

Thèse

Étude des fluctuations de température par Simulations des Grandes Échelles

présentée devant
l'Université de Perpignan Via Domitia

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

École doctorale : E² (Énergie et Environnement)
Spécialité : Physique

par

Raphaël MONOD

Soutenue le 7 novembre 2012 devant la commission d'examen :

BRILLANT Guillaume	Chercheur HDR - LESAM, Cadarache	Directeur de Thèse
DAUMAS-BATAILLE Françoise	Professeur - PROMES, Perpignan	Directeur de Thèse
HADJADJ Abdellah	Professeur - CORIA, Rouen	Examinateur
HARION Jean-Luc	Professeur - École des Mines, Douai	Rapporteur
PLOURDE Frédéric	Directeur de Recherche - LET, Poitiers	Rapporteur
TOUTANT Adrien	Maître de Conférences - PROMES, Perpignan	Encadrant de Thèse
VIAZZO Stephane	Maître de Conférences HDR - M2P2, Marseille	Examinateur

*C'est l'histoire d'un tréteau,
Il croyait qu'il était très tard, mais en fait il était très tôt.*

Table des matières

Nomenclature	15
Introduction générale	19
Première Partie - Contexte scientifique	23
1 Généralités	25
1.1 Cadre physique	25
1.1.1 Modélisation des écoulements fluides anisothermes	25
1.1.2 Les écoulements incompressibles anisothermes	26
1.2 Introduction à la Simulation des Grandes Échelles	27
1.2.1 Les différentes méthodes de simulation numérique	27
1.2.2 Problématiques associées à la SGE	28
1.3 Équations filtrées	29
2 Filtres et Simulation des Grandes Échelles	33
2.1 Filtres mono-directionnels	33
2.1.1 Généralités sur les filtres discrets	33
2.1.2 Discrétisation des filtres continus	34
2.1.3 Définition aux bords du domaine	36
2.2 Extension au cas multidimensionnel	36
2.2.1 Construction par combinaison linéaire	37
2.2.2 Construction par produit	37
2.3 Le filtre utilisé	38
2.4 Filtrage et centralisation	41
2.4.1 Notation et présentation du problème	41
2.4.2 Cas au cœur du domaine, loin des bords	41
2.4.3 Cas sur les bords du domaine	43

2.4.4	Conclusions	44
3	Modélisation sous-maille	45
3.1	Modèles sous-maille dynamiques	45
3.1.1	Modélisation fonctionnelle : Modèles à viscosité sous-maille	46
3.1.2	Modélisation structurelle	52
3.1.3	Améliorations des modèles	52
3.2	Modèles sous-maille thermiques	54
3.2.1	Modèles à diffusivité sous-maille	56
3.2.2	Modèles structurels	58
3.2.3	Améliorations	60
3.2.4	Cas général	61
3.3	Lois de paroi	64
	Deuxième partie - Canal plan	65
4	Introduction au canal plan	67
4.1	Domaine de calcul	67
4.2	Turbulence	68
4.2.1	Création de la turbulence et condition initiale	68
4.2.2	Maintien du nombre de Reynolds	69
4.3	Intérêts du canal plan	70
4.4	Objectifs de l'étude	71
5	Équations régissant le cas du canal plan	73
5.1	Équations applicables à l'intérieur du fluide	73
5.1.1	Équations physiques	73
5.1.2	Équations adimensionnées	74
5.2	Équations applicables à l'intérieur de la paroi	76
5.2.1	Équations physiques	76
5.2.2	Équations adimensionnées	76
5.3	Paramètres numériques retenus	78
5.3.1	Discrétisation spatiale	78
5.3.2	Équations de Navier-Stokes	80
5.3.3	Équations de température	81

5.3.4	Post-traitement	82
6	Résultats	85
6.1	Résultats Analytiques	85
6.1.1	Température moyenne dans le mur	85
6.1.2	Pénétration d'un signal sinusoïdal	86
6.2	Résultats numériques	88
6.2.1	Présentations des cas étudiés	88
6.2.2	Validation	89
6.2.3	Étude paramétrique sur le mur	98
6.3	Conclusion de l'étude du canal plan	106
	 Troisième partie - Té de mélange	 107
7	Introduction au Té de mélange	109
7.1	La fatigue thermique dans les Tés de mélange	109
7.1.1	Notion de fatigue	109
7.1.2	Le cas de la fatigue thermique	110
7.1.3	La fatigue thermique dans les centrales nucléaires	111
7.1.4	Les études sur les Tés de mélange	113
7.1.5	Les critères d'estimation de la fatigue thermique	118
7.1.6	Récapitulatif bibliographique	118
7.2	Importance de l'entrée turbulente	121
7.2.1	Génération de turbulence aléatoire	122
7.2.2	Méthodes à base de recyclage	122
7.2.3	Utilisation de bases de données	123
7.2.4	Méthodes mixtes	124
7.3	Définition de la géométrie	125
7.3.1	La géométrie	125
8	Choix des paramètres numériques	127
8.1	Schéma convectif pour la vitesse	127
8.1.1	Présentation du problème	127
8.1.2	Vers l'utilisation d'un autre schéma convectif	128
8.1.3	Application au Té de mélange	130

8.1.4	Conclusion	131
8.2	Choix de la longueur des branches	131
8.2.1	Descriptif de la méthodologie	131
8.2.2	Mode de calcul	132
8.2.3	Visualisations et calculs d'erreurs	133
8.2.4	Conclusion	136
8.3	Paramètres retenus	138
8.3.1	Définitions des variables	138
8.3.2	Discrétisation spatiale	140
8.3.3	Différences avec le cas du canal	140
8.3.4	Post-traitement	142
9	Résultats	143
9.1	Présentations des cas étudiés	143
9.2	Té à deux sections indentiques	144
9.2.1	Étude de l'écart type de température	144
9.2.2	Analyse spectrale	148
9.3	Té à petite section secondaire	151
9.3.1	Étude de l'écart type de température	151
9.3.2	Analyse spectrale	155
9.4	Conclusion de l'étude du Té de mélange	157
	Conclusion générale	159
	Bibliographie	163
	Annexes	171
A	Traitements statistiques	173
A.1	Généralités	173
A.1.1	Les poids	173
A.1.2	Les statistiques conservées en mémoire	173
A.2	Le moment d'ordre 1 : La moyenne \bar{u}	174
A.3	Le moment d'ordre 2 : L'écart type non biaisé $\sigma(u)$ ou u'	174

A.4	Le moment d'ordre 3 : Le skewness ou coefficient de symétrie noté $S(u)$	174
A.5	Le moment d'ordre 4 : Le kurtosis ou coefficient d'aplatissement noté $K(u)$. .	175
B	Canal à $Re_\tau = 590$	177
B.1	Présentation des cas étudiés	177
B.2	Validation	178
B.2.1	Champ de vitesse	178
B.2.2	Influence de la condition limite	180
B.2.3	Validation dans la base $\mathcal{B}_1 = \{K, G, d^{++}\}$	180
B.3	Étude paramétrique	185
B.3.1	Étude de K	185
B.3.2	Étude de G	186
B.3.3	Étude de d^{++}	186
C	Maillage du Té de mélange	189
C.1	Décomposition pour ISIS	189
C.2	Les contraintes et le paramétrage	189
C.3	L'algorithme de maillage	191
C.4	Résultats	191
D	Transformation de Fourier Discrète	195
D.1	Définition	195
D.2	Moyenne et TFD	195
D.3	Écart type et TFD	195
D.4	Normalisation	196

Nomenclature

Lettres latines

C_s	Constante du modèle de Smagorinsky	
C_w	Constante du modèle WALE	
d	Profondeur de paroi	m
f	Fréquence	Hz
\mathfrak{S}	Flux sous-maille thermique	K.m.s^{-1}
\mathbf{g}	Accélération de pesanteur	m.s^{-2}
G	Rapport des diffusivités thermiques	
h	Demi-hauteur du canal	m
H	Rapport des produits masse par capacité thermique	
K	Rapport des effusivités thermiques	
k	Nombre d'onde	m^{-1}
Pr	Nombre de Prandtl ($\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}$)	
Pr_{sm}	Nombre de Prandtl sous-maille	
P	Pression	Pa
q_w	Flux thermique à l'interface	
Re	Nombre de Reynolds ($\text{Re} = \frac{Uh}{\nu}$)	
Ri	Nombre de Richardson	
S_{ij}	Tenseur des déformations $S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$	s^{-1}
T	Température	K
T_{ref}	Température de référence	K
t	Temps	s
\mathbf{u}	Vitesse	m.s^{-1}
U	Module de la vitesse moyenne	m.s^{-1}
u_τ	Vitesse de frottement : $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} = \sqrt{\nu \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} \Big _{y=0}}$	m.s^{-1}
x	Coordonnée longitudinale	m
y	Coordonnée verticale	m
y^+	Coordonnée adimensionnelle ($y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$)	
z	Coordonnée transverse	m

Lettres grecques

$\overline{\Delta}$	Longueur de coupure associée au filtre	m
ϵ	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$
κ	Diffusivité moléculaire	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
κ_{sm}	Diffusivité sous-maille	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
λ	Conductivité thermique	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
μ	Viscosité dynamique	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
ν	Viscosité cinématique	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
ν_{sm}	Viscosité sous-maille	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
ρ	Masse volumique	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
σ	Écart type	
τ	Contrainte de cisaillement	Pa
τ_{ij}	Tenseur sous-maille	Pa
ω	Vorticité	s^{-1}

Indices

c	Relatif à la coupure du filtre
f	Relatif au fluide
i	Relatif à l'interface
rms	Grandeur fluctuante
τ	Grandeur caractéristique
w	Relatif au mur

Exposants

–	Grandeur filtrée dans la Partie I, moyenne dans les Parties II et III
'	Grandeur non résolue dans la Partie I, écart type dans les Parties II et III
$()^+$	Grandeur adimensionnée en utilisant l_τ comme longueur de référence
$()^*$	Grandeur adimensionnée en utilisant h comme longueur de référence
$()^{++}$	$()^+ \cdot \sqrt{G}$
$()^{**}$	$()^* \cdot \sqrt{G}$

Opérateurs mathématiques

δ_{ij}	Symbole de Kronecker
*	Convolution
∇	$(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$
∇^+	$(\partial/\partial x^+, \partial/\partial y^+, \partial/\partial z^+)$
∇^{++}	$(\partial/\partial x^{++}, \partial/\partial y^{++}, \partial/\partial z^{++})$

Abréviations

DNS	<i>Direct Numerical Simulation</i>
DSP	Densité Spectrale de Puissance
ISIS	Incendie SIMulé pour la Sûreté
LES	<i>Large Eddy Simulation</i>
MAC	<i>Marker And Cell</i>
MUSCL	<i>Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws</i>
PSD	<i>Power Spectral Density</i>
QUICK	Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics
RANS	<i>Reynolds Averaged Navier-Stokes</i>
SGE	Simulation des Grandes Échelles
SND	Simulation Numérique Directe
THINS	<i>Thermal-Hydraulics of Innovative Nuclear Systems</i>
TFD	Transformation de Fourier Discrète
WALE	<i>Wall Adapting Local Eddy</i>

Introduction générale et objectifs

Environ 80% de l'électricité française est d'origine nucléaire. Dans le cadre d'une politique énergétique de développement durable, et afin d'utiliser au mieux les ressources en uranium, des centrales nucléaires à neutrons rapides sont à l'étude. Plusieurs solutions techniques utilisent des métaux liquides comme fluide caloporteur, tels que le plomb ou le sodium. Ces installations présentent de nombreux Tés de jonction ou Tés de mélange pour gérer des flux, ainsi que des piquages afin de réaliser des mesures de contrôle. L'expérience a montré que ces fluides à faible nombre de Prandtl sont propices à engendrer des situations accidentelles de rupture de canalisation par fatigue thermique en aval des Tés de mélange. Ce risque pose de réels problèmes de sûreté. Non seulement la perte du réfrigérant conduit à une grande diversité d'accidents graves, mais de plus ces fluides caloporteurs tels que le sodium présentent une extrême réactivité au contact de l'air ou de l'eau.



Par le passé, plusieurs accidents ont eu lieu dans différentes centrales nucléaires à cause de fissurations de conduites en aval de Tés de mélange dues à des phénomènes de fatigue thermique. Pour les réacteurs français, nous pouvons citer le réacteur Phenix comme exemple de réacteur au sodium, et le réacteur de Civaux comme exemple de réacteur à eau pressurisée

dans lesquels ont eu lieu de tels incidents. Les problèmes engendrés peuvent être de différente nature :

- si le caloporteur est du sodium liquide, celui-ci réagit très violemment au contact de l'oxygène ou de l'eau, ce qui peut conduire à une aggravation rapide et importante de l'accident,
- si la fuite intervient dans le circuit primaire, il peut y avoir un risque de relâchement de particules radioactives à l'intérieur de l'enceinte de confinement,
- quelque soit la conduite, une fuite de caloporteur peut entraîner une perte de source froide au sein du réacteur et provoquer une surchauffe du cœur, quel que soit son mode de fonctionnement. Notons par exemple que pour le cas de l'accident de Civaux, le réacteur était à l'arrêt, et c'est le circuit d'évacuation de puissance résiduelle à froid qui a cédé.

