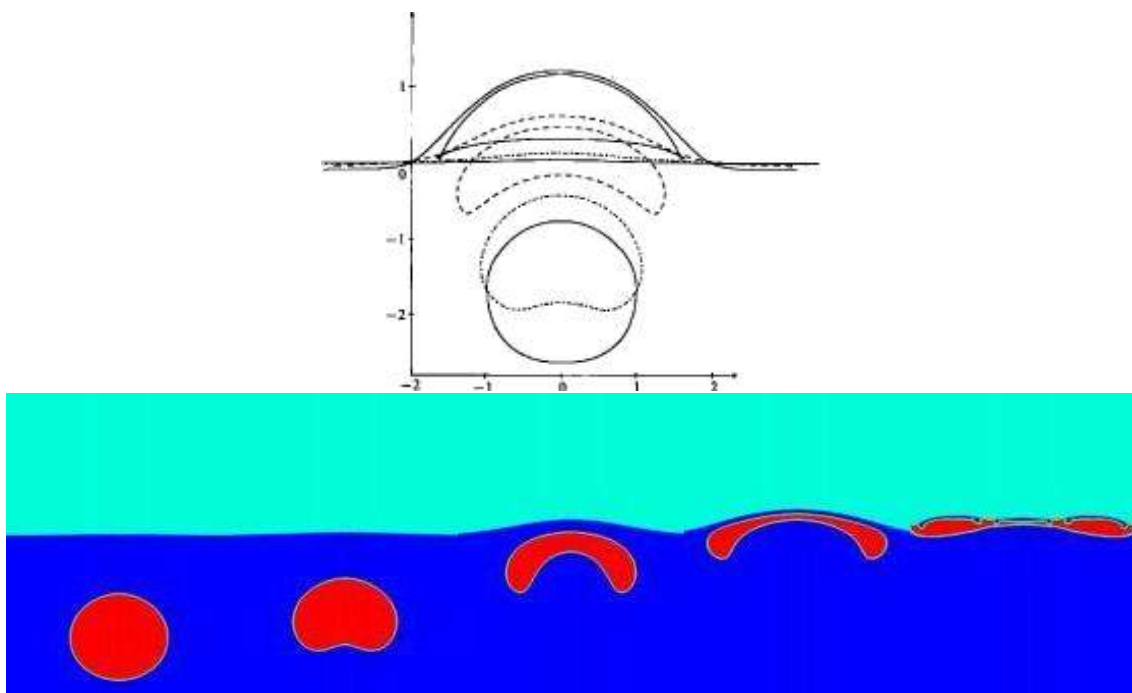


FIGURE 5.5 – Approche d’une interface liquide-liquide par une bulle,  $\rho_3/\rho_1 = 0.5$ ,  $\Lambda = 2$ ,  $Bo = 79.2$ ,  $Ar = 56.3$ ,  $I = 20$ . Simulations de Shopov & Mineev en haut, JADIM en bas. La dernière image de la séquence JADIM a été ajoutée afin de visualiser la formation d’un tore aux temps longs.

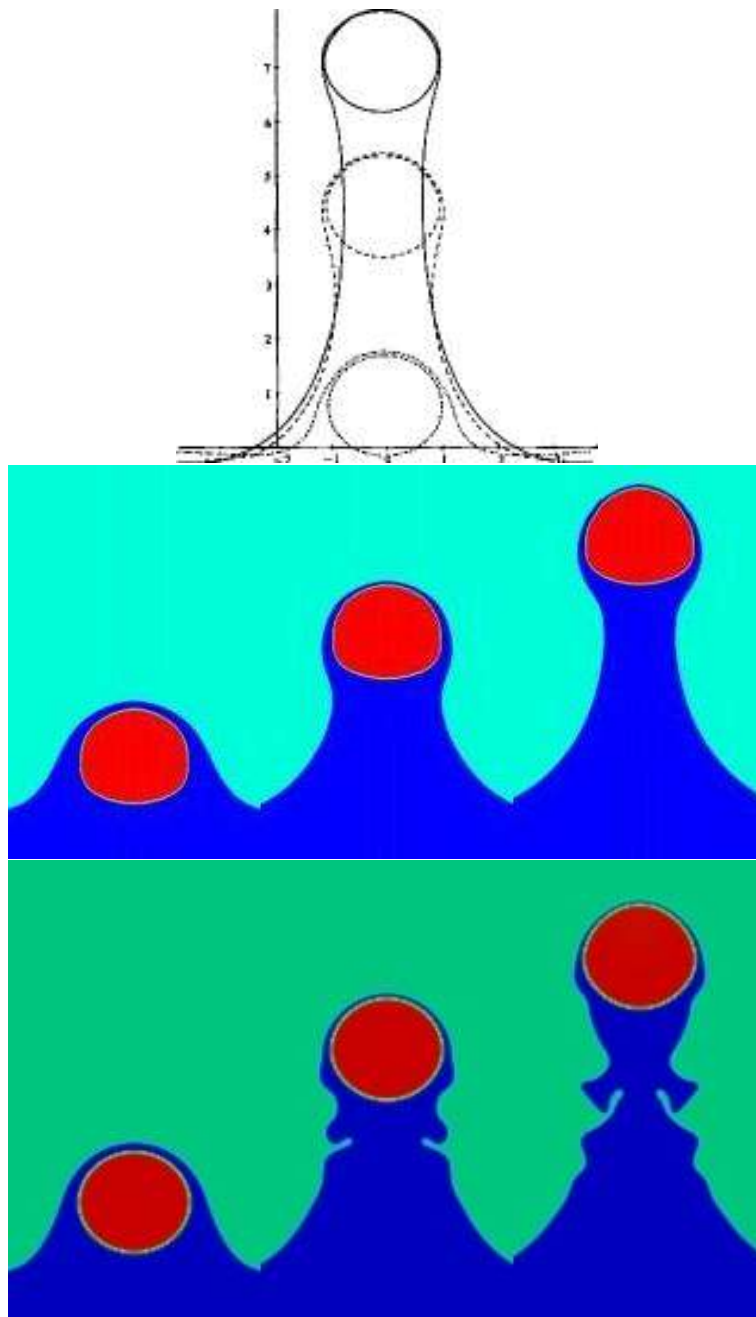


FIGURE 5.6 – Approche d’une interface liquide-liquide par une goutte,  $\varrho_2/\varrho_1 = 0.1$ ,  $\varrho_3/\varrho_1 = 0.9$ ,  $\eta_2/\eta_1 = 36$ ,  $\Lambda = 0.33$ ,  $Bo = 4$ ,  $Ar = 25.5$ ,  $I = 0.01$ . Simulations de Shopov & Mineev en haut, JADIM au centre, et PELICANS en bas.

### 3 Prédictions comparées des deux codes

Dans cette section nous confrontons les deux approches numériques à disposition, *i.e.* la méthode de capture d'interface implémentée dans JADIM et la méthode à interfaces diffuses de PELICANS, dans six configurations différentes où seules les masses volumiques des liquides varient. L'objectif est double : évaluer les différences de comportement des deux approches dans des problèmes non couverts par nos expériences, et comprendre l'impact d'une variation des forces de flottabilité sur l'évolution de l'écoulement. Les simulations réalisées dans cette partie restent toutefois en marge du reste de nos simulations car, l'objectif étant uniquement d'analyser qualitativement les différences entre les codes, un domaine plus restreint de  $2d$  de large et  $6d$  de haut est utilisé. L'interface liquide-liquide est positionnée initialement à  $3.5d$  en-dessous de la paroi supérieure et la bulle est lâchée avec son sommet situé à  $1.5d$  de l'interface (les effets visqueux sont assez faibles ici pour négliger l'influence de la paroi inférieure). La grille de calcul utilisée est régulière pour JADIM avec une taille de maille de  $d/40$ , adaptative pour PELICANS avec des tailles de mailles autour des interfaces de  $d/40$  également. Enfin il est à noter que la mobilité du modèle de Cahn-Hilliard / Navier-Stokes est exceptionnellement choisie égale à  $M = 2Pe \epsilon \sqrt{gd} \prod_{i=1}^3 (1 - c_i^2)$  (utilisation de la même formulation que Lapuerta [38]).

Nous pouvons maintenant décrire les divers phénomènes observés dans les simulations. Le premier cas, exposé sur la figure 5.7, concerne l'approche d'une bulle torique d'une interface séparant deux liquides dont les masses volumiques présentent un fort contraste ( $R = 0.8$ ). La bulle est ici caractérisée par  $Bo = 122$  et  $Ar = 156$  dans la phase lourde et est donc à la limite de la transition tore/calotte selon les simulations de Bonometti & Magnaudet [5]. À l'arrivée à l'interface, les bulles simulées se retrouvent piégées pendant un temps à cause du fort contraste de densité. En effet, la force de flottabilité subit un saut drastique, diminuant de 80% au passage de la phase lourde à la phase légère. Une fois la bulle arrivée à l'interface, le film est drainé rapidement (image 3 de la série). Toutefois les bulles restent piégées entre les deux phases tout au long de la séquence. Deux lignes triples (à l'intérieur et à l'extérieur du tore) sont donc présentes jusqu'à la fin des simulations.

La deuxième configuration concerne une bulle évoluant dans un mélange où le liquide lourd est de masse volumique moins élevée que précédemment. La bulle est ici en forme de calotte sphérique ( $Bo = 49$ ,  $Ar = 63$ ) et traverse l'interface en emportant une mince colonne. Les principales différences entre les deux séquences de résultats résident dans les formes de bulles après que celles-ci ont atteint une hauteur de  $1d$  au-dessus de la position initiale de l'interface (image 3 de la figure 5.8). Alors que la simulation PELICANS montre une bulle en forme de calotte avec un début de jupe à l'arrière, JADIM prédit un détachement entre la bulle principale et à sa suite une bulle torique secondaire qui n'arrivera pas à s'échapper de l'interface et redescendra avec la colonne de liquide lourd en deçà de la position initiale de l'interface. Vitesses des bulles et géométrie de la colonne sont toutefois globalement similaires, malgré ces différences entre les formes des bulles.

Un cas où les deux codes de simulation s'accordent relativement bien est celui exposé dans la figure 5.9 qui décrit la traversée d'une bulle à une interface séparant deux liquides de même masse volumique et de même viscosité. Ne subissant aucune variation de force d'Archimède ni aucune modification des forces visqueuses au passage de l'interface, les variations de forme de la bulle sont dues aux seules forces capillaires, principalement à la ligne triple. Par ailleurs, la colonne liquide est beaucoup plus large que dans le cas précédent puisqu'elle peut suivre la bulle sans subir de force descendante due à son propre poids, celui-ci étant nul relativement au liquide léger.

L'avant-dernier cas (figure 5.10) révèle de nombreuses différences entre les résultats de JADIM et PELICANS. Tout d'abord au niveau de la colonne entraînée par la bulle : la simulation de JADIM montre clairement une mince colonne encore attachée à la bulle jusqu'à la fin de la séquence, contrairement au modèle de Cahn-Hilliard où les interfaces sont diffuses et où la bulle entraîne une colonne de liquide lourd mal définie (5<sup>ème</sup> image de la séquence). Cette différence est amplifiée par le fait que la bulle se scinde dans la prédiction de PELICANS, laissant ainsi derrière elle une petite bulle qui reste emprisonnée à l'interface liquide-liquide. La simulation de JADIM quant à elle fait apparaître des forces de tension de surface plus importantes : la bulle est moins étirée et reste entière tout au long de la traversée.

Enfin, en présence d'un très fort contraste de masse volumique, les résultats des deux codes sont globalement similaires dans le cas de l'ascension d'une calotte sphérique (figure 5.11). Les bulles sont piégées à l'interface, mais le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre final du système est plus long pour JADIM.

Ces exemples montrent que, à taille de mailles et de domaines similaires, les deux approches numériques prédisent des évolutions qualitativement identiques lors de cas « extrêmes » dans des configurations où les contrastes de masse volumique sont très importants. Les résultats concordent aussi dans le cas où les masses volumiques sont identiques. La différence essentielle entre les résultats repose avant tout sur les différences d'évaluation des rapports de forces capillaires dans les configurations intermédiaires ( $R = 0.5$ ).

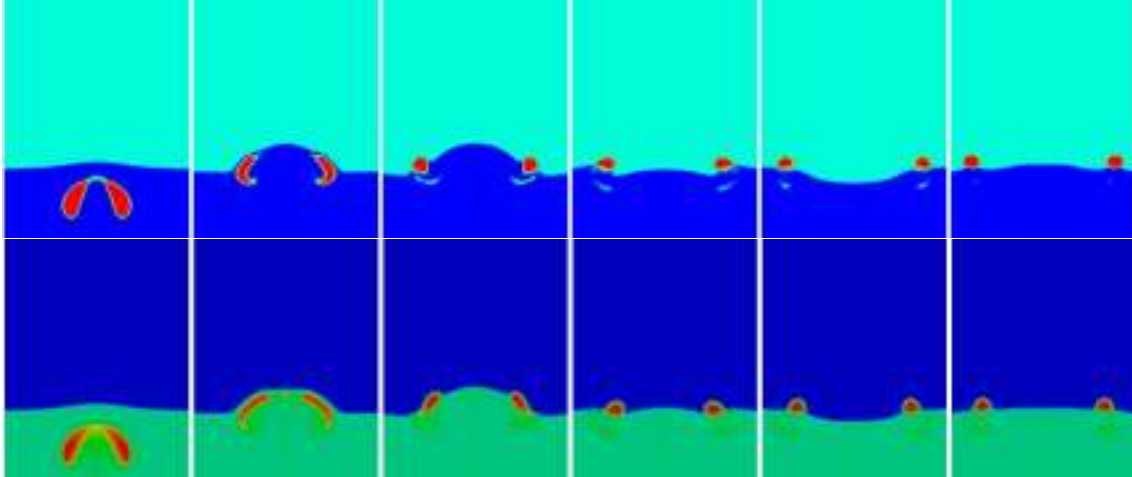


FIGURE 5.7 – Simulation JADIM en haut, PELICANS en bas, du passage d'une bulle de diamètre  $d = 1$  cm à travers une interface liquide-liquide pour des masses volumiques  $\varrho_1 = 5000$ ,  $\varrho_3 = 1000$   $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , des viscosités  $\eta_1 = 100$ ,  $\eta_3 = 100$  cP, des tensions superficielles  $\sigma_{21} = 40$ ,  $\sigma_{23} = 40$   $\text{mN} \cdot \text{m}^{-1}$ , et une tension interfaciale  $\sigma_{13} = 40$   $\text{mN} \cdot \text{m}^{-1}$ . Paramètres adimensionnels :  $Bo = 122$ ,  $Ar = 156$ ,  $\Lambda = 1$ ,  $R = 0.8$ ,  $I = 1$ ,  $S = 1$ . Temps entre deux images  $\Delta t = t\sqrt{g/d} = 1.57$ .

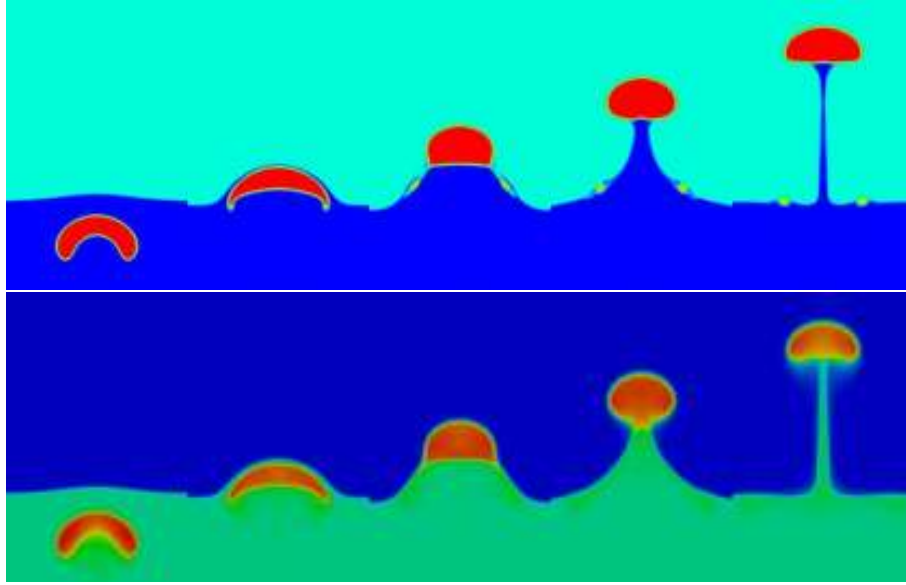


FIGURE 5.8 – Simulation JADIM en haut, PELICANS en bas, du passage d’une bulle de diamètre  $d = 1$  cm à travers une interface liquide-liquide pour des masses volumiques  $\rho_1 = 2000$ ,  $\rho_3 = 1000$  kg.m<sup>-3</sup>, des viscosités  $\eta_1 = 100$ ,  $\eta_3 = 100$  cP, des tensions superficielles  $\sigma_{21} = 40$ ,  $\sigma_{23} = 40$  mN.m<sup>-1</sup>, et une tension interfaciale  $\sigma_{13} = 40$  mN.m<sup>-1</sup>. Paramètres adimensionnels :  $Bo = 49$ ,  $Ar = 63$ ,  $\Lambda = 1$ ,  $R = 0.5$ ,  $I = 1$ ,  $S = 1$ . Temps entre deux images de  $\Delta t = t\sqrt{g/d} = 1.57$ .

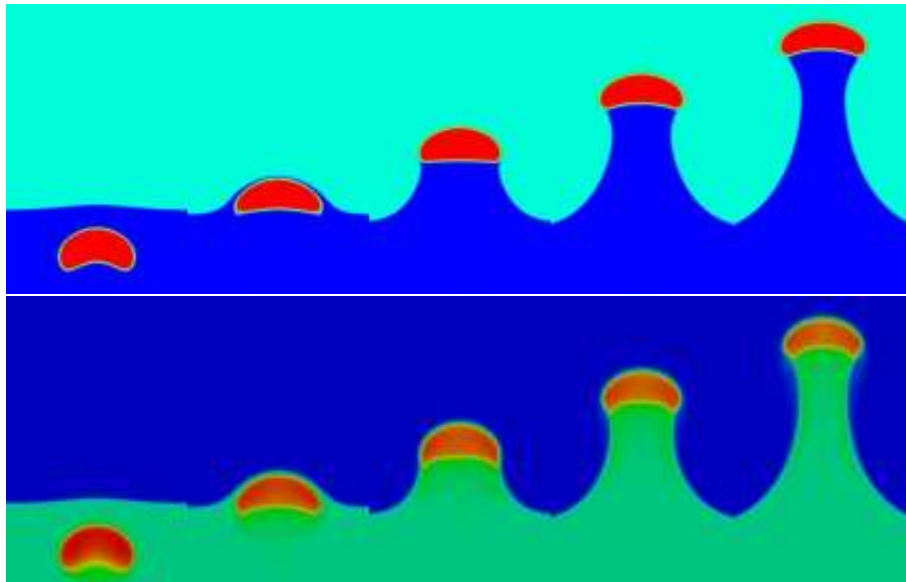


FIGURE 5.9 – Simulation JADIM en haut, PELICANS en bas, du passage d’une bulle de diamètre  $d = 1$  cm à travers une interface liquide-liquide pour des masses volumiques  $\rho_1 = 1000$ ,  $\rho_3 = 1000$  kg.m<sup>-3</sup>, des viscosités  $\eta_1 = 100$ ,  $\eta_3 = 100$  cP, des tensions superficielles  $\sigma_{21} = 40$ ,  $\sigma_{23} = 40$  mN.m<sup>-1</sup>, et une tension interfaciale  $\sigma_{13} = 40$  mN.m<sup>-1</sup>. Paramètres adimensionnels :  $Bo = 24$ ,  $Ar = 31$ ,  $\Lambda = 1$ ,  $R = 0$ ,  $I = 1$ ,  $S = 1$ . Temps entre deux images de  $\Delta t = t\sqrt{g/d} = 1.57$ .

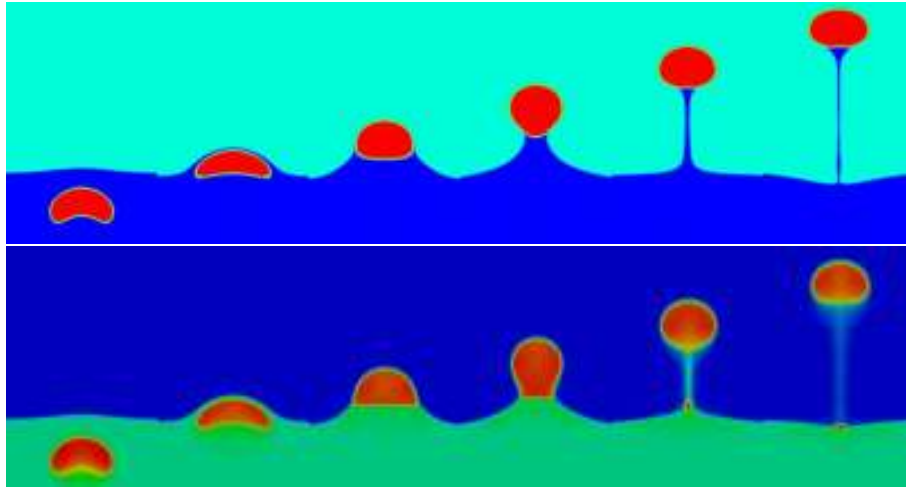


FIGURE 5.10 – Simulation JADIM en haut, PELICANS en bas, du passage d’une bulle de diamètre  $d = 1$  cm à travers une interface liquide-liquide pour des masses volumiques  $\rho_1 = 1000$ ,  $\rho_3 = 500$  kg. m<sup>-3</sup>, des viscosités  $\eta_1 = 100$ ,  $\eta_3 = 100$  cP, des tensions superficielles  $\sigma_{21} = 40$ ,  $\sigma_{23} = 40$  mN. m<sup>-1</sup>, et une tension interfaciale  $\sigma_{13} = 40$  mN. m<sup>-1</sup>. Paramètres adimensionnels :  $Bo = 24$ ,  $Ar = 31$ ,  $\Lambda = 1$ ,  $R = 0.5$ ,  $I = 1$ ,  $S = 1$ . Temps entre deux images de  $\Delta t = t\sqrt{g/d} = 1.57$ .

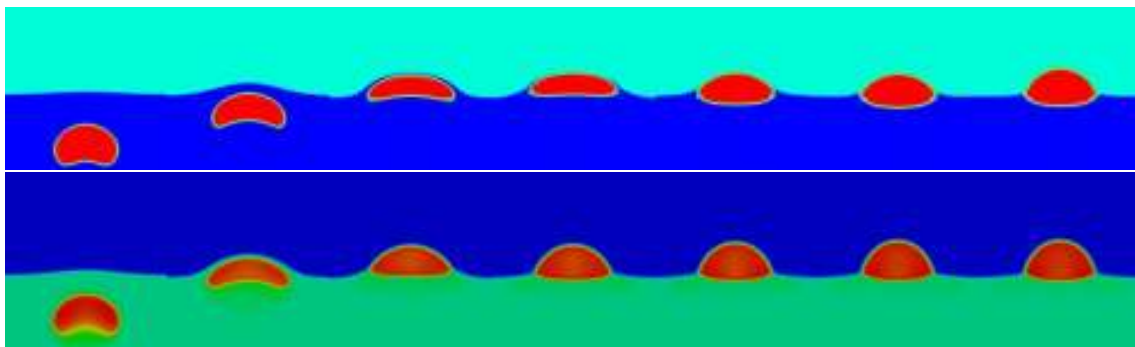


FIGURE 5.11 – Simulation JADIM en haut, PELICANS en bas, du passage d’une bulle de diamètre  $d = 1$  cm à travers une interface liquide-liquide pour des masses volumiques  $\rho_1 = 1000$ ,  $\rho_3 = 100$  kg. m<sup>-3</sup>, des viscosités  $\eta_1 = 100$ ,  $\eta_3 = 100$  cP, des tensions superficielles  $\sigma_{21} = 40$ ,  $\sigma_{23} = 40$  mN. m<sup>-1</sup>, et une tension interfaciale  $\sigma_{13} = 40$  mN. m<sup>-1</sup>. Paramètres adimensionnels :  $Bo = 24$ ,  $Ar = 31$ ,  $\Lambda = 1$ ,  $R = 0.9$ ,  $I = 1$ ,  $S = 1$ . Temps entre deux images de  $\Delta t = t\sqrt{g/d} = 1.57$ .



## 4 Drainage de film et influence du nombre de Bond

Il a déjà été entrevu dans la section 3 du chapitre 2 le rôle du nombre de Bond interfacial défini par  $B_I = Bo/I = \rho_1 g d^2 / \sigma_{13}$ . Le but de ce paragraphe est de réexaminer certains points discutés précédemment à la lumière des résultats des simulations numériques de JADIM et de la littérature, afin de mieux comprendre comment ce paramètre, couplé avec les rapports de masse volumique  $R$  et de viscosité  $\Lambda$ , influence la dynamique du système lorsque la bulle approche l'interface liquide-liquide, et plus particulièrement celle du film qui se forme devant la bulle.

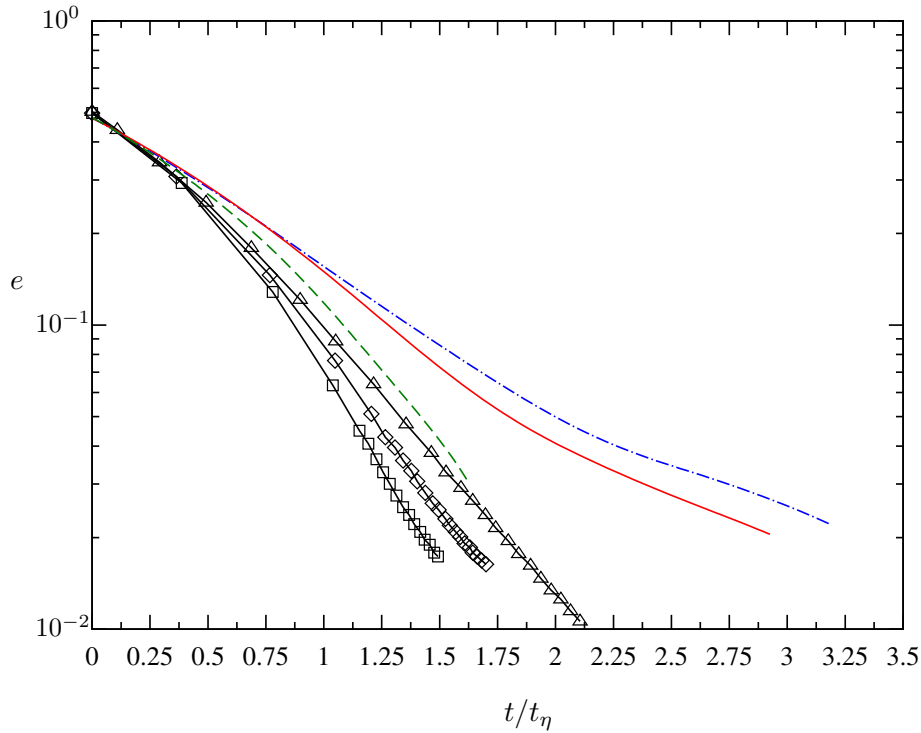


FIGURE 5.12 – Évolution de l'épaisseur normalisée  $e$  de film liquide prédit par JADIM pour trois bulles sphéroïdales. Le temps est ici normalisé par l'échelle visqueuse  $t_\eta = 12 \eta_1 / \rho_1 g d = 12 Ar^{-1} (d/g)^{1/2}$ , son origine correspond à l'instant où l'épaisseur de film est  $d/2$ . — · — situation de la figure 6.1 ( $Bo = 13.2$ ,  $B_I = 21.3$ ,  $\Lambda = 0.96$ ), - - - situation de la figure 6.4 ( $Bo = 13.3$ ,  $B_I = 21.6$ ,  $\Lambda = 0.0175$ ), — situation de la figure 6.7 ( $Bo = 3.0$ ,  $B_I = 4.9$ ,  $\Lambda = 1.11$ ). Les lignes avec motifs sont le résultat des simulations de Pigeonneau & Sellier [59] pour des bulles approchant une surface libre ( $R = 1$ ,  $I = 1$ ,  $\Lambda = 0$ ),  $\square$   $Bo = B_I = 3.6$ ,  $\diamond$   $Bo = B_I = 6.0$ ,  $\triangle$   $Bo = B_I \geq 12$ .

Dans la limite des faibles nombres de Reynolds, les différentes études numériques basées sur des méthodes d'intégrales de frontière (Chi & Leal [16], Manga & Stone [48], Pigeonneau & Sellier [59]) montrent que l'augmentation de  $B_I$  jusqu'à des valeurs de l'ordre de 10 ralentit le drainage du film ; aucune influence significative des forces interfaciales n'est observée pour des valeurs plus importantes. Augmenter  $B_I$  autorise les deux bords du film à se déformer plus facilement, ce qui permet à l'épaisseur de rester plus uniforme tout au long du processus de drainage. En conséquence, l'aire de la région où le film devient très mince augmente. Puisque la force de flottabilité est fixe, le temps nécessaire à drainer ledit film devient plus important. La figure 5.12 montre l'évolution de l'épaisseur de film mesurée selon l'axe vertical pour trois bulles sphéroïdales qui seront détaillées dans le chapitre suivant. Bien que la partie basse des courbes soit certainement contaminée par les limitations dues au maillage, la tendance générale qui se dégage de la partie supérieure est claire. Tout d'abord, il est important de noter que pour des temps plus longs que le temps d'échelle visqueuse  $t_\eta = 12 Ar^{-1} (d/g)^{1/2}$ , la figure 5.12 confirme l'évolution exponentielle de l'épaisseur de film déjà observée en présence d'une surface libre (Debrégeas *et al.* [22]). Ce comportement exponentiel résulte directement du profil de vitesse « plat » dans chaque section du film, alors qu'on sait qu'un profil parabolique produit une décroissance de l'épaisseur du film en loi de puissance (Jones & Wilson [30]). Les résultats présents suggèrent donc que le profil est prin-

cipalement du premier type pour des valeurs de  $\Lambda$  de l'ordre de l'unité. Parmi les deux situations impliquant des rapports de viscosité d'ordre de l'unité, plus  $B_I$  est petit et plus rapide est le drainage, en accord avec les études à faibles nombres de Reynolds. Dans ces deux cas (courbes — et — · — de la figure 5.12), le drainage est considérablement plus lent que pour les situations de surface libre récemment décrites par Pigeonneau & Sellier. Puisque cette tendance est observée quels que soient  $Bo$  et  $B_I$ , elle est donc due au rapport de viscosité  $\Lambda$ . Plus  $\Lambda$  est faible et plus le drainage est efficace car l'étirement de la surface supérieure dissipe très peu d'énergie lorsque  $\Lambda \ll 1$ . Ce phénomène est confirmé par les deux cas (courbes — · — et — — —) avec à peu près les mêmes nombres de Bond  $Bo$  et  $B_I$  mais des rapports de viscosité  $\Lambda$  différents. Le film est drainé bien plus rapidement quand  $\Lambda \ll 1$  et son évolution est proche de celle prédite par Pigeonneau & Sellier pour la même gamme de nombres de Bond. Toutefois il peut être noté que le drainage est légèrement moins rapide que dans le cas d'une surface libre (différences entre les courbes — — — et avec triangles) : ceci est en accord avec l'argument ci-dessus concernant les variations spatiales de l'épaisseur de film. Comme  $I = 1$  pour une surface libre, alors que  $I \approx 0.6$  ici, la surface supérieure du film se déforme mieux dans le cas présent, et une force plus importante ou un temps plus long est nécessaire pour drainer l'intégralité du film dans cette région.

## 5 Discussion sur les limitations des deux codes : le problème des films minces

Les différentes simulations exposées dans ce chapitre révèlent que les approches basées sur la formulation à un fluide des équations de Navier-Stokes reproduisent correctement l'évolution des systèmes triphasiques étudiés qui avaient été simulés par des méthodes « Boundary Integral Method » (BIM). En particulier la formulation « Volume Of Fluid » et la technique de capture d'interface utilisée dans JADIM fournit de bonnes prédictions sur l'évolution de la topologie d'interface.

Toutefois, dans l'approche à un fluide, lorsque l'épaisseur du film devient inférieure à quelques mailles, un pincement numérique survient tôt ou tard car les solutions des équations de transport souffrent inévitablement de diffusion numérique et l'épaisseur finie des interfaces résulte en une piètre évaluation des propriétés physiques à l'intérieur du film ainsi qu'en une contamination locale de la dynamique de l'écoulement par les effets capillaires. Évidemment, le pincement numérique peut être retardé par le raffinement local du maillage (Popinet [60]) mais même cette technique rencontre des limitations quand l'épaisseur du film est inférieure de plusieurs ordres de grandeur aux échelles dominantes de l'écoulement. Ce problème est reconnu comme une limitation majeure des approches de simulation numérique directe pour les suspensions de gouttes et bulles. Une tentative récente de Thomas *et al.* [72] explore les possibilités offertes par le couplage de la simulation directe et d'une approche de type lubrification pour prendre en compte les films très minces. Le problème considéré concerne le mouvement de gouttes glissant le long d'une paroi. La méthode combine Simulation Numérique Directe (DNS) dans le cœur de l'écoulement avec une paire d'équations additionnelle gouvernant l'évolution de l'épaisseur locale et de la vitesse maximale dans le film séparant la goutte de la paroi. La dynamique du film est gouvernée par le gradient de pression donné par la DNS alors que le cisaillement local sur la partie de la surface de la goutte faisant face à la paroi est prédit par les équations de lubrification. Ce type d'approche « de sous-maille » est très prometteur. Néanmoins, dans cet exemple, il tire avantage du fait que la forme et la position du substrat sur lequel le film se développe est connu à l'avance. Dans les situations considérées dans cette étude, ce n'est pas le cas car les caractéristiques du film ainsi que sa position dépendent de l'histoire de l'écoulement. Il est donc nécessaire d'étendre cette approche à des films courbes dont la position et la forme moyenne sont intrinsèques à la solution.

## Chapitre 6

# Analyse d'une sélection de résultats expérimentaux et numériques

Six résultats expérimentaux de traversée de bulles isolées à travers une interface ont été sélectionnés et sont détaillés dans ce chapitre. Trois bulles sphéroïdales, deux calottes sphériques et un tore sont référencés puis simulés à l'aide des deux codes JADIM et PELICANS. Les observations mettent en lumière les bons accords qualitatifs et quantitatifs entre les résultats expérimentaux et les simulations pour les cas de grosses bulles (calottes sphériques et tore). Cependant, elles montrent également les limites des outils numériques lors de situations de « film-drainage » quand le temps de résidence de la bulle à l'interface est grand, *i.e.* lorsque la bulle reste piégée à l'interface suffisamment longtemps pour que le phénomène de drainage dirige l'évolution de l'écoulement.

### 1 Bulles sphéroïdales

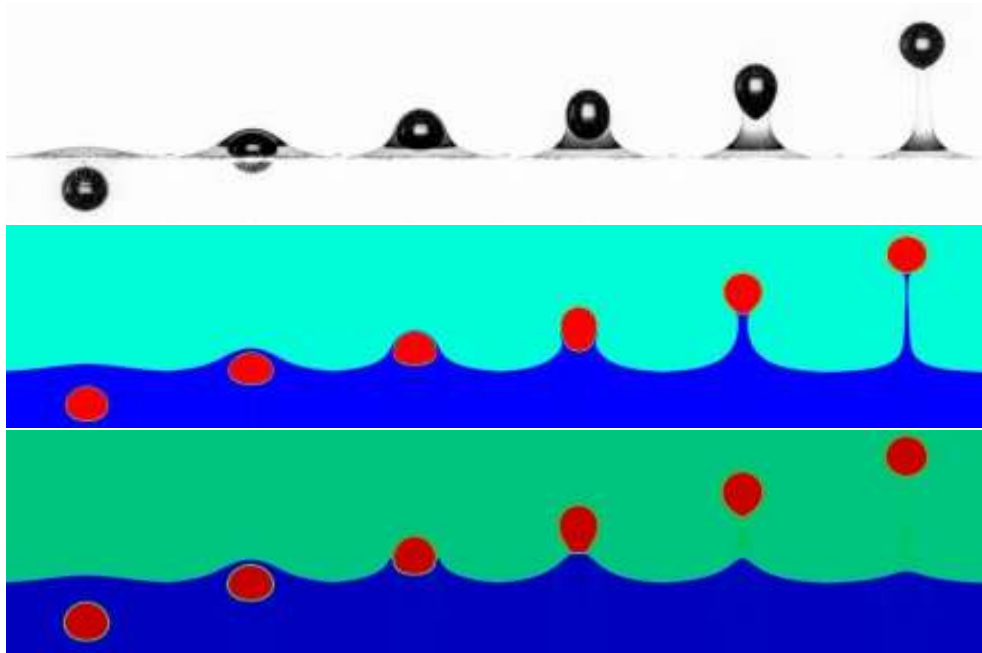


FIGURE 6.1 – Évolution d'un système triphasique pour une bulle caractérisée par un nombre de Bond de 13.2 et un nombre d'Archimède de 4.1 dans les séries D inf. ( $\Lambda = 0.965$ , figure 4.1). Comparaison entre la séquence expérimentale (en haut), les prédictions de JADIM (au centre), et les prédictions de PELICANS (en bas). L'écart de temps adimensionné  $\Delta t \sqrt{g/d}$  entre deux images consécutives est de 4.3.

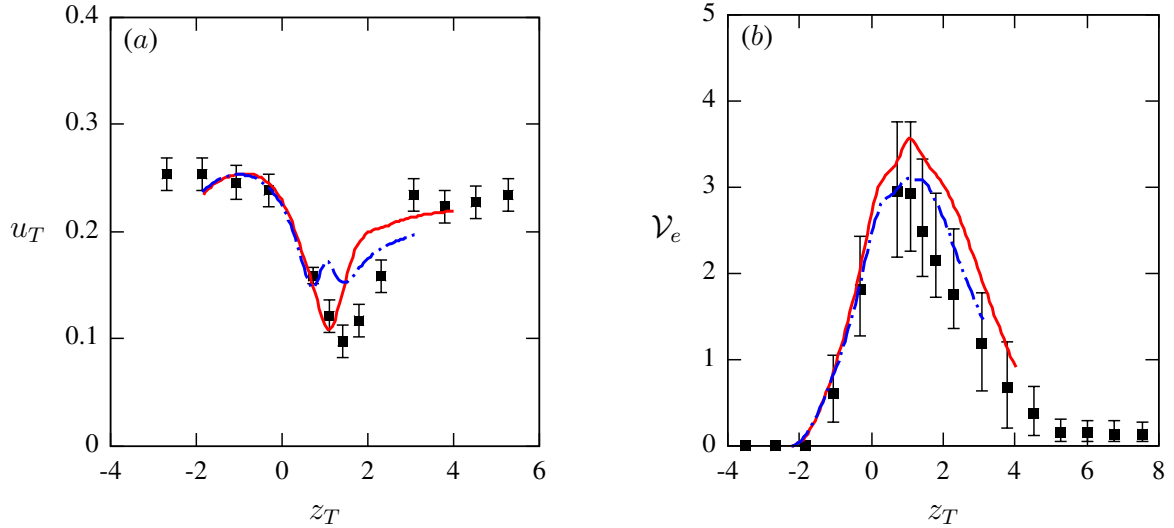


FIGURE 6.2 – Évolution (a) de la vitesse normalisée  $u_T$  et (b) du volume déplacé normalisé  $\mathcal{V}_e$  en fonction de la position adimensionnée  $z_T$  de la bulle pour la situation considérée sur la figure 6.1.

■ expériences, — prédictions de JADIM, — · — prédictions de PELICANS.

Les barres d'erreurs sur  $u_T$  résultent d'une incertitude de  $\pm 1$  pixel sur le déplacement du point le plus haut de la bulle entre deux images successives, alors que les barres d'erreurs sur  $\mathcal{V}_e$  résultent d'une incertitude de 3 pixels sur le rayon local horizontal du volume entraîné.

Dans un premier temps, une bulle sphérique de la série D inf. ( $A = 0.965$ , figure 4.1) est considérée et l'évolution de son ascension est reportée sur la figure 6.1. Celle-ci est caractérisée par un nombre de Bond de 13.2 et un nombre d'Archimède assez faible de 4.1 à cause de la forte viscosité du liquide inférieur. Selon les images expérimentales, bien qu'elle soit toujours encapsulée dans un film de liquide lourd, la bulle arrive à dépasser la position initiale horizontale de l'interface liquide-liquide. Le film se casse alors entre la troisième et la quatrième image, après que la bulle a commencé à s'allonger, et une colonne de fluide est entraînée dans la phase supérieure. Alors que le haut de la colonne redescend le long de la surface de la bulle, l'arrière de cette dernière devient plus pointu et on observe une petite queue, révélatrice de l'étirement dû aux effets combinés entre l'ascension de la bulle et la récession de la colonne. La colonne se sépare alors de la bulle qui s'élève librement dans le liquide supérieur.

L'évolution prédite par JADIM reproduit correctement ces différentes étapes à la différence près que la traversée de l'interface liquide-liquide est plus rapide dans le cas de la simulation. C'est pour cette raison que dans les temps plus longs (dernière image de la figure 6.1) la colonne entraînée est plus fine dans la simulation que dans l'expérience, à cause du fait que la bulle a déjà parcouru une plus grande distance. Au contraire, PELICANS capte assez mal la manière dont la bulle traverse l'interface liquide-liquide. Le film se casse trop tôt, entre les deuxième et troisième images, et redescend trop vite. Le ménisque est déjà en-dessous de la bulle à la quatrième image. Enfin, la bulle commence directement son ascension libre dans la phase supérieure sans connexion avec la colonne de liquide lourd pendant le reste de la séquence.

La figure 6.2a représente l'évolution de la vitesse d'ascension normalisée  $u_T = u/(gd)^{\frac{1}{2}}$ . Depuis sa valeur stationnaire dans la phase lourde,  $u_T$  décroît doucement lorsque le haut de la bulle approche l'interface liquide-liquide à cause de la suppression capillaire qui se crée progressivement dans le film. La vitesse diminue de plus de moitié alors que la bulle est toujours encapsulée dans le liquide inférieur, et après la rupture du film,  $u_T$  subit une croissance monotone jusqu'à atteindre sa valeur terminale dans la phase supérieure. Pendant cette phase d'accélération, la bulle parcourt une distance égale à deux fois son diamètre environ. La vitesse terminale dans la phase légère est moindre que celle dans la phase lourde, principalement à cause de la réduction de la force de flottabilité ( $R = 0.224$ ).