L'existence de telles situations critiques justifie l'étude des fluctuations de température dans un Té de mélange. Cependant, les méthodes RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) généralement utilisées pour l'étude des configurations industrielles ne permettent pas une bonne estimation des grandeurs fluctuantes et les SND (Simulations Numériques Directes) sont beaucoup trop coûteuses. Il est alors naturel de penser à la Simulation des Grandes Échelles. Cette technique de simulation connaît depuis plusieurs décennies un formidable essor. Elle permet d'obtenir des simulations de qualité y compris sur les estimations des grandeurs fluctuantes, pour des coûts de calcul raisonnables. Cependant, pour les écoulements à faible nombre de Prandtl, les structures thermiques sont bien plus grandes que les structures dynamiques. La Simulation des Grandes Échelles des écoulements à faible nombre de Prandtl requiert donc des modèles particuliers.

Le projet européen THINS (Thermal-Hydraulics of Innovative Nuclear Systems) a pour but le développement de la thermohydraulique des réacteurs nucléaires de quatrième génération. Dans le cadre de ce projet, nous validerons nos méthodes de calculs et nos simulations sur le cas test académique du canal plan. Nous étudierons ensuite la faisabilité de l'utilisation d'un maillage grossier accompagné d'une loi de paroi pour les équations de Navier-Stokes, afin de diminuer les temps de calcul tout en gardant une bonne précision sur les résultats, en particulier pour la thermique. Sachant que les calculs de Simulation des Grandes Échelles sont particulièrement sensibles aux conditions limites, l'impact de la nature de la condition limite en température appliquée aux parois sera étudiée. Certains résultats analytiques tels que l'expression du champ thermique moyen à l'intérieur du mur, ou l'expression de la température instantanée à l'intérieur d'un mur semi infini soumis à une oscillation sinusoïdale forcée seront développés. En outre, ces simulations de canaux permettront de générer des entrées turbulentes utilisables pour les conditions d'entrée sur les Tés de mélange.

Dans le cadre du Té de mélange, deux géométries de Té à section carrée seront étudiées. Elles pourront présenter deux nombres de Reynolds différents au niveau des entrées. Une étude approfondie de l'estimation de la longueur de branche à simuler sera présentée. Le choix des

schémas numériques sera justifié, tout particulièrement le choix du schéma de convection de vitesse. Dans la pratique, toutes les oscillations de température ne présentent pas le même degré de dangerosité en fonction de leur fréquence. Les structures de très faible fréquence conduisent à des équilibres locaux de température dans le mur, tandis que les phénomènes de très haute fréquence glissent sur la surface de la paroi sans avoir le temps d'y pénétrer. Seule une gamme intermédiaire de fréquences comprise entre 0,1Hz et 20Hz présente un réel danger pour les aciers actuellement utilisés dans les installations industrielles. C'est pourquoi, après avoir déterminé le point de fluctuations maximales de température, cette dernière y sera enregistrée et son spectre analysé.

Les différentes simulations réalisées au cours de cette étude l'ont été avec le code de calcul ISIS (Incendie SIMulé pour la Sûreté). ISIS est un logiciel libre développé au LIE (Laboratoire de l'Incendie et des Explosions) de l'IRSN (Institut de Radioprotection et Sûreté Nucléaire). Il permet la simulation d'écoulements réactifs turbulents par des méthodes mixtes éléments finis et volumes finis. Ce code autorise également les simulations à grand nombre de mailles en permettant la parallélisation du calcul sur plusieurs processeurs. L'enrichissement du module de Simulation des Grandes Échelles constitue également l'un des objectifs majeurs de cette thèse.

Ce mémoire se présente en trois parties chacune composée de trois chapitres. La première partie pose le contexte scientifique et traite des méthodes numériques spécifiques à la Simulation des Grandes Échelles. Ainsi, au chapitre 1 nous présentons la Simulations des Grandes Échelles dans le contexte de la mécanique des fluides numérique. La SGE fait intervenir les notions de filtre et de modélisation sous-maille qui seront respectivement introduites aux chapitres 2 et 3.

La seconde partie de ce mémoire concerne l'étude du canal plan. Le chapitre 4 présente cette configuration, ainsi que les objectifs qui ont motivé cette étude. Au chapitre 5, les équations régissant cette configuration sont développées et les choix des paramètres numériques justifiés. Les résultats analytiques et numériques de cette étude sont présentés au chapitre 6.

Enfin, la troisième et dernière partie de ce mémoire est dédiée à l'étude de la configuration industrielle adimensionnée du Té de mélange. Au chapitre 7, un état de l'art de la fatigue thermique est dressé et la géométrie de notre étude définie. Les paramètres numériques spécifiques à cette configuration sont justifiés au chapitre 8, avant la présentation des résultats qui seront discutés au chapitre 9.

Première partie

Contexte scientifique

Chapitre 1

Généralités

Ce chapitre fixe le cadre physique de nos travaux, et propose une rapide introduction à la Simulation des Grandes Échelles. Nous évoquons également la notion d'équations filtrées.

1.1 Cadre physique

1.1.1 Modélisation des écoulements fluides anisothermes

Les équations régissant les écoulements de fluides anisothermes sont établies, moyennant un certain nombre d'hypothèses, à partir de considérations physiques de base :

- principe de conservation de la masse,
- relation fondamentale de la dynamique, pour chacune des composantes,
- premier principe de la thermodynamique.

Les équations transcrivant les deux premières considérations sont appelées équation de Navier-Stokes. L'équation traduisant le premier principe de la thermodynamique est également appelée équation de la chaleur ou équation d'énergie. On peut trouver ces équations sous différentes formes dans la littérature. Elles peuvent également être écrites suivant plusieurs niveaux de simplifications, en fonction du problème étudié. [Husson \(2007\)](#) et [Drikakis et Rider \(2004\)](#) distinguent quatre niveaux de simplification, qui sont rappelés ici, du plus complet au plus simplifié :

- les écoulements compressibles,
- les écoulements à faible nombre de Mach,
- les écoulements incompressibles dilatables, faisant intervenir l'approximation de Boussinesq,
- les écoulements incompressibles et non dilatables, où la température est considérée comme un scalaire passif.

Les écoulements compressibles sont les plus complets. Les variables du système sont :

- ρ , la masse volumique du fluide,
- u , la vitesse suivant la direction x ,
- v , la vitesse suivant la direction y ,

- w , la vitesse suivant la direction z ,
- P , la pression,
- T , la température.

Il y a alors 6 variables pour 5 équations. Une loi d'état est introduite pour compléter le système, par exemple la loi d'état des gaz parfaits.

Les équations régissant les écoulements à faible nombre de Mach sont obtenues par développements limités. Au final, l'une des principales différences avec les écoulements compressibles se situe au niveau de la loi d'état du fluide qui est écrite à l'ordre 0, c'est à dire pour des valeurs moyennes.

Pour les écoulements dilatables, la loi d'état n'est plus dépendante de la pression. On considère que ρ varie uniquement en fonction de la température et s'écrit :

$$\rho = \rho_{ref}[1 - \beta(T - T_{ref})] \quad (1.1)$$

β est le coefficient de dilatation et reste constant.

Enfin, pour les écoulement incompressibles, la loi d'état se résume en une valeur constante de ρ . L'équation traduisant le premier principe de la thermodynamique n'a donc plus aucune action sur les champs de vitesse et de pression. La température est considérée comme un scalaire passif. Une même résolution dynamique suffit à résoudre plusieurs configurations thermiques différentes. Nous pouvons également noter que dans ce cas, les équations régissant le transport de la chaleur ou d'une concentration chimique sont rigoureusement identiques.

1.1.2 Les écoulements incompressibles anisothermes

Les travaux présentés dans ce mémoire se placent dans le cadre des écoulements incompressibles anisothermes, pour l'étude du canal plan comme pour le Té de mélange. Le champ de température est considéré comme un scalaire passif. Concrètement, ceci revient à considérer que les écarts de température se situent à l'intérieur d'une plage de valeurs suffisamment petite pour que la densité du fluide reste quasiment constante. Cette hypothèse présente également plusieurs avantages :

- le système d'équation est simplifié, sa résolution numérique nécessite donc moins de mémoire et de ressources calculatoires,
- en s'affranchissant d'une variable (la densité) et d'une équation (la loi d'état), il est plus facile d'étudier les autres paramètres, et de se rapprocher des résultats présents dans la littérature.

De plus, en considérant la température comme un scalaire passif, la gravité peut dans certain cas ne plus avoir d'influence, comme pour les problèmes où la convection forcée est dominante par rapport à la convection naturelle. On s'affranchit alors de l'orientation spatiale de la géométrie.

En utilisant la convention d'Einstein de sommation des indices répétés, l'équation de conservation de masse s'écrit :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.2)$$

Pour chacune des composantes i de la vitesse, la conservation du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + F_i \quad (1.3)$$

où \mathbf{F} représente la résultante des forces extérieures, telles que la gravitation. La dernière équation traduit le premier principe de la thermodynamique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + S \quad (1.4)$$

où S représente une éventuelle source de chaleur.

En utilisant la convention de sommation des indices répétés, le système d'équations régissant les écoulements fluides anisothermes est donc le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + F_i \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u_j T}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + S \end{array} \right. \quad (1.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + F_i \end{array} \right. \quad (1.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u_j T}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + S \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Il se rencontre aussi sous forme vectorielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} T) = +\kappa \nabla^2 T + S \end{array} \right. \quad (1.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \end{array} \right. \quad (1.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} T) = +\kappa \nabla^2 T + S \end{array} \right. \quad (1.10)$$

ν représente la viscosité cinématique, rapport entre la viscosité dynamique μ et la masse volumique ρ . κ représente la diffusivité thermique. La conductivité thermique et la capacité thermique à pression constante seront noté respectivement λ et c_p .

1.2 Introduction à la Simulation des Grandes Échelles

1.2.1 Les différentes méthodes de simulation numérique

Depuis le développement de l'informatique, la simulation numérique prend une place importante dans la recherche et dans l'industrie. Elle permet de prédire de nombreux résultats aussi bien qualitatifs que quantitatifs sans avoir à mettre en place des expériences pouvant s'avérer coûteuses ou dangereuses.

Une des principales notions de la mécanique des fluides est la notions de turbulence. Si l'on regarde un écoulement fluide turbulent d'un point de vue statistique, un champ moyen apparaît sur lequel se superposent des fluctuations de différentes échelles. La problématique

de la simulation numérique des écoulements turbulents est d'évaluer avec plus ou moins de précision les moyennes et fluctuations de ces champs, sur la large gamme d'échelles présentes. Pour la simulation d'écoulements fluide turbulent, il existe aujourd'hui trois grandes familles de simulations numériques.

La méthode la plus répandue est la méthode RANS (pour Reynolds Average Navier Stokes). Une décomposition de Reynolds qui consiste à séparer les champs en une partie moyenne et une partie fluctuante est réalisée sur les variables de la simulation. Seules les équations des champs moyens sont simulées alors que les fluctuations sont modélisées. Il existe de nombreux modèles de turbulence pour les méthodes RANS, les plus connus étant les modèle $k - \epsilon$ et $k - \omega$. Le principal avantage de cette méthode réside dans son faible coût calculatoire. Cependant, ce type de simulation donne des résultats corrects pour les grandeurs moyennes, mais ne convient pas à la prédiction des fluctuations.

A l'opposée, une Simulation Numérique Directe (SND ou DNS en anglais pour Direct Numerical Simulation) donne une précision maximale. L'ensemble des phénomènes spatio-temporels est simulé. Néanmoins, les ressources calculatoires nécessaires sont énormes et souvent indisponibles. La mécanique des fluides présente la particularité de traiter des phénomènes sur une très large gamme d'échelles aussi bien spatiales que temporelles. La complexité des équations à résoudre varie en $\mathcal{O}(\text{Re}^3)$. Dans la pratique, les écoulements turbulents rencontrés ont des nombres de Reynolds dont l'ordre de grandeur varie de 10^3 à 10^6 . En faisant l'hypothèse qu'une simulation pour $\text{Re} = 10^3$ prendrait une journée, obtenir la même précision pour un problème identique à $\text{Re} = 10^6$, toutes choses égales par ailleurs, prendrait 2,7 millions d'années. Ceci illustre bien le fait que, malgré l'évolution actuelle des puissances de calcul, pour la majorité des applications industrielles étudiées à ce jour, les SND restent difficilement accessibles pour encore plusieurs décennies.

Une alternative possible est l'utilisation de la Simulation des Grandes Échelles (SGE). Cette méthode consiste à ne simuler que les grandes échelles, celles qui sont porteuses d'énergie, et à modéliser les plus petites, essentiellement dissipatrices, à travers un modèle sous mailles. Ce principe est illustré sur la figure 1.1. Formellement, cette séparation des échelles se traduit par l'application d'un filtre passe-haut en longueur d'onde (ou passe-bas en fréquence). Dans la pratique, elle s'effectue par le choix de la taille des mailles utilisées pour discrétiser le domaine de calcul. Cette technique de simulation permet de bien capter les phénomènes fluctuants, et présente un excellent compromis entre qualité de résultat et temps de calcul.

Ces trois techniques de simulations sont employées différemment suivant les besoins et les ressources disponibles. Une représentation schématique de leur principale différence est donnée sur la figure 1.2. Elles ne sont cependant pas les seules à exister. Ce sont les trois techniques principales, mais de nombreuses méthodes hybrides ont été développées. À titre d'exemple, les résultats obtenus pour la simulation d'une flamme sont représentés sur la figure 1.3.

1.2.2 Problématiques associées à la SGE

La SGE a été introduite par Smagorinsky (1963), et a été étudiée depuis par de nombreux auteurs. Aujourd'hui, nous sommes donc en mesure d'identifier certains des aspects importants de la SGE nécessaires à l'obtention de bons résultats.

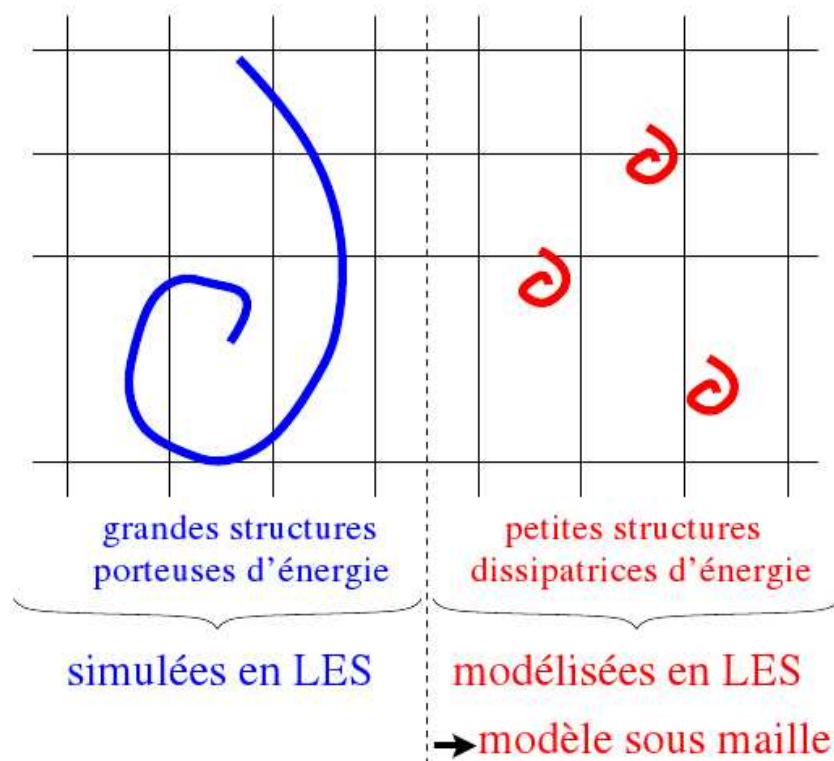


FIGURE 1.1 – Représentation schématique de la séparation des échelles en SGE sur une grille de calcul. Image tirée de [Husson \(2007\)](#)

La notion de filtre est très importante. Que ce soit pour la séparation des échelles, ou pour certaines méthodes de modélisation sous-maillages, il est important de bien connaître le ou les filtres utilisés ainsi que leur longueur de coupure.

Pour des écoulements fluides, l'expérience montre que les simulations sont relativement sensibles aux conditions aux limites. Pour obtenir de bons résultats, il est important d'avoir des conditions d'entrées turbulentes, et non laminares. Le développement d'une turbulence représentative de la réalité physique n'est pas chose aisée, et l'obtention d'une entrée turbulente satisfaisante constitue à elle seule une problématique importante de la SGE (et de la SND aussi).

Enfin, la modélisation des petites échelles, tant pour la dynamique que la thermique est sujet à débat. De nombreux modèles, spécifiques jusque dans leur approche, ont été développés puis améliorés au cours des dernières décennies.

Ces difficultés de la SGE seront abordées au cours de ce mémoire, et nous étudierons comment elles ont été traitées jusqu'à aujourd'hui.

1.3 Équations filtrées

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, la SGE fait intervenir la notion de filtre, et d'équation filtrée, de deux manières différentes : via les schémas numériques et le maillage

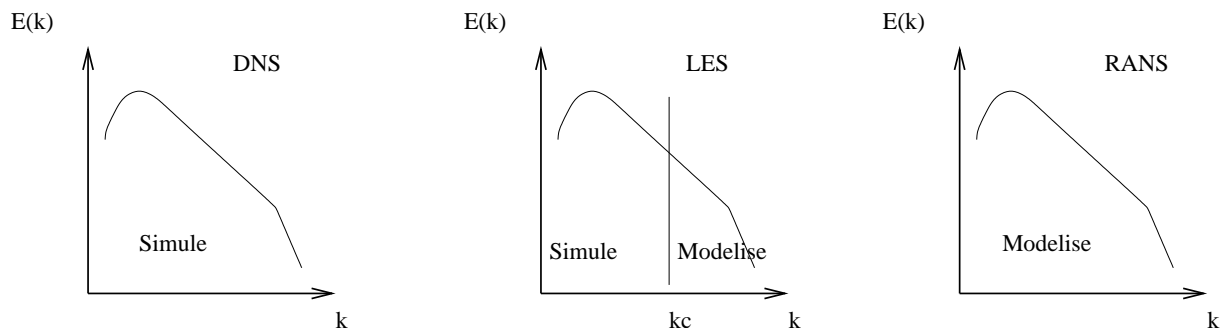


FIGURE 1.2 – Représentation schématique des différences entre DNS, SGE et RANS

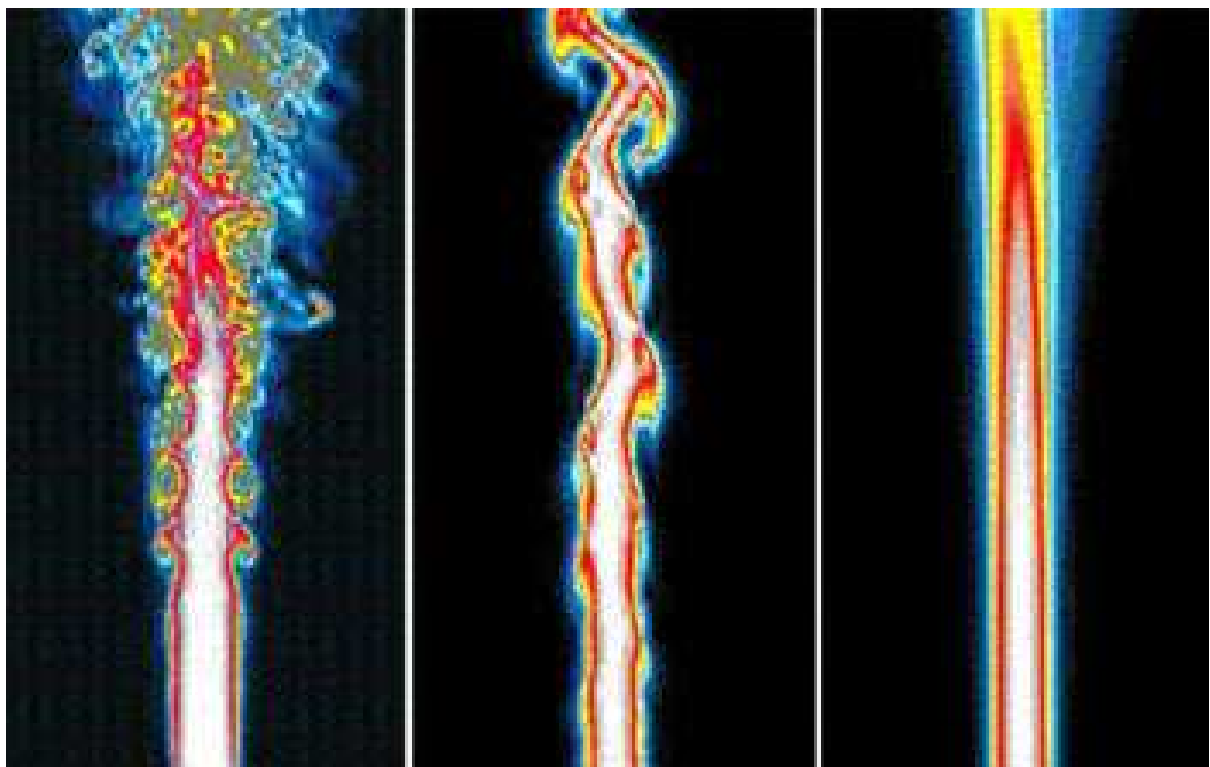


FIGURE 1.3 – Flamme simulée par DNS, SGE et RANS (Poitou (2009))

pour séparer les échelles, on parle alors de filtre implicite ; et via certaines méthodes pour des modélisations sous-mailles. On parle alors de filtre explicite ou filtre test. Le filtre de séparation des échelles est concrètement appliqué par le maillage utilisé sur la grille de calcul. C'est à ce type de filtres que nous allons nous intéresser maintenant. Leurs caractéristiques exactes, telles les longueurs de coupure, ainsi que les autres filtres que l'on peut avoir besoin de construire seront abordés au chapitre 2.

Tout au long de la première partie de ce manuscrit, nous noterons $\bar{\cdot}$ le filtre imposé par le maillage. La variable $\bar{\mathbf{u}}$ représentera donc le vecteur vitesse filtré et \bar{u}_i sa composante suivant la $i^{\text{ème}}$ direction. Afin de conserver la physique du problème et de permettre la manipulation

des équations de Navier-Stokes et d'énergie, il est plus pratique que le filtre vérifie les trois propriétés suivantes :

1. conservation des constantes :

$$a = \bar{a} \quad (1.11)$$

2. linéarité :

$$\overline{\phi + \psi} = \bar{\phi} + \bar{\psi} \quad (1.12)$$

3. commutativité avec la dérivation :

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \cdot} = \bar{\frac{\partial \phi}{\partial \cdot}} \quad (1.13)$$

En appliquant ce filtre aux équations régissant les écoulements fluides anisothermes vues au paragraphe 1.1.2, nous obtenons le système d'équations filtrées suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} + g_i \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{T}}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2} + \bar{S} \end{array} \right. \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} + g_i \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{T}}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2} + \bar{S} \quad (1.16)$$

Les variables filtrées sont accessibles, ce sont elles qui composent la grille de calcul. Cependant, ce n'est pas le cas des termes non linéaires $\bar{u}_i \bar{u}_j$ et $\bar{u}_j \bar{T}$ qui eux sont inconnus, et nécessitent donc une modélisation. La modélisation de ces deux termes est étudiée au chapitre 3.

Chapitre 2

Filtres et Simulation des Grandes Échelles

Plusieurs aspects de la SGE requièrent l'utilisation de filtres, avec l'estimation la plus précise possible de leur longueur ou fréquence de coupure. C'est par exemple le cas lors de la modélisation sous-maille, pour les méthodes basées sur l'évaluation de l'énergie à la coupure, ou pour les méthodes dynamiques d'évaluations des constantes. Nous allons donc maintenant présenter les filtres les plus classiques, définir leur discrétisation et évaluer leur fréquence de coupure avant d'en choisir un approprié à notre problématique. Le formalisme utilisé dans ce chapitre permet d'estimer précisément la longueur de coupure des filtres explicites. Cette estimation est parfois source d'erreurs dans la littérature, comme le souligne [Lund \(1997\)](#) à propos des travaux de [Najjar et Tafti \(1996\)](#) notamment.

2.1 Filtres mono-directionnels

2.1.1 Généralités sur les filtres discrets

Conformément aux notations utilisées par [Sagaut et Grohens \(1999\)](#) nous noterons $\bar{\phi}_i$ la valeur filtrée du champ ϕ au $i^{\text{ème}}$ point de maillage. Un filtre F défini sur $(2N + 1)$ points s'écrit formellement :

$$\bar{\phi}_i = F\phi_i \equiv \sum_{k=-N}^{k=N} a_k \phi_{i+k} \quad (2.1)$$

Les coefficients a_k définissent le filtre. La préservation des constantes implique

$$\sum_{k=-N}^{k=N} a_k = 1 \quad (2.2)$$

2.1.2 Discrétisation des filtres continus

Dans ce chapitre, ξ désigne une variable muette d'intégration. La valeur filtrée $\bar{\phi}(x)$ du champ $\phi(x)$ est ici définie par

$$\bar{\phi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - \xi)\phi(\xi)d\xi \quad (2.3)$$

où le noyau de convolution G caractérise le filtre. Afin de préserver les constantes, G doit avoir une intégrale de 1. [Sagaut et Grohens \(1999\)](#) montrent qu'il est possible de définir un filtre à l'aide d'un opérateur différentiel discret. Ceci conduit à

$$\bar{\phi}(x) = \phi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{k!} \frac{\partial^k \phi(\xi)}{\partial \xi^k} \Big|_{\xi=x} \quad (2.4)$$

où M_k représente le moment d'ordre k du noyau G défini par

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi)\xi^k d\xi \quad (2.5)$$

Les filtres les plus classiquement utilisés en SGE sont le filtre Boite et le filtre Gaussien. Le filtre boite est défini par

$$G(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{\Delta}} & \text{si } |\xi| \leq \frac{\bar{\Delta}}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\bar{\Delta}$ est la largeur de la Boite. En utilisant les formules de calcul des moments d'une distribution continue uniforme, nous obtenons pour le filtre boite :

$$M_1 = 0 \quad (2.6)$$

$$M_2 = \frac{\bar{\Delta}^2}{12} \quad (2.7)$$

En notant σ l'écart type de G , nous obtenons $M_2 = \sigma^2$ ce qui conduit à

$$\bar{\Delta} = \sqrt{12}\sigma \quad (2.8)$$

Cette formule sert de référence pour le calcul des largeurs des autres filtres. [Lund \(1997\)](#) définit la largeur $\bar{\Delta}$ d'un filtre via la relation (2.8), comme le produit de l'écart type du filtre par $\sqrt{12}$. Le filtre Gaussien quant à lui est défini par

$$G(\xi) = \left(\frac{\gamma}{\pi\bar{\Delta}^2}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-\gamma\xi^2}{\bar{\Delta}^2}\right) \quad (2.9)$$