Toujours selon la figure 6.2a, le nombre de Reynolds de la bulle  $Re = Ar u_T$  ainsi que le nombre de Weber  $We = Bo u_T^2$  sont de l'ordre de l'unité dans les deux phases. Une prédiction théorique de la vitesse terminale prenant en compte les corrections inertielles correspondant à des nombres de Reynolds et Weber faibles a été obtenue par Taylor & Acrivos [71] en utilisant la méthode des développements asymptotiques

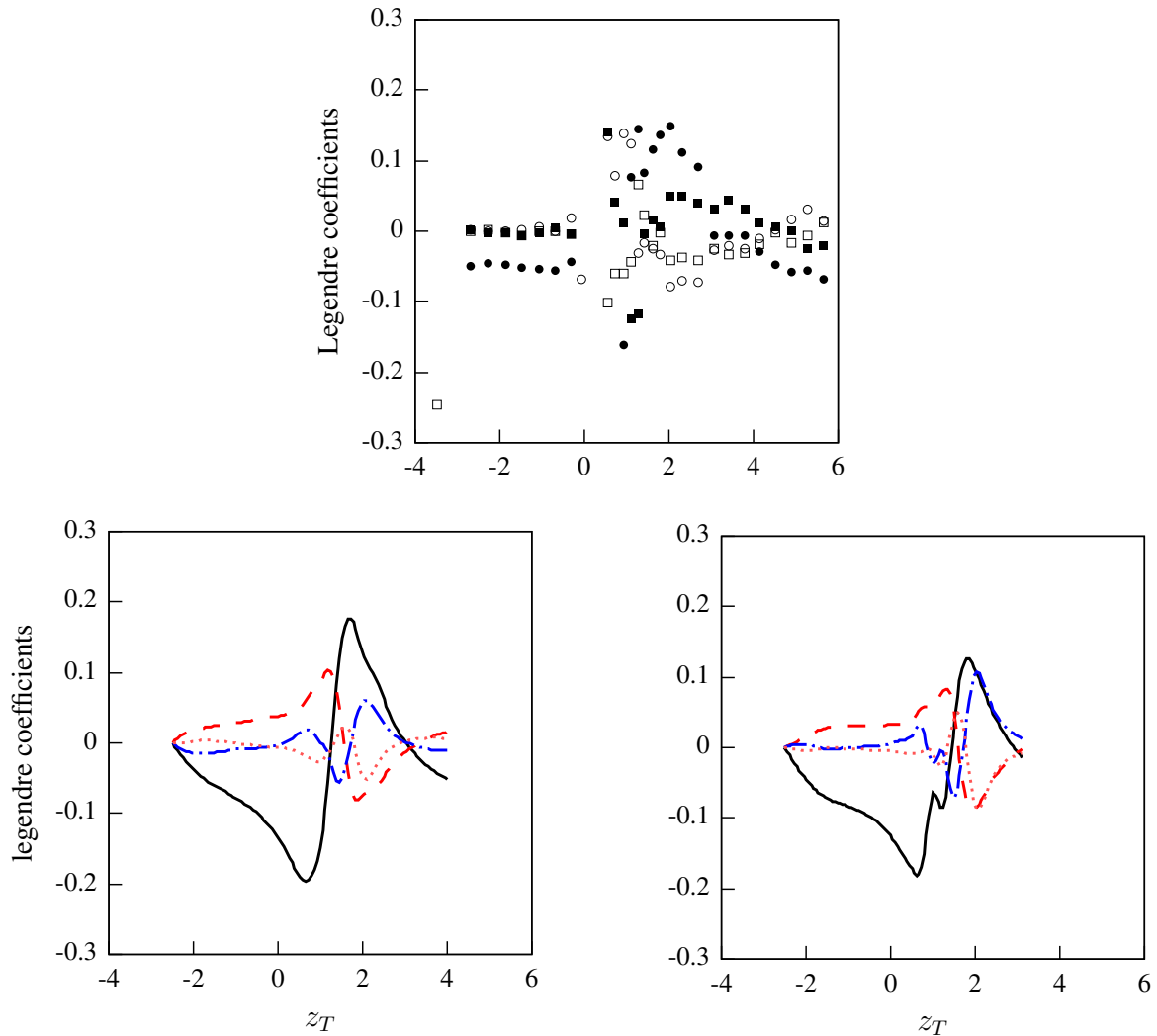


FIGURE 6.3 – Évolution des premiers coefficients  $a_i$  de la reconstruction en polynômes de Legendre de la surface de la bulle considérée sur la figure 6.1, en fonction de la position  $z_T$  du point le plus haut de la bulle. En haut, résultats expérimentaux,  $\bullet$   $a_2/a_0$ ,  $\circ$   $a_3/a_0$ ,  $\blacksquare$   $a_4/a_0$ ,  $\square$   $a_5/a_0$ . En bas, évolution des prédictions de JADIM (à gauche) et PELICANS (à droite), —  $a_2/a_0$ , ---  $a_3/a_0$ , - · -  $a_4/a_0$ , · · ·  $a_5/a_0$ .

raccordés. Reprenant ces résultats dans le cas d'une goutte sans masse et sans viscosité (section 7.3 du chapitre 1), l'équation non linéaire résultante qui exprime le bilan de quantité de mouvement vertical s'écrit

$$u_T \left[ 1 + \frac{Re}{8} + \frac{Re^2}{40} \ln \frac{Re}{2} + \frac{We}{12} \right] = \frac{Ar}{12}. \quad (6.1)$$

Avec les valeurs des nombres de Bond et d'Archimède du cas présent, (6.1) prédit une vitesse d'ascension  $u_T$  de 0.288 environ, ce qui est en accord avec la valeur initiale de  $u_T$  reportée sur la figure 6.2a, bien qu'un peu supérieure. Le lecteur notera également que si l'on néglige les corrections inertielles dans (6.1) on prédit une vitesse  $u_T = Ar/12$  de 0.342 ce qui surestime clairement la vitesse actuelle. Remplaçant maintenant  $Ar$  par  $Ar_u = (1 - R)Ar/\Lambda$  et  $Bo$  par  $Bo_u = (1 - R)Bo/S$  dans (6.1) ( $Ar_u$  et  $Bo_u$  correspondant aux nombres d'Archimède et de Bond de la bulle dans le liquide supérieur), la vitesse terminale dans la phase supérieure est évaluée à  $u_T \approx 0.236$  ce qui est encore en bon accord avec les valeurs expérimentales et numériques. Ce bon accord sur les vitesses terminales est une information qui suggère que la surface de la bulle est hydrodynamiquement propre, c'est à dire que la dynamique du système n'est pas sensiblement perturbée par les effets de contamination, du moins pendant la durée d'observation. Ceci avait déjà été remarqué dans le premier chapitre pour le fluide inférieur et se confirme donc pour le fluide supérieur.

L'évolution de la vitesse de la bulle au milieu de la séquence numérique mérite également quelques commentaires. Les deux codes prédisent correctement la décroissance de la vitesse dans la région de l'interface

liquide-liquide. Cependant, pour certaines raisons qui seront détaillées ultérieurement, le film qui recouvre le haut de la bulle se casse trop tôt, particulièrement dans le cas du calcul PELICANS, empêchant  $u_T$  de diminuer autant qu'elle le doit. Par conséquent,  $u_T$  commence à décroître trop tôt, et la période durant laquelle elle augmente pour atteindre sa nouvelle vitesse terminale est trop courte. Les effets combinés de ces biais impliquent que l'évolution de la vitesse  $u_T$  prédite par PELICANS dans la période intermédiaire est assez éloignée de l'évolution expérimentale, alors que la prédiction donnée par JADIM est plus proche de celle-ci même s'il subsiste un écart durant la période d'accélération. Cet écart peut probablement être réduit par une augmentation de la résolution du maillage qui permettrait au film de subsister plus longtemps.

Le volume de liquide lourd transporté dans le fluide supérieur est d'un haut intérêt dans ces systèmes triphasiques. Selon le contexte, il peut déterminer l'efficacité du mélange du processus ou encore la quantité de fluide qui risque d'être projetée s'il y a une surface libre en haut du système (par exemple dans le processus de fabrication de l'acier où la phase supérieure est composée de laitier, cf. Kobayashi [36], Reiter & Schwerdtfeger [64][65]). Le volume déplacé est défini dans cette étude comme le volume de liquide lourd qui se situe au-dessus de la position initiale horizontale de l'interface liquide-liquide. Le faible reflux induit par la conservation de la masse qui force le reflux à redescendre près des parois latérales n'est donc pas pris en compte. Le volume déplacé adimensionné  $\mathcal{V}_e$  est dans ce qui suit défini comme le rapport entre le volume de liquide lourd déplacé et le volume de la bulle  $\mathcal{V}$ . Comme la figure 6.2b le montre,  $\mathcal{V}_e$  atteint un maximum (environ 3) lorsque le haut de la bulle est à une distance d'un diamètre au-dessus de l'interface au repos, ce qui correspond quasiment à la troisième image de la séquence sur la figure 6.1. Puis  $\mathcal{V}_e$  décroît continûment jusqu'à atteindre la valeur non nulle de 0.15 après que la bulle a dépassé la distance de  $5d$  au-dessus de l'interface au repos. Cette valeur de 0.15 indique qu'un faible volume reste dans la phase supérieure. Le lecteur remarquera que, de manière non-intuitive, la comparaison entre les figures 6.1 et 6.2 indique que plus la colonne de liquide entraînée par la bulle est haute, moins grand est le volume entraîné. Ceci est dû au fait que la contribution majeure du volume  $\mathcal{V}_e$  provient de la région proche de l'interface liquide-liquide, où la section du volume déplacé a le plus grand rayon, et non de la partie la plus visible de la colonne attachée à l'arrière de la bulle où le rayon est beaucoup plus petit. C'est pourquoi les prédictions des deux codes ne diffèrent pas tant en ce qui concerne  $\mathcal{V}_e$ , bien que seul JADIM fournisse une prédiction géométrique réaliste de la forme de la colonne.

La figure 6.3 montre quant à elle l'évolution des coefficients de la reconstruction en polynômes de Legendre de la surface des bulles, autrement dit l'évolution des formes expérimentale et numériques des bulles au cours de leur traversée à l'interface liquide-liquide. Aux premiers instants, les coefficients sont initialement nuls, *i.e.* les bulles sont totalement sphériques. Ils évoluent ensuite continûment pour traduire l'aplatissement qui engendre une forme ellipsoïdale où le grand axe est aligné avec l'horizontale. Le coefficient  $a_2/a_0$  qui exprime l'élongation de la surface, prédomine et est négatif avec une valeur de  $-0.12$  dans le cas expérimental, et de  $-0.2$  dans les prédictions numériques. Ce signe négatif de  $a_2/a_0$  est associé à un aplatissement du haut et du bas de la bulle comme aperçu sur la figure 6.1 (il est rappelé que les variations de  $a_0$  sont associées aux variations de volume de la bulle ; de ce fait  $a_0$  varie très peu au cours de la traversée). Une inversion de signe remarquable s'effectue à  $z_T \approx 1.6$ , ce qui correspond au minimum de vitesse d'ascension et approximativement au moment de la rupture du film. En effet, la bulle qui était jusque là aplatie à cause de la « rigidité » de l'interface liquide-liquide due aux effets capillaires, s'étire selon la direction verticale après que le drainage du film de liquide lourd a eu lieu. Le haut de la bulle a tendance à s'extraire dans la phase supérieure alors que le bas est encore retenu dans le liquide inférieur. Il en résulte que l'axe privilégié passe de l'horizontale ( $a_2 < 0$ ), à la verticale ( $a_2 > 0$ ). Par ailleurs, le second coefficient prédominant dans cette configuration est  $a_3/a_0$  qui traduit l'asymétrie de la bulle entre sa partie supérieure (plus allongée si  $a_3$  est positif) et sa partie inférieure (plus allongée si  $a_3$  est négatif). Une inversion de signe pour ce coefficient, d'une valeur positive de 0.1 environ à  $-0.1$ , intervient pour  $z_T \approx 1.8$  également près de la position à laquelle le film se rompt. La traversée de l'interface se décompose donc en deux phases : une première où la bulle est encore encapsulée dans le fluide inférieur et dont l'avant est freiné par les forces capillaires s'opposant à la déformation de l'interface, et une deuxième après rupture du film où le sommet de la bulle accélère dans le fluide supérieur. Le lecteur notera également les remarquables similitudes entre les formes expérimentales et numériques, tout en gardant en tête que la partie de la bulle visible sur les photographies expérimentales n'est que la surface apparente de la bulle et que les erreurs intrinsèques à cette projection sont inévitables. Par ailleurs, la surface immergée de la bulle dans la colonne de liquide lourd subit une déformation additionnelle purement optique du fait du changement

d'indice entre phases aqueuse et huileuse.

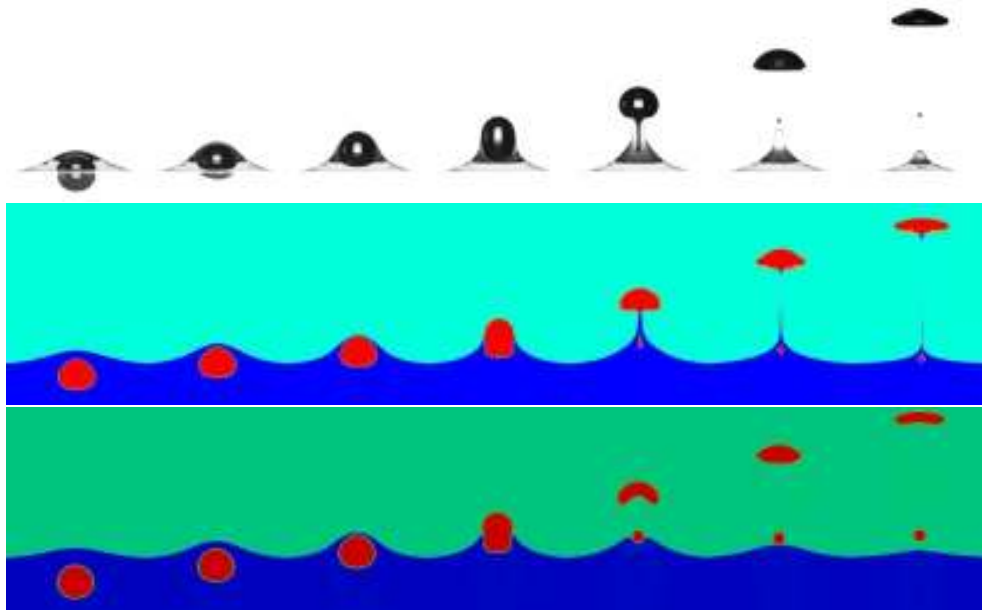


FIGURE 6.4 – Évolution d'un système triphasique pour une bulle caractérisée par un nombre de Bond de 13.3 et un nombre d'Archimède de 4.15 dans la série A ( $\Lambda = 0.0175$ , figure 4.1). Comparaison entre la séquence expérimentale (en haut), les prédictions de JADIM (au centre), et les prédictions de PELICANS (en bas). L'écart de temps adimensionné  $\Delta t \sqrt{g/d}$  entre deux images consécutives est de 1.6.

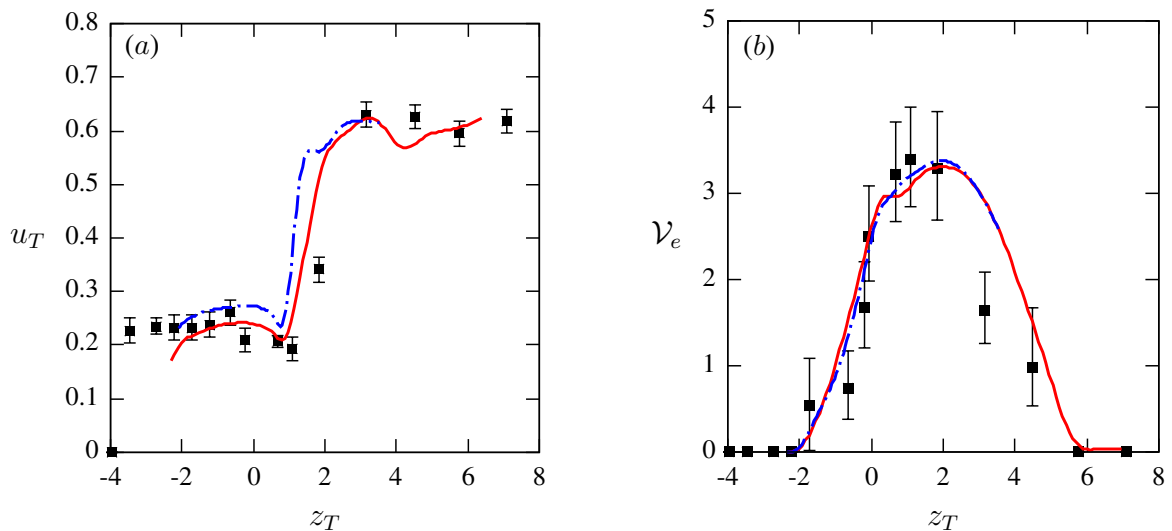


FIGURE 6.5 – Évolution (a) de la vitesse normalisée  $u_T$  et (b) du volume déplacé normalisé  $\mathcal{V}_e$  en fonction de la position adimensionnée  $z_T$  de la bulle pour la situation considérée sur la figure 6.4. Les notations sont définies dans la figure 6.2.

Nous avons aussi étudié en détail une configuration de la série A ( $\Lambda = 0.0175$ , figure 4.1) correspondant à des nombres de Bond ( $Bo = 13.3$ ) et d'Archimède ( $Ar = 4.15$ ) proches de ceux du cas précédent. Comme il peut être vu sur la figure 6.4, la première partie de la séquence est similaire à celle observée dans le cas antérieur. Après que la bulle a commencé à déformer l'interface liquide-liquide, le film de liquide lourd est rapidement drainé et la bulle commence à émerger dans le fluide léger avec une forme allongée. Puis, à cause de la faible viscosité de la phase supérieure, le scénario devient très différent. Alors que le sommet de la bulle continue son ascension, une longue pointe se développe à l'arrière, encapsulée dans une mince colonne de liquide lourd. À cause de la faible viscosité du fluide supérieur, le sommet de la bulle peut monter plus vite que la partie toujours en contact avec le fluide inférieur. Après quelque temps, la colonne de liquide lourd se

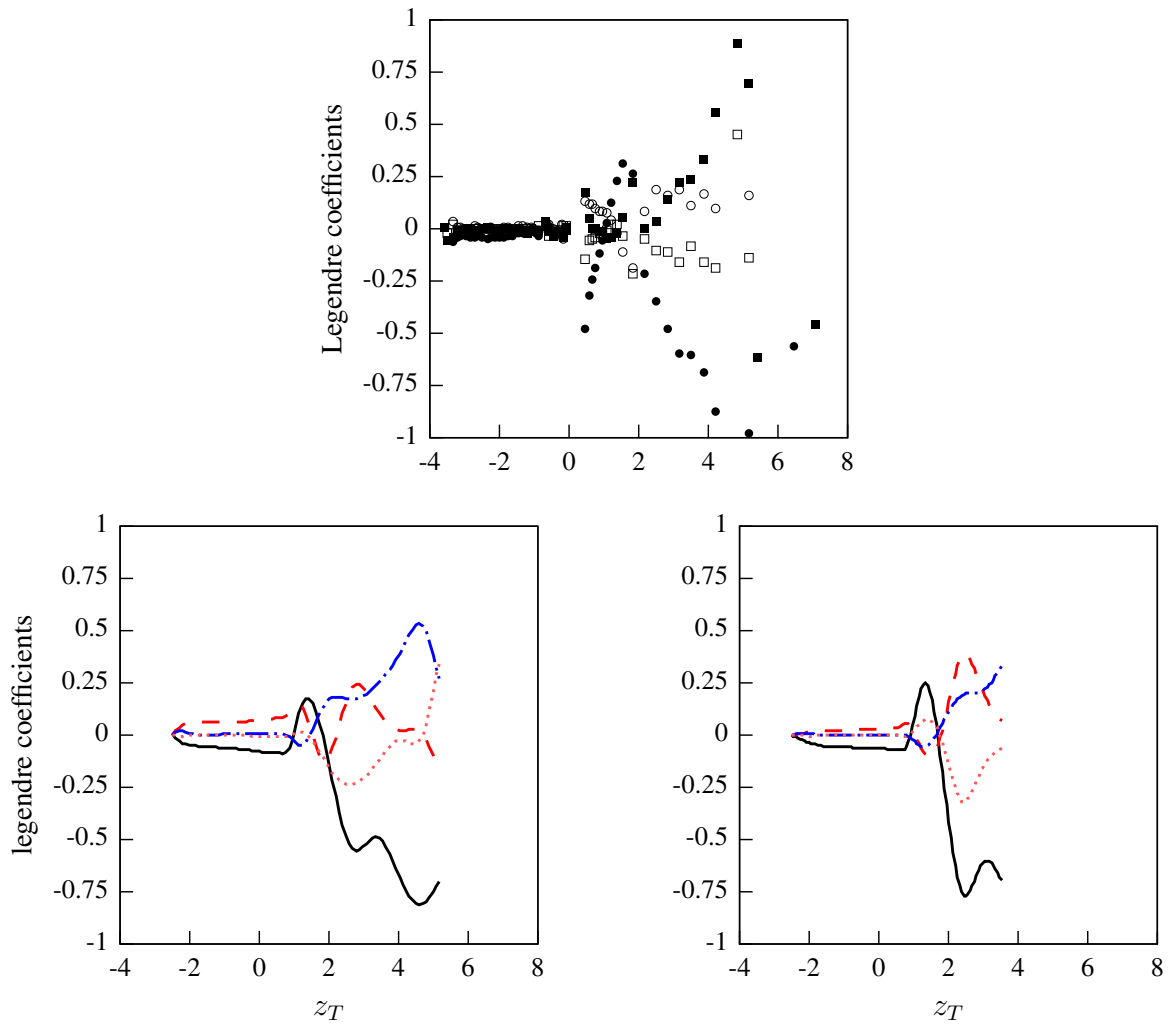


FIGURE 6.6 – Évolution des premiers coefficients  $a_i$  des polynômes de Legendre associés à la surface de la bulle considérée sur la figure 6.4. Les notations sont définies dans la figure 6.3.

casse à l'arrière du sommet de la bulle, ce qui engendre l'éclatement de la bulle au niveau du haut de la pointe. La partie haute renfermant la majeure partie de l'air commence son ascension libre dans le fluide léger, et une partie de l'air qui était emprisonné dans la colonne s'échappe, formant ainsi une bulle secondaire autonome. Le reste de la pointe redescend en même temps que la colonne, capté par cette dernière, et demeure au final piégé en-dessous de l'interface horizontale. Il est également à noter que la partie principale de la bulle subit de fortes oscillations de surface après avoir été relâchée dans le liquide supérieur. Ce phénomène est clairement identifié à la lumière de la figure 6.6 montrant l'évolution de la forme de la bulle principale au cours de la traversée. Au début quasi-sphérique (les coefficients des polynômes de Legendre sont tous quasi-nuls), la bulle, après avoir subi un éclatement à environ  $z_T = 1.4$ , subit de multiples oscillations. Pourtant la tendance est nette : la bulle évolue vers une forme ellipsoïdale où les coefficients impairs de la figure 6.6 qui traduisent l'asymétrie verticale demeurent faibles, et où la valeur des coefficients pairs augmente, synonyme d'élongation.

Les prédictions correspondantes de JADIM et PELICANS sont décrites dans les deux séquences inférieures de la figure 6.4. Les formes et positions de la bulle sont en excellent accord avec chaque image de la séquence expérimentale, bien que quelques différences soient observées après que la colonne se soit formée. La principale différence à trait à l'évolution tardive du volume entraîné qui se détache trop tôt dans le cas de PELICANS, alors que JADIM prédit qu'une mince colonne demeure attachée à la bulle jusqu'à la fin de la séquence, ce qui n'est pas observé expérimentalement. Aucun des deux codes n'arrive à capturer correctement les petites bulles résultantes de la rupture de la queue de la bulle. De plus, la bulle secondaire de PELICANS commence son ascension immédiatement dans le fluide supérieur au lieu de rester piégée dans le fluide lourd. Ici aussi, la plupart de ces différences pourraient probablement être gommées par l'utilisation d'un maillage plus fin.



La figure 6.5a commente l'évolution de la vitesse normalisée  $u_T$ . Ici encore, après une vitesse terminale dans la phase inférieure bien prédite par (6.1) ( $u_T \approx 0.288$ ), la vitesse subit un ralentissement lorsque la bulle commence à traverser l'interface liquide-liquide à cause de l'effet du film liquide. Puis,  $u_T$  augmente d'un facteur 3 pendant que la bulle parcourt une distance inférieure à  $2d$ . Cette forte accélération, après laquelle  $u_T$  se stabilise aux alentours de 0.6, est due à l'important contraste de viscosité entre les deux liquides ( $\Lambda = 0.0175$ ). Toutefois, l'évolution de la forme de la bulle (qui devient très plate avec un rapport de forme de 3.4 dans la dernière image de la figure 6.4) provoque le déplacement d'une grande quantité de liquide lors de son ascension, ce qui limite l'augmentation de  $u_T$  bien en-dessous de la valeur qui serait atteinte si la bulle avait gardé une forme sphérique. En effet, dans ce cas la vitesse finale d'ascension serait typiquement  $1/\Lambda$  fois plus grande que dans le fluide inférieur.

Par ailleurs, à partir de la valeur de  $u_T$  à la fin de la séquence, le nombre de Weber final  $We = Bo_u u_T^2$  est de 8.8 et le nombre de Reynolds  $Re = Ar_u u_T$  est de 110 environ. On peut donc être tenté d'employer la théorie de Moore [56] pour prédire  $u_T$ . Cependant cette théorie ne s'applique pas ici. La raison en est que celle-ci suppose que la bulle a une forme ellipsoïdale. Or une telle forme n'existe que si le nombre de Weber est inférieur à la valeur critique de 3.23 dans la limite des nombres de Reynolds élevés (Miksis *et al.* [53], Meiron [51]). La bulle est ici bien au-dessus de cette limite, ce qui explique pourquoi elle oscille, et aucune théorie connue ne prédit sa vitesse dans de telles conditions.

Selon la figure 6.5a, les deux codes prédisent correctement l'évolution de  $u_T$  hormis un décalage au démarrage de l'accélération. Ce décalage rappelle celui observé sur la figure 6.2a et a la même origine. Enfin, durant la phase finale de la séquence, la vitesse d'ascension prédite subit des oscillations qui sont couplées avec les oscillations de forme de la bulle. Toutefois, les valeurs moyennes de  $u_T$  dans cette phase du mouvement sont en bon accord avec les mesures.

La figure 6.5b montre l'évolution du volume déplacé  $\mathcal{V}_e$  défini précédemment. Ce volume augmente tout d'abord jusqu'à atteindre un maximum d'environ 3 quand la bulle a parcouru une distance de  $2d$  au-dessus de la position initiale de l'interface. Puis, la colonne entraînée commence à redescendre, obligeant  $\mathcal{V}_e$  à décroître, et finalement à revenir à zéro quand la bulle a atteint une altitude de  $6d$ . Par ailleurs, la force de flottabilité agissant sur la système bulle + colonne est positive seulement si  $\mathcal{V}_e < (1 - R)/R \approx 3$ . Pour alimenter l'ascension de la bulle, le volume entraîné ne peut donc pas dépasser  $(1 - R)/R$ , sauf ponctuellement. La figure 6.5b montre aussi que les prédictions des deux codes, comparées au volume déplacé mesuré, sont en excellent accord bien que le volume prédit par JADIM semble se rétracter trop tard, conséquence directe du fait qu'une mince colonne reste attachée à la bulle jusqu'à la fin de la séquence.

Nous considérons maintenant le cas d'une petite bulle piégée issue de la série D sup. ( $\Lambda = 1.10$ , figure 4.1). Le lecteur est renvoyé à la section 2 du chapitre 2 pour la compréhension des mécanismes physiques en jeu et nous discutons par la suite uniquement les évolutions prédites par les deux codes et les limitations qu'elles mettent en évidence. Les prédictions sont résumées dans la figure 6.7. Bien que les formes de bulles mesurées et simulées se comportent de manière similaire durant les premiers instants des séquences, les simulations se distinguent nettement des observations expérimentales dans les étapes suivantes. Sur la séquence de JADIM, la troisième image révèle que la bulle n'est plus complètement immergée dans le fluide inférieur. En d'autres termes, le film liquide qui recouvrait jusque là la partie supérieure de la bulle s'est rompu. Ceci n'est pas surprenant puisque le film était déjà fin sur l'image précédente, bien inférieur à  $d/10$ . La taille des mailles étant de seules  $d/100$ , ceci implique que seulement quelques cellules étaient contenues dans le film. Hormis ce point, les deux codes conduisent à des prédictions radicalement différentes. En gros, PELICANS prédit que la vitesse de la bulle ainsi que sa forme varient peu tout au long de la séquence, suggérant que la présence de l'interface liquide-liquide affecte peu la dynamique de la bulle, bien que cette dernière soit ralentie au moment de la traversée. Au contraire, JADIM prédit que la bulle reste un long moment en contact avec l'interface (images 3 à 6), et que sa forme tend graduellement vers celle d'une montgolfière. Durant ces étapes, le ménisque est large, avec très peu de liquide lourd entraîné, puis le volume de liquide lourd augmente progressivement et une pointe étroite se forme à l'arrière de la bulle. Cette pointe s'allonge jusqu'à l'apparition d'un pincement qui permet à la bulle de quitter l'interface et de commencer à monter dans le fluide supérieur. L'arrière de la queue se rétracte et forme une bulle secondaire qui à son tour peut s'échapper de l'interface et commencer à monter dans le liquide léger.

Les différences entre les deux évolutions peuvent être interprétées à la lumière de l'analyse du bilan d'énergie.

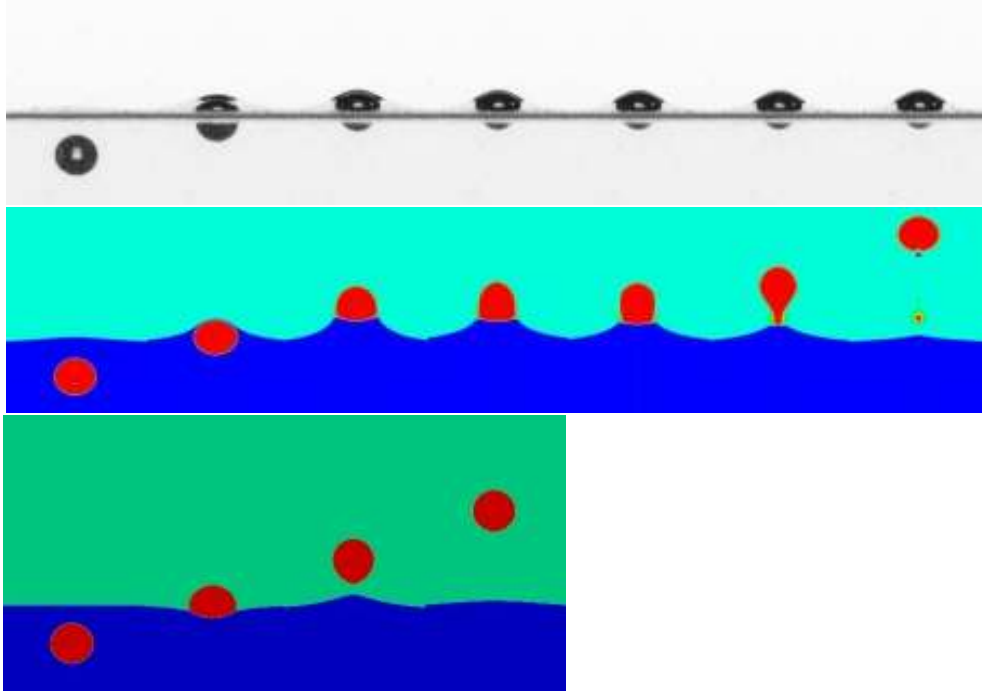


FIGURE 6.7 – Évolution d’un système triphasique pour une bulle caractérisée par un nombre de Bond de 3.2 et d’Archimède de 7.65 dans les séries D sup. ( $\Lambda = 1.10$ , figure 4.1). Comparaison entre la séquence expérimentale (en haut), les prédictions de JADIM (au centre), et les prédictions de PELICANS (en bas). L’écart de temps adimensionné  $\Delta t \sqrt{g/d}$  entre deux images consécutives est de 4.1.

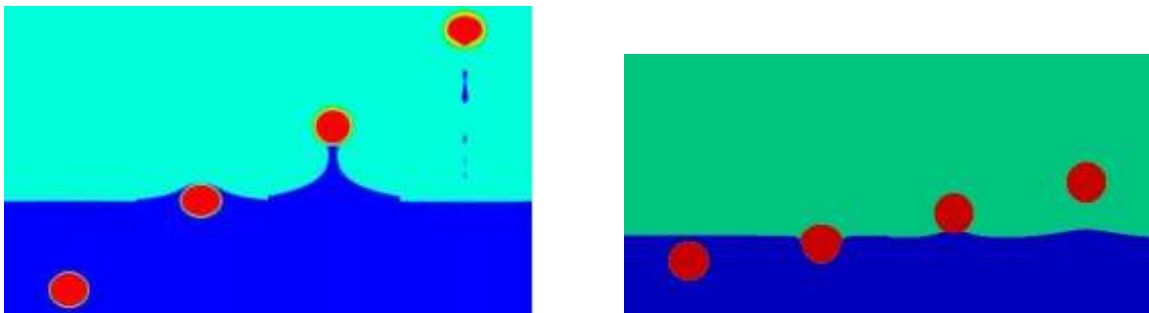


FIGURE 6.8 – Évolution du système triphasique de la figure 6.7 avec mêmes caractéristiques, pour un maillage de 60 mailles par diamètre pour JADIM à gauche (sous-maillé,  $\Delta t \sqrt{g/d} = 7.5$ ), et une épaisseur d’interface de  $d/160$  pour PELICANS à droite (interface très fine,  $\Delta t \sqrt{g/d} = 4.1$ ). Les limitations des prédictions des deux codes sont flagrantes : la description de l’épaisseur d’interface joue un rôle primordial dans le drainage du film de liquide lourd.

ergie

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p + E_\sigma) = -\epsilon_v \quad (6.2)$$

établi dans le chapitre 2. Il est important de garder en tête que toute montée d’une bulle initialement sphérique et toute élévation du ménisque augmente l’aire de l’interface correspondante et donc l’énergie interfaciale  $E_\sigma$ . Par ailleurs, puisque le fluide 1 est plus lourd que le fluide 3, l’élévation du ménisque augmente également  $E_p$ . Ainsi, depuis la position initiale au repos, le seul processus qui tend à rendre le terme de gauche négatif est la montée de la bulle, et la valeur négative la plus grande de  $\Delta(E_p + E_\sigma)$  est atteinte lorsque cette ascension n’est accompagnée d’aucune déformation des différentes interfaces. Le résultat donné par PELICANS correspond en gros à cette situation. Dans le cas de la prédiction de JADIM, la déformation de la bulle et l’élévation du ménisque sont plus importantes. En accord avec la discussion de la section 2 du chapitre 2, ces déformations mènent provisoirement à une configuration en « montgolfière » posée en haut d’un haut ménisque. Les

caractéristiques de cette configuration sont proches, bien que non identiques, à celles requises pour satisfaire simultanément les équations d'équilibre (2.10)-(2.11). En effet, l'augmentation des énergies potentielles et interfaciales est limitée par (6.2). Pour que ces équations soient satisfaites et que le système atteigne simultanément l'équilibre, il faudrait que la variation  $\Delta(E_p + E_\sigma)$  depuis le repos équilibre exactement la dissipation cumulée  $\int_0^\infty \epsilon_v(t) dt$ . Ceci ne peut se produire que dans des circonstances très particulières qui ne sont manifestement pas réunies ici. C'est pourquoi, après avoir été proche de la configuration d'équilibre, le ménisque redescend et l'aire de la bulle en contact avec le liquide lourd décroît, entraînant une décroissance à la fois de  $E_p$  et de  $E_\sigma$ . Ceci permet à l'énergie cinétique  $E_c$  d'augmenter, et à la bulle de s'échapper.

## 2 Calottes sphériques

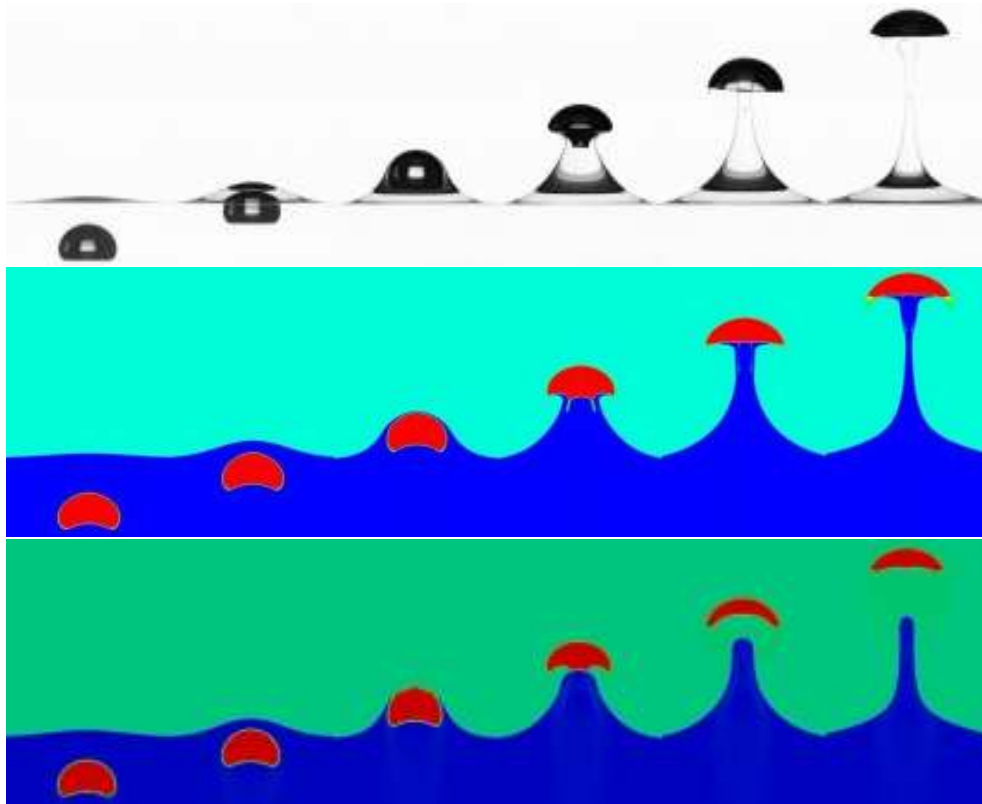


FIGURE 6.9 – Évolution d'un système triphasique pour une bulle caractérisée par un nombre de Bond de 52.9 et un nombre d'Archimède de 11.7 dans la série A (figure 4.1). Comparaison entre la séquence expérimentale (en haut), les prédictions de JADIM (au centre), et les prédictions de PELICANS (en bas). L'écart de temps adimensionné  $\Delta t \sqrt{g/d}$  entre deux images consécutives est de 1.5.

Nous considérons maintenant une autre bulle de la série A possédant un diamètre deux fois plus grand que dans le cas de la figure 6.4. Les nombres de Bond et d'Archimède sont respectivement de 52.9 et 11.7. La séquence correspondante est présente sur la figure 6.9. Ici, la partie arrière de la bulle est fortement concave lorsque celle-ci atteint l'interface liquide-liquide, en accord avec la cartographie de Clift *et al.* [17]. Après que la petite jupe qu'elle affiche à la traversée de l'interface s'est rétractée, la bulle prend une forme finale de calotte sphérique avec un angle proche de  $120^\circ$ . Avec cette forme, la colonne de liquide entraînée est bien plus large que celle du cas précédent, bien qu'elle devienne plus fine au fur et à mesure de l'augmentation de la distance parcourue, et jusqu'à se casser. L'évolution globale est correctement prédite par les deux codes, y compris la présence transitoire de la queue de la bulle (on rappelle que les photographies expérimentales montrent une projection plane de la surface de la bulle, alors que les images des simulations montrent une coupe de l'écoulement). Le début de rétrécissement de la colonne liquide est également bien prédit par JADIM. En revanche, PELICANS anticipe une fois de plus la rupture de la colonne.

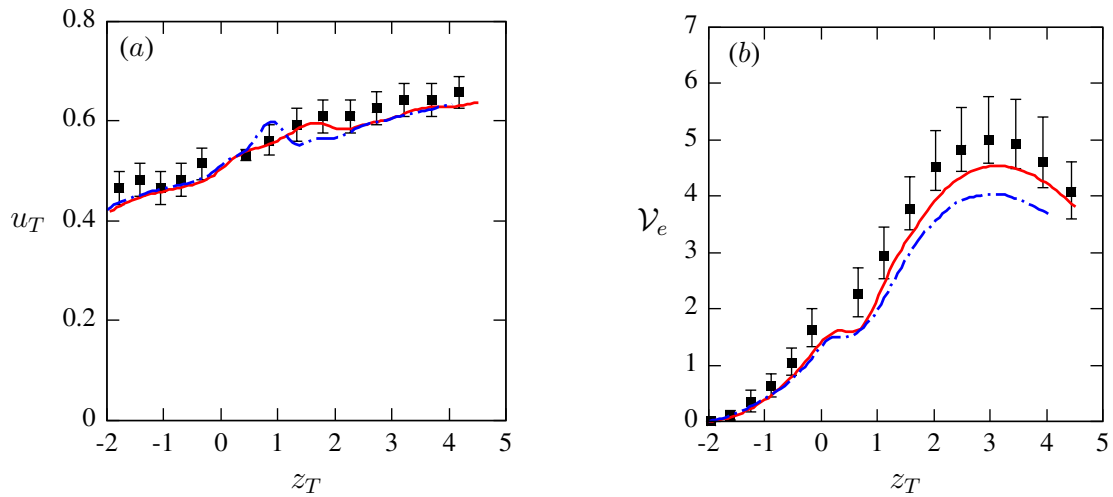


FIGURE 6.10 – Évolution (a) de la vitesse normalisée  $u_T$  et (b) du volume déplacé normalisé  $\mathcal{V}_e$  en fonction de la position adimensionnée  $z_T$  de la bulle pour la situation considérée sur la figure 6.9. Les notations sont définies dans la figure 6.2.

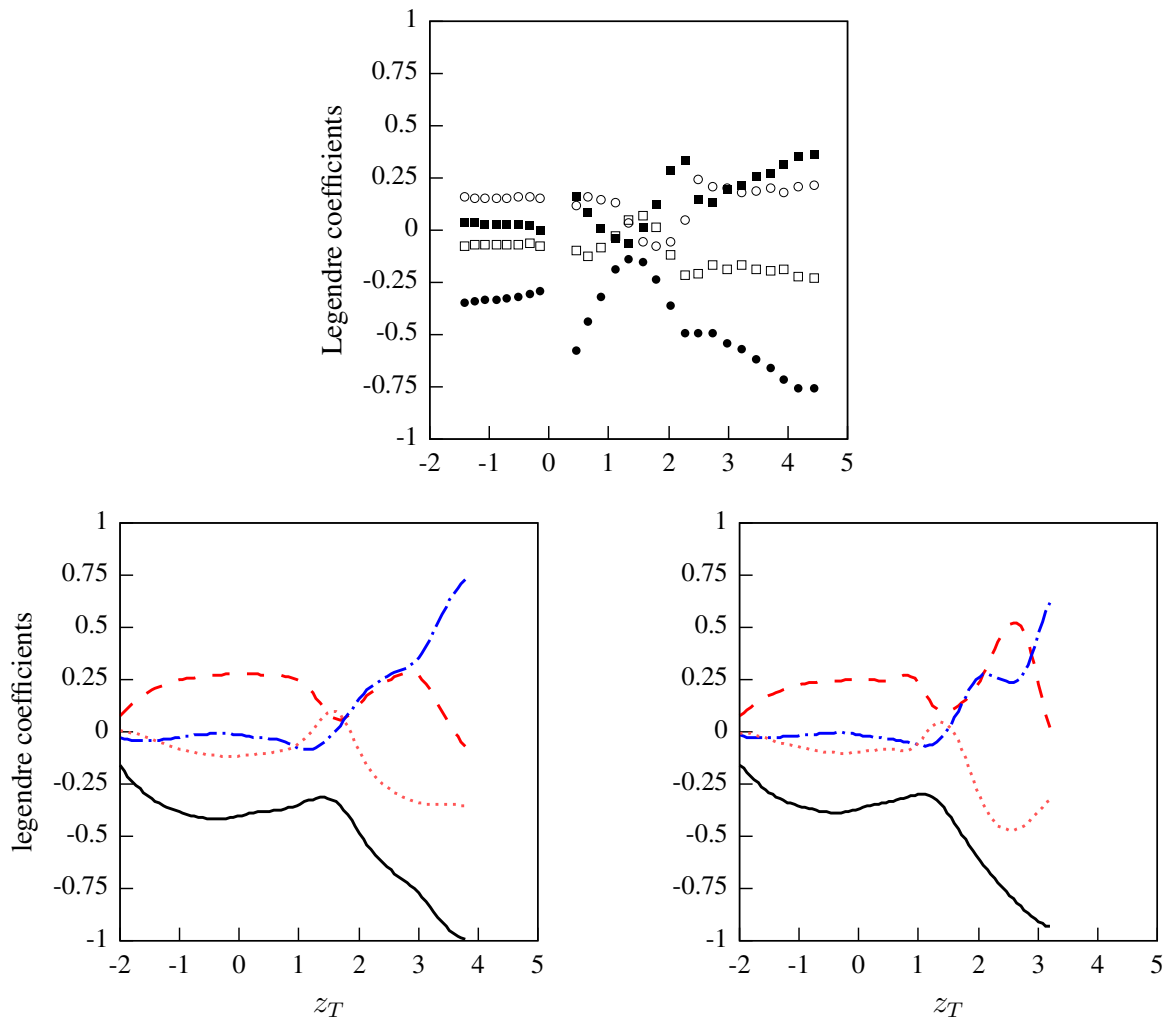


FIGURE 6.11 – Évolution des premiers coefficients  $a_i$  de la reconstruction en polynômes de Legendre de la surface de la bulle considérée sur la figure 6.9. Les notations sont définies dans la figure 6.3.