Dans la pratique, le paramètre γ est pris égal à 6 afin d'assurer la relation (2.8). Le calcul des moments pour une loi Gaussienne (avec $\gamma = 6$) conduit à

$$M_1 = 0 \quad (2.10)$$

$$M_2 = \frac{\bar{\Delta}^2}{12} \quad (2.11)$$

Nous constatons donc que jusqu'à l'ordre 2, les filtres discrets Boite et Gaussien ainsi construits ont des moments identiques et sont donc équivalents. Les moments impairs de ces deux filtres étant nuls, ils sont même identiques jusqu'à l'ordre 3. [Sagaut et Grohens \(1999\)](#) poussent le développement jusqu'en $O(\bar{\Delta}^{10})$ pour ces deux filtres. Afin qu'ils soient équivalents à l'ordre 3 (resp. ordre n) aux filtres continus, il faut cependant que les opérateurs différentiels soient définis à partir de 4 (respectivement n+1) nœuds. Leur expression est alors

$$\bar{\phi}(x) = \phi(x) + \frac{\bar{\Delta}^2}{24} \frac{\partial^2 \phi(\xi)}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=x} + O(\bar{\Delta}^4) \quad (2.12)$$

où $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ est l'opérateur discret de dérivée seconde utilisé sur la grille de calcul. Ainsi, pour un opérateur défini par l'interpolation de 3 points par un polynôme de degré 2, sur un maillage quelconque, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \phi(\xi)}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=x_i} = \phi_i'' = \frac{2(x_i - x_{i-1})(\phi_{i+1} - \phi_i) - 2(x_{i+1} - x_i)(\phi_i - \phi_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} \quad (2.13)$$

Dans le cas particulier du maillage à pas constant h, où $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = h$ nous retrouvons bien la formule classique

$$\phi_i'' = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} \quad (2.14)$$

La valeur filtrée discrète $\bar{\phi}_i$ s'exprime alors comme suit :

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{24} \frac{\bar{\Delta}^2}{h^2} (\phi_{i+1} + \phi_{i-1}) + \frac{1}{12} \left(12 - \frac{\bar{\Delta}^2}{h^2}\right) \phi_i \quad (2.15)$$

$\frac{\bar{\Delta}}{h}$ représente le rapport des largeurs entre le filtre test que l'on est en train de définir, et le filtre dû au maillage. En accord avec l'équation (2.15), la bonne largeur du filtre définie par :

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{4} (\phi_{i+1} + \phi_{i-1}) + \frac{1}{2} \phi_i \quad (2.16)$$

est celle utilisée par [Beaubert et Viazzo \(2003\)](#), c'est à dire $\bar{\delta} = \sqrt{6}$. Si l'on désire obtenir un filtre de taille deux fois supérieure à celui induit par le maillage, on retrouve le filtre utilisé par de nombreux auteurs :

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{6} (\phi_{i+1} + \phi_{i-1}) + \frac{2}{3} \phi_i \quad (2.17)$$

Dans le cas général d'un maillage quelconque, pour l'opérateur discret de dérivée seconde défini par interpolation de trois points par un polynôme de degré 2, nous proposons d'approximer la largeur du filtre dû au maillage par $x_{i+1} - x_{i-1}$.

2.1.3 Définition aux bords du domaine

Il se pose maintenant un problème de définition sur les bords du domaine pour définir l'opérateur de dérivée seconde. Pour définir une dérivée seconde ayant la possibilité d'être différente de 0, il faut au minimum 3 points (à interpoler avec un polynôme de degré 2). Nous pouvons donc utiliser le nœud du bord et 2 points vers l'intérieur du domaine pour définir un polynôme, et ainsi faire une estimation de la dérivée seconde. Ceci revient à prolonger la dérivée seconde du second nœud vers le premier nœud. Nous obtenons alors

$$\left. \frac{\partial^2 \phi(\xi)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=x_1} = \left. \frac{\partial^2 \phi(\xi)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=x_2} \quad (2.18)$$

ce qui permet de définir une valeur filtrée pour ϕ . Nous avons en fait approché l'opérateur dérivée seconde centrée, par l'opérateur dérivée seconde à droite (ou à gauche en fonction du bord). Attention cependant, le filtre ainsi défini n'est plus positif.

Une autre solution pourrait consister à ne pas considérer les valeurs inexistantes dont le filtre aurait besoin, et de répartir ces poids sur les valeurs existantes, soit équitablement, soit au prorata des poids de ces valeurs. Cela revient dans le premier cas à ajouter une constante à ces poids afin que leur somme reste égale à 1, dans le second cas à les multiplier par une constante toujours afin que leur somme reste égale à 1. Pour le filtre défini par la relation (2.17), le changement d'opérateur conduit à

$$\bar{\phi}_1 = \frac{7}{6}\phi_1 - \frac{1}{3}\phi_2 + \frac{1}{6}\phi_3 \quad (2.19)$$

Considérer uniquement les valeurs existantes avec préservation des constantes par répartition équitable des poids conduit à

$$\bar{\phi}_1 = \frac{3}{4}\phi_1 + \frac{1}{4}\phi_2 \quad (2.20)$$

Et la considération unique des valeurs existantes avec préservation des constantes par répartition proportionnelle des poids conduit à

$$\bar{\phi}_1 = \frac{4}{5}\phi_1 + \frac{1}{5}\phi_2 \quad (2.21)$$

Dans la pratique, des conditions aux limites physiques peuvent venir apporter de l'information sur les valeurs filtrées aux bords du domaine. Une condition de Dirichlet par exemple conduira à

$$\bar{\phi}_1 = \phi_1 \quad (2.22)$$

2.2 Extension au cas multidimensionnel

[Sagaut et Grohens \(1999\)](#) proposent une extension au cas multidimensionnel de deux manières possibles. La première construction est effectuée par combinaison linéaire des filtres mono-directionnels, et revient à appliquer simultanément les filtres suivant chaque direction. La seconde construction est réalisée par multiplication des filtres mono-directionnels et revient à l'application successive des différents filtres.

2.2.1 Construction par combinaison linéaire

Dans ce cas, chaque direction est filtrée indépendamment des autres. Un tel filtre peut s'écrire formellement

$$F^p = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p F^i \quad (2.23)$$

où p est la dimension de l'espace. Le champ filtré s'exprime alors en fonction de $2pN + 1$ points (si les filtres mono-directionnels sont tous définis sur N points) et s'écrit conformément aux notations utilisées par [Sagaut et Grohens \(1999\)](#) pour $p = 3$

$$\bar{\phi}_{i,j,k} = F^p \phi_{i,j,k} = \frac{1}{3} \sum_{l=-N}^N a_l (\phi_{i+l,j,k} + \phi_{i,j+l,k} + \phi_{i,j,k+l}) \quad (2.24)$$

Si les filtres sont différents suivant les directions, la valeur filtrée d'un champ tridimensionnel s'écrit alors (pour des filtres mono-directionnels à nombre impair de points)

$$\bar{\phi}_{i,j,k} = F^p \phi_{i,j,k} = \sum_{l=-N_1}^{N_1} a_{1,l} \phi_{i+l,j,k} + \sum_{l=-N_2}^{N_2} a_{2,l} \phi_{i,j+l,k} + \sum_{l=-N_3}^{N_3} a_{3,l} \phi_{i,j,k+l} \quad (2.25)$$

Avec la contrainte de préservation des constantes

$$\sum_{p=1}^3 \sum_{l=-N_p}^{N_p} a_{p,l} = 1 \quad (2.26)$$

Un tel filtre peut être représenté comme le montre la figure (2.1)

2.2.2 Construction par produit

Dans ce cas, les directions sont filtrées séquentiellement. Un tel filtre peut s'écrire formellement :

$$F^p = \prod_{i=1}^p F^i \quad (2.27)$$

La valeur filtrée d'un champs tridimensionnel s'écrit alors (pour des filtres monodirectionnels à nombre impair de points) :

$$\bar{\phi}_{i,j,k} = F^p \phi_{i,j,k} = \sum_{l=-N_1}^{N_1} \sum_{m=-N_2}^{N_2} \sum_{n=-N_3}^{N_3} a_{1,l} a_{2,m} a_{3,n} \phi_{i+l,j+m,k+n} \quad (2.28)$$

avec la contrainte de préservation des constantes :

$$\forall p, \sum_{l=-N_p}^{N_p} a_{p,l} = 1 \quad (2.29)$$

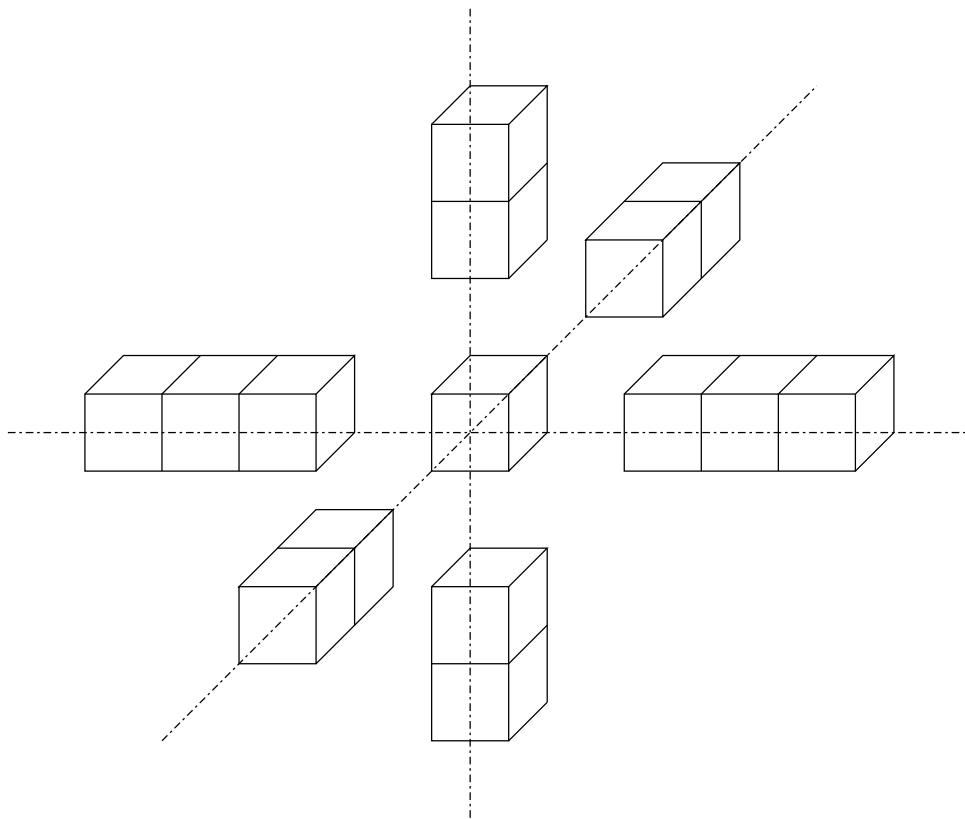


FIGURE 2.1 – Représentation graphique du support d'un filtre tridimensionnel construit par combinaison linéaire

Un filtre multidimensionnel construit par produit peut être représenté comme le montre la figure (2.2). Il fait appel à plus de valeurs que le filtre construit par combinaison linéaire. Son support est plus large. Cependant [Sagaut \(1998\)](#) remarque que les filtres construits par produit présentent une meilleure approche de l'aspect tridimensionnel des champs, et sont également plus sensibles aux modes croisés.

2.3 Le filtre utilisé

Nous retiendrons le filtre Boite tridimensionnel à l'ordre 2. Compte tenu des schémas numériques utilisés (rarement d'ordre supérieur à 2), il est inutile d'utiliser un ordre plus élevé. Comme nous l'avons vu, à l'ordre 2 il est équivalent au filtre Gaussien. Il sera construit par produit, et appliqué sur un maillage irrégulier. Les problèmes aux bords seront traités par la considération des contraintes physiques, et donc par les conditions aux limites. Considérons une direction ζ de l'espace ($\zeta \in \{x, y, z\}$), les coordonnées sur les autres directions étant maintenues constantes. D'après les équations (2.12), (2.13) et (2.8), le filtre mono-directionnel F^ζ