La figure 6.10a montre l'évolution de la vitesse normalisée  $u_T$  du sommet de la bulle. De manière remarquable,  $u_T$  ne subit aucun saut significatif à la traversée de l'interface liquide-liquide, alors que les fluides sont similaires au cas précédent (figure 6.4). La raison en est que la bulle considérée précédemment était

quasi-sphérique au niveau de la traversée de l'interface, tandis que celle-ci possède une forme de calotte. Par conséquent les deux vitesses d'ascension suivent des lois drastiquement différentes. Dans le cas d'une bulle sphéroïdale, la force de traînée dépend directement de la viscosité du fluide pour un rapport de forme donné car la dissipation est générée dans le cœur du liquide, l'écoulement autour de la bulle n'étant pas séparé. Au contraire, l'écoulement à l'arrière d'une calotte sphérique est massivement séparé et c'est dans cette région qu'est généré l'essentiel de la dissipation. Ainsi, l'écoulement dans la région frontale est presque irrotationnel et, pour un nombre d'Archimède fixé suffisamment grand *i.e.* un nombre de Reynolds suffisamment élevé, la vitesse d'une calotte sphérique est connue pour ne dépendre uniquement que du rayon de courbure  $R$  dans cette région suivant la relation de Davies & Taylor [20]

$$u_T = \frac{2}{3}\mathcal{R}^{1/2} \quad (6.3)$$

où  $\mathcal{R} = R/d$ . Ce résultat peut être étendu en prenant en compte de faibles effets visqueux avec l'hypothèse que l'écoulement dans la région frontale est visqueux mais toujours irrotationnel, donnant selon Joseph [31]

$$u_T = -\frac{4}{3Ar\mathcal{R}} + \frac{2}{3}\mathcal{R}^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{4}{Ar^2\mathcal{R}^3} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (6.4)$$

Au vu de ces prédictions, il n'y a donc pas de raison pour que  $u_T$  change abruptement lorsque la bulle émerge de l'interface. Néanmoins, les corrections visqueuses dans (6.4) correspondent à un saut lors du passage dans le fluide supérieur à cause du changement de valeur du nombre d'Archimède (de  $Ar$  à  $Ar_u$ ). Dans le cas présent, les corrections visqueuses sont relativement faibles,  $Ar\mathcal{R} \gg 1$ , et provoquent une faible augmentation de  $u_T$  juste après que la bulle a traversé l'interface. Ceci peut toutefois être à l'origine du petit saut visible sur la figure 6.10a. De plus, l'augmentation douce de  $u_T$  lors de la pénétration de la bulle dans le fluide léger suit qualitativement les bonnes estimations : la figure 6.9 montre que le rayon de courbure de la bulle augmente graduellement, de 12% entre les deux dernières images, ce qui en retour induit une augmentation de  $u_T$ . La vitesse d'ascension est qualitativement bien prédite par (6.4) puisque sur la dernière image  $\mathcal{R} \approx 0.9$ , ce qui conduit à  $u_T \approx 0.63$ , en bon accord avec les résultats expérimentaux et numériques. Par ailleurs, l'évolution graduelle de la forme de la bulle se détermine quantitativement avec l'évolution douce des coefficients de Legendre exposée sur la figure 6.11. D'une forme de calotte sphérique fortement creusée dans la phase lourde avec  $a_2/a_0 \approx 0.4$  et  $a_3/a_0 \approx 0.25$ , la bulle prend petit à petit une forme de calotte avec un rayon de courbure plus important : de la position  $z_T = 1$  à  $z_T = 4$ , les coefficients  $a_2/a_0$ ,  $a_4/a_0$  et  $a_5/a_0$  évoluent progressivement des valeurs  $-0.4$ ,  $-0.1$  et  $-0.1$  vers des valeurs  $-0.75$ ,  $0.5$  et  $-0.25$  respectivement.

En s'intéressant maintenant au déplacement du volume de liquide lourd  $\mathcal{V}_e$  dont l'évolution est décrite sur la figure 6.10b, on voit que celui-ci atteint une valeur plus importante que dans le cas de la figure 6.5b ce qui n'est pas étonnant puisque la largeur de la colonne est directement reliée à la largeur du sillage de la bulle. JADIM capte parfaitement l'évolution de  $\mathcal{V}_e$ , bien que le plateau observé durant la traversée de l'interface semble quelque peu exagéré. L'évolution décrite par PELICANS est aussi qualitativement correcte mais la valeur maximale de  $\mathcal{V}_e$  est sous-estimée de 20%.

Une évolution assez similaire se retrouve dans la série D sup. (figure 4.1) pour des nombres de Bond et d'Archimède de 29.5 et 42.6 respectivement. Les images de cette évolution sont exposées sur la figure 6.12. Puisque la bulle est caractérisée par un nombre de Bond plus petit comparé au cas précédent, elle atteint l'interface avec une forme moins creusée à l'arrière et possède un rayon de courbure plus petit dans le fluide supérieur. Néanmoins, les similarités entre les deux évolutions est nette et est confirmée par les ressemblances entre les évolutions de la vitesse (figure 6.10a et figure 6.13a). On remarque que dans les deux cas, la tension de surface dans le fluide supérieur est moitié moins grande que dans le liquide inférieur : ainsi le nombre de Bond effectif des deux bulles double presque lors de la traversée de l'interface ( $Bo$  dans la phase lourde,  $Bo_u$  dans la phase légère). Par conséquent l'essentiel de la transition subi par les deux bulles survient à l'entrée du liquide supérieur, et se traduit par un réajustement de leur forme. Le fait que le nombre d'Archimède varie peu dans le cas présent et reste donc modéré après que la bulle a traversé l'interface ( $Ar_u \approx 30$ ) alors qu'il augmentait d'un facteur cinq dans le cas précédent et devenait important ( $Ar_u \approx 500$ ) a deux conséquences. La première concerne la colonne de liquide lourd : celle-ci est bien plus épaisse ici, comme on le voit en comparant les fins des séquences sur les figures 6.9 et 6.12, ce qui correspond à un maximum de volume déplacé 50% plus

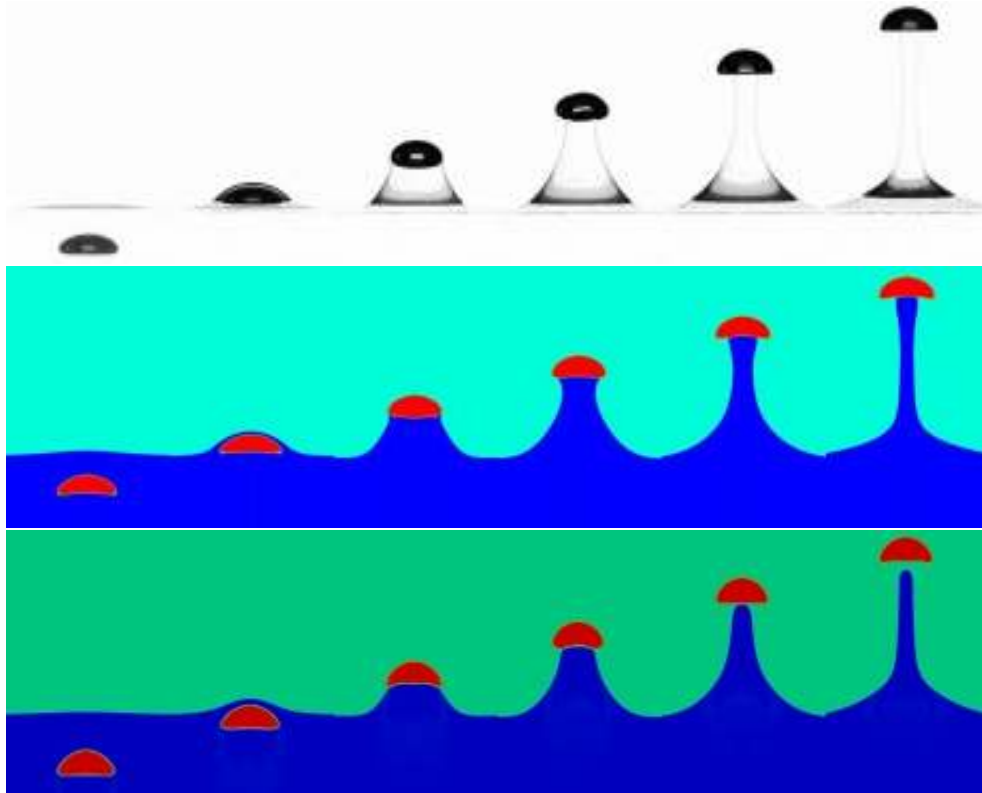


FIGURE 6.12 – Évolution d’un système triphasique pour une bulle caractérisée par un nombre de Bond de 29.5 et un nombre d’Archimède de 42.6 dans la série D sup. (figure 4.1). Comparaison entre la séquence expérimentale (en haut), les prédictions de JADIM (au centre), et celles de PELICANS (en bas). L’écart de temps adimensionné  $\Delta t \sqrt{g/d}$  entre deux images consécutives est de 1.7.

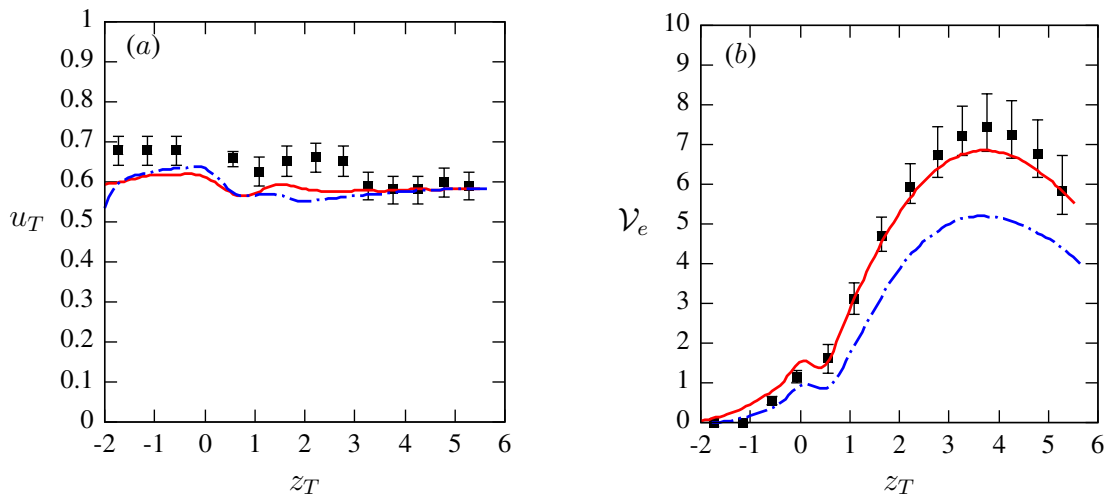


FIGURE 6.13 – Évolution (a) de la vitesse normalisée  $u_T$  et (b) du volume déplacé normalisé  $\mathcal{V}_e$  en fonction de la position adimensionnée  $z_T$  de la bulle pour la situation considérée sur la figure 6.12. Les notations sont définies dans la figure 6.2.

important (figures 6.10b et 6.13b). La deuxième est que, la diffusion visqueuse étant plus rapide, le temps requis par la bulle pour atteindre une forme stationnaire est plus court quand  $Ar_u$  est modéré. C’est pourquoi la vitesse  $u_T$  sur la figure 6.13a a déjà atteint une valeur stationnaire à la fin de la séquence, alors que celle de la figure 6.10a continue d’augmenter. De la même manière, la figure 6.14 relative à l’évolution de la forme de la bulle montre qu’une forme stationnaire est atteinte en un temps court. On peut remarquer le petit saut visible dans l’évolution expérimentale de  $u_T$  juste avant que la vitesse n’ait atteint sa valeur finale : la séquence vidéo

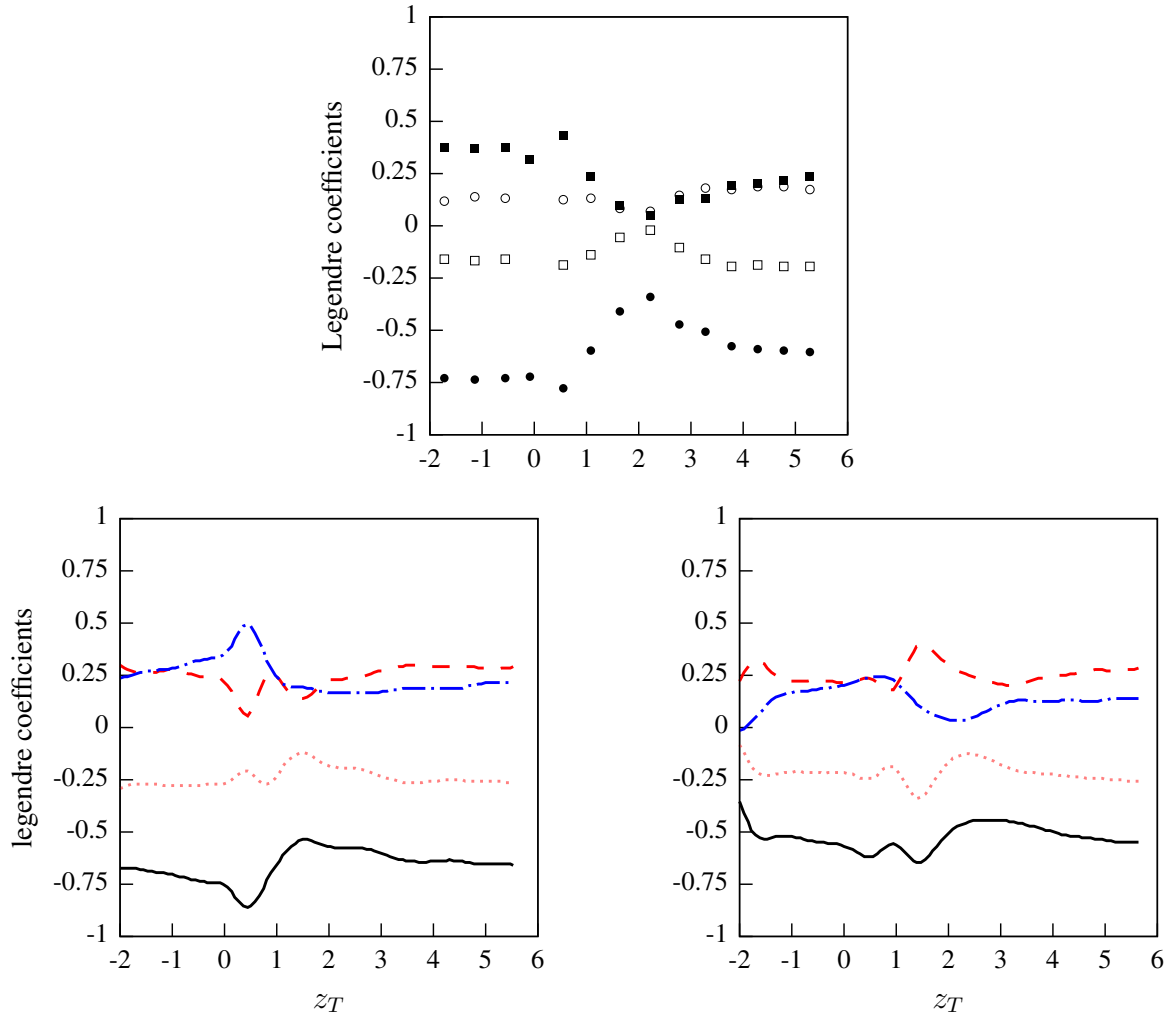


FIGURE 6.14 – Évolution des premiers coefficients  $a_i$  de la reconstruction en polynômes de Legendre de la surface de la bulle considérée sur la figure 6.12. Les notations sont définies dans la figure 6.3.

correspondante indique que ce saut est associé à la rupture tardive du film qui recouvre la partie supérieure de la bulle sur la troisième image de la figure 6.12 : c'est pour cela qu'il n'est pas reproduit par les simulations numériques.

La vitesse d'ascension de la bulle à la fin de la séquence est en accord avec la prédiction non visqueuse  $w_T = \frac{2}{3}\mathcal{R}^{\frac{1}{2}}$  qui prédit  $w_T \approx 0.58$  ( $\mathcal{R} \approx 0.75$ ). L'accord avec la prédiction de Joseph [31] est au contraire moins concluant ( $w_T \approx 0.52$ ), ce qui suggère que l'hypothèse d'un écoulement potentiel visqueux surestime l'influence des effets visqueux sur la vitesse d'ascension. Bien que le résultat présent ne soit pas suffisant pour conclure sur cette hypothèse, il suggère que la prise en compte de la contrainte normale visqueuse sans considération de la condition de glissement responsable de la génération de la vorticité à la surface n'est pas une approximation appropri  e.

La figure 6.15 compare quant à elle les résultats obtenus par PIV et les simulations numériques de l'écoulement autour de la bulle à l'instant où le volume entraîné est maximal. La moitié supérieure des lignes de courant est domin  e par une structure en dipôle associ  e au mouvement de la bulle. Alors que la partie haute de la colonne entra  n  e est toujours en ascension avec la bulle, la partie inférieure commence déjà à redescendre vers sa position initiale. La partie centrale de la colonne est par conséquent   tir  e de manière axiale, ce qui crée un point hyperbolique visible sur l'axe de la colonne. Dans le même temps, la base de la colonne s'épaissit et s'écoule radialement le long de l'interface, ce qui induit une compression axiale, et induit un autre point hyperbolique près de l'intersection entre l'axe de la colonne et le plan de l'interface initiale. Les valeurs positives de la vorticité azimuthale  $\omega_\theta$  normalis  e par  $w_T\sqrt{g/d}$  sont concentr  es près de la surface de la bulle, avec un maximum de  $\omega_{max} \approx 23.1$  pour JADIM et  $\omega_{max} \approx 19.5$  pour PELICANS, situé un peu au-dessus de la région

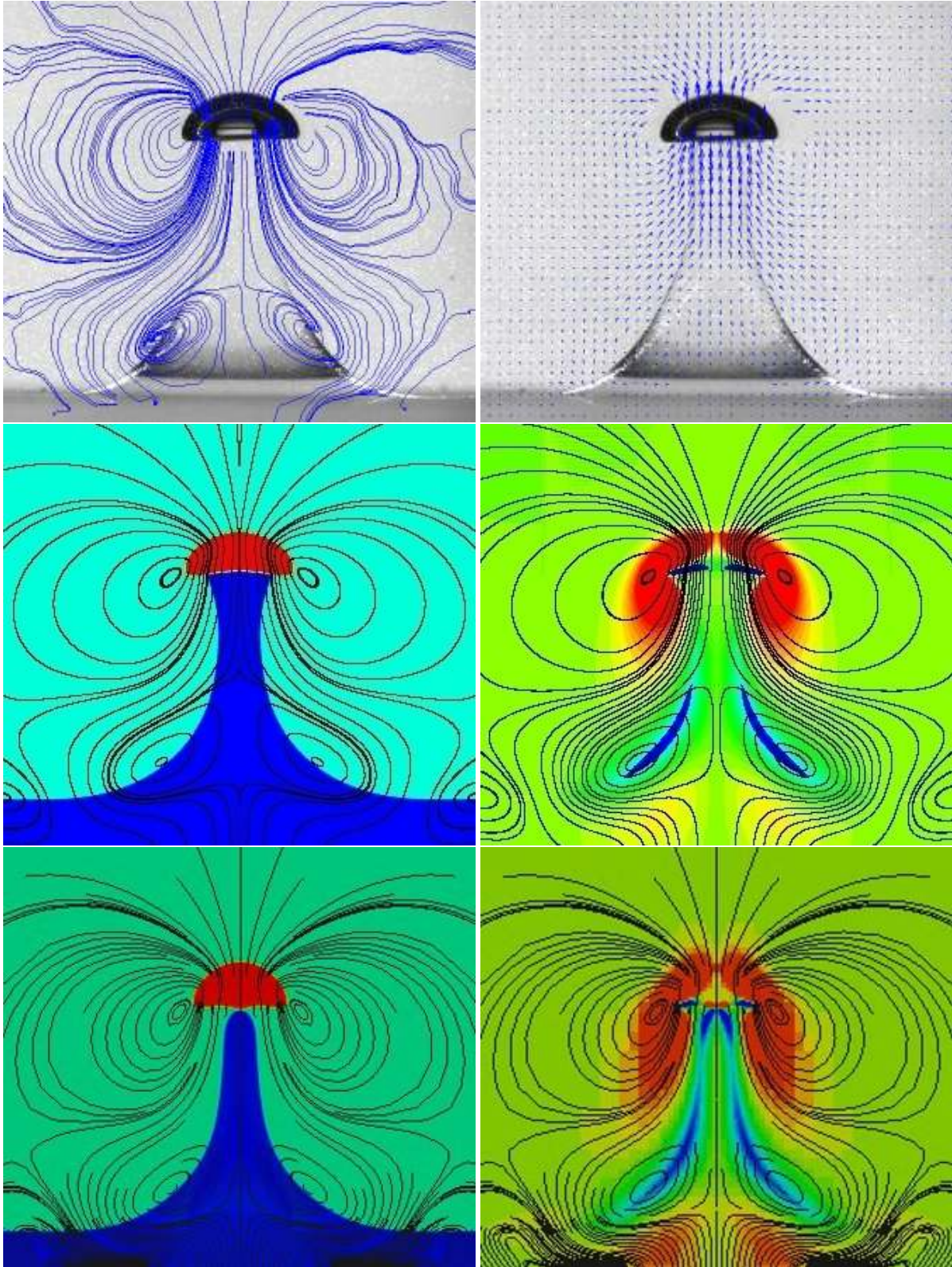


FIGURE 6.15 – Écoulement autour de la bulle considérée sur la figure 6.12 au moment où son point le plus haut arrive à  $z_T \approx 3.4$ . Les lignes de courant et le champ de vitesse dans les figures de la partie supérieure sont obtenus par PIV, les lignes de courant et le champ de vorticité dans la partie inférieure sont extraites des simulations JADIM (au centre) et PELICANS (en bas). La vorticité azimuthale  $\omega_\theta$  est positive dans les zones rouges, négative dans les zones bleues.



du maximum de courbure où l'essentiel de la vorticité est produite. Une petite zone fonc e presque horizontale peut être observ e à l'arrière de la bulle dans la région où sa surface est concave. Ceci correspond à une vorticité négative avec un minimum  $\omega_{min} \approx -7.2$  prédit par JADIM et  $\omega_{min} \approx -7.7$  par PELICANS. Dans cette région la vitesse tangentielle va de l'axe de la bulle vers la région du maximum de courbure. Enfin, une autre petite région où la vorticité est négative, avec  $\omega \approx -1.6$  (resp.  $-1.7$ ) pour JADIM (resp. PELICANS), est observ e le long de l'interface liquide-liquide, dans la partie inférieure de la colonne. Il s'agit d'une couche de cisaillement dont la structure est la conséquence directe de l'entraînement du fluide supérieur qui a une vitesse moindre, par le liquide lourd qui redescend plus rapidement.

### 3 Bulles toriques

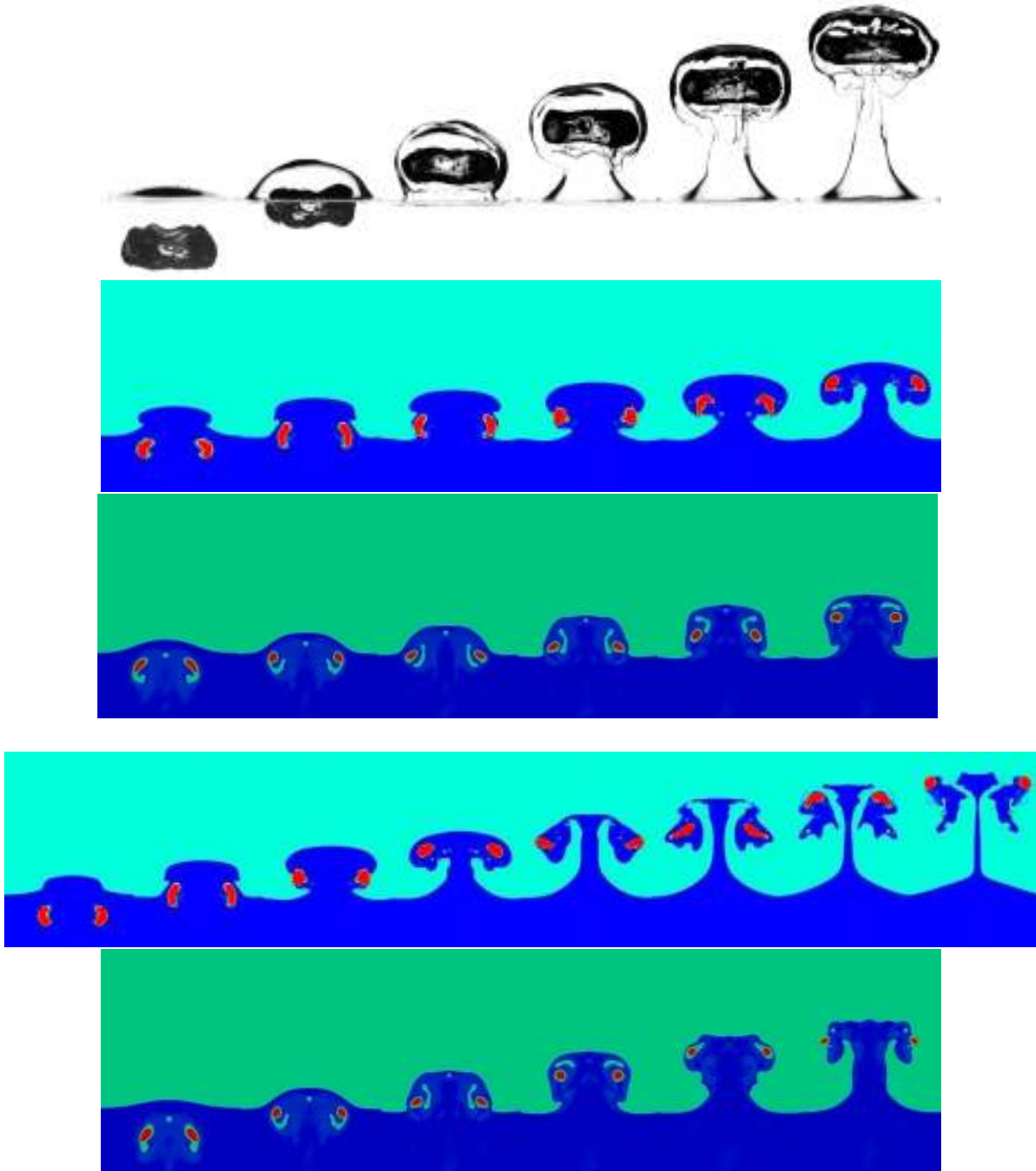


FIGURE 6.16 – Évolution d’un système triphasique pour une bulle caractérisée par un nombre de Bond de 48.2 et un nombre d’Archimède de 7840 dans la série F (figure 4.1). Comparaison entre la séquence expérimentale (en haut), les prédictions de JADIM (deuxième et quatrième rangées), et les prédictions de PELICANS (troisième et cinquième rangées). L’écart de temps adimensionné  $\Delta t \sqrt{g/d}$  entre deux images consécutives est de 0.66 dans les trois premières rangées et de 1.25 dans les deux dernières.

Nous considérons finalement une dernière situation correspondant à un nombre de Bond de 48.2 et à un nombre d’Archimède de 7840 dans la série F de la figure 4.1. Les observations indiquent que la bulle correspondante prend rapidement une forme torique. En effet, lorsque les effets visqueux sont suffisamment faibles, les grosses bulles initialement sphériques sont connues pour subir une transition topologique et devenir toriques. Le mécanisme de base qui gouverne cette transition est le développement de la langue qui se forme à l’arrière

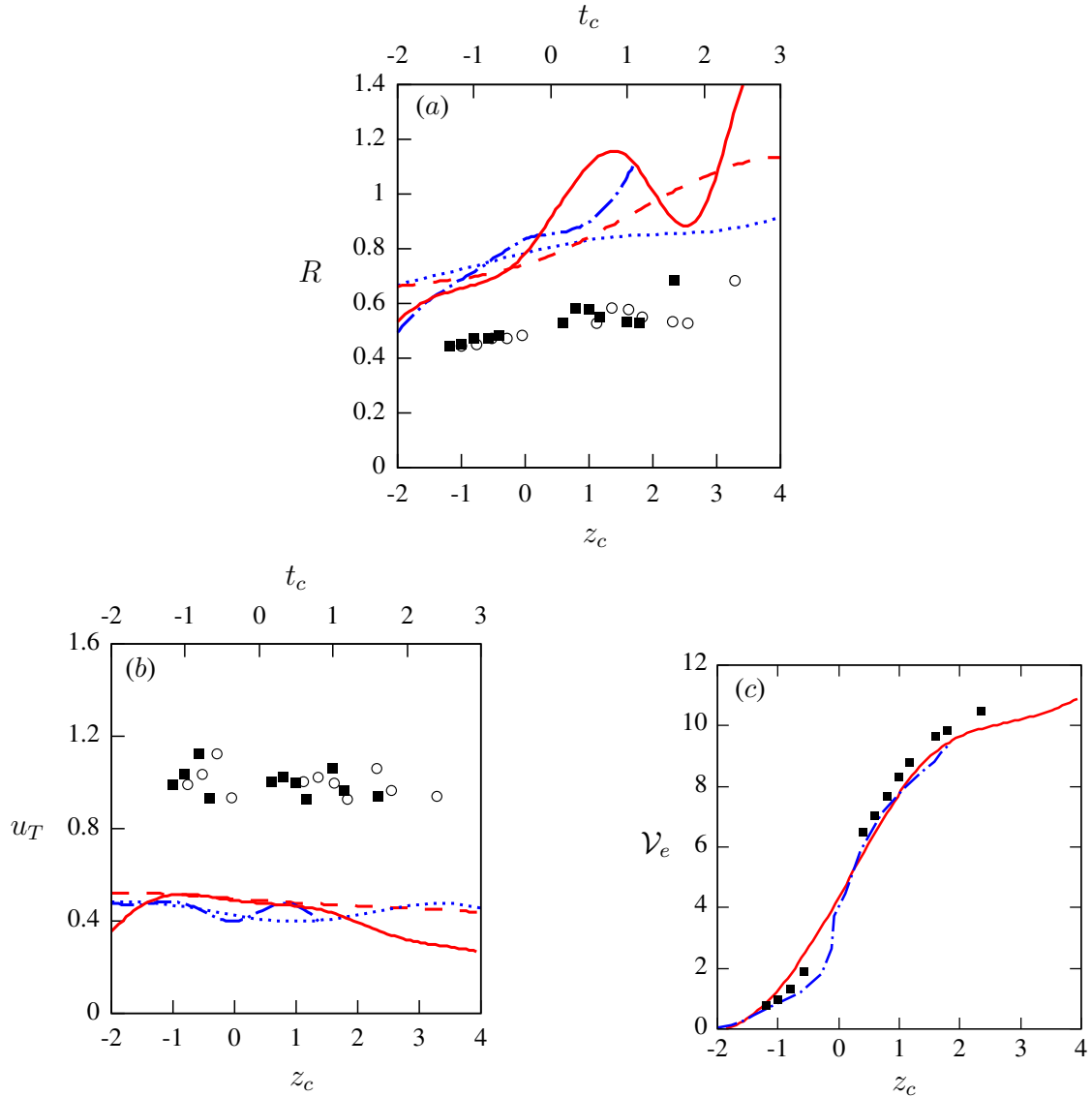


FIGURE 6.17 – Évolution (a) du rayon normalisé de l’anneau  $R$ , (b) de la vitesse normalisée  $u_T$  et (c) du volume déplacé normalisé  $V_e$  en fonction d’une part de la position adimensionnée  $z_c$  du centre de masse de la bulle torique considérée sur la figure 6.16 (■ expérience, — prédiction de JADIM et — · — prédiction de PELICANS), d’autre part du temps adimensionné  $t_c$  dont l’origine est définie par  $t_c = 0$  pour  $z_c = 0$  (○ expérience, --- prédiction de JADIM et · · · · · prédiction de PELICANS). Le rayon  $R$  expérimental est obtenu par l’évaluation de la surface  $S$  et du périmètre  $\mathcal{P}$  de la surface projetée de la bulle sur les photographies comme explicité dans la section 6.3.

de la bulle à cause de la différence de pression hydrostatique entre le haut et le bas. Lors de son développement, cette languette tend à réduire la distance entre l’avant et l’arrière de la bulle le long de son axe vertical et mène rapidement à un pincement lorsque les forces capillaires sont suffisamment faibles. Bonometti & Magnaudet [5] ont montré que lorsque  $Ar > 1000$ , cette transition topologique apparaît toujours pour une bulle initialement sphérique dont le nombre de Bond se situe au-dessus d’une valeur critique comprise entre 32 et 35. Par conséquent, le cas considéré ici est supercritique et la bulle se transforme en tore bien avant qu’elle n’arrive à l’interface liquide-liquide. Walters & Davidson [74] ont étudié expérimentalement des bulles toriques en ascension dans des fluides de faible viscosité et Pedley [58] s’est intéressé à l’analyse théorique de ces bulles alors considérées comme des anneaux tourbillonnaires creux. Si l’on suppose que le cœur a une section circulaire, on peut montrer que l’évolution du rayon adimensionné de l’anneau  $R(t)$  ainsi que la vitesse d’ascension  $u(t)$

sont gouvernés par les équations

$$\frac{R(t)}{R_0} = \left(1 + \frac{t - t_0}{6\Gamma R_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.5)$$

$$u(t) = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\log 16(3\pi R^3)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right), \quad (6.6)$$

où  $R_0$  représente le rayon à l'instant de référence  $t_0$  et où  $\Gamma$  est la circulation autour du cœur normalisée par  $(gd^3)^{\frac{1}{2}}$ . Le rayon du cœur  $a(t)$  peut ensuite être déterminé grâce à la condition de conservation du volume  $12\pi R(t)a(t) = 1$ . La dynamique des bulles toriques en ascension dans un fluide non visqueux a été simulée par Lundgren & Mansour [45] en utilisant une méthode d'intégrales de frontière. Leurs résultats confirment les prédictions théoriques de Pedley [58] et révèlent l'existence d'oscillations importantes du rayon de l'anneau ainsi que de la forme du cœur lorsque le rapport  $R/a$  est de l'ordre de quelques unités.

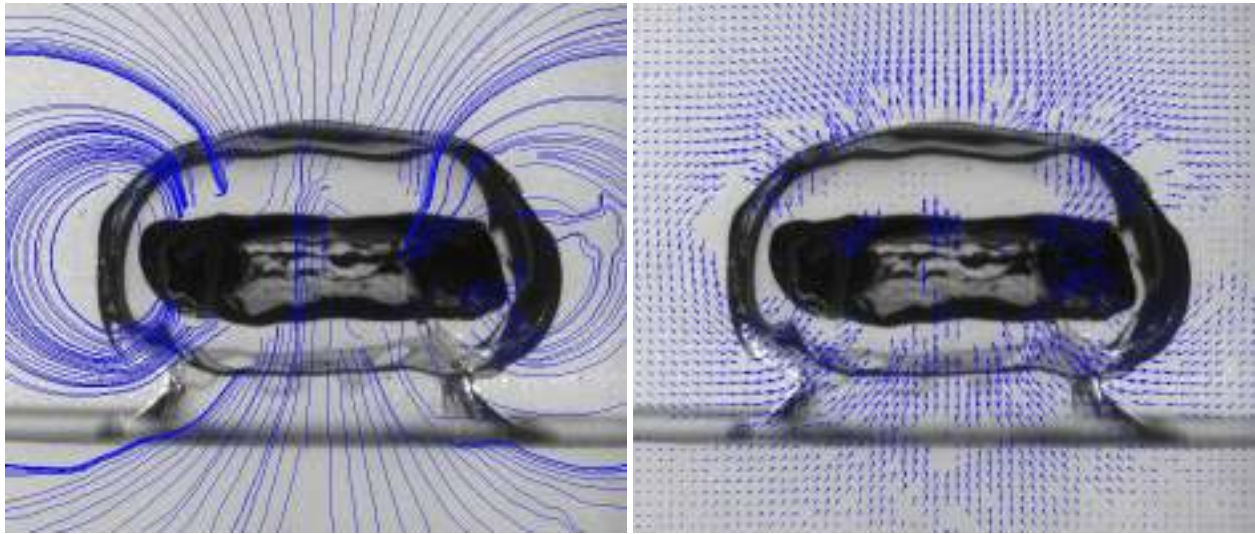


FIGURE 6.18 – Écoulement autour d'une bulle d'un volume équivalent de  $6 \text{ cm}^3$  ( $d \approx 22.5 \text{ mm}$ ) après le passage de la position initiale de l'interface liquide-liquide (série F de la figure 4.1).

La figure 6.16, qu'il s'agisse des séquences expérimentales ou numériques, montre immédiatement que la bulle reste encapsulée dans un épais film liquide après avoir passé la position initiale horizontale de l'interface. Ceci est dû à la circulation autour du cœur de la bulle qui induit une vitesse verticale ascendante dans la partie centrale de l'anneau, comme on peut le discerner sur la figure 6.18, alimentant ainsi le film au-dessus de la bulle avec du fluide lourd extrait de la colonne entraînée. Les séquences numériques suggèrent que le cœur est loin d'être circulaire et subit de fortes oscillations, comme l'ont observé Lundgren & Mansour [45].

Malheureusement, les comparaisons entre résultats expérimentaux, théorie et prédictions numériques pour  $R(t)$  et  $u(t)$  s'avèrent difficiles pour plusieurs raisons. Tout d'abord, il doit être gardé à l'esprit que la bulle est injectée bien plus près de l'interface dans les simulations numériques que dans les expériences. De plus, au vu du dispositif d'injection décrit dans le chapitre 1, la bulle originelle n'est certainement pas sphérique, ce qui a une influence directe sur le temps auquel la transition topologique a lieu, et donc sur la distance à l'interface correspondante ainsi que sur la valeur de la circulation  $\Gamma$ . En effet, Bonometti & Magnaudet [5] ont montré que sous certaines conditions, les bulles suffisamment aplaties peuvent évoluer vers une forme de calotte sphérique, alors que les bulles sphériques de même volume deviennent rapidement toriques. À cause de ces deux facteurs, il y a peu de chances que les bulles observées et celles extraites des simulations donnent naissance à une bulle torique à la même distance de l'interface. Par conséquent, les bulles étudiées par les deux approches n'ont pas le même âge quand elles atteignent l'interface, et n'ont certainement pas les mêmes caractéristiques  $R_0$  et  $\Gamma$ . Par ailleurs, pour un nombre d'Archimède élevé, la forme de la bulle et l'écoulement autour d'elle sont tridimensionnels, avec des fluctuations azimutales significatives comme le montre la figure 6.18, alors que les prédictions des simulations sont axisymétriques. Tout ceci implique que les comparaisons quantitatives entre expérience et simulations sont impossibles.

Il ne reste donc que la possibilité de réaliser des comparaisons qualitatives. La figure 6.17 montre l'évolution du rayon de l'anneau  $R$ , de la vitesse  $u$  et du volume de liquide lourd déplacé  $\mathcal{V}_e$ . La manière dont ces quantités sont extraites à partir des formes complexes des interfaces fournies par les images expérimentales est détaillée dans la section 6.3 du chapitre 1. La figure 6.17*b* montre que la vitesse d'ascension décroît lentement en fonction du temps et de la position verticale, une tendance qui est attendue de par le terme dominant en  $R^{-1} \log R$  dans l'équation (6.6). Les évolutions expérimentales et numériques sont qualitativement similaires : pendant les derniers instants, aux positions  $1.5 < z_c < 2.5$ , les simulations prédisent une décroissance plus prononcée de  $u$  qui peut s'expliquer par la présence de l'épais film liquide encapsulant la bulle et montant avec elle. Néanmoins, les valeurs de  $u$  sont presque deux fois plus grandes dans les expériences, ce qui suggère que la valeur la circulation est plus importante à cause de la différence de forme de la bulle au moment du pincement. On notera tout d'abord que partant d'une bulle sphérique, Lundgren & Mansour trouvent une valeur de la circulation  $\Gamma \approx 1.5$  pour un nombre de Bond de 40, valeur qui est certainement proche de celle correspondant au nombre de Bond de 48.2 de la bulle étudiée ici. Lorsque les bulles numériques arrivent à la position  $z_c = -1$ , la figure 6.17*a* indique  $R \approx 0.65$ , ce qui, en imposant la valeur  $\Gamma = 1.5$  dans (6.6), donne une vitesse  $u \approx 0.505$  en excellent accord avec les prédictions numériques  $u \approx 0.5$  de la figure 6.17*b*. À la même position, toujours avec la valeur  $\Gamma = 1.5$ , le rayon de l'anneau mesuré expérimentalement ( $R \approx 0.45$ ) amènerait à une vitesse de  $u \approx 0.58$  au lieu de la valeur mesurée  $u \approx 1.0$ . Ceci nous conforte dans l'idée que les différences observées entre vitesses expérimentales et numériques résultent essentiellement des différences à l'instant où le tore se forme.

Au premier abord, les évolutions expérimentales et numériques du rayon de l'anneau reportées sur la figure 6.17*a* montrent des tendances contrastées. Néanmoins il doit être gardé à l'esprit qu'avec une vitesse d'ascension deux fois moins importante il faut deux fois plus de temps à la bulle pour parcourir une distance verticale donnée. C'est pourquoi l'évolution de  $R$  en fonction du temps est plus pertinente. On constate tout d'abord que la croissance du rayon de l'anneau suit qualitativement les mêmes tendances dans les différentes séquences jusqu'à l'arrivée de la bulle à l'interface. Choissant encore  $\Gamma = 1.5$  et  $t_0 = -1$ , *i.e.*  $R_0 \approx 0.70$  selon les simulations, le premier terme de (6.5) prédit que  $R(t_c = 0) \approx 0.775$ , ce qui est très proche des prédictions numériques  $R(t_c = 0) \approx 0.78$ . Ceci permet de conclure que l'évolution de la bulle dans les premières phases de la séquence est en accord avec les prédictions théoriques. L'évolution du rayon de l'anneau aux temps longs est quant à elle plus complexe, puisqu'on observe dans les résultats de JADIM que  $R$  décroît puis re-augmente fortement. Ces variations sont mieux comprises en considérant les séquences expérimentales et numériques complètes exposées sur la figure 6.16. Au regard du volume important de liquide lourd entraîné par la bulle, un tore composé de la bulle ainsi que d'une partie du fluide lourd entraîné se forme progressivement et commence à se mouvoir de manière autonome dans le fluide supérieur. Le haut de la colonne entraînée n'est plus attaché à l'entité torique sur les dernières images. Dans ce volume hétérogène, les particules fluides sont en rotation selon la direction donnée par  $\Gamma$ . Ainsi, en plus de son propre mouvement, le cœur de la bulle subit un entraînement secondaire dans l'entité de fluide lourd qui l'entoure : tout d'abord il s'écarte de l'axe central (ce qui provoque une augmentation de  $R$  bien visible autour de  $z_c = 1.5$  ou  $t_c = 0.8$ ), puis a tendance à s'en rapprocher (ce qui va jusqu'à réduire temporairement  $R$  sur la sixième image de la séquence « longue » de JADIM et décroît la vitesse d'ascension), puis augmente à nouveau. Malheureusement, la séquence expérimentale n'est pas suffisamment longue pour atteindre des temps similaires et déterminer si le phénomène se produit réellement ou s'il est dû à la géométrie axisymétrique des simulations.

Comme la bulle demeure encapsulée par un film tout au long de la période d'observation, l'évolution du volume entraîné (figure 6.17*c*) est remarquablement lisse. En accord avec le mécanisme d'alimentation imposé par la circulation autour de la bulle, ce volume est plus important et atteint son maximum à une distance plus grande de la position initiale de l'interface que pour toutes les configurations vues précédemment. De manière surprenante, les évolutions expérimentales et numériques de  $\mathcal{V}_e$  en fonction de  $z_c$  sont en accord remarquable. Ceci peut être fortuit mais il est également possible que, pour des bulles toriques, le volume entraîné dépende principalement du volume de la bulle plutôt que de sa vitesse d'ascension. Toutefois, cette conjecture nécessite d'autres données pour être confirmée ou infirmée.

## 4 Discussion sur les prédictions numériques des observations expérimentales

Comme le montrent les différents exemples discutés dans ce chapitre, les approches basées sur la formulation à un fluide reproduisent qualitativement, et le plus souvent quantitativement, les principaux aspects de la dynamique des systèmes que nous avons détaillés. La technique de capture d'interface utilisée dans JADIM fournit ici encore d'excellentes prédictions sur l'évolution de la topologie d'interface, la vitesse d'ascension de la bulle ainsi que le volume de liquide lourd entraîné. Cependant le principal défaut des deux codes est observé pour de petites bulles, avec des nombres de Bond de l'ordre de l'unité, qui restent piégées à l'interface pendant un temps long. Dans ces configurations, le drainage du film de liquide est primordial. Un biais est également remarqué pour des bulles qui passent un temps significatif, quoique moindre, à l'interface (figure 6.1) : dans de tels cas l'accélération de la bulle lors du début de son ascension dans le fluide supérieur arrive trop rapidement à cause de l'anticipation de la rupture de film. Ces observations indiquent clairement que la limite majeure de ces techniques numériques de capture d'interface réside dans leur incapacité à prédire correctement la dynamique de films minces dans des situations où ils contrôlent l'évolution du système.