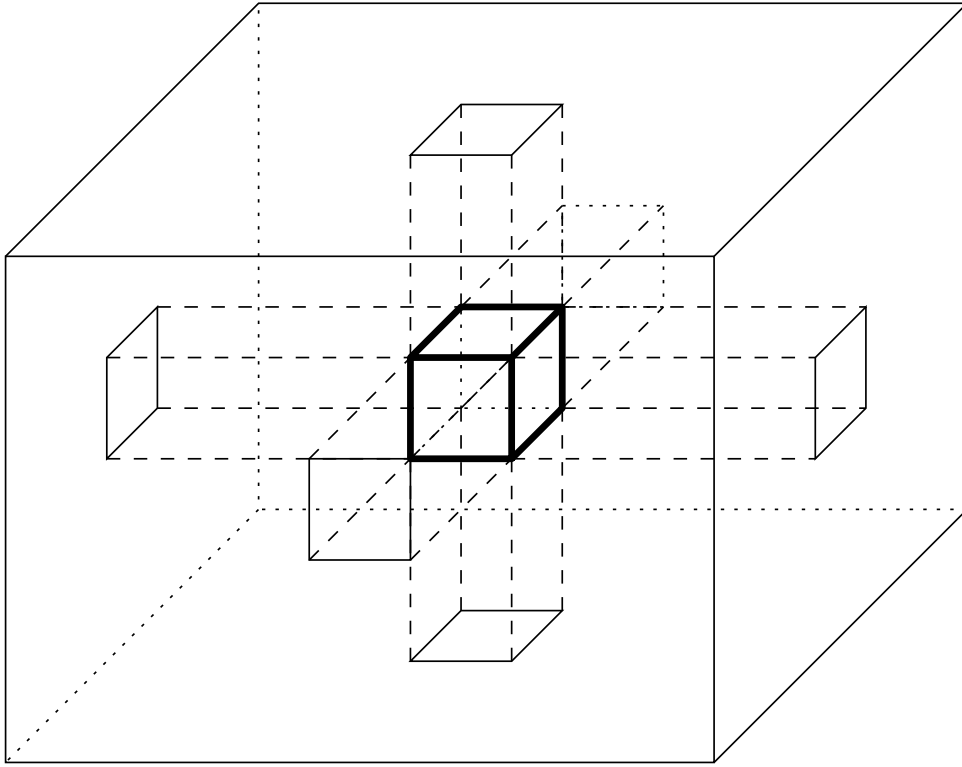


FIGURE 2.2 – Représentation graphique du support d'un filtre tridimensionnel construit par produit

dans la direction ζ s'exprime comme

$$F^\zeta(\phi_i) = \bar{\phi}_{\zeta_i} = \sum_{k=-1}^{k=1} a_{\zeta,k} \phi_{\zeta_i+k} \quad (2.30)$$

où les $a_{\zeta,k}$ sont définis par

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\zeta,-1} = \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}}{12(\zeta_i - \zeta_{i-1})} \end{array} \right. \quad (2.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\zeta,0} = 1 - \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}}{12} \left(\frac{1}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} + \frac{1}{\zeta_i - \zeta_{i-1}} \right) \end{array} \right. \quad (2.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\zeta,1} = \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}}{12(\zeta_{i+1} - \zeta_i)} \end{array} \right. \quad (2.33)$$

On notera que $\bar{\Delta} = \zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}$. Le filtre tridimensionnel utilisé est donc défini sur l'intérieur du domaine par :

$$\bar{\phi}_{i,j,k} = F^p \phi_{i,j,k} = \sum_{l=-N_1}^{N_1} \sum_{m=-N_2}^{N_2} \sum_{n=-N_3}^{N_3} A_{l,m,n} \phi_{i+l,j+m,k+n} \quad (2.34)$$

où

$$A_{l,m,n} = a_{x,l}a_{y,m}a_{z,n} \quad (2.35)$$

En cas de pas constant, le support de ce filtre est celui représenté sur la figure 2.3. Avec ces coefficients, et compte tenu des définitions présentées dans ce chapitre, ce filtre a une longueur de coupure deux fois supérieure à celle du filtre implicite induit par le maillage.

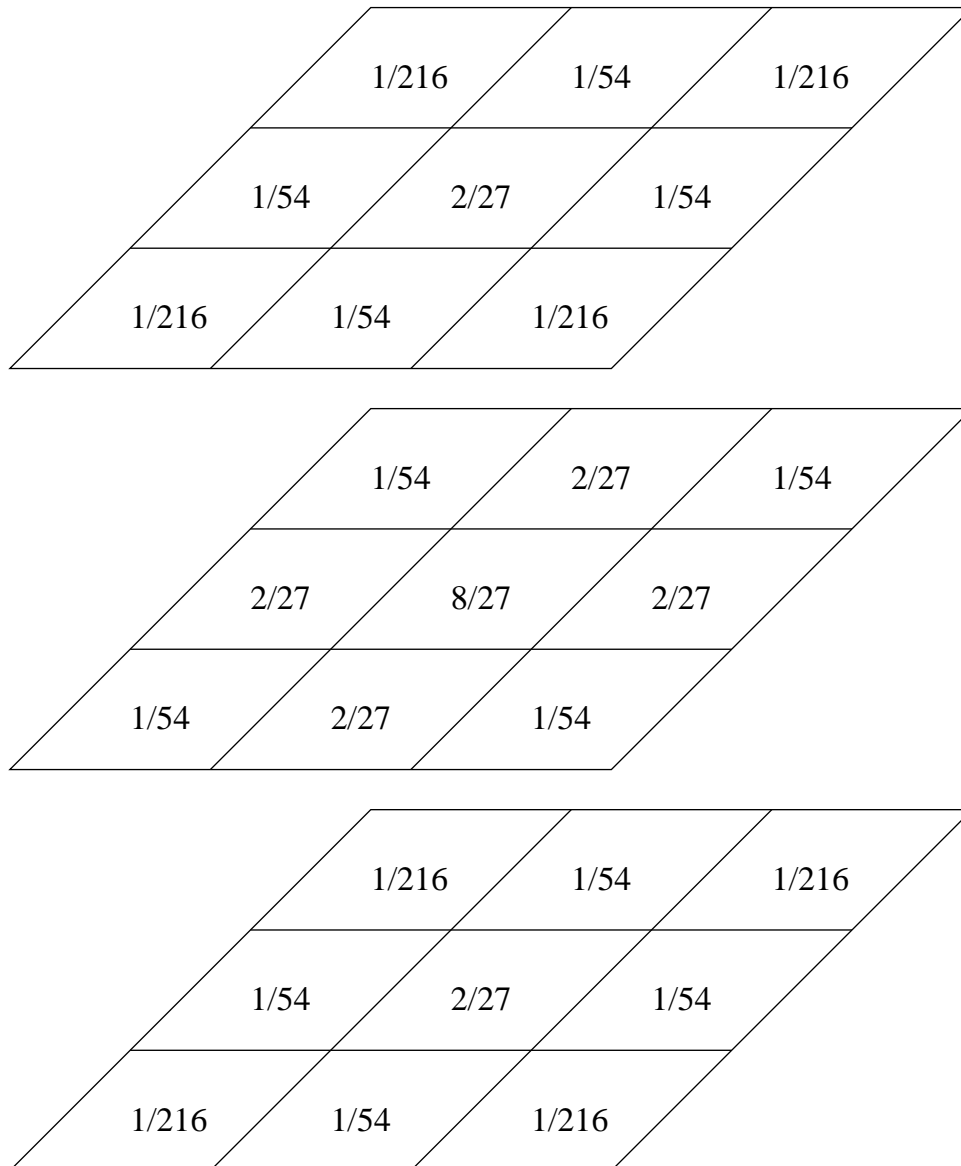


FIGURE 2.3 – Représentation graphique du filtre Boite/Gaussien à l'ordre 2 en cas de pas constant. Pour les frontières du domaine, au moment d'appliquer le support, on retranche 1 au coefficient central, et on ajoute 1 au coefficient correspondant au nœud à filtrer. Les valeurs indiquées représentent les $a_{\zeta,k}$.

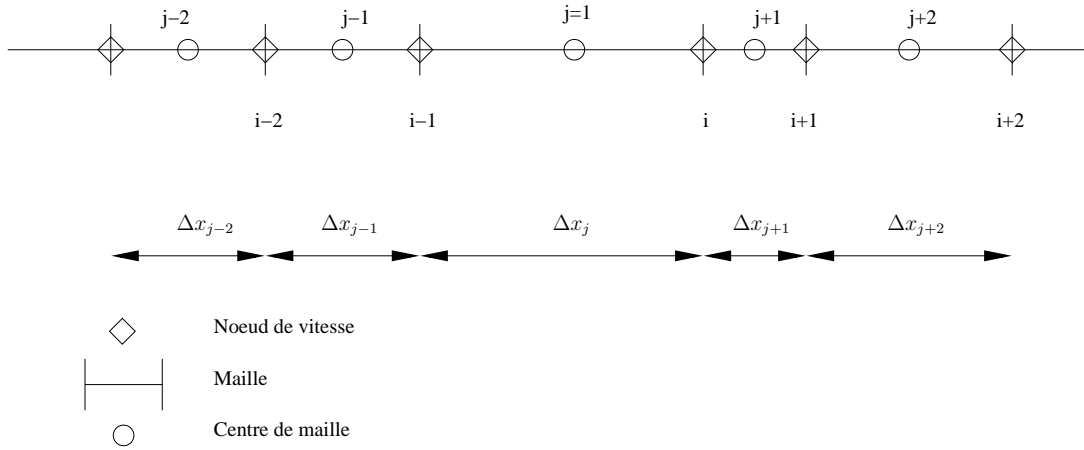


FIGURE 2.4 – Représentation de la grille de calcul en 1D ainsi que les notations utilisées

2.4 Filtrage et centralisation

Lors de l'utilisation d'une méthode dynamique pour l'évaluation d'un coefficient dans les modèles sous-maille, nous sommes amenés à évaluer au sein d'une maille la vitesse filtrée. Avec des éléments de type MAC, les noeuds de vitesse sont décalés. Les opérations de "centralisation" (consistant à obtenir à partir des valeurs sur les faces une évaluation du champ au centre de la maille) et de filtrage ne sont a priori pas forcément commutatives. Or l'étude des méthodes dynamiques ne précise pas si un ordre sur ces opérations est préférable à l'autre. Nous allons étudier ici les cas où ces opérations sont commutatives, et sinon quelles sont les différences.

2.4.1 Notation et présentation du problème

Nous traiterons le cas du filtre 1D. Comme nous l'avons vu à la section 2.2, un filtre 3D est une somme ou un produit de filtres 1D. Les résultats seront transposables. Nous utiliserons les notations suivantes :

i : indice du noeud décalé

j : indice du noeud centralisé, tel que $x_j = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$

A_{-1}^i : coefficient du filtre sur les noeuds décalés pour le noeud d'indice $i - 1$

A_{-1}^j : coefficient du filtre sur les noeuds centralisés pour le noeud d'indice $j - 1$

x_i : abscisse du $i^{\text{ème}}$ noeud de vitesse

Δx_j : taille de la $j^{\text{ème}}$ maille. $\Delta x_j = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$

$\tilde{v}_j : v \rightarrow$ filtrage \rightarrow centralisation

$\hat{v}_j : v \rightarrow$ centralisation \rightarrow filtrage

2.4.2 Cas au cœur du domaine, loin des bords

Nous allons calculer les valeurs de \tilde{v}_j et \hat{v}_j loin des bords du domaine et déterminer à quelles conditions elles sont égales.

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}_j &= \frac{1}{2} (\tilde{v}_{i-1} + \tilde{v}_i) \\
 &= \frac{1}{2} [A_{-1}^{i-1}v_{i-2} + A_0^{i-1}v_{i-1} + A_{+1}^{i-1}v_i + A_{-1}^i v_{i-1} + A_0^i v_i + A_{+1}^i v_{i+1}] \\
 &= \frac{1}{2} [A_{-1}^{i-1}v_{i-2} + (A_0^{i-1} + A_{-1}^i)v_{i-1} + (A_{+1}^{i-1} + A_0^i)v_i + A_{+1}^i v_{i+1}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{v}_j &= A_{-1}^j v_{j-1} + A_0^j v_j + A_{+1}^j v_{j+1} \\
 &= A_{-1}^j \left(\frac{1}{2}v_{i-2} + \frac{1}{2}v_{i-1}\right) + A_0^j \left(\frac{1}{2}v_{i-1} + \frac{1}{2}v_i\right) + A_{+1}^j \left(\frac{1}{2}v_i + \frac{1}{2}v_{i+1}\right) \\
 &= \frac{1}{2} [A_{-1}^j v_{i-2} + (A_{-1}^j + A_0^j)v_{i-1} + (A_0^j + A_{+1}^j)v_i + A_{+1}^j v_{i+1}]
 \end{aligned}$$

Les opérations de filtrage et de centralisation sont commutatives si et seulement si les coefficients sont égaux, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{-1}^{i-1} = A_{-1}^j \\ A_0^{i-1} + A_{-1}^i = A_{-1}^j + A_0^j \\ A_{+1}^{i-1} + A_0^i = A_0^j + A_{+1}^j \\ A_{+1}^i = A_{+1}^j \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.36) \\ (2.37) \\ (2.38) \\ (2.39) \end{array}$$

Condition sur l'équation (2.36) :

$$\begin{aligned}
 A_{-1}^{i-1} &= A_{-1}^j \\
 \frac{x_i - x_{i-2}}{12(x_{i-1} - x_{i-2})} &= \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{12(x_j - x_{j-1})} \\
 \frac{x_i - x_{i-2}}{x_{i-1} - x_{i-2}} &= \frac{x_i + x_{i+1} - x_{i-2} - x_{i-1}}{x_{i-1} + x_i - x_{i-2} - x_{i-1}} \\
 \frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} &= \frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + \Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \\
 \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} &= \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \\
 \Delta x_{i+1} &= \frac{(\Delta x_i)^2}{\Delta x_{i-1}}
 \end{aligned}$$

On démontre par récurrence qu'un tel maillage est un maillage progressif géométrique de première maille Δx_1 et de raison $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$. De la même manière et par symétrie, la condition 2.39 amène à la même condition.

Condition sur l'équation (2.37) :

$$\begin{aligned}
 A_0^{i-1} + A_{-1}^i &= A_{-1}^j + A_0^j \\
 1 - A_{-1}^{i-1} - A_{+1}^{i-1} + A_{-1}^i &= A_{-1}^j + 1 - A_{-1}^j - A_{+1}^j
 \end{aligned}$$

D'après la condition (2.36), $A_{-1}^{i-1} = A_{-1}^j$. D'où :

$$\begin{aligned} -A_{+1}^{i-1} + A_{-1}^i &= A_{-1}^j - A_{+1}^j \\ \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{x_i - x_{i-2}}{x_i - x_{i-1}} &= \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} - \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{x_{j+1} - x_j} \\ \frac{\Delta x_{j+1} - \Delta x_{j-1}}{\Delta x_j} &= \frac{\Delta x_{j-1} + 2\Delta x_j + \Delta x_{j+1}}{\Delta x_j + \Delta x_{j-1}} - \frac{\Delta x_{j-1} + 2\Delta x_j + \Delta x_{j+1}}{\Delta x_{j+1} + \Delta x_j} \\ \frac{\Delta x_{j+1} - \Delta x_{j-1}}{\Delta x_j} &= \frac{\Delta x_{j+1} + \Delta x_j}{\Delta x_j + \Delta x_{j-1}} - \frac{\Delta x_j + \Delta x_{j-1}}{\Delta x_{j+1} + \Delta x_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta x_{j+1})^2 \Delta x_j - (\Delta x_{j-1})^2 \Delta x_{j+1} - (\Delta x_j)^2 \Delta x_{j+1} + (\Delta x_j)^2 \Delta x_{j-1} &= 0 \\ \Delta x_{i+1} \Delta x_{i-1} (\Delta x_{i+1} - \Delta x_{i-1}) + (\Delta x_i)^2 (\Delta x_{i-1} - \Delta x_{i+1}) &= 0 \\ (\Delta x_{i+1} - \Delta x_{i-1}) [\Delta x_{i+1} \Delta x_{i-1} - (\Delta x_i)^2] &= 0 \\ \Delta x_{i+1} = \Delta x_{i-1} \quad \text{ou} \quad \Delta x_{i+1} = \frac{(\Delta x_i)^2}{\Delta x_{i-1}} \end{aligned}$$

De la même manière et par symétrie, la condition 2.38 amène à la même condition.

Il en résulte la condition nécessaire et suffisante suivante : pour que les opérations de filtrage et de centralisation soient commutatives au cœur du domaine de calcul, le maillage doit être progressif de loi géométrique. Il est à noter qu'un maillage régulier est un cas particulier de maillage progressif de loi géométrique .

Nous allons maintenant étudier ce qui se passe sur les bords du domaine.

2.4.3 Cas sur les bords du domaine

Nous allons maintenant calculer les valeurs de \tilde{v}_j et \hat{v}_j sur les bords du domaine et déterminer à quelles conditions elles sont égales.

$$\begin{aligned} \tilde{v}_j &= \frac{1}{2} \tilde{v}_0 + \frac{1}{2} \tilde{v}_1 \\ &= \frac{1}{2} (v_0 + A_{-1}^{i=1} v_0 + A_0^{i=1} v_1 + A_{+1}^{i=1} v_2) \\ &= \frac{1}{2} [(A_{-1}^{i=1} + 1)v_0 + A_0^{i=1} v_1 + A_{+1}^{i=1} v_2] \end{aligned}$$

Le calcul de \hat{v}_j est quelque peu différent. En effet le calcul de la vitesse filtrée sur la première maille requiert un point supplémentaire, qui n'existe pas. Il faut donc se contenter de la valeur limite au bord. Les coefficients A^i et A^j définis plus haut ne conviennent donc pas. Nous effectuons donc ici un filtrage à 3 points, utilisant le noeud de vitesse au bord, et les valeurs

centralisées sur les deux premières mailles. Nous noterons les coefficients B , avec

$$\begin{cases} B_{-1} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2} - x_0}{12 \left(\frac{x_0+x_1}{2} - x_0 \right)} & (2.40) \\ B_0 = 1 - B_{-1} - B_{+1} & (2.41) \\ B_{+1} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2} - x_0}{12 \left(\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{x_0+x_1}{2} \right)} & (2.42) \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \hat{v}_j &= B_{-1}v_0 + B_0 \frac{v_0 + v_1}{2} + B_{+1} \frac{v_1 + v_2}{2} \\ &= \left(B_{-1} + \frac{B_0}{2} \right) v_0 + \frac{B_0 + B_{+1}}{2} v_1 + \frac{B_{+1}}{2} v_2 \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe un maillage tel que les opérations de filtrage et de centralisation soient commutatives sur le bord. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A_{-1}^{i=1} + 1) &= B_{-1} + \frac{B_0}{2} \\ A_{-1}^{i=1} + 1 &= B_{-1} + 1 - B_{+1} \\ A_{-1}^{i=1} &= B_{-1} - B_{+1} \\ \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} &= \frac{\frac{x_1+x_2}{2} - x_0}{\frac{x_0+x_1}{2} - x_0} - \frac{\frac{x_1+x_2}{2} - x_0}{\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{x_0+x_1}{2}} \\ \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1} &= \frac{\frac{\Delta x_1 + \frac{\Delta x_2}{2}}{\frac{\Delta x_1}{2}}}{\frac{\Delta x_1}{2}} - \frac{\frac{\Delta x_1 + \frac{\Delta x_2}{2}}{\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2}}}{\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2}} \\ 1 + \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} &= 2 + \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} - 1 - \frac{\Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2} \\ \frac{\Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2} &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui est absurde car Δx_1 ne peut pas valoir 0. Nous pouvons donc en déduire que quelque soit le maillage utilisé, notre filtre ne commute pas avec la centralisation sur le bord du domaine.

2.4.4 Conclusions

Même si nous ne pouvons pas totalement résoudre le problème sur les bords, un maillage progressif en loi géométrique limite les erreurs lors des opérations de filtrage. Les erreurs sont confinées sur les bords et sur la maille centrale du domaine, ou la progression n'est localement plus géométrique.

En outre, l'utilisation d'une loi de paroi permet d'utiliser un maillage uniforme, qui est numériquement un cas particulier du maillage géométrique. Un maillage uniforme enlève aussi le problème qui apparaît sur la maille centrale.

Chapitre 3

Modélisation sous-maille

Dans la section 1.3, nous avons filtré les équations régissant les écoulements de fluides incompressibles anisothermes. Deux termes inconnus sont apparus. Le terme $\overline{u_i u_j}$ pour l'équation de quantité de mouvement, et le terme $\overline{u_i T}$ pour l'équation d'énergie. Dans ce chapitre, nous allons étudier comment traiter ces deux termes au moyen d'une modélisation sous maille. Nous présenterons également les lois de paroi les plus célèbres.

3.1 Modèles sous-maille dynamiques

Cette section est consacrée à la modélisation du terme inconnu $\overline{u_i u_j}$ apparaissant dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement filtrée (1.15).

Nous pouvons considérer que chaque variable peut être décomposée en une partie résolue, et une partie non résolue. Nous noterons $u_i = \overline{u_i} + u'_i$, où $\overline{u_i}$ représente la partie résolue ou filtrée, et u'_i représente la partie non résolue. Leonard (1974) propose alors d'écrire le terme non linéaire $\overline{u_i u_j}$ de la façon suivante :

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\overline{u_i} + u'_i)(\overline{u_j} + u'_j)} \quad (3.1)$$

$$= \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} + \overline{\overline{u_i} u'_j} + \overline{u'_i \overline{u_j}} + \overline{u'_i u'_j} \quad (3.2)$$

Les équations filtrées (1.14) et (1.15) peuvent aussi se réécrire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i} \overline{u_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2} + \overline{F_i} - \frac{\partial(\overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j})}{\partial x_j} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Il reste donc à modéliser le terme $\overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$, qui sera noté par la suite τ_{ij} comme souvent dans la littérature.

Il existe une multitude de modèles sous-maille permettant de modéliser les petites échelles (cf. Sagaut (1998)). Ils sont nombreux à avoir été développés dans le cadre de la turbulence homogène isotrope. Leur utilisation pour des calculs dans des géométries plus complexes se

justifie alors en considérant que l'écoulement est localement homogène isotrope. Ces modèles peuvent se regrouper en deux grandes catégories, les modèles fonctionnels et les modèles structuraux. Une représentation schématique de la classification des modèles proposée par [Sagaut \(1998\)](#) est représentée en figure 3.1.

Les modèles dits fonctionnels considèrent que l'action des échelles sous-maille sur les échelles résolues est essentiellement énergétique, et modélisent le terme $\nabla\tau_{ij}$ dans son ensemble par un terme ayant un effet similaire (essentiellement dissipatif). Ces modèles se traduisent dans l'espace physique par une viscosité sous-maille ν_{sm} . Selon [Sagaut \(1998\)](#), ces viscosités peuvent être évaluées suivant trois grands principes :

1. En se basant sur les échelles résolues,
2. En se basant sur l'énergie à la fréquence de coupure,
3. En se basant sur les échelles sous-maille.

3.1.1 Modélisation fonctionnelle : Modèles à viscosité sous-maille

Nous ne présenterons ici que des modèles applicables à l'espace physique. Pour des modèles de viscosité effective applicables à l'espace spectral, le lecteur pourra se reporter à [Sagaut \(1998\)](#).

On note S_{ij} le tenseur des déformations défini par :

$$S = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) \quad (3.5)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (3.6)$$

En remarquant que pour des fluides incompressibles, le terme $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$ des équations de Navier-Stokes peut s'écrire $2\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}$, le système devient

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial \bar{S}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \bar{f}_i \end{cases} \quad (3.8)$$

Les modèles basés sur la viscosité sous-maille utilisent alors l'hypothèse de Boussinesq, qui propose de modéliser τ_{ij} sous une forme similaire à $2\nu\bar{S}_{ij}$. Or \bar{S}_{ij} est à trace nulle pour les fluides incompressibles, on ne peut donc modéliser que des tenseurs à trace nulle également. Seule la partie anisotrope de τ_{ij} est donc modélisée ainsi. Ce qui donne, en notant δ_{ij} le symbole de Kronecker :

$$-(\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij}) = 2\nu_{sm}\bar{S}_{ij} \quad (3.9)$$

La partie isotrope est ajoutée à la pression qui devient

$$P^* = P + \frac{1}{3}\rho\tau_{kk} \quad (3.10)$$

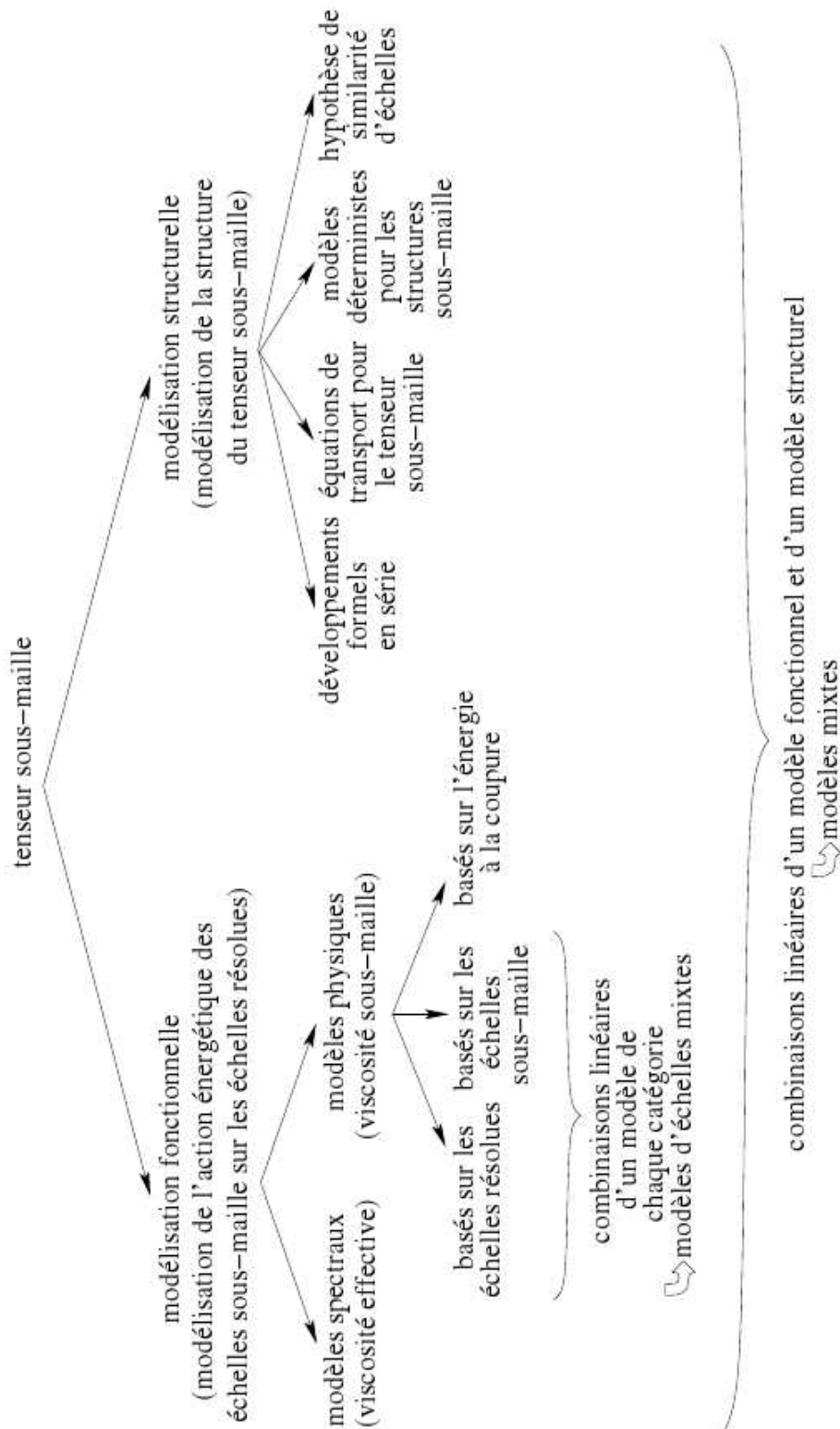


FIGURE 3.1 – Représentation de la classification des modèles sous-maille dynamiques proposée par Sagaut (1998). Figure tirée de Husson (2007)

et ne nécessite aucune modélisation. Le système à résoudre est donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x_i} + 2(\nu + \nu_{sm}) \frac{\partial \bar{S}_{ij}}{\partial x_j} + \bar{f}_i \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\quad (3.12)$$