Par ailleurs, les deux codes JADIM et PELICANS se comportent très différemment lorsque la bulle reste piégée à l'interface sur la figure 6.7, alors que les différents tests menés en écoulement monophasique ont montré que les deux codes généraient des niveaux de dissipation faibles et comparables. Ainsi, la dissipation visqueuse n'est pas la cause de leurs différences de comportements. Il ne semble pas y avoir non plus de différence significative entre les deux codes en ce qui concerne la précision de l'évaluation des énergies cinétiques et potentielles (des schémas centrés sont employés pour évaluer les termes advectifs dans JADIM alors qu'une approximation de Galerkin standard associée à des éléments  $Q1/Q2$  est utilisée pour PELICANS). Par conséquent, la conclusion qui s'impose est que les différences majeures proviennent de la description des effets interfaciaux. En ce qui concerne la formulation de Cahn-Hilliard / Navier-Stokes, les équations de transport, combinées aux expressions du potentiel chimique  $\mu_i$ , sont diffusives par essence. Le principal avantage de cette formulation est qu'avec une mobilité bien choisie, les interfaces gardent une épaisseur constante et uniforme (une propriété beaucoup plus difficile à obtenir dans des formulations d'interfaces infiniment minces comme celle utilisée par JADIM). Cependant, les observations suggèrent que cette diffusion tend à adoucir les déformations des interfaces à petite échelle et à homogénéiser le rayon de courbure aux temps longs. En d'autres termes, pour une distribution de déformations d'interface donnée, l'énergie interfaciale  $E_\sigma$  semble plus grande dans l'approche Cahn-Hilliard que dans le modèle « CSF » (annexe 9) combiné avec l'estimation de l'épaisseur d'interface  $|\nabla c_{ij}|^{-1}$  donnée par le schéma « FCT » (section 2.2 du chapitre 3) utilisé dans JADIM. Ainsi, dans une telle situation, le bilan énergétique

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p + E_\sigma) = -\epsilon_v \quad (6.7)$$

défini dans la section 2 du chapitre 2 impose une limitation plus sévère sur les variations de l'aire interfaciale, et donc sur la déformation interfaciale, dans la description utilisée par PELICANS. Bien évidemment, la diffusion de  $c_i$  peut être réduite en sélectionnant une épaisseur d'interface  $\epsilon$  plus petite, mais ceci ne change pas la structure intrinsèque de la solution comme l'a montré la comparaison des figures 6.7 et 6.8. Il en résulte que des solutions alternatives doivent être explorées pour améliorer les prédictions de l'approche Cahn-Hilliard. En particulier, l'influence de l'équation de fermeture reliant la mobilité  $M$  aux concentrations locales et à la vitesse doit être examinée en détail puisqu'elle produit des comportements distincts selon qu'elle est  $|\nabla c_i|$ - ou  $|\nabla \mathbf{u}_i|$ -dépendante. Une autre possibilité, déjà explorée dans les écoulements diphasiques, consiste en l'introduction d'un terme antidiffusif proportionnel à la courbure locale moyenne, comme montré sur la figure 6.19, dans le but de limiter la sensibilité de la solution aux variations de courbure le long de l'interface (Biben [3]).

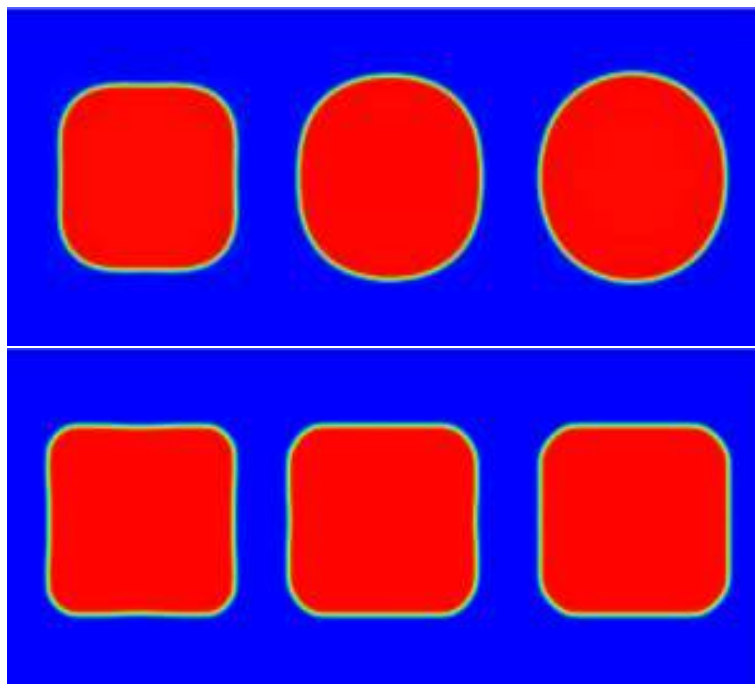


FIGURE 6.19 – Évolution temporelle d'une bulle carrée et influence de l'ajout d'un terme antidiffusif dans le modèle de Cahn-Hilliard (séquence du bas) afin de limiter l'uniformisation des déformations interfaciales. Temps entre deux images :  $\Delta t = 0.028$ . Paramètres numérique :  $d = 0.006$ ,  $\varrho_1 = 1052$ ,  $\sigma_{12} = 0.072$ ,  $M = 10^{-5}$ ,  $g = 0$ .





# Conclusion et perspectives

Dans le cadre de ce travail de thèse, plusieurs aspects de la dynamique de bulles dans des configurations triphasiques ont été étudiés à la lumière des comparaisons entre résultats expérimentaux et numériques.

Un dispositif expérimental a été élaboré de manière à pouvoir visualiser l'ascension de bulles isolées et de trains de bulles au passage d'une interface séparant un mélange d'eau et de glycérine d'une huile de silicone. Les tailles des bulles variant de 1 mm à 2 cm ainsi que les caractéristiques des fluides utilisés dont les viscosités couvrent quatre ordres de grandeur, ont permis de visualiser de nombreuses configurations et d'en obtenir une cartographie dans le chapitre 4. Ces observations montrent que les petites bulles peuvent rester piégées à l'interface, et qu'en présence de forts contrastes de viscosités entre les deux liquides, les bulles de volume plus important peuvent se fractionner en deux ou trois. Les grosses bulles en forme de calottes sphériques s'échappent en entraînant une colonne de liquide lourd à leur suite. Enfin, les bulles de volume très important en forme de tore restent encapsulées pendant un temps dans un film de liquide lourd lors leur ascension dans le fluide léger.

Par ailleurs, un dispositif destiné à la visualisation des champs de vitesse par méthode de Vélocimétrie par Images de Particules (PIV) a été utilisé dans quelques cas. Celui-ci a notamment permis de distinguer dans le repère du laboratoire deux points d'arrêt dans les cas d'entraînement de liquide lourd : un premier lié à l'étirement de la colonne dû à l'ascension de la bulle, un deuxième lié à la redescente de la colonne en direction de l'interface non-perturbée.

Plusieurs trains de bulles ont également été visualisés pour de faibles fréquences d'injection, régime dans lequel l'écoulement est assez régulier. Les amas de bulles qui restent piégés à l'interface peuvent être assimilés en première approximation à des bulles sphériques de volume équivalent, ce qui permet d'évaluer si leur passage dans le liquide supérieur à travers l'interface est possible. Néanmoins, les trains de bulles de fréquence plus élevée sont le siège de mécanismes bien plus complexes et leur comportement ne peut être prédit par un modèle simple.

Deux modèles théoriques ont aussi été élaborés, le premier modélisant une bulle capturée à l'interface liquide-liquide avec formation d'une ligne triple et d'un ménisque, le deuxième l'ascension d'une bulle sphérique encore recouverte d'un film de liquide lourd. Les deux modèles permettent de prévoir ou d'inférer à partir des observations expérimentales la présence d'un film liquide autour de la bulle, ou encore de prédire le passage ou l'arrêt de la bulle à l'interface. Le deuxième modèle théorique est toutefois limité à une hauteur de ménisque petite (moins de deux diamètres de bulles) en raison de l'approximation géométrique faite sur la forme de la colonne.

Deux approches numériques ont enfin été utilisées afin de prédire les évolutions du système. La première utilise une méthode de capture d'interface couplée à une méthode VOF mise en œuvre dans le code JADIM de l'IMFT. La deuxième repose sur un modèle à interfaces diffuses de type Cahn-Hilliard / Navier-Stokes implémentée dans le code PELICANS de l'IRSN. Les deux approches reproduisent en général relativement bien les différents résultats expérimentaux dans le cas de bulles qui traversent rapidement l'interface liquide-liquide. En particulier, JADIM prédit correctement l'évolution des vitesses d'ascension ainsi que des volumes de liquide lourd entraîné. Par contre, une limitation certaine des deux formulations réside dans la capture de la dynamique des films minces lorsque les temps de résidence des bulles à l'interface sont importants. Dans le cas critique où les bulles restent piégées, les simulations prédisent une rupture trop rapide. Ce phénomène est notamment dû au fait que l'épaisseur numérique des interfaces est fini (ce qui est amplifié dans le modèle à interfaces diffuses), empêchant les codes de capturer correctement le film liquide lorsque celui-ci s'amincit en-deça de quelques tailles de maille.

## Application au cas du corium

Nous présentons ici quelques simulations numériques réalisées avec JADIM dans le contexte de l'interaction corium-béton qui se rencontre lors d'un éventuel accident de perte de réfrigérant au sein d'un réacteur à eau pressurisée. Trois bulles de diamètres équivalents 6, 8 et 12 mm sont ici étudiées au passage d'une interface séparant une phase métallique liquide d'une phase oxyde. Les propriétés physiques correspondantes sont répertoriées dans le tableau 6.1.

Liquide	Masse volumique ( $\text{kg. m}^{-3}$ )	Viscosité ( $\text{mPa. s}$ )	Tension de surface ( $\text{N. m}^{-1}$ )
Gaz	0.1	0.073	
Métal	7800	1	1.3
Métal « visqueux »	7800	100	1.3
Oxyde	4000	100	0.8

Tensions interfaciales ( $\text{N. m}^{-1}$ )	Oxyde
Métal	1
Métal « visqueux »	1

TABLE 6.1 – Propriétés physiques des fluides du cas réacteur (corium, vapeur d'eau). Certaines propriétés du système sont mal connues (les tensions interfaciales notamment) et les valeurs ci-dessus représentent un simple ordre de grandeur.

Les écoulements en présence de bulles au sein du corium sont ici différents de ceux que nous avons étudiés jusqu'ici. Le problème majeur réside dans le fait que le nombre de Laplace de la phase lourde  $La = \rho_1 \sigma_{12} d / \eta_1^2$  ( $\equiv Ar^2 / Bo$ ) est supérieur à  $10^6$ , ce qui induit des instabilités du champ de vitesse qui entraînent une destruction des interfaces (phénomène lié aux « courants parasites » discutés par Scardovelli & Zaleski [67]). Par conséquent nous sommes contraints d'abaisser le nombre de Laplace, le choix ici étant d'augmenter arbitrairement la viscosité du liquide lourd à  $\eta_1 = 100 \text{ mPa. s}$ . Il est donc important de garder en tête que les résultats qui suivent sont des approximations grossières de la simulation rencontrée dans un réacteur.

Les trois simulations sont exposées sur les figures 6.20, 6.21 et 6.23. La première remarque quant à ces prédictions concerne les déformations et les oscillations de forme observées dans la phase inférieure, notamment sur la figure 6.23 : la masse volumique du liquide lourd est tellement importante que les forces de flottabilité sont largement prédominantes sur les forces visqueuses ( $Ar = \mathcal{O}(100)$ ), et supérieures aux forces capillaires ( $Bo > 2$ ); il est donc naturel que les bulles subissent de fortes déformations lors de leur ascension. Le diagramme de Clift *et al.* [17] prédit que dans ces régimes, les bulles sont sphéroïdales et pour les plus grosses d'entre elles, subissent des oscillations de forme. Ces dernières ont par ailleurs des trajectoires pleinement tridimensionnelles (voir chapitre 4). Dans nos simulations axisymétriques, alors que les oscillations d'une bulle de diamètre  $d = 8 \text{ mm}$  restent relativement faibles (figure 6.21 et figure 6.22c), celles d'une bulle de diamètre  $d = 12 \text{ mm}$  sont beaucoup plus importantes (figure 6.23 et figure 6.24c). Il est donc à prévoir que les bulles dont le diamètre est de l'ordre de quelques centimètres se fractionnent dans nos simulations avant d'avoir pu atteindre l'interface.

La deuxième remarque concerne la mauvaise correspondance avec le critère de passage de Greene *et al.* [28] défini au chapitre 2, selon lequel une bulle dont le nombre de Bond est supérieur à  $6I / (1 - R)$  peut traverser l'interface liquide-liquide, *i.e.* dans notre cas  $Bo > 8.1$ . Or nous observons ici que les bulles de diamètre  $d = 8 \text{ mm}$  avec un nombre de Bond de 3.8 s'échappent dans le fluide supérieur. Ceci n'est pas forcément surprenant puisque le critère de Greene fournit une borne inférieure pour  $Bo$  correspondant au cas limite où les bulles sont considérées sphériques et le ménisque de volume nul. Toutefois, il est bon de rappeler aussi que les prédictions de JADIM dans les cas de film-drainage permettent plus facilement aux bulles de traverser l'interface que dans la réalité : il est donc possible que la traversée des bulles avec  $Bo = 3.8$  soit avant tout un artefact numérique.

Enfin, il est à noter que lors des trois simulations, le drainage du film de liquide lourd s'opère différemment

par rapport à l'ensemble de cas traités précédemment. Ici, le film se perce tout d'abord à sa périphérie à cause de la forme ellipsoïdale des bulles (deuxième image de la séquence 6.21 complète et troisième image de la séquence 6.23). Le liquide lourd restant au-dessus forme ensuite une gouttelette torique qui s'écoule le long de la bulle (séquence 6.21) ou une gouttelette sphéroïdale qui peut rester au sommet de la bulle (troisième à sixième images de la séquence 6.20). Ce dernier phénomène est très certainement dû à l'axisymétrie des simulations et il est probable que cette gouttelette redescendrait dans des simulations pleinement tridimensionnelles.

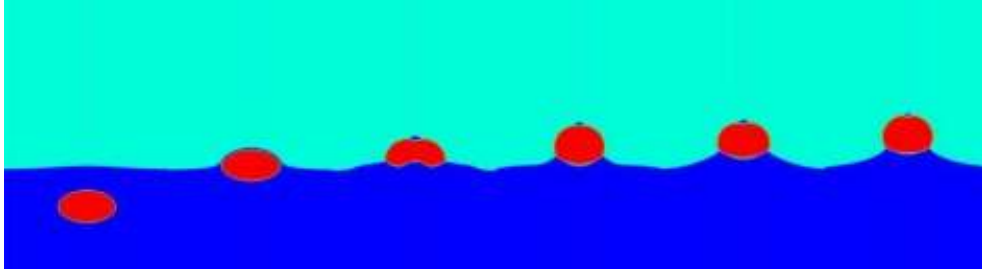


FIGURE 6.20 – Prédiction de l'évolution d'une bulle de diamètre  $d = 6$  mm dans un mélange de corium visqueux. L'écart de temps adimensionné  $\Delta t \sqrt{g/d}$  entre deux images consécutives est de 0.9. Paramètres adimensionnels :  $Bo = 2.1$ ,  $Ar = 113$ ,  $\Lambda = 1$ ,  $R = 0.49$ ,  $I = 0.77$ ,  $S = 0.62$ .

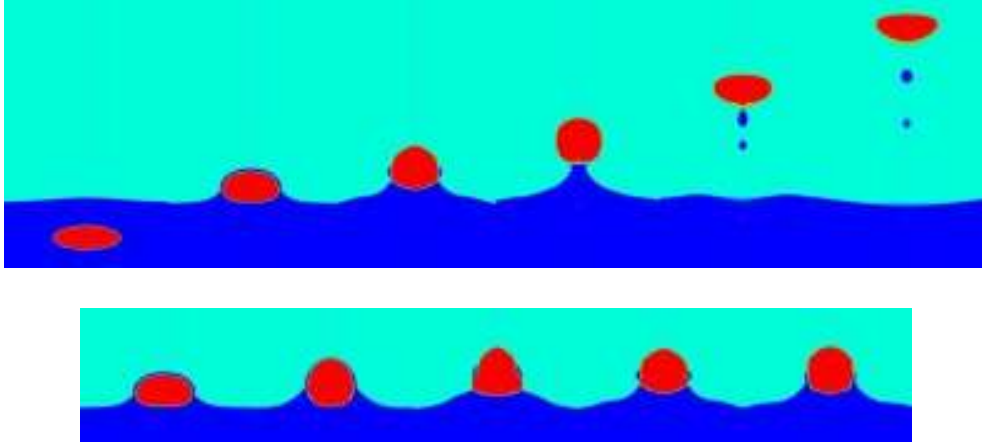


FIGURE 6.21 – Prédiction de l'évolution d'une bulle de diamètre  $d = 8$  mm dans un mélange de corium visqueux. En haut, séquence complète où l'écart de temps adimensionné  $\Delta t \sqrt{g/d}$  entre deux images consécutives est de 1.3. En bas, zoom sur l'évolution de la goutte torique,  $t \sqrt{g/d} = 0.7, 1.1, 1.5, 1.9$  et 2.1. Paramètres adimensionnels :  $Bo = 3.8, Ar = 175, \Lambda = 1, R = 0.49, I = 0.77, S = 0.62$ .

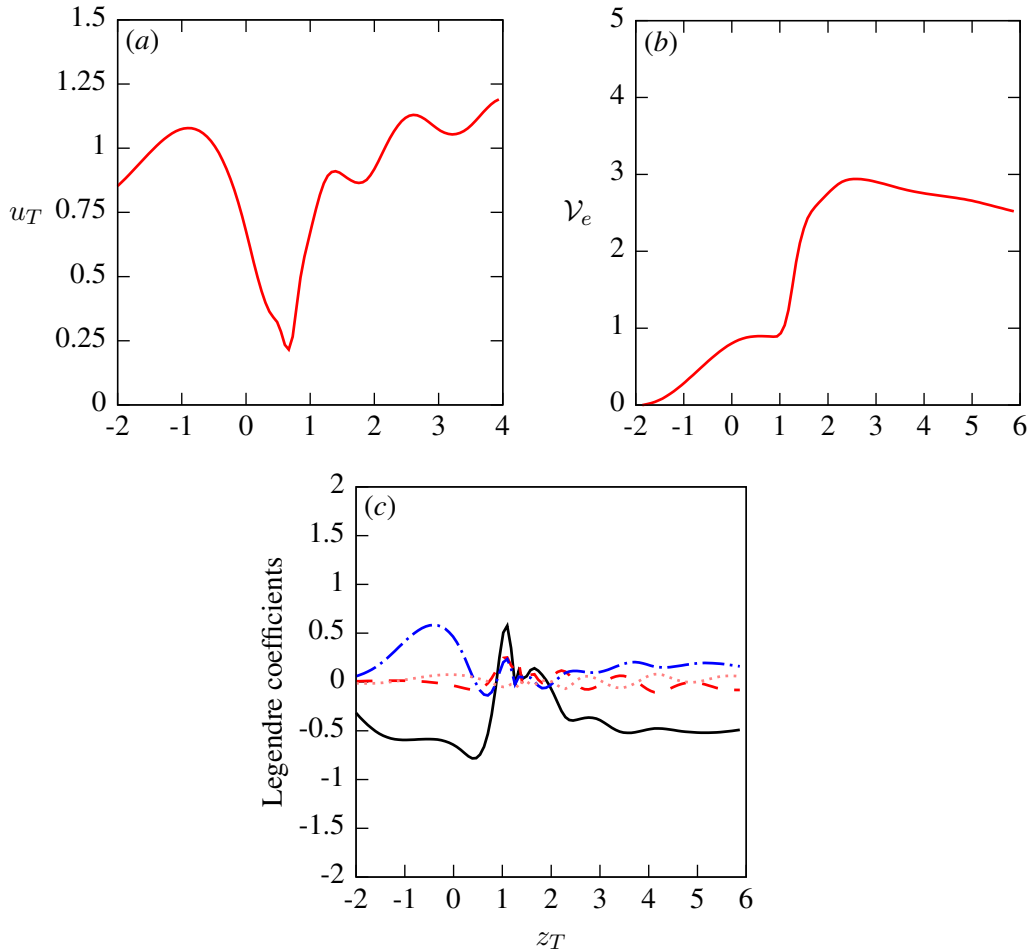


FIGURE 6.22 – Évolution (a) de la vitesse normalisée  $u_T$ , (b) du volume déplacé normalisé  $\mathcal{V}_e$ , et (c) des premiers coefficients  $a_i$  de la reconstruction en polynômes de Legendre de la surface de la bulle, en fonction de la position adimensionnée  $z_T$  de la bulle pour la situation considérée sur la figure 6.21. —  $a_2/a_0$ , ---  $a_3/a_0$ , — · —  $a_4/a_0$ , · · ·  $a_5/a_0$ .

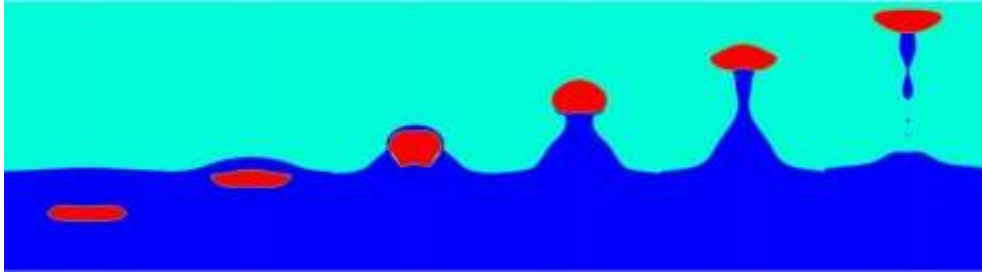


FIGURE 6.23 – Prédiction de l'évolution d'une bulle de diamètre  $d = 12$  mm dans un mélange de corium visqueux. L'écart de temps adimensionné  $\Delta t \sqrt{g/d}$  entre deux images consécutives est de 1.1. Paramètres adimensionnels :  $Bo = 8.5$ ,  $Ar = 321$ ,  $\Lambda = 1$ ,  $R = 0.49$ ,  $I = 0.77$ ,  $S = 0.62$ .

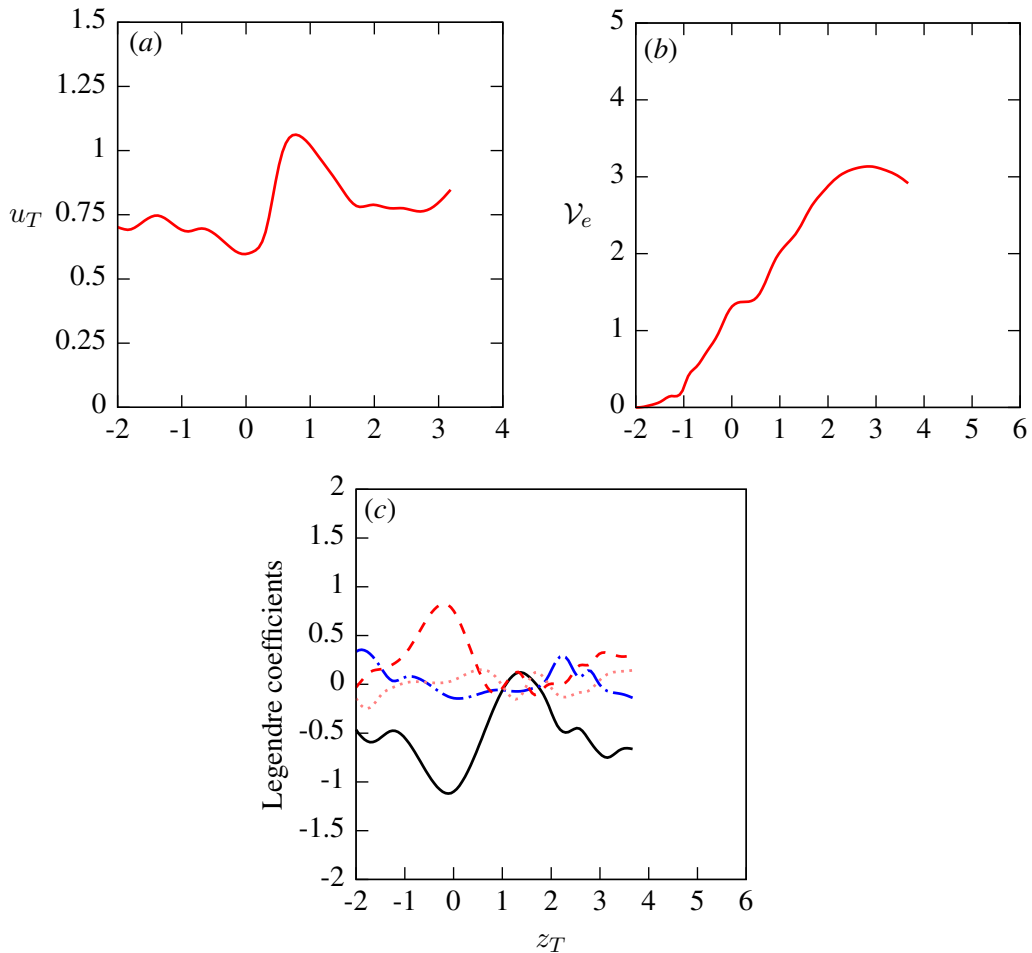


FIGURE 6.24 – Évolution (a) de la vitesse normalisée  $u_T$ , (b) du volume déplacé normalisé  $\mathcal{V}_e$ , et (c) des premiers coefficients  $a_i$  de la reconstruction en polynômes de Legendre de la surface de la bulle, en fonction de la position adimensionnée  $z_T$  de la bulle pour la situation considérée sur la figure 6.23. —  $a_2/a_0$ , ---  $a_3/a_0$ , — · —  $a_4/a_0$ , · · ·  $a_5/a_0$ .

## Quelques perspectives

Dans le but d'affiner les observations expérimentales, d'étendre la portée des prédictions des modèles théoriques et la validité des codes de simulation, plusieurs développements sont souhaitables pour la suite.

- ▷ On peut envisager de visualiser la dynamique de drainage du film grâce à une caméra à haute définition et haute cadence positionnée à hauteur de la rupture. Cependant, cette technique ne permettra pas de descendre à la précision nécessaire pour observer la rupture. Seule une technique interférométrique semble à même de capturer tous les stades du drainage, mais son emploi dans une situation où la position du film n'est pas précisément connue à l'avance demandera des développements délicats.
  
- ▷ Les bulles toriques devraient faire l'objet d'une étude spécifique détaillée, notamment par les visualisations couplées d'une caméra latérale et d'une caméra située au-dessus du dispositif afin de visualiser l'instant précis de la formation du tore et ainsi de pouvoir espérer établir une comparaison quantitative entre observations expérimentales et simulations numériques.
  
- ▷ Le modèle théorique du passage d'une bulle sphérique entraînant une colonne de liquide lourd nécessite d'être amélioré dans plusieurs directions. On peut tout d'abord relaxer l'hypothèse de sphéricité de la bulle, au prix de quelques complications géométriques. Mais le vrai saut à franchir concerne la prise en compte de l'effet de l'écoulement, dans et autour de la colonne entraînée, sur la forme de celle-ci. Ce n'est qu'à ce prix qu'on pourra aboutir à un modèle capable de distinguer l'évolution de systèmes caractérisés par un rapport de viscosités faible ( $\Lambda \ll 1$ ) ou au contraire grand ( $\Lambda \gg 1$ ).
  
- ▷ En ce qui concerne les approches numériques, l'emploi d'un modèle de sous-maille semble inévitable afin de pouvoir prédire correctement le drainage des films minces et donc l'évolution des bulles restant piégées à l'interface. Nous avons déjà évoqué au chapitre 5 la possibilité de coupler une description de type lubrification pour le film avec une approche de simulation directe pour le reste de l'écoulement. La difficulté principale à surmonter pour réaliser ce couplage sera certainement de parvenir à localiser dynamiquement le film de façon à déterminer correctement la surpression subie par la partie de la bulle en contact avec celui-ci.

# **Annexes**

# 1 Caractéristiques du verre optique B 270 Superwite®

## Propriétés optiques

Indices de refraction (condition de recuit 40° C/h)	$n_e$	1.5251 ± 0.001	
	$n_d$	1.5230	
Nombres d'Abbe	$v_e$	58.3 ± 0.6	
	$v_d$	58.5	
Transmittance, dépendante de l'épaisseur du verre et de la norme CIE	Épaisseur (mm)	Norme CIE D65 (%)	Illuminant A (%)
	2.0	91.7	91.7
	4.0	91.6	91.6
	15.0	91.0	91.0

## Propriétés Thermiques

	log viscosité (dPa s)	Température (° C)
Température de contrainte	14.5	511
Température de recuisson	13.0	541
Température de ramolissement	7.6	724
Coefficient d'expansion thermique dans la gamme de température 20 – 300° C		$(9.4 \pm 0.1)^{10-6k-1}$

## Propriétés Mécaniques

Masse volumique (g/cm <sup>3</sup> )	2.55
Module de Young (kN/mm <sup>2</sup> )	71.5
Coefficient de Poisson	0.219
Module de torsion (kN/mm <sup>2</sup> )	29.3
Dureté Knoop HK <sub>100</sub>	542

## Propriétés Chimiques

Résistance à l'eau, norme DIN ISO 719 classe hydrolytique	HGB 3
équivalent NA <sub>2</sub> O par gramme de verre (μg/g)	170
Résistance aux acides, norme DIN 12 116 classe alcaline	2
perte de poids après 6 heures (mg/dm <sup>2</sup> )	1.4
Résistance aux alcalis, norme DIN ISO 695 classe alcaline	2
perte de poids après 3 heures (mg/dm <sup>2</sup> )	140



## 2 Caractéristiques du pousse-seringue perfusant monocanal KD Scientific KDS100

Débit min.	0.1 $\mu$ l/ h microseringue 10 $\mu$ l
Débit max.	127 ml/ h seringue 10 ml 519 ml/ h seringue 60 ml
Force linéaire	9 kg
Vitesses	2.1 $\mu$ m/ min à 211.6 $\mu$ m/ s
Précision	< 1%
Répétabilité	< 0.1%
Course	12.5 cm
L×P×H	23 × 12 × 15 cm
Poids	2 kg
Alimentation	230 V – 50 Hz

## 3 Caractéristiques d'une caméra PCO1200 HS



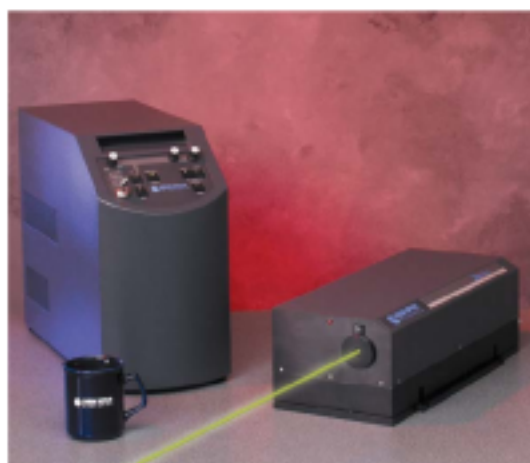
Résolution	1280 × 1024 pixels
Taille d'un pixel	12 × 12 $\mu$ m <sup>2</sup>
Fréquence d'acquisition Full frame	636fps
ROI VGA	1357fps
Temps d'exposition	1 $\mu$ s..5 s

#### 4 Caractéristiques de l'objectif télécentrique TC 4M 120



Magnification	$0.143 \pm 3\%$
Distance de travail	$336.5 \pm 10 \text{ mm}$
F	16
Telecentricité	$< 0.1 \text{ degrés}$
Distortion	$< 0.1\%$
Profondeur de champ	56 mm

#### 5 Caractéristiques du laser Pegasus de New Wave Research utilisé pour la PIV



Longueur d'onde	527 nm	
Fréquence	par cavité	1 – 10000 Hz
	cavité double	1 – 20000 Hz
Énergie	par cavité	10 m J à 1 Hz
	cavité double	10 m J à 2 Hz 20 m J à 1 Hz
Stabilité (% rms)	$< 1\%$ à 2 Hz	

## 6 Caractéristiques des particules Microparticules de rhodamine B encapsulées dans du PMMA utilisées pour la PIV

Taille	1 – 20 $\mu\text{m}$
Masse volumique	1.19 g/ $\text{cm}^3$
Indice de réfraction	1.48
Excitation/Emission	560/584 nm

## 7 Caractéristiques de la caméra Photron FASTCAM-Ultima APX-RS utilisée pour la PIV



Résolution	1024 $\times$ 1024 pixels
Taille d'un pixel	17 $\times$ 17 $\mu\text{m}^2$
Fréquence d'acquisition Full frame	3000fps
Temps d'exposition	2 $\mu\text{s}$ ..16.7 ms

## 8 Équilibre des énergies mécaniques

Nous nous intéressons ici à retrouver l'équation de bilan d'énergie pour un fluide newtonien incompressible à partir de l'équation bilan de la quantité de mouvement. Pour ce faire, l'équation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot [\eta(\nabla \mathbf{u} + {}^T\nabla \mathbf{u})] + \mathbf{F}_\sigma \quad (8)$$

est tout d'abord multipliée par le vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  puis intégrée sur l'ensemble du domaine fluide  $\Omega$ . On obtient

$$\underbrace{\int_{\Omega} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \mathbf{u}}_{\frac{dE_c}{dt}} = \underbrace{\int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}}_{-\frac{dE_p}{dt}} - \underbrace{\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{u}}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\int_{\Omega} \nabla \cdot [\eta(\nabla \mathbf{u} + {}^T\nabla \mathbf{u})] \cdot \mathbf{u}}_{-\epsilon_v} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{F}_\sigma \cdot \mathbf{u}}_{-\frac{dE_\sigma}{dt}} \quad (9)$$

où  $E_c$  est l'énergie cinétique du système,  $E_p$  est l'énergie potentielle,  $E_\sigma$  l'énergie interfaciale, et  $\epsilon_v$  la dissipation visqueuse. En utilisant le fait que pour tout vecteur  $\mathbf{a}$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{a} = \int_{\Omega} \rho \frac{D\mathbf{a}}{Dt}, \quad (10)$$

et supposant que les fluides sont incompressibles ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) et au repos sur les bords du domaine ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  est nul aux bords  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$  de normale  $\mathbf{n}$ ), les différentes parties s'écrivent

$$\frac{dE_c}{dt} = \int_{\Omega} \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^2$$

$$\frac{dE_p}{dt} = - \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho g z$$

$$\textcircled{3} = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (p\mathbf{u}) = - \int_{\partial\Omega} p\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$-\epsilon_v = \int_{\Omega} \eta (\nabla \mathbf{u} + {}^T\nabla \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{u} - \int_{\partial\Omega} \eta (\nabla \mathbf{u} + {}^T\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta (\nabla \mathbf{u} + {}^T\nabla \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} + {}^T\nabla \mathbf{u})$$

$$\frac{dE_\sigma}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta_{Aij} d\Omega \right\} \quad \text{explicitée en détails dans l'annexe 9}$$

où  $z$  est la coordonnée verticale ascendante,  $E_c$  est l'énergie cinétique du système,  $E_p$  est l'énergie potentielle,  $E_\sigma$  l'énergie interfaciale, et  $\epsilon_v$  la dissipation visqueuse. Avec ces notations, l'équation (9) s'écrit donc sous sa forme usuelle

$$\frac{d}{dt} (E_c + E_p + E_\sigma) = -\epsilon_v. \quad (11)$$

## 9 Extension du modèle « Continuum Surface Force » (CSF) pour un système triphasique

De nombreuses approches numériques consacrées aux écoulements diphasiques et utilisant la fraction volumique d'un des fluides emploient souvent la formulation CSF pour calculer les forces capillaires. Cette formulation, originellement proposée par Brackbill *et al.* [11], exprime la force capillaire par unité de volume sous la forme

$$\mathbf{F}_\sigma = -\sigma \nabla \cdot \left( \frac{\nabla c}{|\nabla c|} \right) \nabla c, \quad (12)$$

où  $\sigma$  représente la tension de surface et  $c$  le taux de présence d'un des deux fluides. Une extension directe de cette formulation dans un domaine triphasique impliquant des combinaisons linéaires des trois tensions interfaciales a été proposée par Kim & Lowengrub [35] et Kim [34] dans le contexte d'une approche de champ de phase « phase-field ». Le code JADIM intègre une autre expression proche, dont l'avantage est de s'adapter à un système à plus de trois phases :

$$\mathbf{F}_\sigma = -\frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i}^3 (c_i + c_j)^2 \sigma_{ij} \nabla \cdot \left( \frac{\nabla c_{ij}}{|\nabla c_{ij}|} \right) \nabla c_{ij} \quad (13)$$

avec

$$c_{ij} = \frac{c_i}{c_i + c_j} = 1 - c_{ji} \quad (14)$$

où  $c_i$  représente la fraction volumique d'un fluide du mélange.

On peut se convaincre de la pertinence de (13) par les étapes suivantes. Tout d'abord, il est important de remarquer que

$$(c_i + c_j)^2 \nabla c_{ij} = c_j \nabla c_i - c_i \nabla c_j. \quad (15)$$

Supposons maintenant que dans un système mono-dimensionnel la distribution spatiale des phases est telle que la phase 1 (resp. 3) remplit l'intervalle  $-\infty < x < x_{12}$  (resp.  $x_{23} < x < +\infty$ ) alors que la phase 2 remplit l'intervalle  $x_{12} < x < x_{23}$ . Si l'interface est infiniment mince,  $c_1 = H(x_{12} - x)$ ,  $c_3 = H(x - x_{23})$ , et  $c_2 = H(x - x_{12})H(x_{23} - x)$  où  $H$  est la fonction de Heaviside. Ainsi

$$(c_i + c_j)^2 |\nabla c_{ij}| = \begin{cases} 0 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i = 1, j = 3 \text{ ou } i = 3, j = 1 \\ \delta(x - x_{12}) & \text{pour } i = 1, j = 2 \text{ ou } i = 2, j = 1 \\ \delta(x - x_{23}) & \text{pour } i = 2, j = 3 \text{ ou } i = 3, j = 2, \end{cases} \quad (16)$$

où  $\delta$  est la fonction de Dirac.  $|\nabla c_{ij}|$  est donc non nulle uniquement si les phases  $i$  et  $j$  ont une interface commune. Pour une telle interface,  $\nabla c_i = -\nabla c_j$  et  $\nabla c_{ij} = \nabla c_i$  sont alignés avec la normale locale à l'interface. Par conséquent, la normale unitaire pointant de la phase  $i$  vers la phase  $j$  s'écrit

$$\mathbf{n}_{ij} = \nabla c_{ij} / |\nabla c_{ij}|. \quad (17)$$

Généralisant (16) en 3 dimensions et utilisant (17), on voit que (13) se réduit à l'expression

$$\mathbf{F}_\sigma = -\sum_{i=1}^3 \sum_{j>i} \sigma_{ij} (\nabla \cdot \mathbf{n}_{ij}) \mathbf{n}_{ij} \delta_{A_{ij}}, \quad (18)$$

où  $\delta_{A_{ij}}$  est la fonction de Dirac qui est non nulle uniquement à l'interface entre les phases  $i$  et  $j$  de surface  $A_{ij}$  et satisfait la condition  $\int_{\mathcal{V}} \delta_{A_{ij}} d\mathcal{V} = A_{ij}$ .

De plus, le travail des forces capillaires  $T_\sigma(t) = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{F}_\sigma \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V}$ , issu de l'expression précédente dans un système comportant des interfaces infiniment fines équivaut donc à

$$T_\sigma(t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i} \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ij} \mathbf{n}_{ij} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{ij} \delta_{A_{ij}} d\mathcal{V}, \quad (19)$$

où le théorème de la divergence a été utilisé en supposant que le fluide est au repos aux bords du système et que les tensions interfaciales sont uniformes. L'expression peut alors être écrite sous forme de dérivée temporelle en utilisant maintenant le fait que

$$\frac{D\mathbf{n} d\mathcal{S}}{Dt} = -\nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S}, \quad \forall \text{ surface } \mathcal{S}, \quad (20)$$

où l'on retrouve la formulation thermodynamique classique du travail des forces capillaires :

$$T_\sigma(t) = -\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta_{Aij} d\mathcal{V} \right\} = -\frac{dE_\sigma}{dt}, \quad (21)$$

avec  $E_\sigma$  l'énergie interfaciale totale du système.

## 10 Discussion de l'expression des forces capillaires issues du modèle de Cahn-Hilliard triphasique

L'expression des forces capillaires pour des modèles diphasiques et triphasiques peut prendre différentes formes lorsqu'on considère les interfaces comme étant d'épaisseur finie. Toutes découlent cependant de l'expression des forces capillaires par unité de volume d'un mélange à trois fluides en considérant des interfaces infiniment fines :

$$\mathbf{F}_\sigma = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i} \sigma_{ij} \mathbf{n}_{ij} (\nabla \cdot \mathbf{n}_{ij}) \delta_{A_{ij}}. \quad (22)$$

Les différentes quantités sont définies dans l'annexe 9. Dans le cas qui nous intéresse, il est judicieux de reformuler (22) sous la forme

$$\mathbf{F}_\sigma = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Sigma_i \mathbf{n}_i (\nabla \cdot \mathbf{n}_i) \delta_{A_i} \quad (23)$$

où  $\mathbf{n}_i$  correspond alternativement à  $\mathbf{n}_{ij}$  ou  $\mathbf{n}_{ik}$  ( $i \neq j \neq k \neq i$ ) selon l'interface considérée,  $\delta_{A_i}$  est la fonction de Dirac qui est non nulle uniquement le long d'une interface impliquant le fluide  $i$ , et  $\Sigma_i = \sigma_{ij} + \sigma_{ik} - \sigma_{jk}$  l'opposé du paramètre d'étalement de la phase  $i$ .

Lorsqu'un modèle à interfaces diffuses est considéré, il est nécessaire d'établir deux approximations : l'une pour  $\mathbf{n}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), l'autre pour  $\delta_{A_i}$ . Pour l'extension des équations de Cahn-Hilliard aux systèmes triphasiques (3.40), la normale  $\mathbf{n}_i$  est raisonnablement approchée par le gradient normalisé de la fraction volumique correspondante, *i.e.*  $\mathbf{n}_i \approx \nabla c_i / |\nabla c_i|$ , et l'approximation  $\delta_{A_i}^\epsilon$  de  $\delta_{A_i}$  sur l'interface d'épaisseur finie  $\epsilon$  est donnée par

$$\delta_{A_i}^\epsilon = \frac{3}{2} \epsilon |\nabla c_i|^2. \quad (24)$$

Cette expression est trouvée grâce à la solution analytique donnant le profil d'une interface plane en dimension 1 à l'équilibre

$$c(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{2}{\epsilon} x\right), \quad (25)$$

démontrée par Lapuerta [39]. Avec (25), l'intégrale de  $\delta_{A_i}^\epsilon$  sur le domaine entier  $\mathcal{V}$  est égale à l'aire  $A_i$  des interfaces en contact avec le fluide  $i$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \delta_\epsilon(I) d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \frac{3}{2} \epsilon |\nabla c_i|^2 d\mathcal{V} \\ &= A_i \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \frac{3}{2} \frac{\partial c_i^2}{\partial x} dx \\ &= A_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{8\epsilon} \left(1 - \tanh^2\left(\frac{2}{\epsilon} x\right)\right)^2 dx \\ &= A_i. \end{aligned} \quad (26)$$

Ainsi (23) et (24) donnent la formulation des forces capillaires

$$\mathbf{F}_\sigma = -\frac{3}{4} \sum_{i=1}^3 \epsilon \Sigma_i \nabla \cdot \left( \frac{\nabla c_i}{|\nabla c_i|} \right) |\nabla c_i|^2 \frac{\nabla c_i}{|\nabla c_i|}. \quad (27)$$

En remarquant maintenant que

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla c_i}{|\nabla c_i|} \right) = \frac{\nabla^2 c_i}{|\nabla c_i|} - \frac{1}{2} \frac{\nabla c_i}{|\nabla c_i|} \cdot \left( \frac{\nabla (|\nabla c_i|^2)}{|\nabla c_i|^2} \right) \quad (28)$$

et en supposant que  $c_i$  ne dépend que de la coordonnée normale à l'interface  $\mathbf{n}_i$ ,

$$\left( \nabla |\nabla c_i|^2 \cdot \frac{\nabla c_i}{|\nabla c_i|} \right) \frac{\nabla c_i}{|\nabla c_i|} = \nabla |\nabla c_i|^2, \quad (29)$$

l'expression des forces capillaires (27) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_\sigma &= -\frac{3}{4} \sum_{i=1}^3 \left[ \epsilon \Sigma_i \nabla^2 c_i \nabla c_i - \epsilon \frac{\Sigma_i}{2} \nabla |\nabla c_i|^2 \right] \\
&= -\frac{3}{4} \sum_{i=1}^3 \left[ \epsilon \Sigma_i \nabla^2 c_i \nabla c_i - \nabla \mathcal{D} + \nabla \left( \mathcal{D} - \epsilon \frac{\Sigma_i}{2} |\nabla c_i|^2 \right) \right] \\
&= -\frac{3}{4} \sum_{i=1}^3 \left[ \epsilon \Sigma_i \nabla^2 c_i \nabla c_i - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial c_i} \nabla c_i + \nabla \left( \mathcal{D} - \epsilon \frac{\Sigma_i}{2} |\nabla c_i|^2 \right) \right]
\end{aligned} \tag{30}$$

avec  $\mathcal{D}$  tel que

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial c_i} = \frac{16 \Sigma_T}{3\epsilon} \sum_{j \neq i} \left( \frac{1}{\Sigma_i} \left( \frac{\partial F}{\partial c_i} - \frac{\partial F}{\partial c_j} \right) \right). \tag{31}$$

En introduisant maintenant le potentiel chimique généralisé  $\mu_i$  de la phase  $i$  défini par

$$\mu_i = -\frac{3}{4} \Sigma_i \epsilon \nabla^2 c_i + \frac{3}{4} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial c_i} \tag{32}$$

on obtient

$$\mathbf{F}_\sigma = \sum_{i=1}^3 \left[ \mu_i \nabla c_i - \frac{3}{4} \nabla \left( \mathcal{D} - \epsilon \frac{\Sigma_i}{2} |\nabla c_i|^2 \right) \right]. \tag{33}$$

Une autre formulation de la force capillaire découle de (33),

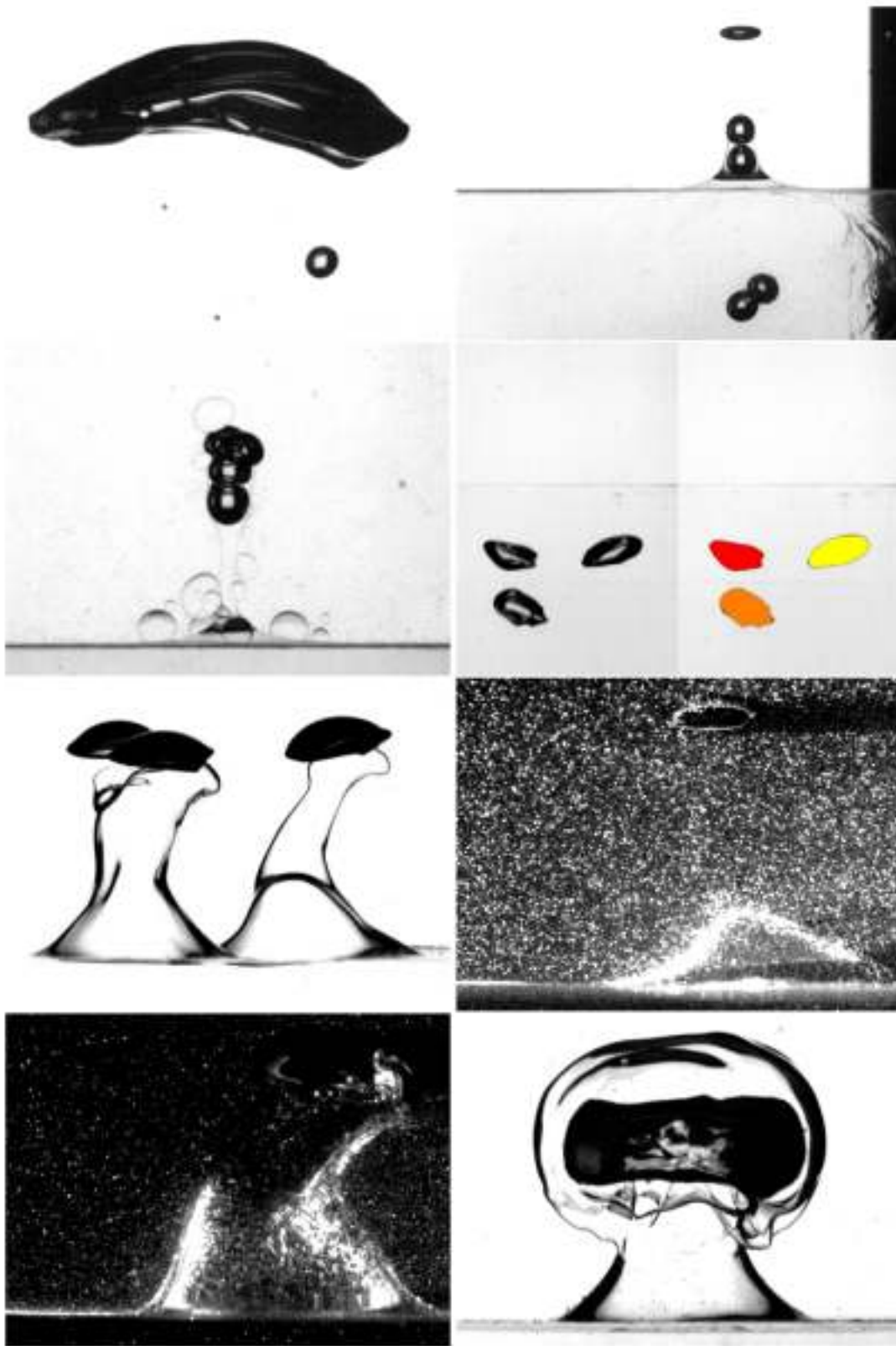
$$\mathbf{F}_\sigma = \sum_{i=1}^3 \mu_i \nabla c_i \tag{34}$$

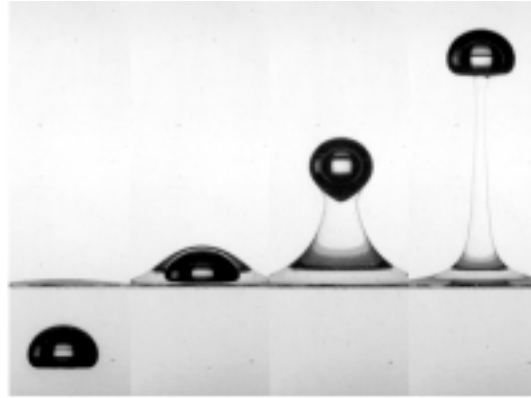
exacte à un gradient près,  $\nabla \left( -\frac{3}{4} \sum_{i=1}^3 \mathcal{D} - \epsilon \frac{\Sigma_i}{2} |\nabla c_i|^2 \right)$ , qui entre dans la définition de la pression.