Nous allons maintenant détailler plusieurs modèles du terme de viscosité sous-maille ν_{sm}

3.1.1.1 Modèle de Smagorinsky

Le premier modèle de viscosité sous-maille a été élaboré par [Smagorinsky \(1963\)](#). C'est un modèle basé sur les grandes échelles. Le modèle est développé dans le cadre de la turbulence homogène et isotrope en utilisant la forme du spectre de Kolmogorov. La viscosité sous-maille pour le modèle de Smagorinsky s'écrit :

$$\nu_{sm} = (C_s \bar{\Delta})^2 \|\bar{S}\| \quad (3.13)$$

$\bar{\Delta}$ représente la longueur caractéristique du filtre et $\|\bar{S}\| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$. Les calculs théoriques mènent à $C_s = 0.18$, mais l'expérience montre que de meilleurs résultats sont obtenus pour des valeurs plus faibles. Pour des calculs en canal plan, la valeur de 0.1 est souvent utilisée. Le modèle de Smagorinsky présente les inconvénients suivant :

- La viscosité sous-maille est évaluée en se basant sur la partie symétrique du tenseur des contraintes alors que la partie antisymétrique (ou rotationnelle) est ignorée.
- Ce modèle est réputé être trop dissipatif, et peut bloquer le passage à la turbulence. Il ne convient pas pour des écoulements en transition.
- C'est un modèle local construit sur des relations statistiques vraies en moyenne d'ensemble, ce qui n'a pas de justification particulière. Il ne permet de garantir la dissipation d'énergie cinétique qu'en moyenne et non localement.
- La viscosité sous-maille ainsi définie ne s'annule pas à la paroi, contrairement à ce qui est attendu par la théorie.

A sa décharge, il faut tout de même noter que c'est le modèle le plus facile à implémenter et le moins couteux en temps de calcul.

3.1.1.2 Modèle de Smagorinsky-Lilly

Le modèle de Smagorinsky étant trop dissipatif, surtout aux abords des parois, [Lilly \(1966\)](#) a proposé une évolution de ce modèle. La viscosité sous-maille est alors définie par :

$$\nu_{sm} = (\min(\kappa d, C_s \bar{\Delta}))^2 \|\bar{S}\| \quad (3.14)$$

avec $\kappa = 0,42$ et d la distance au mur le plus proche. Le problème de ce modèle réside dans la difficulté à évaluer cette distance dans le cadre de géométries complexes et de maillages non structurés.

3.1.1.3 Modèle RNG

Ce modèle est basé sur la théorie du groupe de renormalisation (ReNormalization Group). Il a été proposé par [Yakhot *et al.* \(1989\)](#). Comme pour les autres modèles à viscosité sous-maille, il consiste à utiliser une viscosité effective définie par :

$$\nu_{eff} = \nu + \nu_{sm} \quad (3.15)$$

L'originalité de ce modèle, est de définir directement la viscosité effective par

$$\nu_{eff} = \nu \left[1 + H \left(\frac{(C_{rng} \bar{\Delta})^4 \|\bar{S}\|^2 \nu_{eff}}{\nu^3} - C \right) \right]^{1/3} \quad (3.16)$$

où $H(x)$ est la fonction Heaviside définie par

$$H(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

[Yakhot *et al.* \(1989\)](#) ont proposé les valeurs $C_{rng} = 0,157$ et $C = 100$ pour les constantes. Dans les zones à bas nombre de Reynolds, la viscosité effective devient la viscosité moléculaire, ce qui permet de simuler les écoulements transitoires. Ce modèle est aussi souvent utilisé dans les simulations de type RANS k- ϵ .

3.1.1.4 Modèle WALE

[Nicoud et Ducros \(1999\)](#) ont proposé le modèle WALE (Wall Adapting Local Eddy) également basé sur les échelles résolues. Il s'appuie non seulement sur la partie symétrique du tenseur des contraintes, mais également sur sa partie antisymétrique, pour permettre d'améliorer les résultats. De plus, il a été construit afin d'obtenir une viscosité sous-maille présentant un bon comportement en proche paroi (annulation suivant une loi en y^3). La viscosité sous-maille résultante s'écrit :

$$\nu_{sm} = (C_w \bar{\Delta})^2 \frac{(s_{ij}^d s_{ij}^d)^{3/2}}{(S_{ij} S_{ij})^{5/2} + (s_{ij}^d s_{ij}^d)^{5/4}} \quad (3.17)$$

avec

$$\begin{cases} C_w = 0,5 & (3.18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{ij}^d = \frac{1}{2}(G_{ij} + G_{ji}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}G_{kk} & (3.19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} G = (\nabla \bar{u}) \times (\nabla \bar{u}) & (3.20) \end{cases}$$

L'exposant d sur le tenseur s_{ij}^d rappelle qu'il est à trace nulle (deviatoric en anglais). Ce modèle est facile à implémenter même dans des géométries complexes, car il ne fait pas appel à la notion de distance à la paroi. Il est également capable de simuler les régimes en transition. A noter que certains, à l'instar de [Chatelain \(2002\)](#), ajoutent un petit terme ϵ au dénominateur afin de renforcer la stabilité numérique.

3.1.1.5 Modèle de Vreman

Vreman (2004) propose un modèle reposant sur des arguments mathématiques et définit la viscosité sous-maille par :

$$\nu_{sm} = 2,5 C_s^2 \sqrt{\frac{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 + \beta_{11}\beta_{33} - \beta_{13}^2 + \beta_{22}\beta_{33} - \beta_{23}^2}{S_{ij}S_{ij}}} \quad (3.21)$$

où

$$\beta_{ij} = \overline{\Delta}_m S_{mi} S_{mj} \quad (3.22)$$

C_s est la constante de Smagorinsky. Par construction, ce modèle s'annule dans les cas théoriques d'absence de viscosité sous-maille. L'auteur teste son modèle sur les cas du canal turbulent et de la couche limite à haut Reynolds. Il observe des résultats en accord raisonnable avec les SND. Les résultats sont aussi bons que pour le modèle de Smagorinsky-Lilly, mais pour une complexité calculatoire moindre.

3.1.1.6 Modèle utilisant l'énergie cinétique sous-maille

Ce modèle a été développé indépendamment par plusieurs auteurs. La viscosité sous-maille est calculée à partir de l'énergie cinétique sous-maille $E_{sm} = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ (avec sommation sur i) :

$$\nu_{sm} = C_m \overline{\Delta} \sqrt{E_{sm}} \quad (3.23)$$

La constante C_m est évaluée théoriquement à 0.069 dans le cadre d'un spectre de Kolmogorov pour une turbulence homogène isotrope, mais peut être prise égale à 0.05 dans la pratique pour des calculs sur des canaux plans (cf. Okamoto et Shima (2002)). Cette énergie cinétique sous-maille constitue une variable supplémentaire du problème et est donc évaluée à l'aide de son équation de transport. En retranchant l'équation de quantité de mouvement filtrée à l'équation de quantité de mouvement complète, on obtient l'équation de quantité de mouvement sous-maille :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j - \overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \quad (3.24)$$

En multipliant par u'_i et en sommant sur i , on obtient après filtrage l'équation de transport de l'énergie cinétique sous-maille.

$$\frac{\partial E_{sm}}{\partial t} = -\overline{\frac{\partial P'}{\partial x_i} u'_i} + \overline{\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) u'_i} - \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j - \overline{u_i u_j}) u'_i} \quad (3.25)$$

Notons que

$$\overline{\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) u'_i} = \overline{\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u'_i u'_i}{2} \right)} - \overline{\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \quad (3.26)$$

$$= \nu \frac{\partial^2 E_{sm}}{\partial x_j^2} - \overline{\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \quad (3.27)$$

De plus

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i u_j})} u'_i = \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i u_j}) \overline{u'_i} \quad (3.28)$$

$$= 0 \quad (3.29)$$

d'où

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j - \overline{u_i u_j})} u'_i = \overline{\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j)} u'_i \quad (3.30)$$

$$= u'_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i} \overline{u_j} + \overline{u_i} u'_j + u'_i \overline{u_j} + u'_i u'_j) \quad (3.31)$$

La propriété d'incompressibilité entraîne que $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0$. Ceci a pour conséquence :

$$\frac{\partial A u_j}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial A}{\partial x_j} \quad (3.32)$$

Cette propriété est également valable pour \overline{u} et pour \vec{u}' . On obtient donc

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j - \overline{u_i u_j})} u'_i = 0 + \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j} E_{sm}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_i u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (3.33)$$

Ainsi, l'équation de transport de l'énergie cinétique sous-maille se réécrit :

$$\frac{\partial E_{sm}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{P' u'_j}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 E_{sm}}{\partial x_j^2} - \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)^2} - \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j} E_{sm}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_i u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (3.34)$$

Il reste plusieurs termes inconnus qui nécessitent d'être modélisés. Par un raisonnement dimensionnel, il vient

$$\nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)^2} = C_1 \frac{E_{sm}^{3/2}}{\Delta} \quad (3.35)$$

La relation de Kolmogorov-Prandtl permet d'écrire :

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} + \overline{P' u'_j} \right) = C_2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Delta \sqrt{E_{sm}} \frac{\partial E_{sm}}{\partial x_j} \right) \quad (3.36)$$

C_1 et C_2 sont généralement prises égales respectivement à 1 et 0.1. L'équation de transport de l'énergie cinétique sous-maille à résoudre numériquement est donc :

$$\frac{\partial E_{sm}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{u_j} E_{sm}}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - C_1 \frac{E_{sm}^{3/2}}{\Delta} + C_2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Delta \sqrt{E_{sm}} \frac{\partial E_{sm}}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 E_{sm}}{\partial x_j^2} \quad (3.37)$$

Il est à noter que comme $\tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = \tau_{ij} S_{ij}$, les deux versions peuvent être rencontrées dans la littérature.

3.1.2 Modélisation structurelle

3.1.2.1 Similarité des échelles

Ces modèles sont basés sur l'hypothèse de similarité entre les plus grandes échelles sous-maille et les plus petites échelles résolues. Ce type de modèle a été introduit par Bardina en 1980 (Bardina *et al.* (1980)). Le modèle de similarité des échelles s'écrit :

$$\overline{U_i U_j} - \overline{U}_i \overline{U}_j = K(\widetilde{\overline{U}_i \overline{U}_j} - \widetilde{\overline{U}_i} \widetilde{\overline{U}_j}) \quad (3.38)$$

où K est une constante et $\widetilde{}$ désigne un second filtre appelé filtre test de longueur de coupure supérieure à la longueur de premier filtre. Cook (1997) propose une méthode pour déterminer le coefficient K . Sur l'ensemble des configurations étudiées, il varie de 0.54 à 1.75, ce qui est en accord avec la valeur de 1 utilisée par Liu *et al.* (1994).

3.1.2.2 Modèles à équations de transport

Dans ces modèles, une équation de transport est écrite pour chaque terme du tenseur sous-maille. Cette méthode peut permettre une résolution plus précise de ce tenseur, mais nécessite la modélisation de plus de termes et l'estimation de plus de constantes. Deardorff (1973) a été le premier à proposer ce genre de modèle. Chaouat et Schiestel (2005) en ont proposé un autre plus récemment.

3.1.3 Améliorations des modèles

Les modèles présentés ci-dessus ont souvent fait l'objet d'améliorations plus ou moins importantes. Nous allons ici présenter les principales.

3.1.3.1 Modèles à viscosité sous-maille basée sur des informations à la coupure

Les modèles de Smagorinsky et WALE ont été modifiés respectivement par Jeanmart et Winkelmann (2007) et Bricteux *et al.* (2009). Au lieu d'utiliser la vitesse filtrée pour le calcul de la viscosité sous-maille, ils proposent d'utiliser uniquement les hautes fréquences spatiales de celle-ci, notées \overline{u}^s . En notant $\widetilde{}$ un filtre test de taille supérieure, \overline{u}^s est défini par :

$$\overline{u}_i^s = \overline{u}_i - \widetilde{\overline{u}_i} \quad (3.39)$$

ce qui correspond à une vitesse filtrée par un filtre passe-bande en fréquence. C'est cette vitesse qui est utilisée pour le calcul de S_{ij} et de s_{ij}^d qui seront alors notés respectivement S_{ij}^s et s_{ij}^{sd} . La viscosité sous-maille obtenue est notée ν_{sm}^s . Selon les auteurs les résultats sont significativement améliorés. Cependant, cela ne règle pas le problème de la constante et augmente la complexité du calcul. En effet le tenseur τ_{ij} est alors modélisé par

$$- \tau_{ij} = 2\nu_{sm}^s S_{ij}^s \quad (3.40)$$

et l'équation (3.12) n'est plus valable.

Le modèle de fonction de structure peut également parfois être rencontré dans la littérature. Il peut être considéré comme un modèle basé sur l'énergie à la coupure. Pour plus d'informations sur ce modèle, se référer à [Sagaut \(1998\)](#).