**Remarque.** (34) implique que la création d'énergie libre par convection compense exactement la création d'énergie libre par capillarité (Jacqmin [29]).



11 Images, images ...





Dans le sens de la lecture (de gauche à droite et de haut en bas),

- ▷ Ascension d'une bulle de volume 10 ml dans de l'eau.
- ▷ Train de bulles de volume 0.03 ml dans une configuration eau+glycérine 85% / huile 47V10.
- ▷ Train de bulles de volume 0.03 ml dans une configuration eau+glycérine 85% / huile 47V100.
- ▷ Détection de trois bulles de volume 0.8 ml environ dans une configuration eau / huile 47V10
- ▷ Les trois mêmes bulles plus tard...
- ▷ Bulle de volume 0.27 ml dans une configuration eau / huile 47V10.
- ▷ Bulle de volume 0.70 ml dans une configuration eau / huile 47V10.
- ▷ Tore de volume 3.2 ml dans une configuration eau / huile 47V10.
- ▷ Bulle de volume 1.15 ml dans une configuration eau+glycérine 95% / huile 47V500.

# Bibliographie

- [1] A. BENKENIDA. *Développement et validation d'une méthode de simulation d'écoulements diphasiques sans reconstruction d'interfaces. Application à la dynamique des bulles de Taylor*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1999.
- [2] D. BHAGA & M. E. WEBER. Bubbles in viscous liquids : shapes, wakes and velocities. *J. Fluid Mech.*, 1981, vol. 105, p. 61–85.
- [3] T. BIBEN. Phase-field models for free-boundary problems. *Eur. J. Phys.*, 2005, vol. 26, n° 5, p. S47–S55.
- [4] T. BONOMETTI. *Développement d'une méthode de simulation d'écoulements à bulles et à gouttes*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- [5] T. BONOMETTI & J. MAGNAUDET. Transition from spherical cap to toroidal bubbles. *Phys. Fluids*, 2006, 18, n° 5 :052102.
- [6] T. BONOMETTI & J. MAGNAUDET. An interface-capturing method for incompressible two-phase flows. Validation and application to bubble dynamics. *Int. J. Multiphas. Flow*, 2007, vol. 33, n° 2, p. 109 – 133.
- [7] F. BOYER, C. LAPUERTA, S. MINJEAUD, B. PIAR, & M. QUINTARD. Cahn-Hilliard/Navier-Stokes model for the simulation of three-phase flows. *Transport Porous Med.*, 2010, vol. 82, p. 463–483.
- [8] F. BOYER & C. LAPUERTA. Study of a three component Cahn-Hilliard flow model. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00012276/en/>.
- [9] F. BOYER & S. MINJEAUD. Fully discrete approximation of a three component Cahn-Hilliard model. In *Algoritmy*, 2009.
- [10] F. BOYER, C. LAPUERTA, S. MINJEAUD, & B. PIAR. A local adaptive refinement method with multigrid preconditionning illustrated by multiphase flows simulations. *ESAIM : Proc.*, 2009, vol. 27, p. 15–53.
- [11] J. U. BRACKBILL, D. B. KOTHE, & C. ZEMACH. A continuum method for modeling surface tension. *J. Comput. Phys.*, 1992, vol. 100, p. 335–354.
- [12] J. W. M. BUSH & I. EAMES. Fluid displacement by high Reynolds number bubble motion in a thin gap. *Int. J. Multiphas. Flow*, 1998, vol. 24, n° 3, p. 411 – 430.
- [13] I. CALMET & J. MAGNAUDET. Large-eddy simulation of high-Schmidt number mass transfer in a turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, 1997, vol. 9, n° 2, p. 438–455.
- [14] R. CAMASSA, C. FALCON, J. LIN, R. M. MCLAUGHLIN, & R. PARKER. Prolonged residence times for particles settling through stratified miscible fluids in the Stokes regime. *Phys. Fluids*, 2009, 21, n° 3 : 031702.
- [15] V. CHEVRIER & A. W. CRAMB. Observation and measurement of bubble separation at liquid steel-slag interfaces. *Scand. J. Metall.*, 2005, vol. 34, n° 2, p. 89–99.
- [16] B. K. CHI & L. G. LEAL. A theoretical study of the motion of a viscous drop toward a fluid interface at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 1989, vol. 201, p. 123–146.

- [17] R. CLIFT, J. GRACE, & M. WEBER. *Bubbles, drops, and particles*. Academic Press, 1978. ISBN 9780121769505.
- [18] J. CRANGA. *Simulation numérique directe d'écoulements di- et tri-phasiques engendrés par l'injection de bulles dans un bain de métal liquide*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2002.
- [19] J. CRANGA, P. GARDIN, D. HUIN, & J. MAGNAUDET. Influence of surface pressure and slag layer on bubble bursting in degasser systems. *Computational Modeling of Materials, Minerals, and Metals Processing*, 2001, p. 105–114.
- [20] R. M. DAVIES & G. TAYLOR. The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes. *P. Roy. Soc. Lond. A Mat.*, 1950, vol. 200, n° 1062, p. 375–390.
- [21] P. G. DE GENNES, F. BROCHARD-WYART, & D. QUÉRÉ. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin.
- [22] G. DEBRÉGEAS, P.-G. DE GENNES, & F. BROCHARD-WYART. The life and death of 'bare' viscous bubbles. *Science*, 1998, p. 1704–1707.
- [23] N. DIETRICH, S. PONCIN, S. PHEULPIN, & H. Z. LI. Passage of a bubble through a liquid-liquid interface. *AIChE J.*, 2008, vol. 54, n° 3, p. 594–600.
- [24] P. C. DUINEVELD. The rise velocity and shape of bubbles in pure water at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 1995, vol. 292, p. 325–332.
- [25] P. C. DUINEVELD. Bouncing and coalescence of two bubbles in pure water. In S. Morioka & L. Wijngaarden, editors, *IUTAM Symposium on Waves in Liquid/Gas and Liquid/Vapour Two-Phase Systems*, volume 31 of *Fluid Mechanics and Its Applications*, pages 151–160. Springer Netherlands, 1995. ISBN 978-94-011-0057-1.
- [26] I. EAMES & G. DUURSMA. Displacement of horizontal layers by bubbles injected into fluidised beds. *Chem. Eng. Sci.*, 1997, vol. 52, n° 16, p. 2697 – 2705.
- [27] A. S. GELLER, S. H. LEE, & L. G. LEAL. The creeping motion of a spherical particle normal to a deformable interface. *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 169, p. 27–69.
- [28] G. GREENE, J. C. CHEN, & M. T. CONLIN. Onset of entrainment between immiscible liquid layers due to rising gas bubbles. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1988, vol. 31, n° 6, p. 1309 – 1317.
- [29] D. JACQMIN. Calculation of two-phase Navier-Stokes flows using phase-field modeling. *J. Comput. Phys.*, 1999, vol. 155, n° 1, p. 96 – 127.
- [30] A. F. JONES & S. D. R. WILSON. The film drainage problem in droplet coalescence. *J. Fluid Mech.*, 1978, vol. 87, n° 02, p. 263–288.
- [31] D. D. JOSEPH. Rise velocity of a spherical cap bubble. *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 488, p. 213–223.
- [32] J. B. KELLER. Surface tension force on a partly submerged body. *Phys. Fluids*, 1998, vol. 10, n° 11, p. 3009–3010.
- [33] M. KEMIHA, E. OLMOS, W. FEI, S. PONCIN, & H. Z. LI. Passage of a gas bubble through a liquid-liquid interface. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 2007, vol. 46, p. 6099–6104.
- [34] J. KIM. Phase field computations for ternary fluid flows. *Comput. Method. Appl. M.*, 2007, vol. 196, p. 4779 – 4788.
- [35] J. KIM & J. LOWENGRUB. Phase field modeling and simulation of three-phase flows. *Interface Free Bound.*, 2005, vol. 7, p. 435 – 466.

- [36] S. KOBAYASHI. Iron droplet formation due to bubbles passing through molten iron/slag interface. *ISIJ Int.*, 1993, vol. 33, n° 5, p. 577–582.
- [37] D. M. KOCH & D. L. KOCH. Numerical and theoretical solutions for a drop spreading below a free fluid surface. *J. Fluid Mech.*, 1995, vol. 287, p. 251–278.
- [38] C. LAPUERTA. *Échanges de masse et de chaleur entre deux phases liquides stratifiées dans un écoulement à bulles*. Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille I, 2006.
- [39] C. LAPUERTA. Bilan des résultats expérimentaux sur le comportement d’une bulle dans un bain stratifié. Note Technique DPAM/SEMIC-2007-296, IRSN, 2007.
- [40] L. LEAL & S. LEE. Particle motion near a deformable fluid interface. *Adv. Colloid Interfac.*, 1982, vol. 17, n° 1, p. 61 – 81.
- [41] B. LECORDIER & M. TRINITÉ. *Advanced PIV algorithms with image distortion - Validation and comparison from synthetic images of turbulent flow*, Busan, Korea, 2003. 5th International Symposium on Particle Image Velocimetry.
- [42] D.-G. LEE & H.-Y. KIM. Sinking of small sphere at low Reynolds number through interface. *Phys. Fluids*, 2011, 23, n° 7 :072104.
- [43] D. LEGENDRE, J. MAGNAUDET, & G. MOUGIN. Hydrodynamic interactions between two spherical bubbles rising side by side in a viscous liquid. *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 497, p. 133–166.
- [44] D. LEGENDRE & J. MAGNAUDET. The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow. *J. Fluid Mech.*, 1998, vol. 368, p. 81–126.
- [45] T. S. LUNDGREN & N. N. MANSOUR. Vortex ring bubbles. *J. Fluid Mech.*, 1991, vol. 224, p. 177–196.
- [46] J. MAGNAUDET & G. MOUGIN. Wake instability of a fixed spheroidal bubble. *J. Fluid Mech.*, 2007, vol. 572, p. 311–337.
- [47] J. MAGNAUDET, M. RIVERO, & J. FABRE. Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part 1. Steady straining flow. *J. Fluid Mech.*, 1995, vol. 284, p. 97–135.
- [48] M. MANGA & H. A. STONE. Low Reynolds number motion of bubbles, drops and rigid spheres through fluid-fluid interfaces. *J. Fluid Mech.*, 1995, vol. 287, p. 279–298.
- [49] H. MARU, D. WASAN, & R. KINTNER. Behavior of a rigid sphere at a liquid-liquid interface. *Chem. Eng. Sci.*, 1971, vol. 26, n° 10, p. 1615 – 1628.
- [50] S. MAUREL. *Étude par imagerie laser de la génération et de la rupture d’un écoulement tourbillonnaire compressé. Situation modèle pour la validation de simulations aux grandes échelles dans les moteurs*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2000.
- [51] D. I. MEIRON. On the stability of gas bubbles rising in an inviscid fluid. *J. Fluid Mech.*, 1989, vol. 198, p. 101–114.
- [52] A. MERLE, D. LEGENDRE, & J. MAGNAUDET. Forces on a high-Reynolds-number spherical bubble in a turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 2005, vol. 532, p. 53–62.
- [53] M. MIKSYS, J.-M. VANDEN-BROECK, & J. B. KELLER. Axisymmetric bubble or drop in a uniform flow. *J. Fluid Mech.*, 1981, vol. 108, p. 89–100.
- [54] S. MINJEAUD. An adaptive pressure correction method without spurious velocities for diffuse-interface models of incompressible flows. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00636296>.
- [55] S. MINJEAUD. *Raffinement local adaptatif et méthodes multiniveaux pour la simulation d’écoulements multiphasiques*. Thèse de Doctorat, Université Paul Cézanne, 2010.

- [56] D. W. MOORE. The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity. *J. Fluid Mech.*, 1965, vol. 23, p. 749–766.
- [57] R. NATARAJAN & A. ACRIVOS. The instability of the steady flow past spheres and disks. *J. Fluid Mech.*, 1993, vol. 254, p. 323–344.
- [58] T. J. PEDLEY. The toroidal bubble. *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 32, p. 97–112.
- [59] F. PIGEONNEAU & A. SELLIER. Low-Reynolds-number gravity-driven migration and deformation of bubbles near a free surface. *Phys. Fluids*, 2011, 23, n° 9 :092102.
- [60] S. POPINET. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *J. Comput. Phys.*, 2009, vol. 228, n° 16, p. 5838–5866.
- [61] H. M. PRINCEN. Shape of a fluid drop at a liquid-liquid interface. *J. Colloid Sci.*, 1963, vol. 18, n° 2, p. 178 – 195.
- [62] H. PRINCEN & S. MASON. Shape of a fluid drop at a fluid-liquid interface. I. Extension and test of two-phase theory. *J. Colloid Sci.*, 1965, vol. 20, n° 2, p. 156 – 172.
- [63] H. PRINCEN & S. MASON. Shape of a fluid drop at a fluid-liquid interface. II. Theory for three-phase systems. *J. Colloid Sci.*, 1965, vol. 20, n° 3, p. 246 – 266.
- [64] G. REITER & K. SCHWERDTFEGER. Observation of physical phenomena occurring during passage of bubbles through liquid/liquid interfaces. *ISIJ Int.*, 1992, vol. 32, n° 1, p. 50–56.
- [65] G. REITER & K. SCHWERDTFEGER. Characteristics of entrainment at liquid/liquid interfaces due to rising bubbles. *ISIJ Int.*, 1992, vol. 32, n° 1, p. 57–65.
- [66] A. L. M. RIVERO. *Étude par simulation numérique des forces exercées sur une inclusion sphérique par un écoulement accéléré*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1991.
- [67] R. SCARDOVELLI & S. ZALESKI. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1999, vol. 31, n° 1, p. 567–603.
- [68] P. J. SHOPOV & P. D. MINEV. The unsteady motion of a bubble or drop towards a liquid-liquid interface. *J. Fluid Mech.*, 1992, vol. 235, p. 123–141.
- [69] P. SMITH & T. V. D. VEN. The effect of gravity on the drainage of a thin liquid film between a solid sphere and a liquid/fluid interface. *J. Colloid Interf. Sci.*, 1984, vol. 100, n° 2, p. 456 – 464.
- [70] A. N. SRDIC-MITROVIC, N. A. MOHAMED, & H. J. S. FERNANDO. Gravitational settling of particles through density interfaces. *J. Fluid Mech.*, 1999, vol. 381, p. 175–198.
- [71] T. D. TAYLOR & A. ACRIVOS. On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 1964, vol. 18, p. 466–476.
- [72] S. THOMAS, A. ESMAEELI, & G. TRYGGVASON. Multiscale computations of thin films in multiphase flows. *Int. J. Multiphas. Flow*, 2010, vol. 36, n° 1, p. 71 – 77.
- [73] D. VELLA, D.-G. LEE, & H.-Y. KIM. The load supported by small floating objects. *Langmuir*, 2006, vol. 22, n° 14, p. 5979–5981.
- [74] J. K. WALTERS & J. F. DAVIDSON. The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid. *J. Fluid Mech.*, 1963, vol. 17, p. 321–336.
- [75] S. T. ZALESKAK. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *J. Comput. Phys.*, 1979, vol. 31, n° 3, p. 335 – 362.

# Dynamique de bulles traversant l'interface séparant deux liquides

ROMAIN BONHOMME<sup>1,2,a</sup>, JACQUES MAGNAUDET<sup>2</sup> ET BRUNO PIAR<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN) DPAM/SEMIC/LIMSI, Cadarache, BP 3,  
13115 Saint-Paul-Lez-Durance, France

<sup>2</sup> Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT), 1 allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France

Reçu le 29 avril 2011, accepté le 11 mai 2011

**Résumé** – Nous étudions expérimentalement et numériquement la dynamique de bulles d'air isolées traversant l'interface initialement plane entre deux liquides newtoniens. Les liquides utilisés dans les expériences nous permettent d'obtenir des rapports de viscosité qui peuvent varier de deux ordres de grandeur entre les deux couches et dans une moindre mesure, de faire varier le contraste de densité et la tension interfaciale rencontrés par la bulle lors de la traversée de l'interface. Deux dispositifs d'injection différents sont utilisés afin d'obtenir des bulles dont les diamètres s'échelonnent typiquement entre 1 mm et 2 cm et dont les plus grosses adoptent une forme torique. Nous réalisons en parallèle des simulations numériques axisymétriques à l'aide de deux approches distinctes basées pour l'une sur un modèle de capture d'interface (de type VOF mais sans reconstruction d'interface), pour l'autre sur un modèle de Cahn-Hilliard couplé aux équations de Navier-Stokes.

**Mots clés** : Bulles / écoulement triphasique / interface liquide-liquide / simulation numérique directe

**Abstract** – **Dynamics of bubbles crossing a liquid-liquid interface.** We investigate experimentally and computationally the passage of air bubbles through an initially flat horizontal interface separating two Newtonian liquids. We use various liquids in such a way that their viscosity ratio can vary by more than two orders of magnitude; the density contrast and the interfacial tension also vary to a certain extent. Two different injection systems are used and allow us to generate bubbles with diameters ranging typically from 1 mm to 2 cm, the biggest bubbles being toroidal. In parallel we carry out axisymmetric computations based on two distinct approaches, namely an interface capturing technique (a VOF approach without interface reconstruction) and a Cahn-Hilliard model coupled with the Navier-Stokes equations.

**Key words**: Bubbles / triphasic flow / liquid-liquid interface / direct numerical simulation

## 1 Introduction

Au cours d'un hypothétique accident au sein d'un réacteur à eau pressurisée, la dégradation du cœur peut entraîner l'apparition d'une configuration stratifiée métal/oxyde dans le puits de cuve, traversée par un flux gazeux. Les transferts entre les deux phases métallique et oxyde peuvent accélérer l'ablation du puits de cuve dans une direction (horizontale ou verticale) et la quantification de ces échanges reste un problème ouvert qui pèse sur la fiabilité des simulations actuelles d'accident grave.

Les phénomènes hydrodynamiques mis en jeu lorsque des bulles de gaz, des gouttes ou des particules solides approchent une interface initialement plane et horizontale séparant deux liquides non miscibles puis la traversent éventuellement ont fait l'objet de plusieurs

travaux tant expérimentaux que numériques. Une analyse très complète du problème de l'approche de l'interface (mais pas de sa traversée) a été réalisée dans le domaine des faibles nombres de Reynolds par Manga et Stone [1] en combinant expériences (avec plusieurs fluides), simulations numériques (par une méthode d'intégrales de frontière) et approche asymptotique. Des expériences à grand nombre de Reynolds dans un canal confiné entre deux plaques ont été menées par Eames et Duursma [2] et Bush et Eames [3] afin d'analyser l'entraînement du liquide inférieur dans le sillage d'une bulle ayant préalablement traversé l'interface. Plus récemment, Kemiha et al. [4] et Dietrich et al. [5] ont étudié à l'aide d'une technique de vélocimétrie par images de particules le passage de bulles d'air au travers de l'interface séparant un liquide newtonien ou rhéofluidifiant d'une couche supérieure constituée d'huile de silicone.

<sup>a</sup> Auteur pour correspondance : [romain.bonhomme@imft.fr](mailto:romain.bonhomme@imft.fr)

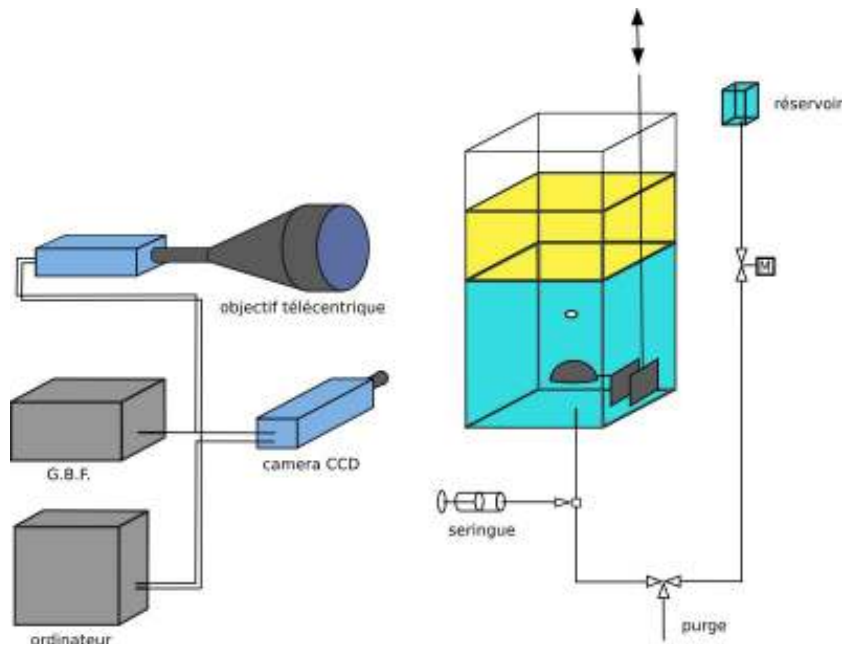


Fig. 1. Dispositif expérimental intégrant le système d'injection avec demi-coque.

En termes de simulation, Shopov et Minev [6] utilisent une technique de maillage adaptatif couplée à une approche en éléments-finis ont pu simuler l'approche d'une interface initialement plane par des bulles et des gouttes pour des nombres de Reynolds inférieurs à la centaine et des nombres de Bond inférieurs à 20. Plus récemment, Cranga et al. [7] et Bonometti [8] ont étendu une approche de type VOF au cas triphasique et ont simulé des traversées d'interface par des bulles dans des géométries axi-symétriques mais également tridimensionnelles dans des régimes d'écoulement variés. Boyer et al. [9] ont d'autre part développé un modèle de Cahn-Hilliard couplé aux équations de Navier-Stokes qui leur a permis de simuler la traversée d'une interface liquide-liquide par des bulles.

Notre objectif général est d'approfondir, en combinant les approches expérimentales et numériques aujourd'hui disponibles (notamment les deux dernières approches numériques citées ci-dessus), la compréhension des mécanismes hydrodynamiques mis en jeu dans ce problème, ainsi que d'explorer une gamme de configurations plus large que celle des études antérieures.

## 2 Dispositif expérimental

Les expériences ont été réalisées à température constante ( $20 \pm 1$  °C) dans une colonne en verre de section carrée, de dimensions  $20 \times 20 \times 40$  cm. Deux faces de la cuve sont composées de verre B270 Superwite<sup>®</sup> afin de limiter les aberrations optiques lors de l'acquisition d'image. Chacune des parois de la colonne est traitée avec un composé hydrophobe Rain-X<sup>®</sup> dans sa partie supérieure dans le but d'obtenir une interface liquide-liquide totalement plane le long de la ligne triple verre/phase aqueuse/phase huileuse. Le socle de la

colonne est en PMMA ; il est amovible et intègre plusieurs systèmes d'injection interchangeables.

Deux dispositifs d'injection de gaz ont été mis au point dans cette étude : un système avec demi-coque présenté en figure 1, ainsi qu'un système utilisant un piston. Le premier se compose d'une cuiller de diamètre intérieur 60 mm qui peut tourner autour d'un axe horizontal. Un volume d'air prédéterminé est tout d'abord injecté sous la cuiller à l'aide d'une seringue. La cuiller est ensuite retournée pour libérer la bulle emprisonnée. Le second système consiste à injecter manuellement et de manière rapide au moyen d'un piston l'air emprisonné dans un cylindre fermé. Les bulles sub-centimétriques prennent des formes variées, sphériques pour les plus petites, en calotte sphérique pour les plus grosses. Les bulles de volume plus grand, obtenues au moyen du deuxième dispositif, prennent préférentiellement une forme torique.

Les liquides lourds utilisés lors des expérimentations sont des mélanges d'eau et de glycérine de concentrations différentes. Les liquides légers sont des huiles de silicone 47V10, 47V100 et 47V500. Les propriétés physiques de ces fluides ont été mesurées à  $20 \pm 1$  °C et sont référencées dans le tableau 1.

Afin d'obtenir une visualisation tridimensionnelle de l'écoulement, deux caméras sont positionnées de manière frontale et latérale par rapport à la cuve. Nous avons utilisé des caméras haute cadence PCO1200 HS synchronisées à 350 images par seconde. Les images obtenues ont une résolution de  $1024 \times 1280$  pixels et sont encodées sur 16 bits de niveaux de gris. La caméra frontale est connectée à un objectif télécentrique TC 4M 120 dans le but de réduire les distorsions. Le système a été calibré afin que chaque caméra détecte un champ fixe de  $108,9 \times 87,2$  mm<sup>2</sup>.



**Tableau 1.** Propriétés mesurées des liquides à  $20 \pm 1$  °C.

Liquide	Masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	Viscosité (MPa.s)	Tension de surface liquide-air ( $\text{mN.m}^{-1}$ )
Eau	997	1,002	69,4
Glycérine 85 % + eau	1211	102,6	48,7
Glycérine 95 % + eau	1244	550,1	45,2
Huile 47V10	932	9,6	20,2
Huile 47V100	961	113,8	20,7
Huile 47V500	965	530,7	21,0

Tensions interfaciales ( $\text{mN.m}^{-1}$ )	Huile 47V10	Huile 47V100	Huile 47V500
Eau	19,7	14,3	13,7
Glycérine 85 % + eau	28,8	30,0	29,9
Glycérine 95 % + eau	27,8	27,1	28,0

### 3 Observations expérimentales

Plusieurs comportements contrastés peuvent être observés lors du passage de bulles à travers une interface liquide-liquide.

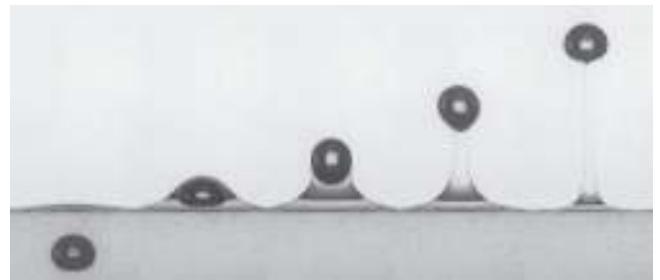
Dans une configuration où les deux liquides sont très visqueux (viscosités supérieures à 500 MPa.s dans la Fig. 2), et pour des bulles de tailles centimétriques, l'écoulement est axisymétrique. Une colonne de liquide lourd est alors entraînée dans le liquide léger à la traversée de l'interface.

Un deuxième comportement peut être observé sur la figure 3 : la bulle est fortement déformée au passage de l'interface à cause du contraste de viscosité entre les deux liquides. L'arrière de la bulle est piégé dans le fluide lourd alors que le front tend à s'échapper dans le liquide supérieur de moindre viscosité. L'étirement ainsi créé entre l'avant et l'arrière de la bulle peut être tel que la bulle se scinde.

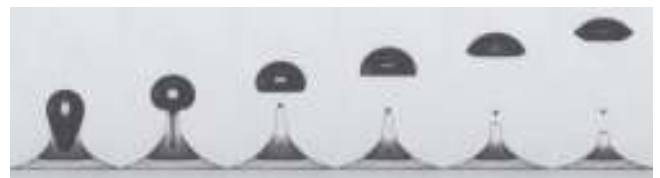
Une autre configuration est obtenue lorsqu'une bulle torique traverse une interface eau-huile. L'organisation de l'écoulement autour de la bulle permet la formation d'une enveloppe d'eau qui entoure entièrement la bulle, sans ligne triple. Cette enveloppe suit la bulle lors de son ascension dans la phase supérieure.

### 4 Simulations numériques par une approche de capture d'interfaces

Une approche VOF sans reconstruction d'interface est employée dans le code JADIM de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse pour la simulation d'écoulements diphasiques. Nous utilisons une extension du modèle diphasique de Bonometti et Magnaudet [10] sous les hypothèses que les fluides sont newtoniens, que l'écoulement est incompressible et que les tensions interfaciales sont uniformes.



**Fig. 2.** Passage d'une bulle de 0,38 ml à travers une interface eau-glycérine 95 %–huile 47V500. L'intervalle de temps  $\Delta t$  entre chaque image est de 0,1429 s. En notant 1 l'indice relatif à la bulle, 2 à la phase lourde, et  $V$  le volume de la bulle : le diamètre équivalent de la bulle  $d = (6V/\pi)^{\frac{1}{3}}$  est égal à 9 mm, les nombres d'Archimède  $Ar = [\rho_2(\rho_2 - \rho_1)gd^3]^{\frac{1}{2}}\eta_2^{-1}$  et de Bond  $Bo = (\rho_2 - \rho_1)gd^2\sigma_{12}^{-1}$  associés au liquide inférieur valent respectivement 6 et 22.



**Fig. 3.** Passage d'une bulle de 0,18 ml à travers une interface eau-glycérine 95 %–huile 47V10. L'intervalle de temps  $\Delta t$  entre chaque image est de 0,01429 s.  $d = 7$  mm,  $Ar = 4$ ,  $Bo = 13$ .



**Fig. 4.** Passage d'une bulle torique de 3,2 ml à travers une interface eau–huile 47V10. L'intervalle de temps  $\Delta t$  entre chaque image est de 0,06 s.  $d = 18$  mm,  $Ar = 7522$ ,  $Bo = 46$ .



**Fig. 5.** Simulation numérique VOF obtenue pour les conditions indiquées dans le tableau 2. L'intervalle de temps entre chaque image est de  $\Delta t = 0,0894$  s.  $d = 10$  mm,  $Ar = 16$ ,  $Bo = 31$ .

Chacune des phases est repérée par un taux de présence  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) compris entre 0 (absence de phase) et 1 (dans la phase), soumis à l'équation de transport

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c_i = 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

où  $\mathbf{u}$  est la vitesse locale du fluide.

Cette équation est discrétisée en volumes finis et résolue selon un schéma Flux Corrected Transport (FCT) opérant direction par direction.

La masse volumique  $\rho$  et la viscosité  $\eta$  du milieu triphasique local sont alors évaluées par interpolation linéaire à partir des taux de présence  $c_i$

$$\rho = \sum_i c_i \rho_i \quad ; \quad \eta = \sum_i c_i \eta_i \quad (2)$$

Les forces capillaires sont transformées en forces volumiques selon le modèle Continuum Surface Force de Brackbill et al. [11], étendu au cas triphasique par Cranga et al. [7]. En notant  $p$  la pression du milieu triphasique et  $\mathbf{g}$  la gravité, les équations de Navier-Stokes incompressibles du modèle s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [\eta (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] \\ \quad + \mathbf{g} - \sum_{i,j} \delta_{ij} \frac{(c_i + c_j)^2 \sigma_{ij}}{\rho_i + \rho_j} \nabla \cdot \left[ \frac{\nabla c_{ij}}{|\nabla c_{ij}|} \right] \nabla c_{ij} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

avec  $c_{ij} = \frac{c_i}{c_i + c_j}$  et  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } |\nabla c_i| |\nabla c_j| \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

L'avancement en temps des équations de Navier-Stokes est réalisé par un schéma hybride de Runge Kutta/Crank-Nicolson. La vitesse est ensuite rendue à divergence nulle par une méthode de projection.

Un résultat de simulation numérique obtenu par cette approche est présenté en figure 5. On note l'entraînement de liquide lourd dans la phase supérieure. Les propriétés physiques de l'écoulement sont référencées dans le tableau 2.

## 5 Simulations numériques par un modèle Cahn-Hilliard/Navier-Stokes

Une deuxième approche a été développée à l'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire à Cadarache



**Fig. 6.** Simulation Cahn-Hilliard/Navier-Stokes de la situation physique décrite par la figure 4.

à partir de la plateforme de calculs PELICANS. Elle consiste à coupler les équations de Cahn-Hilliard étendues au cas triphasique par Boyer et al. [9], aux équations de Navier-Stokes incompressibles.

L'épaisseur des interfaces est considérée non-nulle et de valeur  $\epsilon$ . Chacune des phases est repérée par un taux de présence  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) compris entre 0 (absence de phase) et 1 (dans la phase), soumis aux équations de Cahn-Hilliard

$$\begin{cases} \frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c_i = \nabla \cdot \left( \frac{M}{\Sigma_i} \nabla \mu_i \right) & \text{pour } i = 1, 2, 3 \\ \mu_i = -\frac{3}{4} \Sigma_i \epsilon \nabla^2 c_i + \frac{4 \Sigma_T}{\epsilon} \sum_{j \neq i} \left( \frac{1}{\Sigma_i} \left( \frac{\partial F}{\partial c_i} - \frac{\partial F}{\partial c_j} \right) \right) & \text{pour } i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (4)$$

où  $M$  est la mobilité et  $F$  le potentiel algébriquement consistant de Cahn-Hilliard triphasique défini par Boyer et al. [12] selon la formule

$$F = \sum_i \frac{\Sigma_i}{2} c_i^2 (1 - c_i)^2 + 3 \Lambda c_1^2 c_2^2 c_3^2$$

où la fonction  $\Lambda$  est positive,  $\Sigma_i = \sigma_{ij} + \sigma_{ik} - \sigma_{jk}$  avec  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j \neq k$ , et où  $\frac{3}{\Sigma_T} = \sum_i \frac{1}{\Sigma_i}$ .

Ces équations de taux de présence sont discrétisées en espace par une méthode de Galerkin en éléments-finis avec raffinement local adaptatif, et selon un schéma semi-implicite en temps.

La masse volumique  $\rho$  et la viscosité  $\eta$  du mélange sont alors évaluées comme dans (2). Les équations de Navier-Stokes associées à cette approche peuvent s'écrire sous la forme

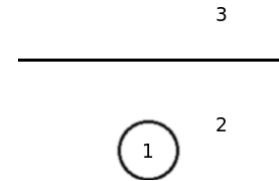
$$\begin{cases} \sqrt{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\rho} \mathbf{u}) + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \\ -\nabla \cdot [\eta (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \nabla p = \rho \mathbf{g} + \sum_i \mu_i \nabla c_i \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées en temps par une méthode de projection incrémentale.

Un résultat de simulation numérique obtenu à partir de ce modèle est présenté en figure 6. Il est à mettre en relation avec le résultat de la simulation par méthode VOF présenté sur la figure 5 puisque les propriétés physiques sont identiques. La mobilité  $M$  est prise égale à  $1,42 \times 10^{-8}$ , et l'épaisseur d'interface  $\epsilon$  à 0,001.

**Tableau 2.** Propriétés et indexation des fluides utilisées lors des simulations numériques.

Volume de la bulle (ml)	$V$			0,52		
Masses volumiques ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	9,31	1000	931
Viscosités dynamiques (mPa.s)	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	2,01	201	94,7
Tensions de surface ( $\text{mN.m}^{-1}$ )	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$		31,0	16,5	
Tension interfaciale ( $\text{mN.m}^{-1}$ )	$\sigma_{23}$			12,7		



## 6 Conclusions

Nous avons observé plusieurs comportements contrastés lorsque des bulles traversent l'interface séparant deux liquides non miscibles initialement au repos. Les expériences mettent en lumière les déformations significatives des interfaces liquide-liquide et liquide-gaz au cours de l'approche et de la traversée de la bulle, ainsi que de grandes différences dans la forme et le volume de la colonne de fluide lourd entraîné.

Des simulations numériques directes ont été réalisées à l'aide de deux codes de calcul utilisant respectivement des modèles VOF sans reconstruction d'interface et Cahn-Hilliard/Navier-Stokes. Une bonne similarité entre les résultats de ces simulations est à noter pour des liquides à fortes viscosités.

Notre objectif est maintenant de mener des comparaisons plus poussées avec les résultats expérimentaux afin notamment d'identifier les éventuelles limitations de l'approche numérique.

*Remerciements.* Nous remercions G. Ehses pour l'élaboration du dispositif expérimental, ainsi que S. Cazin pour sa contribution à la métrologie et au traitement des images.

## Références

- [1] M. Manga, H.A. Stone, Low Reynolds number motion of bubbles, drops and rigid spheres through fluid-fluid interfaces, *J. Fluid Mech.* 287 (1995) 279–298
- [2] I. Eames, G. Duursma, Displacement of horizontal layers by bubbles injected into fluidised beds, *Chem. Eng. Sci.* 52 (1997) 2697–2705
- [3] J.W.M. Bush, I. Eames, Fluid displacement by high Reynolds number bubble motion in a thin gap, *Int. J. Multiphase Flow* 24 (1998) 411–430
- [4] M. Kemiha, E. Olmos, W. Fei, S. Poncin, H.Z. Li, Passage of a gas bubble through a liquid-liquid interface, *Ind. Eng. Chem. Res.* 46 (2007) 6099–6104
- [5] N. Dietrich, S. Poncin, S. Pheulpin, H.Z. Li, Passage of a bubble through a liquid-liquid interface, *AIChE J.* 54 (2008) 594–600
- [6] P.J. Shopov, P.D. Minev, The unsteady motion of a bubble or drop towards a liquid-liquid interface, *J. Fluid Mech.* 235 (1992) 123–141
- [7] J. Cranga, P. Gardin, D. Huin, J. Magnaudet, Influence of surface pressure and slag layer on bubble bursting in degasser systems, *Computational Modeling of Materials, Minerals, and Metals Processing*, 2001, pp. 105–114
- [8] T. Bonometti, Développement d'une méthode de simulation d'écoulements à bulles et à gouttes, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005
- [9] F. Boyer, C. Lapuerta, S. Minjeaud, B. Piar, M. Quintard, Cahn-Hilliard/Navier-Stokes model for the simulation of three-phase flows, *Transp. Porous Media* 82 (2010) 463–483
- [10] T. Bonometti, J. Magnaudet, An interface-capturing method for incompressible two-phase flows, Validation and application to bubble dynamics, *Int. J. Multiphase Flow* 33 (2007) 109–133
- [11] J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach, A continuum method for modeling surface tension, *J. Comput. Phys.* 100 (1992) 335–354
- [12] F. Boyer, C. Lapuerta, Study of a three component Cahn-Hilliard flow model, *ESAIM: M2AN*, 40 (2006) 653–687

# Inertial dynamics of air bubbles crossing a horizontal fluid–fluid interface

Romain Bonhomme<sup>1,2,3</sup>, Jacques Magnaudet<sup>1,2†</sup>, Fabien Duval<sup>3</sup>  
and Bruno Piar<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Université de Toulouse; INPT, UPS; IMFT (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse);  
Allée Camille Soula, F-31400 Toulouse, France

<sup>2</sup> CNRS; IMFT; F-31400 Toulouse, France

<sup>3</sup> Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire, BP 3, 13115 St Paul lez Durance CEDEX, France

(Received 8 February 2012; revised 2 May 2012; accepted 10 June 2012)

The dynamics of isolated air bubbles crossing the horizontal interface separating two Newtonian immiscible liquids initially at rest are studied both experimentally and computationally. High-speed video imaging is used to obtain a detailed evolution of the various interfaces involved in the system. The size of the bubbles and the viscosity contrast between the two liquids are varied by more than one and four orders of magnitude, respectively, making it possible to obtain bubble shapes ranging from spherical to toroidal. A variety of flow regimes is observed, including that of small bubbles remaining trapped at the fluid–fluid interface in a film-drainage configuration. In most cases, the bubble succeeds in crossing the interface without being stopped near its undisturbed position and, during a certain period of time, tows a significant column of lower fluid which sometimes exhibits a complex dynamics as it lengthens in the upper fluid. Direct numerical simulations of several selected experimental situations are performed with a code employing a volume-of-fluid type formulation of the incompressible Navier–Stokes equations. Comparisons between experimental and numerical results confirm the reliability of the computational approach in most situations but also points out the need for improvements to capture some subtle but important physical processes, most notably those related to film drainage. Influence of the physical parameters highlighted by experiments and computations, especially that of the density and viscosity contrasts between the two fluids and of the various interfacial tensions, is discussed and analysed in the light of simple models and available theories.

**Key words:** capillary flows, drops and bubbles, multiphase flows

---

## 1. Introduction

Buoyancy-driven drops and bubbles crossing horizontal liquid–liquid interfaces are encountered in a variety of engineering situations such as liquid–liquid extraction, emulsification or iron processing. For instance, the ladle stirring technique widely employed in iron processing makes use of nitrogen bubbles injected at the bottom of the device to stir and mix the liquid metal and remove impurities (Poggi, Minto & Davenport 1969; Kobayashi 1993). Some nuclear accident scenarios also consider the

† Email address for correspondence: [magnau@imft.fr](mailto:magnau@imft.fr)

situation where the concrete slab below the reactor is ablated by the fuel-containing material (corium) and releases gas bubbles. In both cases, due to compositional differences, the fluid has a two-layer structure with an upper layer made of slag in the former case and predominantly of oxides in the latter. Similar configurations are found in geophysical problems where fluids undergo natural discontinuous density and/or viscosity stratification, such as the ascent of plumes through the Earth's mantle (Manga, Stone & O'Connell 1993). In microfluidics, two-layer fluid systems may be used to coat paramagnetic drops or particles with a shell made of the lower fluid, buoyancy then being replaced by a magnetic force (Tsai *et al.* 2011).

Most early experimental and theoretical investigations of that problem were motivated by the fact that it may be considered as a canonical situation for understanding coalescence, especially the various stages of the drainage of the film located between the top part of the bubble and the fluid–fluid interface (Charles & Mason 1960; Allan, Charles & Mason 1961; Princen 1963; Princen & Mason 1965*a,b*). Hence they usually focused on creeping flow conditions and frequently considered the particular situation where the drop or bubble is made of the same fluid as one of the other two phases (see Chi & Leal 1989 and Mohamed-Kassim & Longmire 2004 for reviews). Then the problem began to be considered numerically, either in the limit of creeping motion using boundary integral techniques (Chi & Leal 1989; Manga & Stone 1995), or in presence of finite inertial effects by solving the full Navier–Stokes equations on a boundary-fitted grid (Shopov & Mineev 1992). Nevertheless only the early stages of the motion during which the drop approaches the fluid–fluid interface were considered in these computations because they could not deal with film break-up, nor with the subsequent topological changes of the flow. In the recent period, the development of high-speed video imaging techniques and particle image velocimetry has allowed the case of high-Reynolds-number gas bubbles crossing fluid–fluid interfaces to be investigated in more detail (Reiter & Schwerdtfeger 1992*a*; Kemiha *et al.* 2007; Dietrich *et al.* 2008). In particular the evolution of the bubble shape and that of the column of heavy liquid it entrains under certain conditions were characterized in several regimes.

A closely related configuration that has received a great deal of attention is that of a rigid sphere approaching or crossing a horizontal fluid–fluid interface. Again this problem was initially considered in view of its connection with coalescence, and most investigations focused on the film-drainage configuration in which the sphere rests very close to an interface which only weakly deforms (Hartland 1968, 1969; Shah, Wasan & Kintner 1972; Jones & Wilson 1978; Smith & Van de Ven 1984). Nevertheless some investigations rather considered, either experimentally (Maru, Wasan & Kintner 1971) or numerically (Leal & Lee 1982; Geller, Lee & Leal 1986), situations in which the interface deformation may become large as time proceeds, the sphere then towing a long column or tail of heavy fluid with it. The case of heavy spheres settling across a sharp density interface separating two miscible fluids has also been considered experimentally, especially in connection with its relevance to the prediction of pollutant dispersion (Srđić-Mitrović, Mohamed & Fernando 1999; Camassa *et al.* 2009). Finally it is worth mentioning that pseudo-three-phase systems with the same geometry have been used to study the entrainment of fluid or rigid particles by rising bubbles, especially in fluidized beds. In this case the two fluid layers are made of a single liquid and entrainment of the lower layer is quantified by marking it, for instance with dye or milk, and evaluating the volume of the displaced fluid. When the flow disturbance is close to that predicted by potential flow theory, this displaced

volume may valuably be related to the classical concept of Darwin’s drift (Eames & Duursma 1997; Bush & Eames 1998).

The present paper reports on a joint experimental and computational study of the above problem in the case of a single gas bubble crossing an interface between a lower phase made of water or water plus glycerin and an upper, slightly lighter, phase made of silicon oil. Varying the size of the bubble, the glycerin concentration and the characteristics of the silicon oil allows us to explore a broad range of physical conditions, leading to a variety of flow configurations and bubble shapes. The main purpose of this investigation is to obtain new insight into the key features of particular interest in this problem, namely the influence of film drainage on the bubble dynamics when it reaches the fluid–fluid interface, the final topology of the three phases, and, in cases where the bubble succeeds in crossing the interface, the evolution of its rise speed and of the volume of heavy fluid it entrains during its ascent in the upper fluid. Experimental data are obtained by means of high-speed video imaging and in some cases particle image velocimetry. Computations are based on the so-called volume of fluid approach in which the incompressible Navier–Stokes equations are solved on a fixed grid. As will be seen, the two approaches efficiently complement each other. For instance computations help reveal important details of the flow that cannot be obtained with the present optical technique, owing to limitations in its spatial resolution. They also give access to flow regions that may not be reached optically, due to the bubble shape (e.g. with toroidal or spherical caps bubbles with a concave base). Last but not least they guarantee that the various interfaces are surfactant-free and allow each physical property of the fluids to be varied independently for all others. However, three-phase flows involve complex small-scale phenomena such as film drainage, break-up and moving contact lines. Some of these phenomena may not be properly captured in computations, owing to the spatial cut-off introduced by the computational grid and to the approximate representation of interfacial forces. This is why direct computations of such flows cannot yet be performed in a blind manner and their results have to be compared with those of experiments to make sure that the former correctly predict the global dynamics revealed by the latter.

The paper is organized as follows. Sections 2 and 3 describe the experimental and computational approaches, respectively; specific technical details on the latter and validation tests are provided in three separate appendices. Section 4 presents an overview of the physical behaviours revealed by the entire set of experiments. In § 5, we select six situations corresponding to contrasting flow conditions and bubble shapes and analyse each of them in detail with the help of experimental observations and computational predictions. Section 6 relies on some of the experimental and computational results and on a simple static model developed in appendix D to analyse the elementary mechanisms that drive the evolution of the system when the bubble reaches the fluid–fluid interface. Finally, § 7 summarizes the main findings obtained during this investigation and opens up some perspectives.

## 2. Experimental device and measurement techniques

Experiments are carried out at ambient temperature ( $20 \pm 1$  °C) in a glass tank 40 cm high with a 20 cm  $\times$  20 cm square cross-section. Two sides of the tank are made of B270 Superwite<sup>®</sup> glass to limit optical distortions. The upper part of each vertical wall is treated with a Rain-X<sup>®</sup> hydrophobic compound to avoid meniscus effects along the glass/water/oil contact line. The base of the tank is made of Plexiglas (PMMA); it is removable and comprises several interchangeable injection systems. After each series

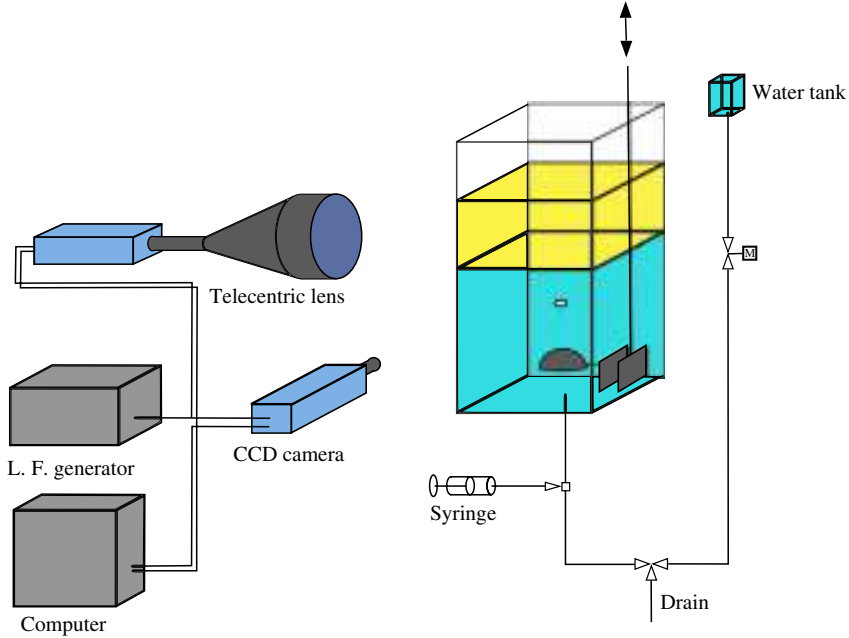


FIGURE 1. (Colour online) Sketch of the experimental device with the inverted beaker injection system. L.F., low frequency.

of measurements, each liquid is removed from the tank with a siphon at least every two days and stored in closed containers. The residual liquid layers adjacent to the liquid–liquid interface are thrown out. The tank is then washed with a detergent liquid, rinsed out with tap water a large number of times, and dried with a duster.

We basically employ two different gas injection techniques. One of them (shown schematically in figure 1) is inspired by the ‘inverted beaker’ used by Davies & Taylor (1950) to produce large spherical cap bubbles. This device is made of a ‘spoon’ 60 mm in diameter, which may be rotated by hand about a horizontal axis. A controlled air volume is injected below the spoon through a syringe. Then the spoon is turned over to release the bubble. This device is suitable for generating spheroidal and spherical cap bubbles. In the second injection system, the air volume is initially entrapped in a closed cylinder and then rapidly injected manually in the tank by pushing a piston. This device is mostly used with large air volumes (typically  $> 1 \text{ cm}^3$ ) to obtain toroidal bubbles. Based on the comparison between the injected volume of air and the optical determination (to be described below) of the bubble contour for small spherical bubbles, the uncertainty in the bubble equivalent diameter  $d = (6\mathcal{V}/\pi)^{1/3}$ , where  $\mathcal{V}$  is the bubble volume, was found to be  $50 \mu\text{m}$ , so that the relative uncertainty in  $d$  for bubbles injected with the first system ranges from 3% for the smallest of them ( $d \approx 1.5 \text{ mm}$ ) to less than 0.5% for the biggest ( $d \approx 20 \text{ mm}$ ).

Two high-speed digital Photon Lines PCO1200 HS cameras with a resolution of  $1024 \times 1280$  pixels synchronized at a rate of 350 images per second are employed to visualize the bubble and the evolution of the various fluid–fluid interfaces. The two cameras are placed at right angles perpendicular to two of the vertical glass walls of the tank. We use backlighting to obtain the projections of the bubble and fluid–fluid interface shadow in the visualization planes (the schlieren technique). In

order to reduce optical distortions, one of the cameras is equipped with an Opto Engineering telecentric lens TC 4M 120. The system is calibrated in such a way that each camera detects a fixed field of  $108.9 \text{ mm} \times 87.2 \text{ mm}$ . Contours of bubbles, droplets and columns of heavy liquid displaced through the upper fluid are detected on the images with a thresholding method followed by an erosion–dilatation process. Positions and surface elements identified on a given frame are then tracked in time using a maximum likelihood detection process. In some cases we also employ particle image velocimetry (PIV) to determine the velocity field past the bubble. For that purpose, a  $2 \times 25 \text{ mJ}$  Pegasus laser source lights up the two fluids seeded by Rhodamine-B molecules encapsulated in PMMA particles whose size is in the range  $1\text{--}20 \text{ }\mu\text{m}$ . The velocity fields are then extracted from intercorrelations of  $(16 \times 16)$ -pixel elements using the in-house software PIVIS.

In the experiments to be described below, the lower (and thus heavier) liquid is either tap water or a mixture of glycerin and tap water with two different volume fractions of glycerin, 85 or 95 %. No particular treatment is applied to water, so that surfactants are likely to be present and one may suspect them to somewhat lower the rise velocity of small spherical or spheroidal bubbles compared to theoretical predictions assuming a clean bubble surface; with usual surfactant concentrations, larger bubbles (say with  $d > 4 \text{ mm}$ ) are known to be much less influenced by contamination. The upper (and thus lighter) liquid is silicon oil. Three different oils (47V10, 47V100 and 47V500 from Gaches Chimie company) are employed, with viscosities approximately ranging from 10 to 500 times that of water. The physical properties of all fluids were determined at room temperature ( $20 \pm 1 \text{ }^\circ\text{C}$ ). Viscosity and surface tension were obtained using a Bohlin cone-plate viscometer and a Wilhelmy plate device, respectively, while a drop shape analysis system, Kruss DSA100, based on the pendant-drop method was employed to measure the interfacial oil/water + glycerin tensions. The relative uncertainty in the viscosity is 5 % for the least viscous oil and is a decreasing function of viscosity. The uncertainty in surface and interfacial tensions is  $1.5 \text{ mN m}^{-1}$ , so that the corresponding relative uncertainty ranges from 2 (for the water/air system) to 11 % (for the water/47V500 oil system). Density was determined by weighing a 100 ml calibrated flask filled with the corresponding liquid on a precision balance with a 0.1 g accuracy, so that the corresponding relative uncertainty is  $\sim 0.1 \%$ . The various physical properties relevant to the systems described below are summarized in table 1.

### 3. Computational approach

In the context of the one-fluid approach, a three-phase flow is considered as a mixture of three immiscible fluids. It may be characterized by the local volume fraction  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) of each of them and by density and viscosity fields that depend only on  $C_i$  and on the corresponding intrinsic physical property of each fluid. Assuming all fluids to be Newtonian and the various interfaces to be sharp with uniform interfacial tensions, the system of equations governing the motion of an incompressible three-phase flow is then given by

$$\frac{DC_i}{Dt} = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (3.2)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \nabla \cdot \{\mu(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)\} + \mathbf{T}, \quad (3.3)$$



Liquid	Density (kg m <sup>-3</sup> )	Viscosity (mPa s)	Surface tension (mN m <sup>-1</sup> )
Water	997	1.002	69.4
85 % glycerin + water	1211	102.6	48.7
95 % glycerin + water	1244	550.1	45.2
47V10 silicon oil	932	9.6	20.2
47V100 silicon oil	961	113.8	20.7
47V500 silicon oil	965	530.7	21.0
Interfacial tension (mN m <sup>-1</sup> )	47V10 oil	47V100 oil	47V500 oil
Water	19.7	14.3	13.7
85 % glycerin + water	28.8	30.0	29.9
95 % glycerin + water	27.8	27.1	28.0

TABLE 1. Physical properties of the various liquids measured at  $20 \pm 1$  °C.

where  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla$  denotes the material derivative,  $\mathbf{T}$  is the capillary force density, and the density and viscosity of the mixture are related to the volume fraction of each phase through the linear laws

$$\rho = \sum_{i=1}^3 C_i \rho_i, \quad \mu = \sum_{i=1}^3 C_i \mu_i. \quad (3.4)$$

Note that the first of (3.4) is an exact result while the second is just an *ad hoc* interpolation formula. The JADIM code developed at IMFT solves the above set of equations with a capillary force density defined as

$$\mathbf{T} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (C_i + C_j)^2 \sigma_{ij} \nabla \cdot \left[ \frac{\nabla C_{ij}}{\|\nabla C_{ij}\|} \right] \nabla C_{ij}, \quad (3.5)$$

where  $C_{ij} = C_i/(C_i + C_j) = 1 - C_{ji}$ . The derivation of (3.5), which is an extension of the continuum surface force (CSF) formulation (Brackbill, Kothe & Zemach 1992), is detailed in appendix A; comparison with alternative formulations is also discussed there.

The code is based on a finite-volume discretization combined with a Runge–Kutta/Crank–Nicolson time-advancement scheme; incompressibility is enforced via a projection method. Centred schemes are used to approach the various spatial derivatives involved in (3.3) while the solution of (3.1) is based on a direction-splitted version of Zalesak’s Flux-Corrected Transport algorithm (Zalesak 1979). The full numerical approach has been extensively described by Bonometti & Magnaudet (2007) (see also Bonometti & Magnaudet 2006) and will not be repeated here. However, the way we deal with the issue of volume conservation of each phase in a three-phase system deserves some specific comments, which are provided in appendix B.

Throughout the paper, axisymmetric computations are performed within a vertical cylindrical domain with a  $6d$  radius and a  $12d$  height, the initial fluid–fluid interface standing  $7d$  from the top of the domain. The grid employs 1200 cells uniformly distributed in the vertical direction. In the horizontal direction, 200 grid points are uniformly distributed in the central region extending up to  $2d$  from the axis, while another 100 points are distributed in the outer region following an arithmetic law. The present resolution, with a hundred cells per bubble diameter, was used by Bonometti &

Magnaudet (2006, 2007) who found it to provide grid-independent results for various types of bubbles rising in a Newtonian fluid, including toroidal bubbles; this is why it is selected again here. Free-slip boundary conditions are imposed on the top, bottom and lateral boundaries, so that the fluid entrained upwards by the bubble slowly goes down near the lateral boundary. Computations are stopped before the bubble gets close to the upper boundary, to avoid contamination of results by confinement effects.

The code was extensively validated in the past in various two-phase configurations. Simple three-phase configurations for which a theoretical solution exists, such as the spreading of a small lens at the interface between two liquids (de Gennes, Brochard-Wyart & Quéré 2004), were also considered. These tests showed that the theoretical shape of the lens is recovered under various conditions of spreading, which validates the above formulation for the capillary force  $T$ . An additional test case in a physical situation close to those under focus here and employing the grid characteristics described above is detailed in appendix C. This test deals with the early evolution of low-Reynolds-number buoyancy-driven drops of various viscosities rising toward a horizontal interface separating two fluids with different viscosities and densities, a configuration that was computed by Manga & Stone (1995) using a boundary integral method (BIM). The results of both approaches turn out to be in excellent agreement until the drop gets very close to the interface between the lower and upper fluids. More precisely, with low-viscosity drops behaving very similarly to bubbles, differences from the predictions of Manga and Stone start to be significant when the thickness of the film separating the top of the drop from the upper fluid becomes  $\lesssim 0.04d$ . These differences result from two phenomena, both of which are related to the finite thickness of the interfaces in the present approach. First, the capillary force density (3.5) involves the gradients of  $C_i$  and then spreads out over several cells across an interface. Second, the interpolation law (3.4) used to determine the local viscosity implies that, within an interfacial region, viscosity takes values intermediate between those of the two fluids in contact. Both phenomena become increasingly important within the film as it thins: being bounded by two interfaces, the flow in the gap experiences some artificial capillary force and the viscosity is no longer that of the actual fluid. The consequences of these artifacts will be seen in more detail in § 5.

#### 4. Overview of experimental observations

We start by providing a qualitative survey of the evolution of the three-phase system as its characteristic parameters are varied. For this purpose, a prerequisite is the definition of a proper set of dimensionless characteristic numbers. General three-phase systems involving Newtonian fluids are characterized by nine physical properties, namely three densities ( $\rho_i, i = 1, 2, 3$ ), three viscosities ( $\mu_i$ ) and three interfacial tensions ( $\sigma_{ij}$  with  $j \neq i$  and  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ). Moreover the dynamical problem depends on gravity  $g$  and assuming that the bubble is initially spherical and located far from the liquid–liquid interface within a flow domain extending up to infinity, on a single length scale, for instance the bubble equivalent diameter  $d$ . As these eleven quantities involve three fundamental units (mass, time and length), the problem may be characterized with eight independent dimensionless parameters. However, since the bubble viscosity and density are negligibly small compared to those of the various liquids we use, they may be removed from the list of relevant quantities, which reduces the number of independent dimensionless parameters to six. Let fluid 1 (respectively 3) refer to the lower (respectively upper) liquid as in the previous section. Then, defining all parameters with respect to the properties of

fluid 1, we may select  $R = (\rho_1 - \rho_3)/\rho_1$ ,  $\Lambda = \mu_3/\mu_1$ ,  $I = \sigma_{13}/\sigma_{12}$ ,  $S = \sigma_{23}/\sigma_{12}$ ,  $Bo = \rho_1 g d^2/\sigma_{12}$ ,  $Ar = \rho_1 (g d^3)^{1/2}/\mu_1$ . The Bond (or Eötvös) number  $Bo$  compares buoyancy effects to capillary effects while the Archimedes number  $Ar$  may be thought of as a Reynolds number based on the gravitational velocity  $(g d)^{1/2}$ . The problem is then entirely defined by the set of parameters  $(R, \Lambda, I, S, Bo, Ar)$ .

Given the values of the physical properties reported in table 1, the viscosity ratio  $\Lambda$  varies by more than four orders of magnitude through the whole set of experiments, from 0.0175 (when the lower liquid is a 95% glycerin + water mixture and the upper liquid is the 47V10 silicon oil) to 530 with the water/47V500 silicon oil system. The density ratio  $R$  varies from 0.036 to 0.251 (note that, owing to its definition,  $R$  always satisfies the constraint  $0 \leq R \leq 1$ ). The parameter  $I$ , a dimensionless measure of the strength of interfacial effects at the fluid–fluid interface, varies by a factor of three between series A or B and series D ( $0.21 \leq I \leq 0.62$ ), while the ratio  $S$  of surface tensions in the upper and lower fluids experiences a more modest variation ( $0.29 \leq S \leq 0.465$ ). In view of future discussions, it is also useful to introduce the Archimedes and Bond numbers in the upper fluid,  $Ar_u$  and  $Bo_u$ , defined as  $Ar_u = (1 - R)Ar/\Lambda$  and  $Bo_u = (1 - R)Bo/S$ , respectively.

Images of some of the bubbles emerging in the upper fluid and of the associated entrained volume of heavy fluid (if any) are displayed in figure 2. Each two-dimensional diagram in that figure corresponds to a given set of fluids (i.e. given values of  $R, \Lambda, I$  and  $S$ ); the Bond and Archimedes numbers in each series are varied by generating bubbles of increasing volume, i.e. increasing  $d$ . As suggested by figure 2, small enough bubbles, typically those with  $Bo < 5$  in series A or  $Bo < 7$  in series B, remain trapped at the interface between the two liquids during the entire period of observation (typically 1 mn in this range of  $Bo$ ). That is, no macroscopic change has occurred in the system at the time we stop recording images but this obviously does not rule out the possibility of later changes, since these bubbles are expected to be covered by a very thin film of heavy liquid that should eventually be drained, leading to the release of the bubble after the film has ruptured. This entrapment corresponds to situations in which capillary effects result in a downward force capable of balancing the upward buoyancy force. Although the full film-drainage problem has been worked out in great detail in the low-Reynolds-number limit (Princen 1963; Princen & Mason 1965*a,b*), it does not have a general tractable theoretical solution, even in that limit. A crude criterion predicting conditions under which bubble entrapment occurs was derived by Greene, Chen & Conlin (1988). Based on the idea that a bubble cannot be stopped at the interface if the buoyancy force it experiences in the light fluid exceeds the maximum possible interfacial capillary force (reached when the contact line lies in the horizontal mid-plane of the bubble and the meniscus is vertical), this criterion is in the present notation given by  $Bo < 6I/(1 - R)$  if the bubble is assumed to be spherical. It suggests that bubbles of series A and B should not be stopped near the undisturbed position of the interface for  $Bo > 5$  approximately, while those in series C (respectively D) should not be stopped for  $Bo > 1.8$  (respectively 1.3). According to figure 2, this criterion predicts the trapped/untrapped transition reasonably well. We shall consider the mechanisms underlying this transition in more detail in § 6.

Bubbles that are not trapped near the interface then rise in the upper liquid and tow a column (or tail) of heavy liquid for some time. Experimental observations suggest that after the bubble has travelled a distance of a few  $d$  above the initial position of the interface, this column is most often directly attached to the rear part of the bubble, i.e. no film is discerned on the front part of the bubble at this late stage,

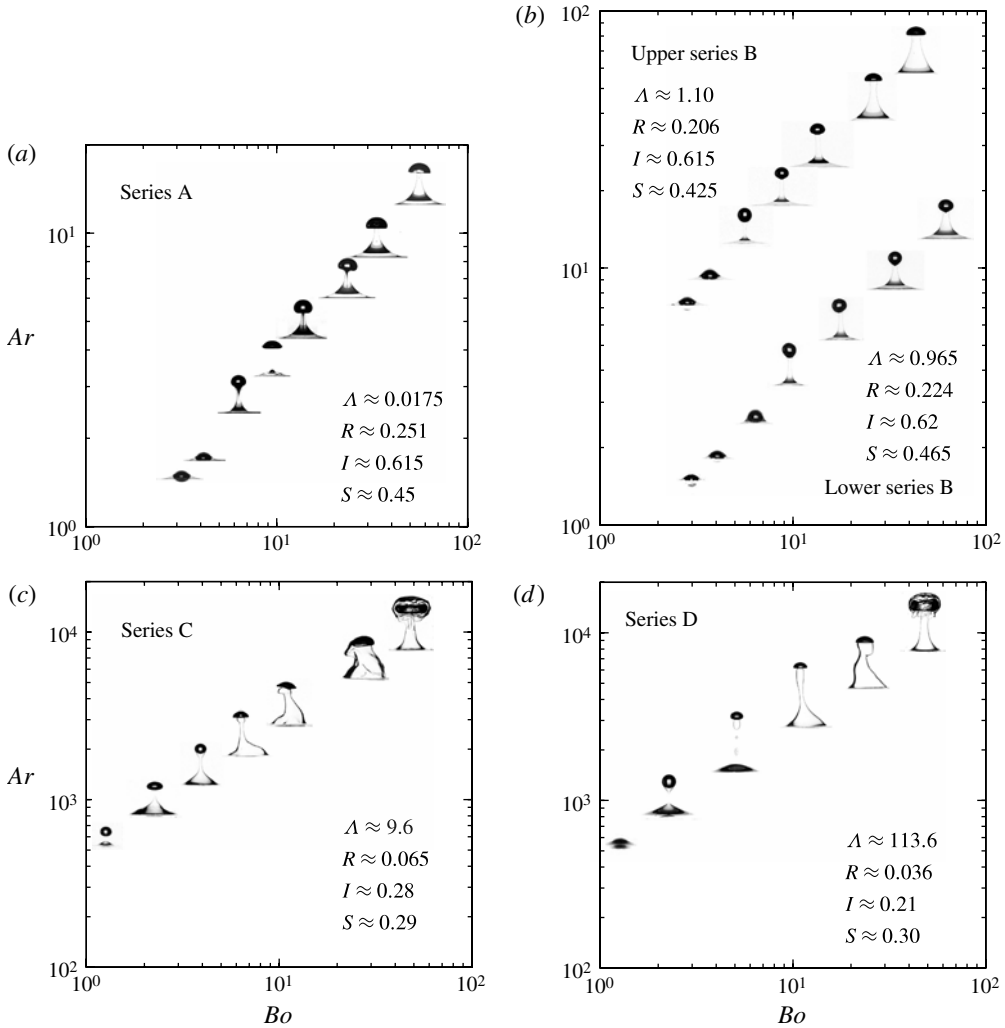


FIGURE 2. Some selected shapes of bubbles and entrained columns of heavy fluid in five series of experiments (only the bubble size is varied in each series). (a) Series A (95 % glycerin + water/47V10 oil,  $3 \leq Bo \leq 50$ ,  $1.5 \leq Ar \leq 12$ , i.e.  $5 \leq Bo_u \leq 83$ ,  $64 \leq Ar_u \leq 514$ ). (b) Lower series B (95 % glycerin + water/47V500 oil,  $3.8 \leq Bo \leq 55$ ,  $1.3 \leq Ar \leq 12$ , i.e.  $6.3 \leq Bo_u \leq 92$ ,  $1.0 \leq Ar_u \leq 9.6$ ); upper series B (85 % glycerin + water/47V100 oil,  $2.1 \leq Bo \leq 50$ ,  $7.0 \leq Ar \leq 60$ , i.e.  $3.9 \leq Bo_u \leq 93$ ,  $5.0 \leq Ar_u \leq 43$ ). (c) Series C (water/47V10 oil,  $1.2 \leq Bo \leq 50$ ,  $550 \leq Ar \leq 8.0 \times 10^3$ , i.e.  $3.9 \leq Bo_u \leq 160$ ,  $54 \leq Ar_u \leq 780$ ). (d) Series D (water/47V100 oil,  $1.3 \leq Bo \leq 52$ ,  $500 \leq Ar \leq 7.4 \times 10^3$ , i.e.  $4.2 \leq Bo_u \leq 167$ ,  $1.6 \times 10^3 \leq Ar_u \leq 23.8 \times 10^3$ ). In each image, the vertical axis is positioned on the corresponding value of  $Bo$  while the horizontal trace of the flat fluid–fluid interface is positioned on the corresponding value of  $Ar$ .

implying that film drainage has already been completed and that a moving contact line subsequently develops between the bubble and the two liquids. A noticeable exception is that of toroidal bubbles, which turn out to remain completely encapsulated in a thick film of heavy liquid. The column may sometimes break up into droplets when  $\Lambda \gg 1$  (e.g.  $Bo \approx 5$  and  $Ar \approx 1.3 \times 10^3$  in series D) because it is then strongly sheared by the

upper fluid that hardly deforms. In the opposite case where the upper liquid deforms much more easily than the lower one ( $\Lambda \ll 1$ ), bubbles are accelerated after they have crossed the interface (although the buoyancy force is somewhat less than in the lower fluid). This acceleration may totally suppress the entrained column because it may break the bubble when it is close to emerging entirely from the interface, forcing its former rear part to remain trapped between the two liquids (e.g.  $Bo \approx 9$  and  $Ar \approx 3.2$  in series A).

Depending on their final Bond and Reynolds numbers, rising bubbles may look like oblate spheroids (left part of series C and D or central part of series B), exhibit a marked tail (central part of series A or right part of the lower series B), look like spherical caps (right part of series A and of the upper series B, central part of series C and D) or, for large enough Bond and Archimedes numbers, adopt a toroidal shape (upper right corner of series C and D). According to the position at which bubbles approximately switch from one shape to the other, the transition from spheroidal to spherical cap bubbles may be estimated to take place at  $Bo_u \approx 20$  provided  $Ar_u \geq 20$ , while that from spherical cap to toroidal bubbles takes place at  $Bo_u \approx 125$  and  $Ar_u \approx 50$ . As it is directly related to the width of the wake, the head of the entrained column is significantly thicker with spherical caps than with spheroidal bubbles, resulting in a larger displaced volume. Also, for a given Bond number and position above the undisturbed interface, the larger the Archimedes number (and thus the Reynolds number) in the upper fluid, the thinner the wake and hence the smaller the displaced volume (compare the two snapshots in the upper right corner of series A and B, where  $Ar_u$  is  $\sim 12$  times larger in the former series). Most configurations displayed in figure 2 are axisymmetric. Fully three-dimensional configurations are only observed in series C and D when  $Ar > 10^3$ . In this regime, which also corresponds to  $O(10^3)$  Reynolds numbers, the wake of axisymmetric bluff bodies is known to be three-dimensional, whether they are spheres or disks obeying a no-slip condition (Natarajan & Acrivos 1993) or stress-free spheroidal bubbles with a sufficient oblateness (Magnaudet & Mougin 2007). When the corresponding bubbles rise in the upper fluid, their actual Reynolds number drops by one (respectively two) order of magnitude in series C (respectively D) but in most cases this is still sufficient for the wake to remain unstable, resulting in tortuous bubble shapes and columns of entrained fluid. Remarkably, for a given Bond number, the bubble and displaced volume geometries in series C and D are quite similar as soon as  $Bo$  exceeds some units, although the actual Archimedes number in the upper liquid differs by one order of magnitude between the two series. This is an indication that the flow about the bubble is only weakly affected by viscous effects in these strongly inertial regimes.

## 5. Analysis of experimental and computational results in some selected situations

To explore the dynamics of the three-phase system in more detail, we select some situations within figure 2. One of them is typical of small bubbles (with  $Bo = O(1)$ ) that remain trapped at the interface throughout the period of observation. The following two are characterized by moderate, say  $O(10)$ , Bond numbers and result in bubbles with a more or less spheroidal shape, possibly with some cusp at the rear. They differ in the strength of inertial effects, which are weak in one case while they dominate in the other. Two other situations belong to regimes characterized by Bond numbers of several tens where the bubble eventually takes a spherical cap shape; the magnitude of inertial effects in the upper fluid differs by one order of magnitude

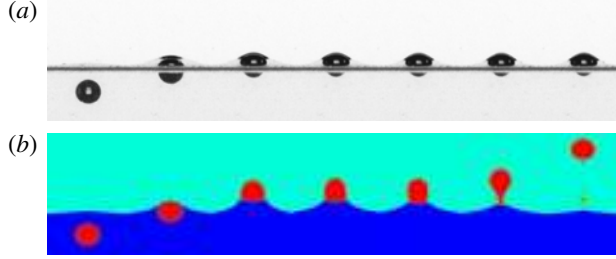


FIGURE 3. (Colour online) Evolution of the three-phase system for a bubble corresponding to  $Bo = 3.0$  and  $Ar = 7.65$  in the upper series B. Comparison between (a) the experimental sequence and (b) computational predictions. The dimensionless time period  $(g/d)^{1/2} \Delta t$  between two consecutive images is  $\sim 4.1$ .

between these two cases, yielding significant differences in their evolutions. Finally, the last situation we consider is typical of the large toroidal bubbles that develop when the Bond and Archimedes numbers are large enough.

Experimentally, the rise speed is obtained by tracking the successive positions of the bubble’s uppermost point with the image processing technique described in § 2. Unless stated otherwise, we prefer to define the velocity  $V$  at this point rather than that of the bubble centroid because some parts of the surface may not be visible in experimental sequences involving dimpled bubbles, leading to errors in the determination of the centroid. In computations, spherical bubbles are released from rest with their centre located a distance  $3d$  below the undisturbed fluid–fluid interface; this is why in the evolutions of the rise speed displayed below, this quantity is first seen to increase briefly, before reaching a broad maximum (see e.g. figures 5 and 7). Results are presented in dimensionless form using the bubble’s initial diameter  $d$  and the bubble volume  $\mathcal{V} = \pi d^3/6$  to normalize positions and volumes, respectively, while velocities and times are normalized by the gravitational scales  $(gd)^{1/2}$  and  $(d/g)^{1/2}$ , respectively.

### 5.1. A small bubble trapped at the interface

We start by considering a small bubble with  $Bo = 3.0$  and  $Ar = 7.65$  in the upper series B ( $\Lambda = 1.11$ ). As revealed by figure 3(a), this corresponds to a case where, once the bubble has reached the region of the fluid–fluid interface, it remains trapped there throughout the rest of the period of observation because the film of heavy liquid that covers it has not yet been completely drained at the end of the sequence. Although the bubble is almost spherical before it reaches the interface region, its ‘final’ shape exhibits a marked top–bottom asymmetry with a fairly flat top region and a more rounded bottom part. Since the whole system is almost at rest, this is an indication that the hydrostatic pressure variations influence the local curvature of the bubble surface. Indeed, comparing the capillary length  $l_c = (\sigma_{12}/\rho_1 g)^{1/2}$  with the bubble radius reveals that the ratio of both quantities is  $d/(2l_c) = Bo^{1/2}/2 \approx 0.87$ .

According to figure 3, computational predictions differ dramatically from observations except during the early stages of the motion. The departure becomes visible in the third snapshot, when the computed bubble is no longer completely immersed in the lower fluid. Indeed the film that was still covering its top part in the previous snapshot has ruptured in the meantime. This is no surprise since the film was already very thin at that time (significantly less than  $d/10$ ) and the local grid spacing is only  $d/100$ , implying that only a few grid cells lay in the gap. Then, for reasons

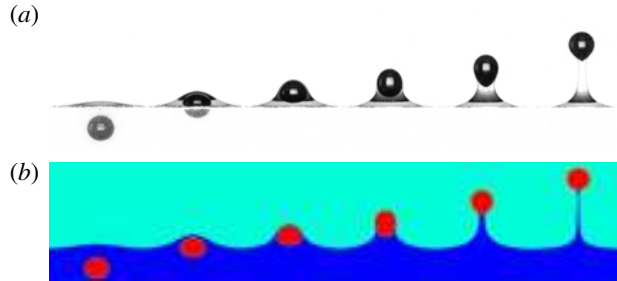


FIGURE 4. (Colour online) Evolution of the three-phase system for a bubble corresponding to  $Bo = 13.2$  and  $Ar = 4.1$  in the lower series B. Comparison between (a) the experimental sequence and (b) computational predictions. The dimensionless time period separating two consecutive images is  $\sim 4.3$ .

similar to those discussed in § 3 (see also appendix C), the flow in the gap is poorly described and numerical break-up soon occurs.

Although this computed evolution disagrees with the experimental observations, it deserves a few comments. As shown in figure 3, the computed bubble next spends a long time ‘floating’ on the interface (snapshots 3–6). A large meniscus first develops. Then it slowly recedes and a neck forms at the bottom of the bubble whose shape tends gradually toward that of a ‘hot air balloon’. This particular shape may be shown to be the only one that, given the values of  $I$ ,  $S$ ,  $R$  and  $Bo$ , satisfies both the Neumann condition expressing the equilibrium of the contact line (de Gennes *et al.* 2004) and the overall momentum balance expressing the vertical equilibrium of the bubble. In other words, if the bubble were released from rest right at the interface, it would take a shape and generate a meniscus very similar to those displayed in the last-but-one snapshot of the computational sequence in figure 3(b) and would stay there forever. However, in the present computation, the bubble is released well below the interface and the decrease in the potential energy of the whole system as it rises makes the kinetic energy of the fluid non-zero at the time it starts floating, even though some of this potential energy is dissipated by viscous effects and part of it is converted into interfacial energy through the increase of the bubble and fluid–fluid interface areas. This is why the floating configuration is only a transient in the present case and pinch-off finally takes place at the bottom of the bubble, entailing its release in the upper fluid.

### 5.2. Spheroidal bubbles

We now consider a situation belonging to the lower series B with a bubble nearly twice as big as that of the previous section. Hence the Bond number is  $Bo = 13.2$  but the Archimedes number is only  $Ar = 4.1$  owing to the high viscosity of the lower liquid. According to the experimental sequence displayed in figure 4(a), the bubble now succeeds in crossing the initial position of the fluid–fluid interface, although it is still covered by a film for some time. The film is seen to break up between the third and fourth snapshots, after which the bubble starts to become more elongated and to tow a column of heavy fluid. As the top of the column recedes along the bubble surface, the rear of the bubble becomes more pointed or even exhibits a small tip, owing to the stretching resulting from the combined effect of the bubble ascent and the recession of the column (snapshots 5–6). The column eventually separates from the bubble which then rises freely in the upper fluid.

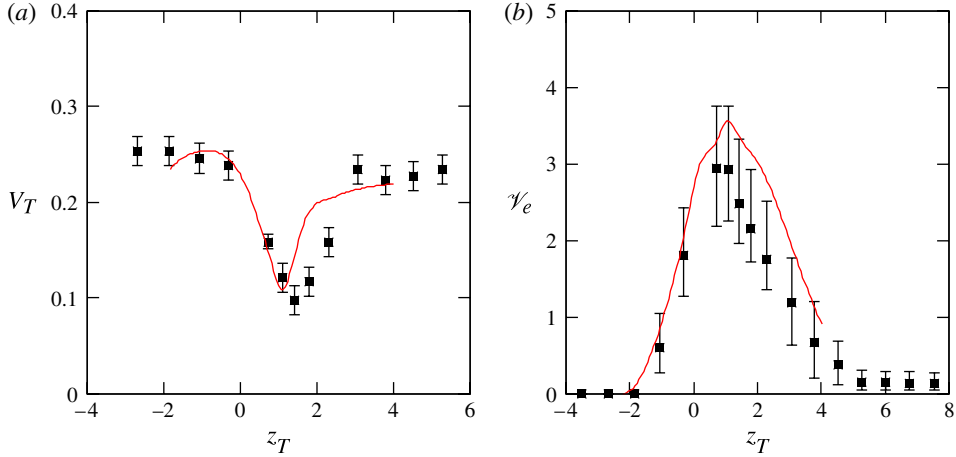


FIGURE 5. (Colour online) Evolution of (a) the normalized rise speed  $V_T$  and (b) the displaced volume  $\mathcal{V}_e$  as a function of the dimensionless bubble position  $z_T$  for the situation considered in figure 4: ■, experiment; solid line, computations. The error bars on  $V_T$  result from the  $\pm 1$  pixel uncertainty in the displacement of the uppermost point of the bubble between two successive images, while those on  $\mathcal{V}_e$  result from the 3-pixel uncertainty in the local radius of the entrained column.

The computed evolution correctly reproduces the various stages of the experimental sequence. In the late stages, the entrained column is noticeably thinner than its experimental counterpart at the same instant in time, but this is essentially because the computed bubble has travelled a somewhat larger distance (see below). Figure 5(a) shows how the normalized rise speed  $V_T = V/(gd)^{1/2}$  evolves as a function of the dimensionless position  $z_T$  of the top of the bubble above the undisturbed position of the interface. Starting from its steady value in the lower fluid,  $V_T$  slightly reduces when the top of the bubble approaches the fluid–fluid interface. Then it drops to less than half its initial value at the end of the period when the bubble is still covered by the film. After the film has ruptured,  $V_T$  increases monotonically over a period of time during which the bubble crosses a distance about twice its diameter, after which it almost reaches its new terminal value. The latter is somewhat less than it was in the lower fluid, essentially because of the reduction of the buoyancy force ( $R = 0.224$ ). According to figure 5(a), the bubble Reynolds number  $Re = ArV_T$  and Weber number  $We = BoV_T^2$  are of  $O(1)$  in both fluids. A theoretical prediction for the terminal velocity taking into account inertial corrections corresponding to small  $Re$  and  $We$  was derived by Taylor & Acrivos (1964) using matched asymptotic expansions. It is of interest to examine how it compares with the experimental values of  $V_T$ . Equating the buoyancy force with the drag force predicted by Taylor & Acrivos in the case of a massless drop with zero internal viscosity yields the nonlinear equation

$$V_T \left\{ 1 + \frac{Re}{8} + \frac{Re^2}{40} \ln \frac{Re}{2} + \frac{We}{12} \right\} = \frac{Ar}{12}. \quad (5.1)$$

With present values of  $Ar$  and  $Bo$ , (5.1) predicts  $V_T \approx 0.278$ , which is in fairly good agreement with, albeit slightly larger than, the initial value of  $V_T$  ( $V_T \approx 0.26$ ) reported in figure 5(a). The slight difference may be attributed to the contamination effects that tend to lower the rise speed. Note that if inertial corrections were neglected in



(5.1), one would predict  $V_T \approx 0.342$ , which clearly overestimates the actual rise speed. Replacing  $Ar$  by  $Ar_u$  and  $Bo$  by  $Bo_u$  in (5.1), the bubble terminal velocity in the upper fluid is found to be  $V_T \approx 0.230$  which is in excellent agreement with the experimental and computational values (contamination effects may decrease as the bubble rises in the upper fluid since silicon oils are known to be non-polar). The drop experienced by the rise speed when the bubble enters the region of the fluid–fluid interface is correctly predicted in the computation. However, for reasons already discussed above, the film that covers the top of the bubble breaks somewhat too early, preventing  $V_T$  from decreasing as much as it should and forcing it to start re-increasing slightly too early. The shift of the acceleration period toward lower positions could probably be resolved by a local increase of the grid resolution that would allow the film to subsist longer. However, we did not explore this possibility as we wish to determine how the computational approach deals with all physical situations under consideration with a single prescribed spatial resolution.

The volume of heavy fluid dragged into the upper fluid is a quantity of primary interest in three-phase systems. Depending on the context, it may for instance determine the mixing efficiency of the process or the amount of fluid that risks being projected if there is a free surface on top of the whole system (e.g. in iron processing where the upper layer is made of slag as discussed by Poggi *et al.* 1969, Reiter & Schwerdtfeger 1992*a,b*, Kobayashi 1993). We define this displaced volume as that of heavy fluid located above the position of the initial horizontal interface (i.e. we do not take into account the tiny reflux induced by mass conservation at large distance from the bubble path). Hereinafter this displaced volume is normalized by the bubble volume  $\mathcal{V}$ , defining the dimensionless displaced volume  $\mathcal{V}_e$ . As figure 5(*b*) shows,  $\mathcal{V}_e$  reaches a maximum  $\sim 3$  for  $z_T \approx 1$ , i.e. when the top of the bubble is about one diameter above the undisturbed interface (third snapshot in figure 4). Then  $\mathcal{V}_e$  decreases continuously until it reaches a constant small-but-non-zero value ( $\sim 0.15$ ) for  $z_T \geq 5$ . This non-zero final value indicates that a small volume of lower liquid remains permanently entrained by the bubble. Note that, counterintuitively, the comparison of figures 4 and 5(*b*) at various bubble positions indicates that the higher the liquid column entrained by the bubble, the smaller the total entrained volume. This is because the major contribution to the entrained volume comes from the region close to the fluid–fluid interface (where the surface of the displaced volume has a large radius) and not from the most visible part of the column (that attached to the rear of the bubble), whose radius is small.

We turn to a configuration belonging to series A with almost the same values of the Bond and Archimedes numbers ( $Bo = 13.3$  and  $Ar = 4.15$ ) as the one we just described; the main difference lies in the much lower viscosity of the upper fluid which, as will be seen, induces a markedly different evolution. As may be seen in figure 6(*a*), the first part of the sequence is similar to that observed in the previous case: after the bubble has started to deform the fluid–fluid interface, the film on its top part is quickly drained and the bubble starts to emerge in the upper fluid with a prolate shape. Then, as the vaguely hemispherical head of the bubble rises, a thin and long tail of air develops behind it, surrounded by a column of heavy fluid. This is because the low viscosity of the upper fluid allows the head of the bubble to rise fast while the part that is still in contact with the lower fluid is forced to rise much more slowly. After some time, the column of heavy fluid breaks right at the rear of the bubble head and starts receding. This in turn breaks the top of the bubble tail, part of which escapes from the entrained column and starts rising as an autonomous secondary bubble. The rest of the bubble tail recedes with the entrained column and eventually

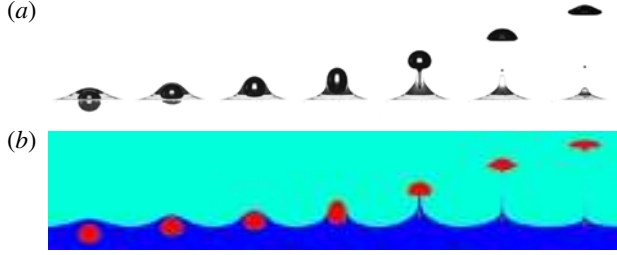


FIGURE 6. (Colour online) Evolution of the three-phase system for a bubble corresponding to  $Bo = 13.3$  and  $Ar = 4.15$  in series A. Comparison between (a) the experimental sequence and (b) computational predictions. The dimensionless time period separating two consecutive images is  $\sim 1.6$ .

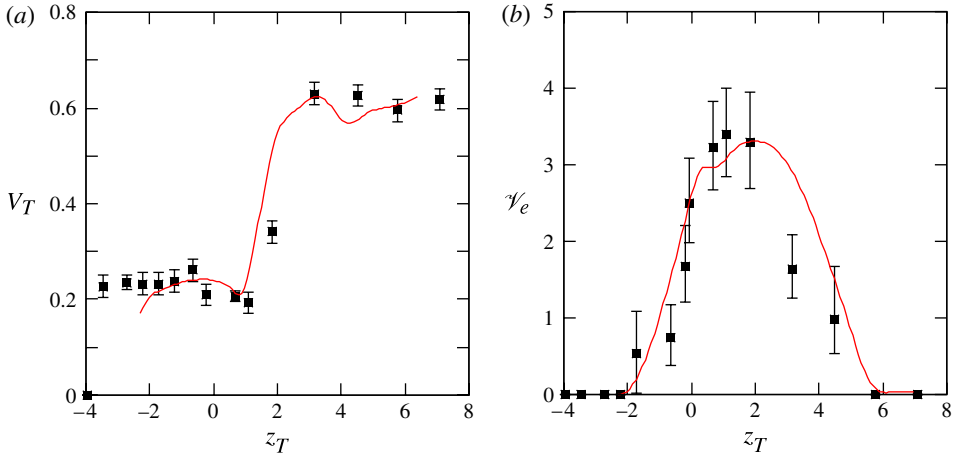


FIGURE 7. (Colour online) Evolution of (a) the normalized rise speed  $V_T$  and (b) the displaced volume  $V_e$  for the bubble considered in figure 6. See figure 5 for legend.

remains stuck just below the fluid–fluid interface. Note that after having released the column of heavy fluid, the main bubble undergoes significant shape oscillations.

The corresponding computational predictions are displayed in figure 6(b). The predicted shape and position of the main bubble are in good agreement with the experiments at each step of the sequence, although some differences may be noticed after the entrained column starts to form. In particular, the computations predict that a very thin column remains towed by the bubble at the end of the sequence although no such trend is detected experimentally. We also notice that the small rising bubble resulting from the break-up of the tail is not captured. Again, most of these secondary discrepancies could probably be removed by using a finer grid, but we did not explore this option.

Figure 7(a) shows how the normalized rise speed  $V_T$  of the bubble evolves. Here again, after starting from an initial steady-state value accurately predicted by (5.1),  $V_T$  experiences some transient drop when the bubble starts to cross the fluid–fluid interface, owing to the retarding effect of the film. Then  $V_T$  increases by a factor of three while the bubble rises a distance less than  $2d$ . This strong acceleration, after

which  $V_T$  stabilizes itself at a value  $\sim 0.6$ , is of course due to the large viscosity contrast between the two liquids ( $\Lambda = 0.0175$ ). However, the evolution of the bubble shape, which becomes very oblate (the bubble aspect ratio is  $\sim 3.4$  in the last snapshot of figure 6) and hence forces it to displace a large quantity of fluid as it rises, limits the increase of  $V_T$  well below the value it would reach if the bubble had kept its initial spherical shape (in which case the final rise speed would typically be  $1/\Lambda$  larger than that in the lower fluid). According to the terminal value of  $V_T$  at the end of the sequence, the final bubble Weber number  $We = V_T^2 Bo_u$  is  $\sim 8.8$  and the final Reynolds number  $Re = V_T Ar_u$  is  $\sim 110$ . Although the latter value might suggest that the high- $Re$  theory of Moore (1965) could be used to predict the terminal rise speed, this is actually not the case. The reason is that the bubble shape must be an oblate spheroid for this theory to hold, and such a shape exists in the high-Reynolds-number limit only if the Weber number is less than a critical value close to 3.23 (Miksis, Vanden-Broeck & Keller 1981; Meiron 1989). The present bubble is well beyond this limit, which explains why it oscillates while rising, and no theory is available to predict the rise speed under such conditions. According to figure 7(a), the computation correctly predicts the evolution of  $V_T$ , although there is still some shift on the position at which its sharp increase occurs. This shift is of course reminiscent of that observed in figure 5(a) and certainly has the same origin. During the final stage of the sequence, the predicted rise speed is seen to exhibit oscillations which are of course coupled to those of the bubble shape. The average value of  $V_T$  in this final stage agrees well with that deduced from experiments.

Figure 7(b) displays the evolution of the displaced volume. This volume first increases until it reaches a maximum about three times that of the bubble when  $z_T \approx 2$ . Then the entrained column starts receding, forcing  $\mathcal{V}_e$  to decrease and eventually return to zero for  $z_T \approx 6$ . Note that the net buoyancy force acting on the bubble + column system is positive only if  $\mathcal{V}_e < (1 - R)/R \approx 3$ . Hence, to sustain the bubble rise, the normalized entrained volume cannot exceed  $(1 - R)/R$ , except during some transient stage. Figure 7(b) also shows that the computed evolution of the displaced volume is in close agreement with the experimental determination, although the retraction seems somewhat too slow, a direct consequence of the thin column that remains attached to the bubble in the late stages of the sequence.

### 5.3. Spherical cap bubbles

Let us now consider another bubble in series A with a diameter twice that of the previous one, i.e.  $Bo = 52.9$  and  $Ar = 11.7$ . The corresponding sequence is displayed in figure 8. Here, since surface tension effects are weak, the rear part of the bubble is markedly dimpled when it reaches the fluid–fluid interface. After the short and thick tail it exhibits for some time has retracted, the bubble takes a final spherical cap shape with an angle close to  $120^\circ$ . Given this shape, the column of liquid it entrains is much thicker than in the previous case, although it gets thinner as the travelled distance increases and eventually breaks. The whole evolution is correctly predicted by the computations, including the transient presence of the aforementioned short thick tail (keep in mind that what is revealed by the experimental photographs is a side view of the bubble surface, while the computational snapshots show the bubble cross-section). The neck exhibited by the entrained column in the last experimental snapshot is also correctly captured.

Figure 9(a) shows how the normalized rise velocity  $V_T$  of the top of the bubble evolves. Remarkably,  $V_T$  does not experience any jump (only a small bump) after the bubble has crossed the interface, although all fluid properties are similar to those of

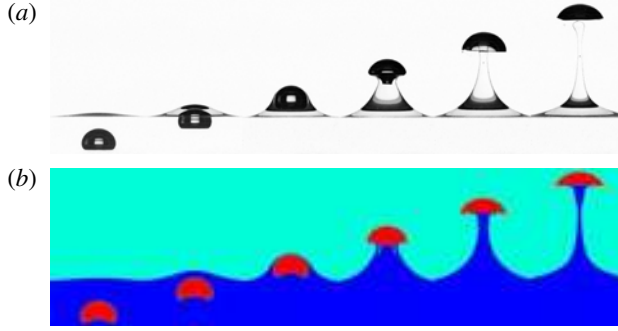


FIGURE 8. (Colour online) Evolution of the three-phase system for a bubble corresponding to  $Bo = 52.9$  and  $Ar = 11.7$  in series A. Comparison between (a) the experimental sequence and (b) computational predictions. The dimensionless time period between two consecutive images is  $\sim 1.5$ .

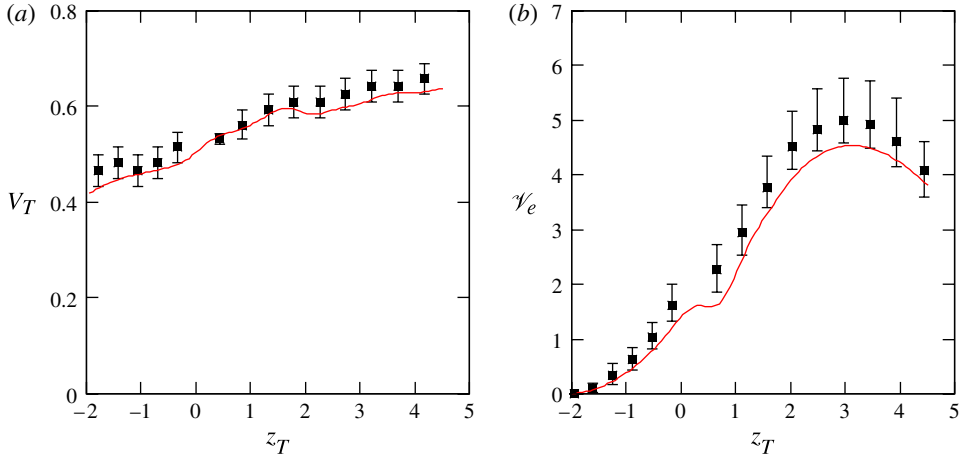


FIGURE 9. (Colour online) Evolution of (a) the normalized rise speed  $V_T$  and (b) the displaced volume  $V_e$  for the bubble considered in figure 8. See figure 5 for legend.

figure 7(a). The reason for this difference may easily be identified: while the bubble considered in the previous case is spheroidal (at least until it has totally emerged in the upper fluid), the present one exhibits an almost spherical cap shape throughout its rise. Therefore the two rise speeds follow drastically different laws. In the former case, the drag force directly depends on the fluid viscosity (for a given bubble aspect ratio) because dissipation is essentially generated in the bulk of the fluid since the flow about the bubble is unseparated. In contrast, the flow past a spherical cap bubble is massively separated at the back of the bubble and most of the dissipation takes place there. Thus the flow in the front region is close to irrotational and, provided the Archimedes number (and hence the Reynolds number) is large enough, the rise velocity of a spherical cap bubble is known to depend only on its radius of curvature  $R^*$  in that region through the relation  $V_T = (2/3)\mathcal{R}^{1/2}$ , where  $\mathcal{R} = R^*/d$  (Davies & Taylor 1950). This result can actually be extended to account for finite viscous effects, assuming that the flow is viscous but still irrotational in the front region, yielding

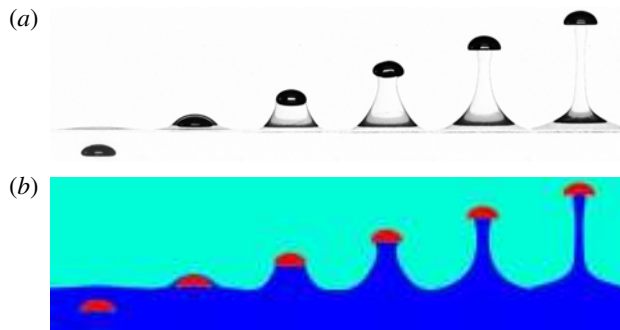


FIGURE 10. (Colour online) Evolution of the three-phase system for a bubble corresponding to  $Bo = 29.5$  and  $Ar = 42.6$  in the upper series B. Comparison between (a) the experimental sequence and (b) computational predictions. The dimensionless time period between two consecutive images is  $\sim 1.7$ .

(Joseph 2003)

$$V_T = -\frac{4}{3Ar\mathcal{R}} + \frac{2}{3}\mathcal{R}^{1/2} \left\{ 1 + \frac{4}{Ar^2\mathcal{R}^3} \right\}^{1/2}. \quad (5.2)$$

Given the above prediction, there is no reason for  $V_T$  to change abruptly when the bubble emerges from the interface. Nevertheless, the secondary viscous corrections in (5.2) experience a jump due to the change in the value of the Archimedes number (from  $Ar$  to  $Ar_u$ ). In the present case, this jump makes viscous corrections negligibly small in the upper fluid, suggesting a small sudden increase of  $V_T$  just after the bubble has crossed the interface. This may be the origin of the small bump visible in figure 9(a). The mild increase of  $V_T$  as the bubble rises in the upper liquid also follows qualitatively the above prediction: as figure 8 shows, the bubble radius of curvature gradually increases (by  $\sim 12\%$  between the last two snapshots), which in turn results in a gradual increase of  $V_T$ . The rise speed is quantitatively well predicted by the above formulae: in the last snapshot  $\mathcal{R} \approx 0.9$ , yielding  $V_T \approx 0.63$  according to (5.2), in close agreement with both experiment and computations. Not surprisingly, the displaced volume (figure 9b) reaches significantly larger values than in the previous case (figure 7b). The computations accurately capture the entire evolution of  $\mathcal{V}_e$ , although the small ‘plateau’ corresponding to the period during which the bubble crosses the interface seems somewhat exaggerated.

As in §5.2, it is of interest to examine how a large difference in the viscosity contrast  $\Lambda$  influences the evolution of bubbles belonging to the spherical cap family. For this purpose we consider a bubble with  $Bo = 29.5$  and  $Ar = 42.6$  in the upper series B. The corresponding evolution is displayed in figure 10. Since this bubble has a smaller Bond number compared to that of series A discussed above, it reaches the interface with a less dimpled shape and results in a spherical cap of smaller radius in the upper fluid. However, the similarity between the two shape evolutions is clear and is confirmed by the resemblances between the evolutions of the two rise speeds (figures 9a and 11a).

The fact that the actual Archimedes number only decreases by  $\sim 30\%$  in the present case and remains moderate after the bubble has crossed the interface ( $Ar_u \approx 30$ ), whereas it roughly increases by a factor of fifty in the previous case and becomes large ( $Ar_u \approx 500$ ), has two main consequences. First, the column of entrained liquid

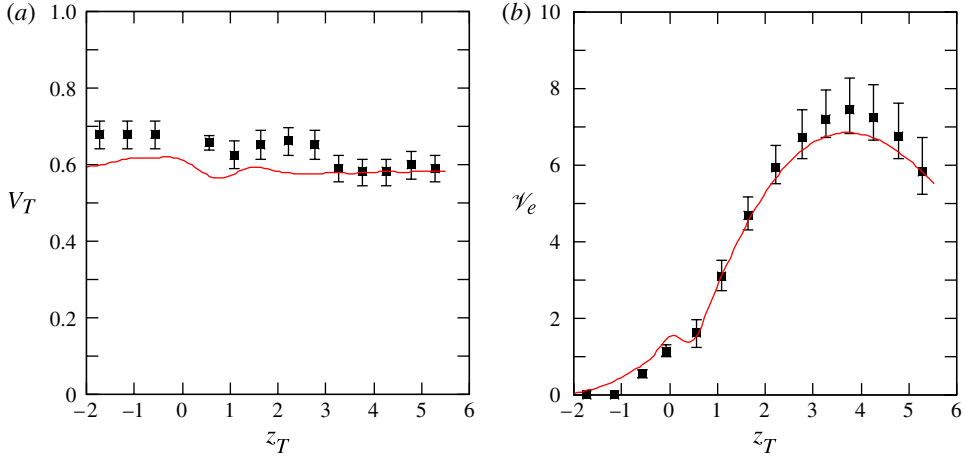


FIGURE 11. (Colour online) Evolution of (a) the normalized rise speed  $V_T$  and (b) displaced volume  $\mathcal{V}_e$  for the bubble considered in figure 10. See figure 5 for legend.

is somewhat thicker here (compare the end of the sequences in figures 8 and 10), yielding a maximum displaced volume (figure 11b)  $\sim 50\%$  larger. Second, the time required for the bubble to reach a stationary shape in the upper fluid is much shorter when  $Ar_u$  is moderate. This is why the rise velocity in figure 11(a) has already reached a steady value at the end of the sequence, while that in figure 9(a) is still increasing. The viscosity jump also influences the rise speed of spherical cap bubbles in an indirect and subtle manner. Indeed, the leading-order relation  $V_T \propto \mathcal{R}^{1/2}$  implies  $V_T^2 \mathcal{S} \propto \mathcal{R}^3$ , where  $\mathcal{S}$  denotes the area of the bubble’s horizontal cross-section. Therefore the balance of drag and buoyancy forces implies that, throughout the bubble ascent in each fluid, the variations of the bubble drag coefficient  $C_D$  and those of its radius or curvature are linked by the condition  $C_D \mathcal{R}^3 \approx \text{const.}$  (there may be some variation of the cap angle, so  $\mathcal{S}/\mathcal{R}^2$  may not be strictly constant). The drag coefficient of these bubbles is a decreasing function of the Archimedes number, being essentially determined by the viscous dissipation in the wake. Therefore when  $Ar$  jumps to  $Ar_u$  and the above constant jumps from 1 to  $1 - R$  after the bubble has crossed the interface,  $\mathcal{R}$  has to increase or decrease, depending on whether  $(1 - R)C_D^{-1}(Ar_u)$  is larger or smaller than  $C_D^{-1}(Ar)$ , and the variation of  $V_T$  follows. This implies that  $\mathcal{R}$  and  $V_T$  have to increase when  $R$  is small and  $\Lambda \ll 1$ , while the density contrast forces them to decrease slightly when  $\Lambda \approx 1$ . These predictions may be verified in figures 8 and 9 (respectively figures 10 and 11), which correspond to the first (respectively second) scenario.

Note that, compared to the bubble of the lower series B examined in §5.2 (whose diameter is about two-thirds that of the present bubble), no sharp drop of the rise velocity is observed in figure 11 when the bubble approaches the horizontal interface. This is an indication that the capillary overpressure in the film that covers the bubble during this stage barely influences its dynamics, as will be discussed in more detail in the next section. The only discernible effect of this film is the small bump visible in the evolution of  $V_T$  just before it reaches its final value: the corresponding video sequence indicates that this bump is associated with the late rupture of the film; a similar, albeit weaker and somewhat premature bump may also be discerned in the computations. The experimental/computational rise speed at the end of the sequence

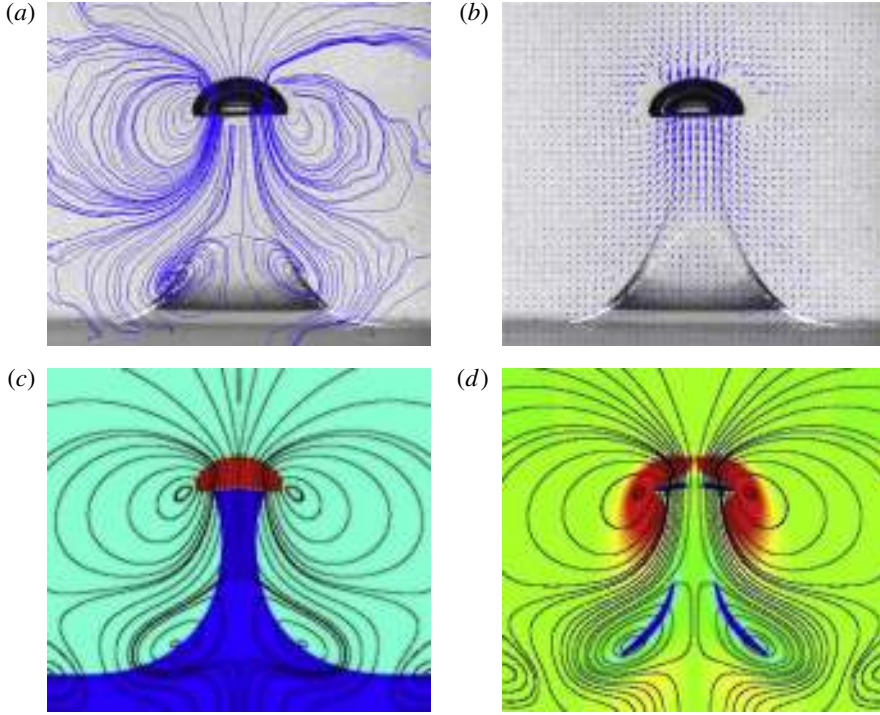


FIGURE 12. (Colour online) Flow pattern past the bubble considered in figure 10 at the time when its top stands at  $z_T \approx 3.4$ . (a,b) Streamline and velocity fields obtained through PIV measurements; (c,d) streamline and vorticity fields taken from computations. The azimuthal vorticity  $\omega_\theta$  is normalized by  $V_T (g/d)^{1/2}$ . The red (respectively black/blue) regions correspond to positive (respectively negative) vorticity.

compares well with the inviscid prediction  $V_T = (2/3)\mathcal{R}^{1/2}$  since the latter predicts  $V_T \approx 0.58$  ( $\mathcal{R} \approx 0.75$ ). Interestingly, the agreement with the prediction of (5.2) is not as good ( $V_T \approx 0.52$ ), which may suggest that the assumption of viscous potential flow overestimates the influence of viscous effects on the rise speed. This is known to be the case with spherical bubbles for which the boundary layer resulting from the non-zero surface vorticity lowers the drag force and hence increases the rise speed (Moore 1963). Although the present result is obviously not sufficient to settle the matter definitely, it suggests that taking into account the normal viscous stresses (from which the viscous correction in (5.2) arises) without considering the shear-free condition responsible for the surface vorticity (which modifies the pressure distribution along the interface) may not be a suitable approximation.

Figure 12 displays PIV and computational determinations of the flow pattern around the bubble at the time when the entrained volume reaches its maximum. Not surprisingly, the upper half of the streamline pattern is dominated by a dipole structure associated with the bubble motion. While the upper part of the entrained column is still rising with the bubble, its lower part is already receding towards its initial position. The central part of the column is thus stretched axially, which creates the hyperbolic point visible on the column axis. At the same time the base of the column thickens and flows radially on the horizontal interface, which induces an axial compression and results in another hyperbolic point near the intersection of

the column axis with the plane of the undisturbed interface. Positive values of the azimuthal vorticity  $\omega_\theta$  are of course concentrated close to the bubble surface, with a dimensionless maximum  $\omega_{max} \approx 23.1$  located slightly ahead of the region of maximum curvature where most of the vorticity is produced. A small, nearly horizontal and almost black zone can be discerned just at the back of the bubble, in the region where its surface is concave. This corresponds to negative vorticity (with a minimum  $\omega_{min} \approx -7.2$ ) generated in the attached eddy, where the tangential velocity goes from the bubble axis to the region of maximum curvature. Finally a thin shear layer having negative vorticity (with  $\omega_{min} \approx -1.6$ ) is observed along the fluid–fluid interface in the lower part of the column; this structure is of course a direct consequence of the entrainment of the outer fluid, which has low downward velocities, by the heavy fluid which recedes faster.

#### 5.4. A toroidal bubble

We finally consider the situation corresponding to  $Bo = 48.2$  and  $Ar = 7840$  in series C, which, according to our observations, results in a toroidal bubble. Indeed, when viscous effects are small enough, large initially nearly spherical bubbles are known to undergo a topological change and become toroidal. The basic mechanism that drives this transition is the growth of the tongue that forms at the bottom of the bubble, owing to the hydrostatic pressure difference between the top and bottom regions. As it develops, this tongue dramatically reduces the height of the bubble along its axis and quickly leads to pinch-off unless capillary forces are strong enough to limit its development. Bonometti & Magnaudet (2006) showed that, when  $Ar > 10^3$ , this topological transition always happens with initially spherical bubbles whose Bond number is beyond a critical value in the range 32–35. Therefore the case considered here is supercritical and the bubble switches from its initial shape to the toroidal configuration well before it reaches the fluid–fluid interface. Toroidal bubbles rising in low-viscosity fluids have been studied experimentally (Walters & Davidson 1963) and theoretically (Pedley 1968), the bubble then being considered as a hollow vortex ring. Given the large values of  $Ar$  generally associated with such bubbles, their dynamics are essentially inviscid during most of their lifetime. Provided the core has a circular cross-section, the evolution of the dimensionless ring radius  $R(t)$  and rise velocity  $V(t)$  is then governed by

$$\frac{R(t)}{R_0} = \left(1 + \frac{t - t_0}{6\Gamma R_0^2}\right)^{1/2}, \quad V(t) = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\log 16 (3\pi R^3)^{1/2} - \frac{1}{2}\right), \quad (5.3)$$

where  $R_0 = R(t_0)$  and the circulation  $\Gamma$  around the core has been normalized by  $(gd^3)^{1/2}$ . The core radius  $a(t)$  may then be determined thanks to the condition of volume conservation  $12\pi R(t)a^2(t) = 1$ . Toroidal bubbles rising in inviscid fluid have been investigated computationally by Lundgren & Mansour (1991) using a BIM, well before the full Navier–Stokes computations of Bonometti & Magnaudet (2006). Their results confirmed inviscid predictions and revealed the existence of significant oscillations of the ring radius and core shape when the ratio of the ring-to-core radii is small enough.

In the present context, as figure 13 shows, the most salient feature revealed by experiments as well as by computations is that the bubble remains encapsulated in a thick body of heavy fluid after having crossed the original position of the interface. This is due to the circulation around the bubble core which induces an upward fluid velocity in the central part of the ring (as may be discerned in figure 14), which in



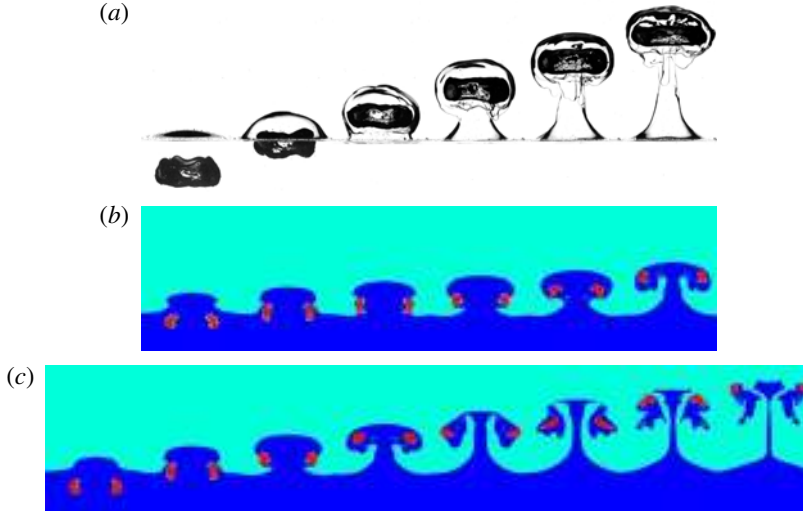


FIGURE 13. (Colour online) Evolution of the three-phase system for a bubble corresponding to  $Bo = 48.2$  and  $Ar = 7840$  in series C. (a) Experimental sequence and (b,c) computational predictions. The dimensionless time period between two consecutive images is  $\sim 0.66$  in the upper two rows and  $\sim 1.25$  in the bottom row.

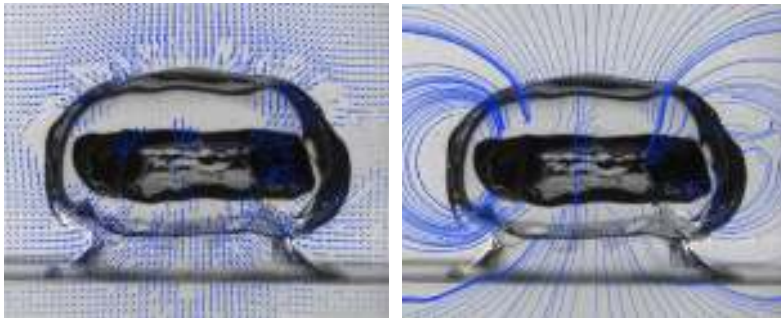


FIGURE 14. (Colour online) Experimental velocity and streamline patterns past a  $6 \text{ cm}^3$  ( $d \approx 22.5 \text{ mm}$ ) toroidal bubble just after it has crossed the position of the undisturbed interface.

turn tends to ‘feed’ the film ahead of the bubble with fresh heavy fluid withdrawn from the entrained column. Note that, according to the computational sequences, the core is far from circular and undergoes strong oscillations, in line with the findings of Lundgren and Mansour.

Unfortunately, comparison of present experimental results with theoretical and computational predictions for  $R(t)$  and  $V(t)$  can hardly be made quantitative, for several reasons. First, it must be kept in mind that the original bubble is injected much closer to the undisturbed interface in the computation than in the experiment. Moreover, given the design of the injection system, this original bubble is certainly not spherical in the latter, and this has a direct influence on the time (i.e. height) at which the topological transition takes place as well as on the value of the circulation. Indeed Bonometti & Magnaudet (2006) showed that under certain conditions, bubbles with

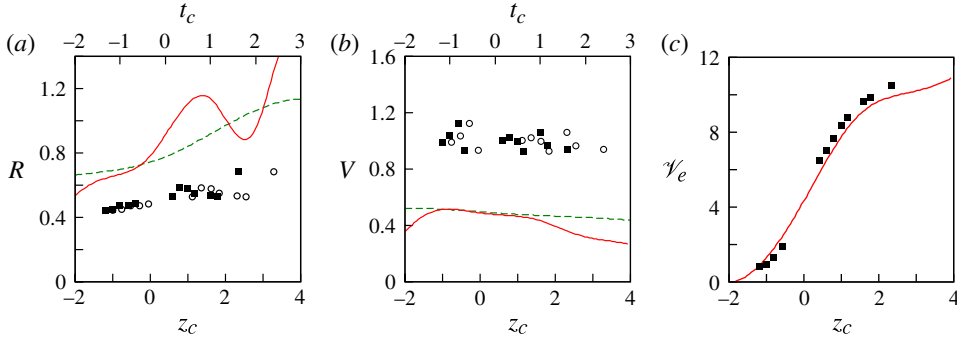


FIGURE 15. (Colour online) Evolution of (a) the normalized ring radius  $R$ , (b) rise speed  $V$ , and (c) entrained volume  $\mathcal{V}_e$  for the toroidal bubble displayed in figure 13 versus the dimensionless vertical position  $z_c$  of the bubble’s centre of inertia above the undisturbed interface (black squares and solid line). Subfigures (a) and (b) also display the corresponding evolutions versus the dimensionless time  $t_c$ , with  $t_c = 0$  when  $z_c = 0$  (open circles and dotted line). The ‘experimental’ ring and core radii are obtained by evaluating the dimensionless area  $S^*$  and perimeter  $P^*$  of the projected surface  $\mathcal{S}$  of the bubble on images such as that of figure 14, and equating these quantities with their counterparts for a torus with a circular core, which yields the conditions  $S^* = 4Ra + \pi a^2$  and  $P^* = 4R + 2\pi a$ ; the rise velocity is defined as the time variation of the vertical position of the centre of inertia of  $\mathcal{S}$  and the entrained volume is obtained by fitting the fluid–fluid interface contour with a curve preserving the left–right symmetry, evaluating the enclosed volume by invoking axisymmetry and removing the known bubble volume; this procedure does not work when the bubble crosses the undisturbed position of the interface, which is why no data appear in (c) during that stage. The computational ring radius is defined as  $R(t) = \int r^2 C(r, z, t) dr dz / \int r C(r, z, t) dr dz$ , where  $C$  is the local volume fraction of air and integration is performed over the whole computational domain; the rise velocity is defined as  $V(t) = \int r U_z(r, z, t) C(r, z, t) dr dz / \int r C(r, z, t) dr dz$ , where  $U_z$  is the local vertical fluid velocity.

a large enough initial oblateness can even preserve a spherical cap shape throughout their life, whereas spherical bubbles with the same volume quickly become toroidal. Because of these two factors, there is no chance that real and computed bubbles of a given volume give birth to a toroidal bubble at the same distance from the interface. Therefore, the corresponding two toroidal bubbles do not have the same ‘age’ when they reach the position of the undisturbed interface, nor do they probably have the same initial ring radius  $R_0$  and circulation  $\Gamma$ . Also, given the large value of the Archimedes number, the actual bubble shape and the flow about it are three-dimensional (with significant azimuthal fluctuations as may be seen in figure 14), whereas available predictions and present computations assume an axisymmetric evolution.

Having pointed out these issues, we are left with the possibility of performing qualitative comparisons. Figure 15 displays the evolution of the ring radius  $R$ , rise velocity  $V$  and entrained volume  $\mathcal{V}_e$ ; the way these quantities are defined and extracted from the complex bubble and interface shapes revealed by figure 13 is detailed in the corresponding caption. Figure 15(b) shows that the rise velocity is a slowly decreasing function of time and vertical position, a trend that was to be expected owing to the  $R^{-1} \log R$  term in the second of (5.3). The experimental and computational evolutions are qualitatively similar; during the late stages, say for  $1.5 < z_c < 2.5$  (here  $z_c$  is

the normalized vertical position of the bubble centre of inertia above the undisturbed interface), the computation predicts a more pronounced decrease of  $V$  which, as will be seen below, is related to the presence of the body of heavy fluid that moves with the bubble. Nevertheless the magnitude of  $V$  is roughly twice as large in the experiments, suggesting a higher value of the circulation due to the difference in the bubble shape at the time of pinch-off. Indeed, starting from a spherical bubble, Lundgren & Mansour found  $\Gamma \approx 1.5$  for  $Bo = 40$ , and this value is certainly close to that corresponding to  $Bo = 48.2$ . When the computed bubble crosses the position  $z_c = -1$ , figure 15(a) indicates  $R = 0.65$ , which, by setting  $\Gamma = 1.5$  in the second of (5.3), yields  $V = 0.505$ , in excellent agreement with the computational prediction  $V = 0.51$  reported in figure 15(b). At the same position, assuming the same value of  $\Gamma$ , the measured ring radius ( $R = 0.45$ ) would lead to  $V = 0.58$  instead of  $V \approx 1.0$  as found experimentally. This strongly suggests that the difference in magnitude between the experimental and computational rise speeds essentially results from differences at the instant in time when the toroidal bubble is formed.

At first glance, the experimental and computed evolutions of the ring radius versus  $z_c$  reported in figure 15(a) display contrasting trends. However, it must be kept in mind that, owing to its nearly twice as small rise speed, it takes typically twice as long for the computed bubble to cross a given vertical distance (compare the final two positions in figure 13a,b). This is why the evolution of  $R$  versus time is more revealing. Using this representation, it can be seen that the growth of the ring radius follows qualitatively similar trends in both evolutions up to the end of the experimental observations. Selecting again  $\Gamma = 1.5$  and  $t_0 = -1$ , i.e.  $R_0 = 0.70$  according to the computations, the first of (5.3) predicts  $R(t_c = 0) = 0.775$  which is very close to the computational prediction  $R(t_c = 0) = 0.78$ . This allows us to conclude that the early evolution of the computed bubble is in line with theoretical predictions. The late evolution of the ring radius (beyond the end of the experimental observations) is more complex, since  $R$  is seen to decrease for some time and then increase again. These variations are better understood by considering the whole computational sequence displayed in figure 13(c). As revealed by this sequence, owing to the large volume of heavy fluid entrained by the bubble, a compound toroidal body made of the bubble plus a large fraction of the top of the entrained column progressively forms and starts moving autonomously in the upper fluid (note that the top of the column is no longer connected to this toroidal body at the end of the sequence). Within this compound body, which may be seen as a nearly neutrally buoyant vortex ring, fluid particles rotate in the direction given by  $\Gamma$ . Therefore, in addition to its own motion, the bubble core undergoes some entrainment within this body of heavy fluid: it first moves outward (which provides an extra increase in  $R$  clearly visible in the fourth and fifth snapshots), then inward and downward (which briefly reduces  $R$  in the sixth snapshot and lowers the rise speed as seen in the range  $1.5 < z_c < 2.5$  in subfigure b), then outward and upward again. Unfortunately, the experimental sequence is not long enough to reach similar times and determine whether the same phenomenon occurs or is rather due to the axisymmetry imposed in the computations.

Since the bubble remains encapsulated in the film throughout the period of observation, the evolution of the entrained volume (figure 15c) is remarkably smooth (compare with figure 11b for instance). In line with the ‘feeding’ mechanism provided by the circulation around the core, its maximum is larger and takes place at a greater distance from the undisturbed interface than in all other configurations. Surprisingly, the experimental and computational evolutions of  $\mathcal{V}_e$  versus  $z_c$  are in remarkable agreement. This may be totally fortuitous, but we believe that, for toroidal bubbles,

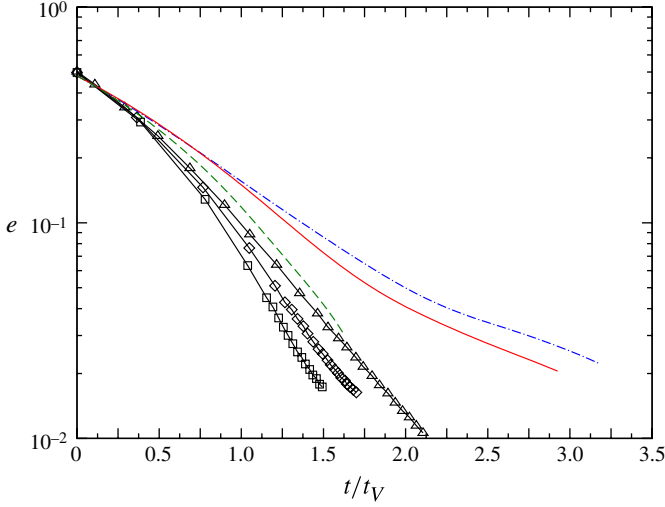


FIGURE 16. (Colour online) Evolution of the normalized film thickness  $e$  computed for the three spheroidal bubbles considered in § 5 (semi-log coordinates). Time is normalized by the viscous scale  $t_V = 12\mu_1/(\rho_1gd) = 12Ar^{-1}(d/g)^{1/2}$ ; its origin is taken at the instant when the dimensional film thickness is  $d/2$ . Solid line, situation corresponding to figure 3 ( $Bo = 3.0, B_I = 4.9, \Lambda = 1.11$ ); dash-dotted line, situation corresponding to figure 4 ( $Bo = 13.2, B_I = 21.3, \Lambda = 0.96$ ); dotted line, situation corresponding to figure 6 ( $Bo = 13.3, B_I = 21.6, \Lambda = 0.0175$ ). The lines with symbols are the results of Pigeonneau & Sellier (2011) for a bubble approaching a free surface ( $R = 1, I = 1, \Lambda = 0$ ):  $\square$ ,  $Bo = B_I = 3.6$ ;  $\diamond$ ,  $Bo = B_I = 6.0$ ;  $\triangle$ ,  $Bo = B_I \geq 12.0$ .

the entrained volume depends primarily on the bubble volume rather than on the rise velocity and detailed geometry of the bubble. Further comparisons between experiments and computations for other bubble volumes are required to assess this conjecture.

## 6. Film drainage and tailing configurations: the role of the interfacial Bond number and the viscosity and density ratios

Little has been said up to now regarding the role of the relative interfacial tension  $I$  or better that of the interfacial Bond number  $B_I = Bo/I$ . It is the purpose of this section to re-examine some of the material discussed in § 5 in the light of results available in the literature and of a simple model developed in appendix D to better understand how this parameter, jointly with the density and viscosity ratios  $R$  and  $\Lambda$ , influences the dynamics of the system when the bubble gets close to the undisturbed position of the interface.

Let us first consider the influence of interfacial and viscous effects on the drainage of the film that forms ahead of the bubble when it reaches the interface. In the low-Reynolds-number limit, the various computational studies based on the BIM (Chi & Leal 1989; Manga & Stone 1995; Pigeonneau & Sellier 2011) consistently show that increasing  $Bo$  and  $B_I$  up to  $O(10)$  values slows down the film drainage, while no significant influence of interfacial forces is observed for larger values. Indeed, increasing  $Bo$  and  $B_I$  allows the two boundaries of the film to deform more easily, causing the film thickness to remain more uniform during the drainage process. This in turn increases the area of the small-gap region and thus slows down the drainage

since the body force available to squeeze the entire film is fixed. Figure 16 shows the evolution of the film thickness  $e$  (measured on the vertical axis and normalized by  $d/2$ ) predicted by the computations for the three spheroidal bubbles considered in § 5.2 which all correspond either to  $\Lambda = O(1)$  or to  $\Lambda \ll 1$ . Although the lower part of the curves (say, that corresponding to  $e < 4 \times 10^{-2}$ ) is certainly contaminated by numerical inaccuracies and must be disregarded, the general trends observed for larger gaps are clear. First it is worth noting that, for  $t/t_V > 1$ , i.e. times larger than the viscous time scale  $t_V = 12Ar^{-1}(d/g)^{1/2}$ , figure 16 essentially confirms the exponential evolution of the film thickness already observed in presence of a free surface (Debrégeas, de Gennes & Brochard-Wyart 1998). As this exponential behaviour directly results from the plug velocity profile in the film, while a parabolic profile is known to produce a power-law decay (Jones & Wilson 1978), present results suggest that the velocity profile is still mostly of plug type for  $O(1)$  values of  $\Lambda$ .

Among the two situations involving  $O(1)$  viscosity ratios (solid and dash-dotted lines in figure 16), the smaller  $B_I$  the faster the drainage, in agreement with previous low-Reynolds-number findings. In those two cases, the drainage is found to be significantly slower than in the free-surface situations recently considered by Pigeonneau & Sellier (2011), as shown by comparing the solid line with the squares ( $B_I \approx 3$  in both cases) and the dash-dotted line with the triangles ( $B_I \geq 12$  in both cases). As this trend is observed for any  $B_I$ , we can conclude that the difference is due to the viscosity ratio: the smaller  $\Lambda$ , the more efficient the drainage since the stretching of the upper film surface does not induce any significant stress (hence no dissipation) when  $\Lambda \ll 1$ . This is also confirmed by comparing the dash-dotted and dotted line which correspond to nearly identical values of  $B_I$  but markedly different values of  $\Lambda$ : the film is drained much faster when  $\Lambda \ll 1$  and its evolution is then close to that predicted by Pigeonneau & Sellier in the same range of Bond numbers. However, it may be noticed that the corresponding drainage is still slightly slower than at a free surface (dotted line versus triangles). This is in line with the above argument regarding the spatial variation of the film thickness: as  $I = 1$  at a free surface while  $I \approx 0.6$  here, the upper film surface deforms somewhat more easily for a given  $Bo$  in the present case, so that some more energy is required to drain the entire film region. To conclude, the computational results displayed in figure 16 confirm that low-Reynolds conclusions are still valid in the inertial regime: the smaller  $B_I$  the faster the film drainage for a given  $\Lambda$ ; the smaller  $\Lambda$  the faster the film drainage for a given  $B_I$  (the figure may give the impression that the influence of the viscosity ratio is dominant but it must be kept in mind that  $\Lambda$  varies by a factor of 60 among the three curves while  $B_I$  only varies by a factor of 4).

Let us now discuss how effects of interfacial tension and density contrast influence the decrease of the bubble rise speed and residence time near the interface. This is most easily achieved by relying on a model predicting how the net buoyancy force acting on the bubble is altered when the latter stands at a given dimensionless altitude  $\eta$  above the undisturbed position of the interface. We develop such a model in appendix D by considering how the joint presence of a non-zero interfacial tension and of an entrained column of heavy fluid influence the static pressure distribution at the surface of a spherical bubble. This model provides the distribution of the effective body force  $g_e$  as a function of  $\eta$  and shows that it goes through a minimum,  $g_m$ , given by (D 2) or (D 3) in the two limits  $RB_I \rightarrow 0$  or  $RB_I \rightarrow \infty$ , respectively; it is of interest to notice that requiring  $g_m > 0$  in the latter yields the criterion derived by Greene *et al.* (1988). Comparing (D 2) and (D 3), this model shows that the major two roles of the interfacial tension are to increase the pressure in the film ahead of the bubble and the

volume of heavy fluid it displaces. Hence, for a given density contrast  $R$ , the larger  $B_I$  the smaller the decrease of the effective body force when the bubble is close to the undisturbed interface. This is why in all configurations we considered, increasing  $B_I$  results in a reduction of the slowing down of the bubble rise near the fluid–fluid interface, although it actually slows down the film drainage, as we saw above. Also, increasing the density contrast between the two fluids makes the entrained column of heavy fluid decrease the net buoyancy acting on the bubble; this effect is frequently referred to as a ‘drag increase’ (Geller *et al.* 1986; Srdić-Mitrović *et al.* 1999) but it must be kept in mind that, in contrast with the usual origin of drag in a homogeneous fluid, it has nothing to do with vorticity generation at the body surface. Hence, as (D 2) and (D 3) show, the larger  $R$  the most severe the slowing down of the bubble near the undisturbed position of the interface.

Considering the above findings, two different scenarios may happen. If  $g_e$  vanishes at some critical altitude  $h_0$ , the bubble stops there and cannot rise any more until the drainage has been completed and the film has eventually ruptured under the effect of long-range forces. This is what happens in the ‘film-drainage’ configuration discussed in § 5.1. In contrast, if  $g_e$  remains positive for any  $h$ , the bubble may go on rising while the film around it is not yet totally drained (this corresponds to all situations discussed in §§ 5.2 and 5.3). In that case, the bubble ascent is only briefly slowed down by the decrease of  $g_e$  in a certain range of  $h$  and its residence time near the undisturbed position of the interface is generally much shorter than that required to drain the film. A column of heavy fluid develops behind the bubble as  $h$  increases, a distinctive feature that led Geller *et al.* (1986) to term this configuration ‘tailing’. The film may ultimately break ahead of the bubble or some hydrodynamic mechanism (such as viscous stretching or an instability) may neck down the column earlier, its upper part then continuing to rise with the bubble while the lower part recedes toward the initial position of the interface (as in the late stages of figures 8 and 10).

The first two situations considered in § 5 illustrate these two scenarios and offer an opportunity to check the predictions of the model established in appendix D. Given the physical parameters corresponding to the situation considered in § 5.1, (D 1) predicts  $g_e$  will vanish for  $h_0 \approx 0.5$ , which is in good qualitative agreement with the experimental observations reported in figure 3 (the agreement cannot be fully quantitative since bubble deformation was found to be large in that case and is totally neglected in the model). If we rather consider the smallest bubble examined in § 5.2 (figure 4), the model yields  $g_m/g \approx 0.38$  for  $h = h_m \approx 1.3$ . Since  $\Lambda$  is close to unity in that case, one can roughly consider that the bubble rises in a homogeneous viscous fluid and estimate its minimum rise speed  $V_m$  by using (5.1) in which we replace  $Ar$  by  $(g_m/g)Ar$ . This yields  $V_m \approx 0.115$  for  $h_c \approx 1.3$ , a prediction which compares well with the magnitude and position of the minimum rise speed observed in figure 5.

To conclude this section, we wish to stress again the two independent and apparently antagonistic effects of the interfacial Bond number enlightened by present results. On the one hand, increasing  $B_I$  increases the energy required to drain the film ahead of the bubble, thus lowering the drainage process. On the other hand, increasing  $B_I$  lowers the overpressure in the film and thus reduces the slowing down of the bubble near the fluid–fluid interface, thus allowing it to rise more easily above the initial position of this interface. This is why, for large enough  $B_I$ , the overall evolution of the bubble may show a bare macroscopic influence of the interface (essentially visible for some time through the entrained column of heavy fluid), although at a microscopic scale interfacial effects may be at play for a long time, owing to the slow viscous drainage of the film.

## 7. Summary and concluding remarks

In this paper we considered the inertial dynamics of a single bubble that rises across an initially horizontal interface separating two Newtonian fluids. By varying the bubble diameter and the viscosity contrast over a wide range, we were able to study several aspects of this phenomenon for almost all possible bubble shapes (from spherical to toroidal) and various scenarios of interface crossing. As reviewed in § 1, most available studies of that problem, both experimental and computational, focused on creeping flow conditions and essentially considered situations corresponding to the film-drainage configuration, with the noticeable exception of Maru *et al.* (1971) and Geller *et al.* (1986). The only two ‘modern’ studies of similar gas/liquid/liquid systems with non-zero inertia known to us (Kemiha *et al.* 2007; Dietrich *et al.* 2008) spanned much more limited conditions: the former focused on spheroidal bubbles with diameters in the range 3.5–5 mm and a single couple of Newtonian fluids with  $\Lambda \approx 0.15$ , while the latter considered bubbles with diameters in the range 7–10 mm and viscosity ratios less than 0.5. Moreover, in these studies emphasis was put on global quantities such as the ‘residence time’ at the interface, rather than on the elementary physical mechanisms at play. This is why we think the present investigation is the first to consider in detail the respective roles of inertial, viscous and capillary effects in the evolution of this system over a broad region of the  $(Ar, Bo, \Lambda)$  parameter subspace. Also, very few direct simulations of that system with non-zero inertia were reported in the past. Kemiha *et al.* (2007) employed an Eulerian approach qualitatively similar to that used here with spheroidal bubbles corresponding to the regime illustrated in figure 4. However, owing to the coarse grid and narrow computational domain they used, their results had low accuracy and could only be qualitatively compared with experimental data. Therefore, we regard the computational exploration and the systematic comparison with the experimental evolutions provided in § 5 as a significant step forward in the use of direct numerical simulation for investigating the basic physical processes at work in three-phase flows.

In the rest of this section, considering successively physical processes and computational issues, we summarize the main findings of the present investigation and indicate some directions for future work.

### 7.1. Dynamics of the three-phase system

As § 5 showed, the dynamic features associated with the interface crossing sequence turn out to be markedly different with the various types of bubbles. In particular, for values of  $B_I = Bo/I$  in the range 1–10, small spheroidal bubbles are first severely slowed down or even stopped by the overpressure that sets in within the film as they get close to the interface, while spherical cap bubbles (which correspond to much larger  $B_I$ ) are barely affected by the existence of this film. Also, the smaller the viscosity of the upper fluid (i.e.  $\Lambda$ ), the smaller the influence of the film on the overall dynamics, as revealed for instance by the comparison between results of figures 4 and 6, two cases with almost similar values of  $Bo$  and  $Ar$ . This is essentially because decreasing this viscosity makes the upper boundary of the film more mobile, as figure 16 confirms.

Another important point highlighted by the present investigation is the strong connection between the evolution of the bubble rise speed and the readjustment of its shape to the new conditions it encounters as it starts rising in the upper fluid. Present experiments all correspond to  $S < 1$ , so that the actual Weber number is larger in the upper fluid, making the bubble deformation easier. This is why, for spheroidal bubbles, this readjustment makes the evolution of the rise speed much milder than it would

be if the bubble shape had remained unchanged. Hence, for instance, the intuitive idea that the rise speed of such bubbles in the upper fluid should be roughly  $\Lambda^{-1}$  times that in the lower fluid is generally grossly in error, as illustrated by figures 6 and 7. In contrast, the rise velocity of spherical cap bubbles evolves as  $\mathcal{R}^{1/2}$ , which forces the drag coefficient, itself a decreasing function of the Archimedes number, to evolve roughly as  $\mathcal{R}^{-3}$ . This is why, when the bubble enters the upper fluid and the Archimedes number jumps from  $Ar$  to  $Ar_u$ , its radius of curvature and rise speed are both seen to increase when  $\Lambda \ll 1$  (figures 8 and 9), while they slightly decrease when  $\Lambda = O(1)$  (figures 10 and 11).

A central feature of the three-phase system is the column of heavy fluid that forms and is entrained behind the bubble when the flow conditions allow it to rise above the initial position of the interface. The entrained volume increases until the bubble has travelled a few diameters above that position. Its maximum is significantly larger with spherical cap bubbles than with spheroidal bubbles as, for a given volume, the former offer a larger cross-section than the latter at the time the bubble crosses the interface. The viscosity contrast has a large influence on the development and shape of the column for at least two reasons. First, depending on whether  $\Lambda$  is small or large, it creates extensional or compressional stresses along the column; when the former are large enough, a gas tail resulting eventually in secondary bubbles may form, as in figure 6. Second, a large (respectively small)  $\Lambda$  implies that the relative magnitude of inertial and viscous effects decreases (respectively increases), leading to a thicker (respectively thinner) column, as the comparison of figures 8 and 10 clearly shows. Toroidal bubbles correspond to a specific situation because the film of heavy liquid ahead of the bubble is fed by the entrained column through the central part of the ring, so that the bubble remains encapsulated in a thick film.

The density contrast between the two fluids is moderate in the systems we considered and its most visible effect is the slight reduction experienced by the bubble rise velocity in the upper fluid when  $\Lambda = O(1)$ . However, when the bubble reaches the fluid–fluid interface, this parameter plays an important role in the film–drainage/tailing transition, as the discussion in §6 and the model developed in appendix D show. This is because the volume of heavy fluid displaced by the bubble exceeds its own volume, owing to the development of the entrained column. Large density contrasts are encountered in applications, especially with liquid metal as the heavy phase (e.g.  $R \approx 0.93$  for the mercury/water system). In such systems of fluids, only the film–drainage configuration is possible if the dimensionless displaced volume  $\mathcal{V}_H$  (defined in figure 20) approaches  $1/R \approx 1$ . According to (D2),  $\mathcal{V}_H$  may reach values significantly larger than unity for small-to-moderate interfacial Bond numbers, so that only bubbles with very large  $B_I$  may result in a tailing configuration in such systems of fluids. This is why bubbles with Bond numbers of several tens, i.e. spherical cap bubbles, may then remain trapped at the interface, as was observed by Cranga *et al.* (2001).

Finally, it is important to realize that the present study mostly focused on the transient phenomena that affect the three-phase system when the bubble is not far from the fluid–fluid interface. In certain cases, especially with small bubbles, no mark of the passage across the interface subsists after the bubble has risen a few diameters in the upper fluid. However, this may not be true with larger bubbles, which may continue to tow a significant volume of heavy fluid in the form of a single attached drop or of a string of droplets. This permanent entrainment phenomenon, which is important in applications such as iron processing, was studied by Greene *et al.* (1988) and Greene, Chen & Conlin (1991) who derived simple criteria to predict its threshold



and the associated permanently entrained volume  $\mathcal{V}_p$ . It could not be studied here, owing to the limited height of the upper fluid layer (and in some cases of the field of view). Nevertheless this is an aspect deserving future investigation, especially because available models attempt to predict  $\mathcal{V}_p$  on the sole basis of static force balances, and their predictions frequently exceed the observed entrained volumes by one to two orders of magnitude. Indeed, Greene *et al.* (1991) noticed that the viscosities of both fluids had a significant influence on the values of  $\mathcal{V}_p$  they determined, which is no surprise when one considers dynamical features such as the viscous stretching of the entrained column clearly visible in figure 8. Thus there is a clear need to improve the understanding and modelling of the tearing mechanisms acting on the entrained column, so as to properly incorporate the main features of the dynamics in predictive models.

### 7.2. Strengths and current limitations of Eulerian computational approaches

As the various examples discussed in § 5 showed, computational approaches based on the full Navier–Stokes equations are able to reproduce quantitatively most aspects of the dynamics of inertial gas/liquid/liquid systems. In particular, the detailed evolutions of the bubble shape, rise speed, volume and shape of the entrained column are generally well predicted, although some flow details are not properly captured owing to the limitations inherent in the  $O(10^{-2}d)$  grid resolution we selected. Moreover, some of the material used in §§ 5 and 6 was provided by the computations and could not have been obtained experimentally, given the limitations of the optical technique and the device we used. This is for instance the case of the position, shape and strength of the thin vortical layers displayed in figure 12, of the detailed dynamics of the core of the toroidal bubble (figure 13) or of the evolution of the film thickness displayed in figure 16.

The only clear failure of the computational predictions we observed occurred in the situation where a small bubble with  $Bo = O(1)$  remains trapped at the fluid–fluid interface for a very long time, owing to the slow drainage of the film. Some bias has also been noticed with bubbles that spend a significant, albeit shorter time at the interface: in such cases the acceleration experienced by the bubble when it starts rising in the upper fluid occurs somewhat too early, owing to the premature film rupture. These observations make it clear that the major current shortcoming of this type of approach is its inability to predict correctly the dynamics of very thin films in situations where they control the evolution of the system. As in every one-fluid formulation (such as volume of fluid, level set or front tracking approaches), numerical pinch-off occurs sooner or later when the film thickness becomes less than a few grid cells because the solution of (3.1) suffers unavoidably from some numerical diffusion and, as discussed in appendix C, the finite thickness of the numerical interfaces results in a poor evaluation of the physical properties within the film and in contamination of the local flow dynamics by spurious capillary effects. Obviously, this numerical pinch-off can be delayed by increasing the grid resolution locally, but even this technique experiences practical limitations when the film thickness becomes several orders of magnitude less than the dominant flow scales. This problem is now recognized as being one – if not the – major limitation of current direct numerical simulation (DNS) approaches of multiphase flows involving drop or bubble suspensions and possibly solid walls, since very thin inter-particle and wall-particle films are ubiquitous in such flows. Remedies other than local dynamic grid refinement (e.g. Popinet 2003, 2009) are still in their infancy. A recent attempt (Thomas, Esmaeeli & Tryggvason 2010) explores the possibility of computing the motion and deformation of drops sliding

along a wall by combining DNS in the bulk with the solution of an additional pair of one-dimensional equations governing the evolution of the local thickness and maximum velocity in the film separating the drop from the wall, respectively. This kind of ‘subgrid scale’ approach is very promising. However, it takes advantage of the fact that the shape and position of the substrate on which the film develops are known in advance. In the situations considered here this is by no means the case because the film characteristics and location depend on the flow history. This is why we plan to devote future efforts to extending such approaches to curved films whose position and mean shape are an intrinsic part of the solution.

### Acknowledgements

We thank G. Ehses for his essential role in the design of the experiment and S. Cazin for his expert technical assistance with the optical and high-speed imaging acquisition systems. The computations performed with JADIM owe much to A. Pédrono, who is at the heart of the collaborative work carried out around this code. This work was funded by IRSN whose financial support is greatly appreciated. This work was granted access to the HPC resources of CALMIP under the allocation 2011-P1142.

### Appendix A. Extension of the CSF model to three-phase systems

The expression of the capillary force  $\mathbf{T}$  in (3.5) deserves some discussion. Computational approaches of two-phase flows involving the transport of the volume fraction of one of the fluids frequently make use of the CSF formulation first proposed by Brackbill *et al.* (1992) and express the capillary force per unit volume in the form  $\mathbf{T} = -\sigma \nabla \cdot (\nabla C / \|\nabla C\|) \nabla C$ , where  $\sigma$  denotes the surface tension and  $C$  equals  $C_1$  or  $C_2$ . A direct extension of this formulation involving suitable linear combinations of the three interfacial tensions was recently proposed by Kim & Lowengrub (2005) and Kim (2007) in the context of a phase-field approach. We use expression (3.5) because, with the proper summation, it applies directly to an arbitrary number of phases, in contrast with the aforementioned formulation which is specific to three-phase systems (a closely related, albeit somewhat more complex formulation valid in an arbitrary number of phases has been proposed by Kim (2009), again in the context of a phase-field approach).

To establish (3.5) it is first worth noting that, having defined  $C_{ij} = C_i / (C_i + C_j) = 1 - C_{ji}$ , we have  $(C_i + C_j)^2 \nabla C_{ij} = C_j \nabla C_i - C_i \nabla C_j$ . Then, let us suppose that in a one-dimensional system the spatial distribution of the fluid phases is such that phase 1 (respectively 3) fills the interval  $-\infty < x < x_{12}$  (respectively  $x_{23} < x < +\infty$ ) while phase 2 fills the gap  $x_{12} < x < x_{23}$ . If interfaces are infinitely thin, we then have  $C_1 = H(x_{12} - x)$ ,  $C_3 = H(x - x_{23})$ ,  $C_2 = H(x - x_{12})H(x_{23} - x)$ , where  $H$  denotes the Heaviside function. Hence

$$\left. \begin{aligned} (C_i + C_j)^2 \|\nabla C_{ij}\| = \\ 0 \quad \text{for } i = j \\ 0 \quad \text{for } i = 1, j = 3 \text{ or } i = 3, j = 1 \\ \delta(x - x_{12}) \quad \text{for } i = 1, j = 2 \text{ or } i = 2, j = 1 \\ \delta(x - x_{23}) \quad \text{for } i = 2, j = 3 \text{ or } i = 3, j = 2, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A } 1)$$

where  $\delta$  is the Dirac function. An important feature in (A 1) is that  $\|\nabla C_{ij}\|$  is non-zero only if phases  $i$  and  $j$  have a common interface, as it should be. Now, at such

an interface,  $\nabla C_i = -\nabla C_j$ , so  $\nabla C_{ij} = \nabla C_i$  is aligned with the local normal to the interface. Hence one may define the unit normal pointing from phase  $i$  toward phase  $j$  as

$$\mathbf{n}_{ij} = \nabla C_{ij} / \|\nabla C_{ij}\|. \quad (\text{A } 2)$$

Generalizing (A 1) to three dimensions and using (A 2), (3.5) is found to reduce to

$$\mathbf{T} = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j>i} \sigma_{ij} (\nabla \cdot \mathbf{n}_{ij}) \mathbf{n}_{ij} \delta_{A_{ij}}, \quad (\text{A } 3)$$

where  $\delta_{A_{ij}}$  is the surface Dirac function which is non-zero only at the interface of area  $A_{ij}$  between phases  $i$  and  $j$  and satisfies the normalization condition  $\int_V \delta_{A_{ij}} dV = A_{ij}$ . Hence (3.5) is just the sum of the individual contributions of the three pairs of fluids  $(i, j)$  with  $i \neq j$  to the capillary force density in a three-phase system.

## Appendix B. Numerical volume conservation in a three-phase system

As in Bonometti & Magnaudet (2006, 2007), the JADIM code solves (3.1) by means of a direction-splitted version of Zalesak's flux corrected transport algorithm (Zalesak 1979). As most schemes used in the treatment of hyperbolic equations, this algorithm is not strictly conservative. This results in small fluctuations of the total volume filled by each fluid which may accumulate in time and lead to unacceptable volume variations over long times. An overall procedure maintaining the total volume variation of each phase within prescribed bounds was devised by Bonometti & Magnaudet (2007). In a two-phase flow it is customary to solve (3.1) only in one of the fluids, say fluid 1, and make use of the relation  $C_1 + C_2 = 1$  to infer the local volume fraction of fluid 2. One may apply a similar procedure to three-phase flows by solving (3.1) in fluids 1 and 2 for instance and infer  $C_3$  through  $C_3 = 1 - C_1 - C_2$ . However, due to the lack of strict conservativity of the algorithm, it may be that the numerical solution of (3.1) yields locally  $C_1 + C_2 = 1 - \epsilon_c$  with  $0 < \epsilon_c \ll 1$ , although only fluids 1 and 2 are actually present at that location or even in the entire flow domain. In such a case, a non-zero volume fraction of fluid 3,  $C_3 = \epsilon_c$ , spuriously appears (for instance droplets of light fluid may appear in the near-wake of the bubble when it rises in the heavy fluid!). To remove this artifact we solve (3.1) in all three fluid phases. Although this procedure slightly increases the overall computational cost, it has the decisive advantage that all phases are treated in a similar manner and that none of them is created artificially by the cumulative effect of errors made in the transport of the other two. The drawback of this procedure is that, since the algorithm does not ensure a strict volume conservation of each phase, none of the three volume fraction fields it produces, say  $C_i^*$ , guarantees this conservation, and the relation  $C_1^* + C_2^* + C_3^* = 1$  is not satisfied. We deal with these issues as follows. First we apply the overall volume conservation correction devised by Bonometti & Magnaudet (2007) to the gas that fills the bubble, say phase 2, which yields the corrected volume fraction field  $C_2 \approx C_2^*$ . The reason for privileging conservation of the bubble volume is that this parameter is of primary importance in the present problem, as it determines the buoyancy force that drives the entire system. In contrast, both liquids are almost stagnant except in the region crossed by the bubble, so that minute departures from volume conservation in phases 1 and 3 have strictly no effect on the dynamics of the system. Finally, to enforce the overall conservation property  $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ , we renormalize any local

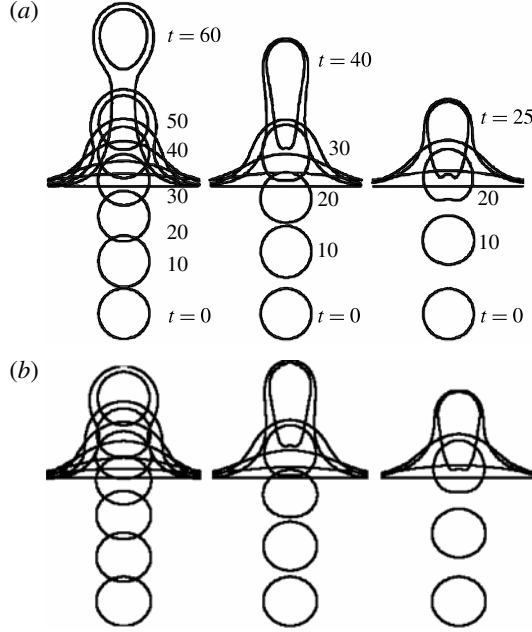


FIGURE 17. Evolution of the shape and position of the drop in the BIM computations of (a) MS and (b) JADIM for  $(\rho_1 - \rho_3)/(\rho_1 - \rho_2) = 0.2$ ,  $(\rho_1 - \rho_2)gd^2/\sigma_{12} = 80$ ,  $\mu_3/\mu_1 = 0.1$ ,  $\sigma_{13}/\sigma_{12} = 0$ , and three different drop/lower liquid viscosity ratios:  $\lambda = 10$  (left), 1 (middle) and 0.1 (right). Times are normalized with the viscous time scale  $2\mu_1/(\rho_1 - \rho_2)gd$ .

value of the volume fraction produced by the direction-split Zalesak algorithm in the two liquid phases in the form  $C_\alpha = C_\alpha^*(1 - C_2)/(C_1^* + C_3^*)$ , with  $\alpha = 1$  or 3.

### Appendix C. Comparison with predictions of a BIM approach

To check the accuracy of our code in a configuration close to those of interest here, we reconsider some of the low-Reynolds-number flows computed by Manga & Stone (1995) (hereinafter referred to as MS) using a BIM. Initially spherical drops (whose inner fluid is referred to as fluid 2) with a diameter  $d$  are released from rest within fluid 1 with their top located at a position  $h/d = -2$  with respect to the flat horizontal interface separating fluids 1 and 3. Then they rise under the effect of gravity until they come close to that interface. Grid characteristics are similar to those mentioned in § 3. Computations are run over the same amount of dimensionless time  $T = t(\rho_1 - \rho_2)gd/(2\mu_1)$  as in MS, whose results we take as a reference even though their exact accuracy is unknown.

The position and shape of the various interfaces at selected values of  $T$  are displayed in figure 17 for three values of the viscosity ratio  $\lambda = \mu_2/\mu_1$ , namely  $\lambda = 0.1, 1$  and 10. The results obtained with the two codes compare well for the lowest value of  $\lambda$ . The final shape and position of the drop predicted by JADIM are very close to those reported by MS. For the other two values of  $\lambda$ , although satisfactory until the entire drop has crossed the initial position of the interface between fluids 1 and 3 (say  $h/d \approx 1$ ), the agreement deteriorates at later times. The drop deformation then becomes underpredicted (see in particular the tail of the final drop in the intermediate case  $\lambda = 1$ ) and so is the final altitude reached by its top;

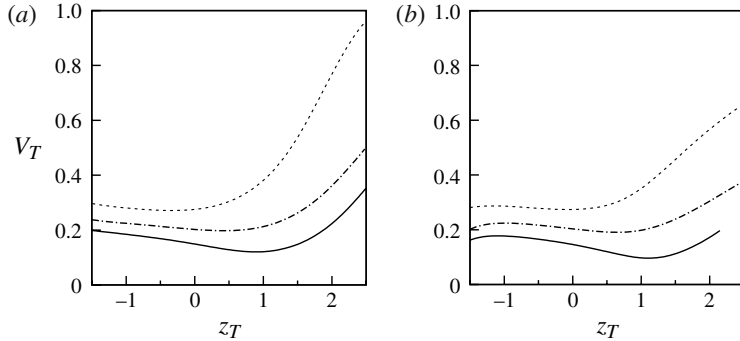


FIGURE 18. Evolution of the rise speed of the top of the drop in (a) the BIM computations of MS and (b) JADIM. Solid line,  $\lambda = 10$ ; dot-dashed line,  $\lambda = 1$ ; dashed line,  $\lambda = 0.1$ . Dimensionless parameters are similar to those of figure 17. Velocities are normalized with the viscous scale  $(\rho_1 - \rho_2)gd^2/4\mu_1$ ; positions are normalized with the initial drop diameter  $d$  and refer to the top of the drop relative to the initial position of the interface between fluids 1 and 3.

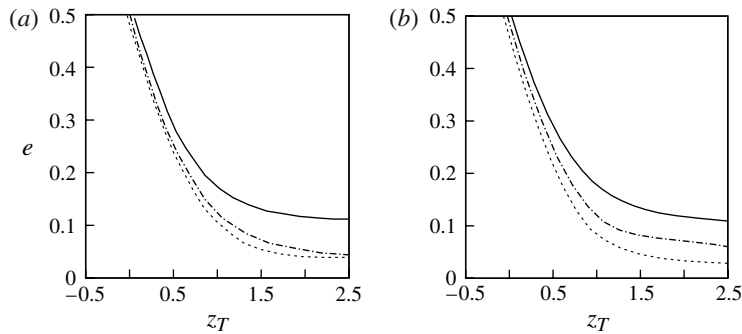


FIGURE 19. Evolution of the gap thickness (normalized with  $d$ ) in (a) the BIM computations of MS and (b) JADIM. Dimensionless parameters are similar to those of figure 17; symbols are similar to those of figure 18.

the larger  $\lambda$ , the larger the difference in this altitude. The normalized velocity  $V_T$  of the top of the drop (defined as  $V_T = 4V\mu_1/(\rho_1 - \rho_2)gd^2$ ) is plotted as a function of the current normalized position  $z_T$  of that uppermost point in figure 18. As seen in this figure, after the drop has reached a rise speed close to that predicted by the Hadamard–Rybczyński theory ( $V_T = 2(1 + \lambda)/3(2 + 3\lambda)$ ), it first slows down until its top reaches a certain position  $z_{Tc}$  located above the initial position of the interface between fluids 1 and 3. Since the larger  $\lambda$  the slower the drop deformation, the location of  $z_{Tc}$  increases with  $\lambda$ , ranging from  $z_{Tc} \approx 0.25$  for  $\lambda = 0.1$  to  $z_{Tc} \approx 1.25$  for  $\lambda = 10$ . This trend is well captured by our code. The situation deteriorates at a later time, when the rise speed experiences a sharp increase. The code predicts this acceleration but its magnitude is significantly less than that found with the BIM. Figure 19 shows how the normalized thickness  $e$  of the film of fluid 1 on top of the drop evolves. The initial sharp decrease of  $e$  is followed by a much slower decrease corresponding to the drainage of the film. This second stage is fairly well captured by

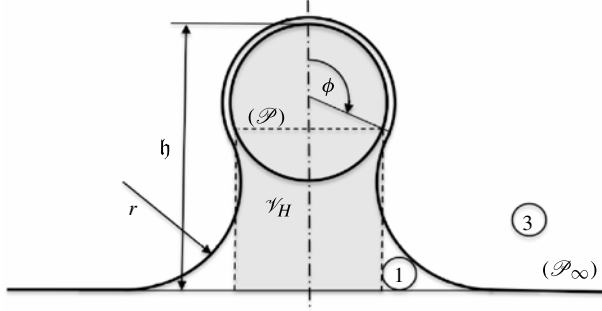


FIGURE 20. Sketch of the film + tail model.

our code, although the drainage appears to be somewhat too slow or too fast for  $\lambda = 1$  and  $\lambda = 0.1$ , respectively.

Differences observed between the predictions of our code, in which gradients of  $C_i$  are spread over interfacial regions with a small but finite thickness, and those of the BIM, in which interfaces are sharp, may readily be explained. Indeed, the finite thickness of interfacial regions results in a spreading of both the capillary force (through its dependence on  $\nabla C_i$ ) and the viscosity variations (through the dependence of viscosity on  $C_i$ ) within the film. When the interface between fluids 1 and 2 comes close to that between fluids 1 and 3, the latter interface, which in the present computations has no interfacial tension, starts to experience some artificial capillary force. Hence it resists deformation more than it should, thus delaying the rise of the drop and hindering its deformation. Depending on the values of  $\mu_2$  and  $\mu_3$ , the average viscosity in the gap is somewhat smaller or larger than its actual value  $\mu_1$ , so it takes less or more time than it should for the film to be drained. The above two effects should cooperate and result in a slower rise and deformation of the drop when  $\lambda > 1$ , while they should counteract each other when  $\lambda < 1$ . Based on this reasoning, the predictions of our code for a given  $\mu_3$  are expected to be more accurate with bubbles ( $\lambda \ll 1$ ) than with very viscous drops ( $\lambda \gg 1$ ). The results displayed in figures 17 and 18 fully support these views. Significant differences between predictions of the present code and BIM results are seen to start typically for  $e \lesssim 0.04$ .

#### Appendix D. A static model of the film-drainage/tailing transition

Let us consider a spherical bubble of diameter  $d$  at the time when its top stands at an altitude  $z = h$  above the plane  $(\mathcal{P}_\infty)$  corresponding to the undisturbed position of the fluid–fluid interface and part of its surface is covered by a thin film (see figure 20), for example that part between its upward axis (which we define as  $\theta = 0$ ) and a certain cap angle  $\theta = \phi$ . We assume that the film thickens rapidly at larger angular positions, so it has no direct effect on the bubble for  $\theta > \phi$  (the first four snapshots of the experimental sequence in figure 6(a) provide a clear illustration of that situation). If dynamical effects in the upper fluid and pressure variations across the film are negligibly small, the pressure on the part of the bubble surface corresponding to  $\theta < \phi$  is  $-\rho_3gz + 4\sigma_{13}/d$ . Similarly, provided dynamical effects in the vicinity of the bubble are negligible in the heavy fluid, the corresponding pressure for  $\theta > \phi$  is  $-\rho_1gz$ .

Setting  $h = h/d$  and integrating the pressure distribution over the bubble surface, simple geometrical considerations show that the net buoyancy force on the bubble

is  $\rho_1 g \mathcal{V}(1 - R \mathcal{V}_H(\phi) - 6B_I^{-1} \sin^2 \phi)$ , where  $\mathcal{V}_H(\phi) = (3/2)\mathfrak{h}(\phi)\sin^2 \phi - (1/4)(1 - 3\cos^2 \phi + 2\cos^3 \phi)$  is the dimensionless volume corresponding to the grey region in figure 20, i.e. the volume of the bubble fraction located above the horizontal plane ( $\mathcal{P}$ ) corresponding to  $\theta = \phi$  plus that of the vertical cylinder of dimensionless diameter  $\sin \phi$  bounded by planes ( $\mathcal{P}$ ) and ( $\mathcal{P}_\infty$ ). In other words, the density difference between the two fluids and the capillary force at their interface reduce the local effective driving force per unit mass acting on the bubble to

$$g_e(\phi) = g \left\{ 1 - R \left[ \frac{3}{2} \mathfrak{h}(\phi) \sin^2 \phi - \frac{1}{4} (1 - 3\cos^2 \phi + 2\cos^3 \phi) \right] - \frac{6}{B_I} \sin^2 \phi \right\}. \quad (\text{D } 1)$$

Determining how  $\mathfrak{h}$  varies with  $\phi$  requires the shape of the column to be known, and this shape is governed by the force balance in the corresponding flow region. A simple, although crude, procedure to achieve this determination (sketched in figure 20) was followed by Maru *et al.* (1971) who assumed the vertical cross-section of the column to be bounded by an arc of a circle tangent to the film at  $\theta = \phi$  as well as at the point where the column matches the undisturbed interface. Requesting that Laplace's law be satisfied at the intersection of the bubble surface with ( $\mathcal{P}$ ) then implies  $(\rho_1 - \rho_3)gz(\phi) = -\sigma_{13}\kappa(\phi)$ , where  $\kappa$  is twice the local mean curvature of the column surface. Simple algebra finally allows the dimensionless arc radius  $\tau$  to be calculated, yielding  $\mathfrak{h}(\phi) = (\tau + 1/2)(1 - \cos \phi)$  with  $\tau = \{-1 + [1 + RB_I(1 - \cos \phi)]^{1/2}\} / \{RB_I(1 - \cos \phi)\}$ .

In the limit of small  $RB_I$ , this expression tends toward  $\mathfrak{h}(\phi) = 1 - \cos \phi + O(RB_I)$ , which yields  $\mathfrak{h}(\phi = \pi/2) \approx 1$ , suggesting that the upper half of the bubble is almost entirely covered by the film when its bottom stands on ( $\mathcal{P}_\infty$ ). This is indeed approximately what is observed here with the spheroidal bubbles of figures 4 and 6. Hence we regard the above expression for  $\mathfrak{h}$  as sufficient given the limited scope of the present model, although it is certainly unrealistic at large  $\phi$  since  $\mathfrak{h}$  actually goes to infinity as  $\phi \rightarrow \pi$ . Assuming that it is still valid in the range of  $\phi$  where, given the condition  $\mathcal{V}_H \rightarrow 1$  for  $\phi \rightarrow \pi$ , we expect  $\mathcal{V}_H$  to pass through a maximum, this model predicts this maximum to occur at  $\phi = 2\pi/3$ , where  $\mathcal{V}_H \approx 27/16$ . Hence  $g_e$  reaches its minimum,  $g_m$ , at some angle  $\phi_m$  in the range  $]\pi/2, 2\pi/3[$  such that  $\cos \phi_m \approx -RB_I/8$ , so that

$$g_m \approx g \left\{ 1 - \frac{5}{4}R \left[ 1 + \frac{3}{20}RB_I \right] - 6B_I^{-1} \right\}. \quad (\text{D } 2)$$

In the opposite limit of large  $RB_I$ , assuming that capillary effects, although small, still control the shape of the column, the above model predicts  $\tau \rightarrow (RB_I)^{-1/2} (1 - \cos \phi)^{-1/2}$  and  $\mathfrak{h} \rightarrow (1 - \cos \phi)/2 + (RB_I)^{-1/2} (1 - \cos \phi)^{1/2}$ . Now  $\mathcal{V}_H$  (respectively  $g_m$ ) reaches its maximum (respectively minimum) for  $\phi \approx \pi - 2(RB_I/2)^{-1/4}$ , where  $\mathcal{V}_H \approx 1 + 6(RB_I)^{-1}$ , so that

$$g_m \approx g \left\{ 1 - R - 6B_I^{-1} \right\}. \quad (\text{D } 3)$$

Note that, according to (D3),  $g_m$  keeps a positive value in systems with a large interfacial Bond number only if  $B_I > 6/(1 - R)$ , which is simply the criterion derived by Greene *et al.* (1988).

It must be stressed that the above model only takes into account static effects (gravity and interfacial tension) and neglects any influence of viscous and inertial mechanisms. This is a clear limitation since Geller *et al.* (1986) showed that, under Stokes flow conditions, a rigid sphere approaching a fluid–fluid interface may, for certain sets of  $R$  and  $B_I$ , give birth to either a film–drainage or a tailing configuration,

depending on whether  $\Lambda$  is large or small. The most questionable aspect of the above model (as well as of that of Maru *et al.* (1971) which involves the same ingredients) is certainly the closure we use to relate  $h$  to  $\phi$ , especially because it makes the column geometry entirely dependent on capillary effects whereas it is well established that the same type of structure may exist with miscible fluids (Srđić-Mitrović *et al.* 1999; Camassa *et al.* 2009). Our belief, reinforced by the comparison with experimental results, is that this closure is approximately valid as far as the column is ‘short’, say  $h \leq 3/2$ , which corresponds to  $\phi \leq 2\pi/3$ , because the gap between the region where its shape is controlled by the matching with the film at  $\theta = \phi$  and that where it is controlled by the matching with the undisturbed interface is small. For larger gaps or nearly miscible fluids ( $B_l \rightarrow \infty$ ), there is no doubt that dynamical effects have to be taken into account to predict  $h$  realistically (see e.g. the recent low-Reynolds-number investigation by Lee & Kim 2011). However, this is clearly beyond the scope of the present analysis, whose goal is only to show qualitatively why increasing  $B_l$  makes the bubble cross the initial position of the interface easier. Based on these remarks, we regard the  $g_m > 0$  condition provided by (D 2) or (D 3) as a necessary condition for the tailing configuration to occur, but there is little doubt that the film-drainage configuration may emerge for positive  $g_m$  if  $\Lambda$  is large enough.

#### REFERENCES

- ALLAN, R. S., CHARLES, G. E. & MASON, S. G. 1961 The approach of gas bubbles to a gas/liquid interface. *J. Colloid Sci.* **16**, 150–165.
- BART, E. 1968 The slow unsteady settling of a fluid sphere toward a flat fluid interface. *Chem. Engng Sci.* **23**, 193–210.
- BONOMETTI, T. & MAGNAUDET, J. 2006 Transition from spherical caps to toroidal bubbles. *Phys. Fluids* **18**, 052102.
- BONOMETTI, T. & MAGNAUDET, J. 2007 An interface-capturing method for incompressible two-phase flows: validation and application to bubble dynamics. *Intl J. Multiphase Flow* **33**, 109–133.
- BRACKBILL, J. U., KOTHE, D. B. & ZEMACH, C. 1992 A continuum method for modelling surface tension. *J. Comput. Phys.* **100**, 335–354.
- BUSH, J. W. M. & EAMES, I. 1998 Fluid displacement by high Reynolds number bubble motion in a thin gap. *Intl J. Multiphase Flow* **24**, 411–430.
- CAMASSA, R., FALCON, C., LIN, J., MCLAUGHLIN, R. M. & PARKER, R. 2009 Prolonged residence times for particles settling through stratified miscible fluids in the Stokes regime. *Phys. Fluids* **21**, 031702.
- CHARLES, G. E. & MASON, S. G. 1960 The coalescence of liquid drops with flat liquid/liquid interfaces. *J. Colloid Sci.* **15**, 236–267.
- CHI, B. K. & LEAL, L. G. 1989 A theoretical study of the motion of a viscous drop toward a planar wall at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **201**, 123–146.
- CRANGA, J., GARDIN, P., HUIN, D. & MAGNAUDET, J. 2001 Influence of surface pressure and slag layer on bubble bursting in degasser systems. In *Computational Modelling of Materials, Minerals, and Metals Processing* (ed. M. Cross, J. W. Evans & C. Bailey), pp. 105–114. The Minerals, Metals & Materials Society.
- DAVIES, R. M. & TAYLOR, G. I. 1950 The mechanics of large bubbles rising through liquids in tubes. *Proc. R. Soc. Lond. A* **200**, 375–390.
- DEBRÉGEAS, G., DE GENNES, P.-G. & BROCHARD-WYART, F. 1998 The life and death of ‘bare’ viscous bubbles. *Science* **279**, 1704–1707.
- DIETRICH, N., PONCIN, S., PHEULPIN, S. & LI, H. Z. 2008 Passage of a bubble through a liquid–liquid interface. *AIChE J.* **54**, 594–600.
- EAMES, I. & DUURSMAN, G. 1997 Displacement of horizontal layers by bubbles injected into fluidized beds. *Chem. Engng Sci.* **52**, 2697–2705.



- GELLER, A. S., LEE, S. H. & LEAL, L. G. 1986 The creeping motion of a spherical particle normal to a deformable interface. *J. Fluid Mech.* **169**, 27–69.
- DE GENNES, P.-G., BROCHARD-WYART, F. & QUÉRÉ, D. 2004 *Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls and Waves*. Springer.
- GREENE, G. A., CHEN, J. C. & CONLIN, M. T. 1988 Onset of entrainment between immiscible liquid layers due to rising gas bubbles. *Intl J. Heat Mass Transfer* **31**, 1309–1317.
- GREENE, G. A., CHEN, J. C. & CONLIN, M. T. 1991 Bubble induced entrainment between stratified liquid layers. *Intl J. Heat Mass Transfer* **34**, 149–157.
- HARTLAND, S. 1968 The approach of a rigid sphere to a deformable liquid/liquid interface. *J. Colloid Interface Sci.* **26**, 383–394.
- HARTLAND, S. 1969 The profile of the draining film between a rigid sphere and a deformable fluid–liquid interface. *Chem. Engng Sci.* **24**, 987–995.
- JONES, A. F. & WILSON, S. D. R. 1978 The film drainage problem in droplet coalescence. *J. Fluid Mech.* **287**, 279–298.
- JOSEPH, D. D. 2003 Rise velocity of a spherical cap bubble. *J. Fluid Mech.* **488**, 213–223.
- KEMIHA, M., OLMOS, E., FEI, W., PONCIN, S. & LI, H. Z. 2007 Passage of a gas bubble through a liquid–liquid interface. *Ind. Engng Chem. Res.* **46**, 6099–6104.
- KIM, J. 2007 Phase field computations for ternary fluid flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng* **196**, 4779–4788.
- KIM, J. 2009 A generalized continuous surface tension force formulation for phase-field models for multi-component immiscible fluid flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng* **198**, 3105–3112.
- KIM, J. & LOWENGRUB, J. 2005 Phase field modelling and simulation of three-phase flows. *Interface Free Bound.* **7**, 435–466.
- KOBAYASHI, S. 1993 Iron droplet formation due to bubbles passing through molten iron/slag interface. *ISIJ Int.* **33**, 577–582.
- LEAL, L. G. & LEE, S. H. 1982 Particle motion near a deformable fluid interface. *Adv. Colloid Interface Sci.* **17**, 61–81.
- LEE, D. G. & KIM, H. Y. 2011 Sinking of small sphere at low Reynolds number through interface. *Phys. Fluids* **23**, 072104.
- LUNDGREN, T. S. & MANSOUR, N. N. 1991 Vortex ring bubbles. *J. Fluid Mech.* **87**, 263–288.
- MAGNAUDET, J. & MOUGIN, G. 2007 Wake instability of a fixed spheroidal bubble. *J. Fluid Mech.* **572**, 311–337.
- MANGA, M. & STONE, H. A. 1995 Low Reynolds number motion of bubbles, drops and rigid spheres through fluid–fluid interfaces. *J. Fluid Mech.* **287**, 279–298.
- MANGA, M., STONE, H. A. & O’CONNELL, R. L. 1993 The interaction of plume heads with compositional discontinuities in the Earth’s mantle. *J. Geophys. Res.* **98**, 19979–19990.
- MARU, H. C., WASAN, D. T. & KINTNER, R. C. 1971 Behavior of a rigid sphere at a liquid–liquid interface. *Chem. Engng Sci.* **26**, 1615–1628.
- MEIRON, D. I. 1989 On the stability of gas bubbles rising in an inviscid fluid. *J. Fluid Mech.* **198**, 101–114.
- MIKSIS, M., VANDEN-BROECK, J. M. & KELLER, J. B. 1981 Axisymmetric bubble or drop in a uniform flow. *J. Fluid Mech.* **108**, 89–100.
- MOHAMED-KASSIM, Z. & LONGMIRE, E. K. 2004 Drop coalescence through a liquid–liquid interface. *Phys. Fluids* **16**, 2170–2181.
- MOORE, D. W. 1963 The boundary layer on a spherical gas bubble. *J. Fluid Mech.* **16**, 161–176.
- MOORE, D. W. 1965 The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity. *J. Fluid Mech.* **23**, 749–766.
- NATARAJAN, R. & ACRIVOS, A. 1993 The instability of the steady flow past spheres and disks. *J. Fluid Mech.* **254**, 323–344.
- PEDLEY, T. J. 1968 The toroidal bubble. *J. Fluid Mech.* **32**, 97–112.
- PIGEONNEAU, F. & SELLIER, A. 2011 Low-Reynolds-number gravity-driven migration and deformation of bubbles near a free surface. *Phys. Fluids* **23**, 092102.
- POGGI, D., MINTO, M. & DAVENPORT, W. G. 1969 Mechanisms of metal entrapment in slags. *J. Met.* **21**, 40–45.

- POPINET, S. 2003 Gerris: a tree-based adaptive solver for the incompressible Euler equations in complex geometries. *J. Comput. Phys.* **190**, 572–600.
- POPINET, S. 2009 An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *J. Comput. Phys.* **228**, 5838–5866.
- PRINCEN, H. M. 1963 Shape of a fluid drop at a liquid–liquid interface. *J. Colloid Sci.* **18**, 178–195.
- PRINCEN, H. M. & MASON, S. G. 1965*a* Shape of a fluid drop at a fluid–liquid interface. Part 1. Extension and test of two-phase theory. *J. Colloid Sci.* **20**, 156–172.
- PRINCEN, H. M. & MASON, S. G. 1965*b* Shape of a fluid drop at a fluid–liquid interface. Part 2. Theory for three-phase systems. *J. Colloid Sci.* **20**, 246–266.
- REITER, G. & SCHWERDTFEGER, K. 1992*a* Observation of physical phenomena occurring during passage of bubbles through liquid/liquid interfaces. *ISIJ Int.* **32**, 50–56.
- REITER, G. & SCHWERDTFEGER, K. 1992*b* Characteristics of entrainment at liquid/liquid interfaces due to rising bubbles. *ISIJ Int.* **32**, 57–65.
- SHAH, S. T., WASAN, D. T. & KINTNER, R. C. 1972 Passage of a liquid drop through a liquid–liquid interface. *Chem. Engng Sci.* **27**, 881–893.
- SHOPOV, P. J. & MINEV, P. D. 1992 The unsteady motion of a bubble or drop towards a liquid–liquid interface. *J. Fluid Mech.* **235**, 123–141.
- SMITH, P. G. & VAN DE VEN, T. G. M. 1984 The effect of gravity on the drainage of a thin liquid film between a solid sphere and a liquid/fluid interface. *J. Colloid Interface Sci.* **100**, 456–464.
- SRDIĆ-MITROVIĆ, A. N., MOHAMED, N. A. & FERNANDO, H. J. S. 1999 Gravitational settling of particles through density interfaces. *J. Fluid Mech.* **381**, 175–198.
- TAYLOR, T. D. & ACRIVOS, A. 1964 On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **18**, 466–476.
- THOMAS, S., ESMAEELI, A. & TRYGGVASON, G. 2010 Multiscale computations of thin films in multiphase flows. *Intl J. Multiphase Flow* **36**, 71–77.
- TSAI, S. S. H., WEXLER, J. S., WAN, J. & STONE, H. A. 2011 Conformal coating of particles in microchannels by magnetic forcing. *Appl. Phys. Lett.* **99**, 153509.
- WALTERS, J. K. & DAVIDSON, J. F. 1963 The initial motion of a gas bubble formed in a inviscid liquid. Part 2. The three-dimensional bubble and the toroidal bubble. *J. Fluid Mech.* **17**, 321–336.
- ZALESKAK, S. T. 1979 Fully multidimensional Flux-Corrected Transport algorithms for fluids. *J. Comput. Phys.* **31**, 335–362.