3.1.3.2 Méthode dynamique

Ce principe a été proposé par [Germano *et al.* \(1991\)](#). Il peut s'appliquer à tous les modèles basés sur la viscosité sous-maille ainsi qu'aux modèles faisant intervenir une constante. Il consiste à appliquer aux équations un second filtre $\widetilde{\cdot}$ de taille supérieure au filtre induit par le maillage, et d'évaluer les coefficients à chaque itération en tout point de l'espace, en supposant que le modèle est le même pour les deux tailles de filtre. Les coefficients sont alors évalués plus précisément, ajustés à la configuration physique et ne sont plus constants. Le modèle se développe de la façon suivante. On obtient deux champs de vitesse connus \overline{U} et \widetilde{U} et deux tenseurs sous-maille associés :

$$T_{ij} = \widetilde{\overline{U_i U_j}} - \widetilde{U}_i \widetilde{U}_j \quad (3.41)$$

$$\tau_{ij} = \overline{U_i U_j} - \overline{U}_i \overline{U}_j \quad (3.42)$$

$$\widetilde{\tau}_{ij} = \widetilde{\overline{U_i U_j}} - \widetilde{\overline{U}_i \overline{U}_j} \quad (3.43)$$

Ainsi ces tenseurs sont reliés par le tenseur turbulent résolu \mathcal{L}_{ij} qui peut être calculé explicitement. Par exemple, pour un modèle de viscosité sous-maille s'écrivant $\nu_{sm} = CF(\widetilde{U})$ où C est une constante et F une expression quelconque, nous obtenons

$$T_{ij} = -2CF(\widetilde{U})\widetilde{S}_{ij} \quad (3.44)$$

$$\widetilde{\tau}_{ij} = -2CF(\overline{U})S_{ij} \quad (3.45)$$

Pour obtenir

$$\mathcal{L}_{ij} = -2[CF(\widetilde{U})\widetilde{S}_{ij} - CF(\overline{U})S_{ij}] \quad (3.46)$$

On suppose que l'on peut sortir la constante du filtre pour la factoriser. On obtient

$$\mathcal{L}_{ij} = CM_{ij} \quad (3.47)$$

avec

$$M_{ij} = 2[F(\widetilde{U})\widetilde{S}_{ij} - F(\overline{U})S_{ij}] \quad (3.48)$$

C est alors calculée afin de minimiser l'erreur commise $E_{ij} = \mathcal{L}_{ij} - CM_{ij}$. C'est un système d'équations indépendantes, pour une seule inconnue. Chaque équation donnera sa solution. [Germano *et al.* \(1991\)](#) proposent de minimiser le critère $E_{ij}S_{ij}$ qui conduit à la résolution de l'équation :

$$\frac{\partial E_{ij}S_{ij}}{\partial C} = 0 \quad (3.49)$$

Pour pallier aux problèmes qui se posent quand S_{ij} s'annule, [Lilly \(1992\)](#) propose une minimisation au sens des moindres carrés, qui conduit à la résolution de l'équation :

$$\frac{\partial E_{ij}E_{ij}}{\partial C} = 0 \quad (3.50)$$

qui a pour solution :

$$C = \frac{\mathcal{L}_{ij}M_{ij}}{M_{kl}M_{kl}} \quad (3.51)$$

L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait que la constante peut prendre des valeurs négatives et n'est pas bornée. Il peut donc s'avérer nécessaire de borner artificiellement la constante, ou de la lisser via une moyenne temporelle ou spatiale.

3.1.3.3 Modèles mixtes

Il s'agit d'exprimer le terme sous-maille comme une combinaison linéaire de termes provenant de plusieurs types de modèles différents (un fonctionnel et un structurel par exemple) afin de bénéficier des points forts de chacun. En effet, les modèles à viscosité sous-maille présentent une bonne reproduction des transferts énergétiques, mais ne sont pas conçus pour représenter la structure du tenseur sous-maille. Ils sont également assez rarement capables de prendre en compte la cascade d'énergie inverse. A contrario, les modèles structurels sont moins performants du point de vue énergétique et sont souvent trop peu dissipatifs. Ils représentent cependant correctement la structure du tenseur sous-maille et sont capables de modéliser la cascade inverse.

3.2 Modèles sous-maille thermiques

Cette section est consacrée à la modélisation du terme inconnu $\overline{u_i T}$ apparaissant dans l'équation d'énergie filtrée (1.16). De même qu'à la section 3.1 nous avons réécrit l'équation (1.15) en (3.4), l'équation filtrée d'énergie peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_j^2} + \overline{S} - \frac{\partial \mathfrak{S}_j}{\partial x_j} \quad (3.52)$$

avec

$$\mathfrak{S}_i = \overline{T u_i} - \overline{T} \overline{u_i} \quad (3.53)$$

Le tenseur \mathfrak{S} représente le flux sous-maille et doit être modélisé au même titre que le tenseur τ pour l'équation de quantité de mouvement. Plusieurs modèles ont été développés pour ce tenseur \mathfrak{S} . [Husson \(2007\)](#) en présente une revue assez complète. L'auteur propose également une classification de ces modèles selon la figure 3.2.

Lorsque la température est considérée comme un scalaire passif, les équations sont analogues à celles régissant la diffusion d'une espèce chimique dans un fluide. Nous sommes alors dans le cas particulier où le nombre de Schmidt $Sc = \nu/D$, qui représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement ν (ou viscosité cinématique) et la diffusivité massique D , est remplacé par le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\alpha$ qui représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement ν (ou viscosité cinématique) et la diffusivité thermique. Il n'est donc pas étonnant de constater que plusieurs modèles sous-maille pour le tenseur \mathfrak{S} soient utilisés pour les problèmes de diffusion chimique.

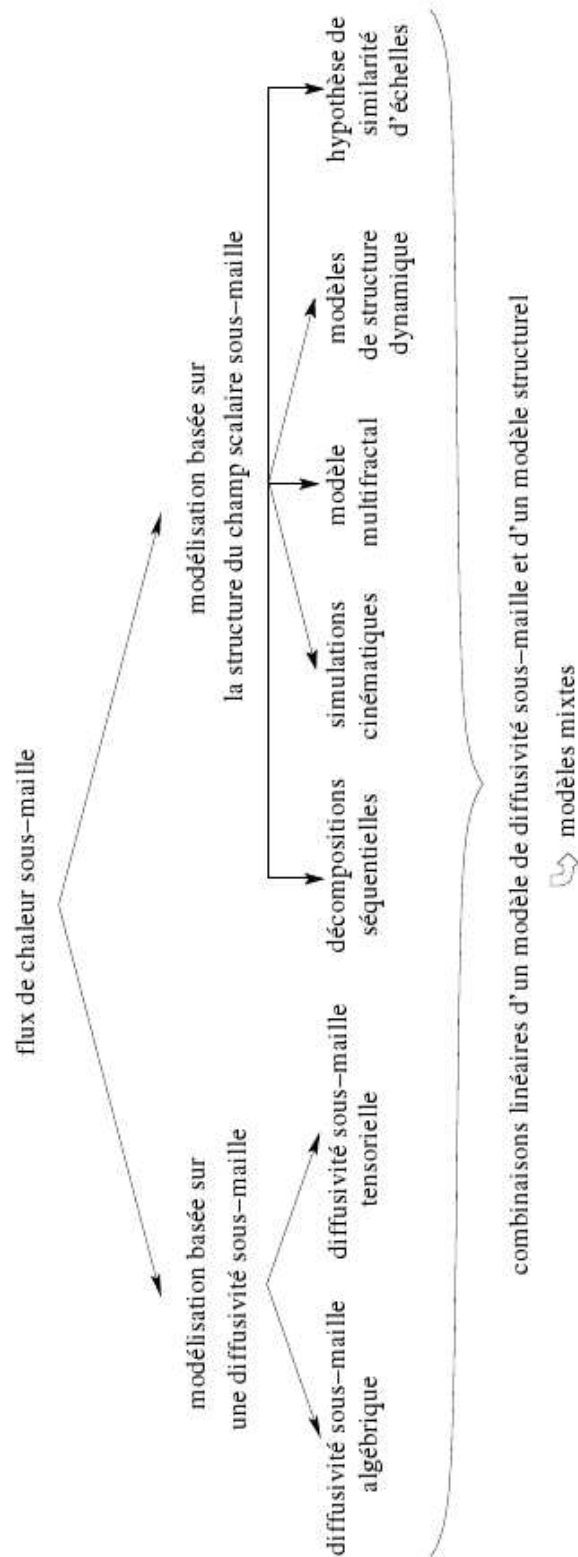


FIGURE 3.2 – Représentation de la classification des modèles sous-maille thermiques proposée par [Husson \(2007\)](#)

Les modèles peuvent aussi n'être valables que dans certaines gammes d'utilisation, par exemple pour des nombres de Prandtl inférieurs ou égaux à 1. En effet, en fonction du nombre de Prandtl, le spectre d'énergie thermique peut être différent, et le comportement sous-maille peut varier avec la longueur de coupure du filtre (cf. [Lesieur \(1997\)](#)). Nous allons maintenant présenter certains de ces modèles.

3.2.1 Modèles à diffusivité sous-maille

Parmi les modélisations possibles, une solution consiste à écrire le tenseur \mathfrak{S} comme un flux. Il vient :

$$\mathfrak{S}_i = -\kappa_{sm} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (3.54)$$

Le problème se ramène donc à la modélisation de la diffusivité sous-maille κ_{sm} . Comme nous allons le voir ci-dessous, κ peut être modélisé via un scalaire ou un tenseur, ayant pour principale conséquence une représentation isotrope ou anisotrope de la diffusivité sous-maille.

3.2.1.1 Diffusivité scalaire

Nous trouvons dans cette catégorie le modèle à Prandtl sous-maille constant. Parmi toutes les modélisations du tenseur \mathfrak{S} développées à ce jour, c'est sans doute la plus utilisée. Cela est dû à sa facilité d'implémentation et son faible coût calculatoire. L'idée est de considérer que le nombre de Prandtl sous-maille défini par $\text{Pr}_{sm} = \nu_{sm}/\kappa_{sm}$ est constant. Il reste alors à définir cette valeur qui est généralement comprise entre 0.5 et 0.9. Il est également possible de considérer que $\text{Pr}_{sm} = \text{Pr}$. La valeur de Pr_{sm} étant fixée, nous obtenons l'expression suivante de la diffusivité sous-maille :

$$\kappa_{sm} = \frac{\nu_{sm}}{\text{Pr}_{sm}} \quad (3.55)$$

Outre le fait de ne pas pouvoir prendre en compte l'anisotropie, ce modèle suppose que κ_{sm} ne dépend que du champ de vitesse résolue (dans la mesure où il a été considéré que la température n'avait aucune influence sur le champ dynamique sous-maille). Cette hypothèse peut s'avérer fautive pour certains types d'écoulements. Mais le défaut principal demeure que l'équation (3.55) impose une nullité simultanée de κ_{sm} et ν_{sm} ce qui n'est en général pas le cas.

3.2.1.2 Diffusivité tensorielle

Des modèles un peu plus élaborés écrivent la diffusivité sous-maille κ_{sm} non plus comme un scalaire mais comme un tenseur. De fait, cette dernière n'est plus colinéaire avec le gradient de température. Cette approche ne permet pas en général l'obtention d'une dissipation suffisante et est souvent couplée à un autre modèle pour donner un modèle "mixte". Ainsi [Montreuil et al. \(2005\)](#) proposent un modèle explicite dans lequel le flux sous-maille est décomposé en une partie scalaire et une partie tensorielle suivant l'expression suivante :

$$\mathfrak{S}_i = -\kappa_{sm} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - (\kappa_{sm}^A)_{ik} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \quad (3.56)$$

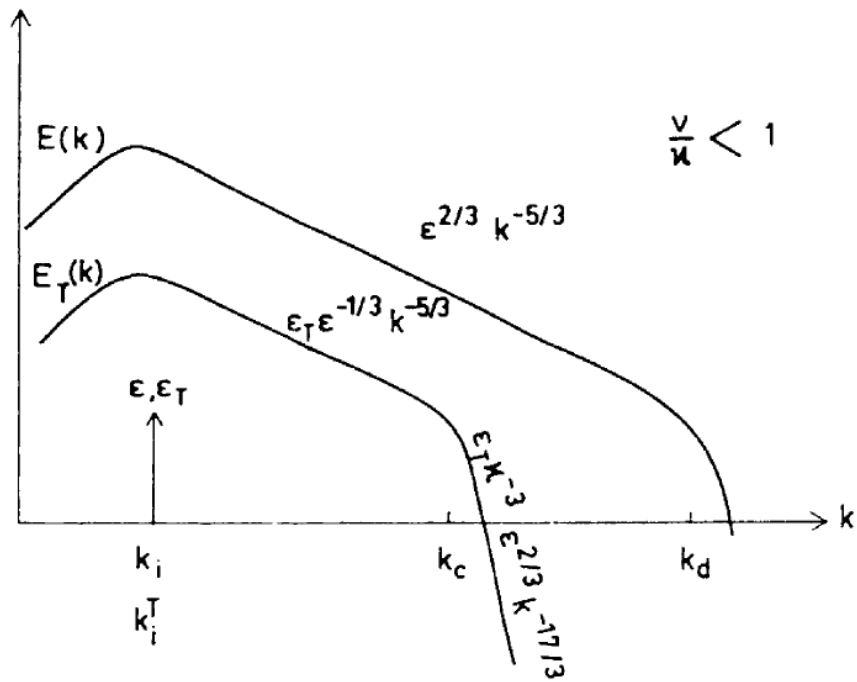


FIGURE 3.3 – Spectres dynamiques thermiques à faible nombre de Prandtl (≤ 1), d’après Lesieur (1997).

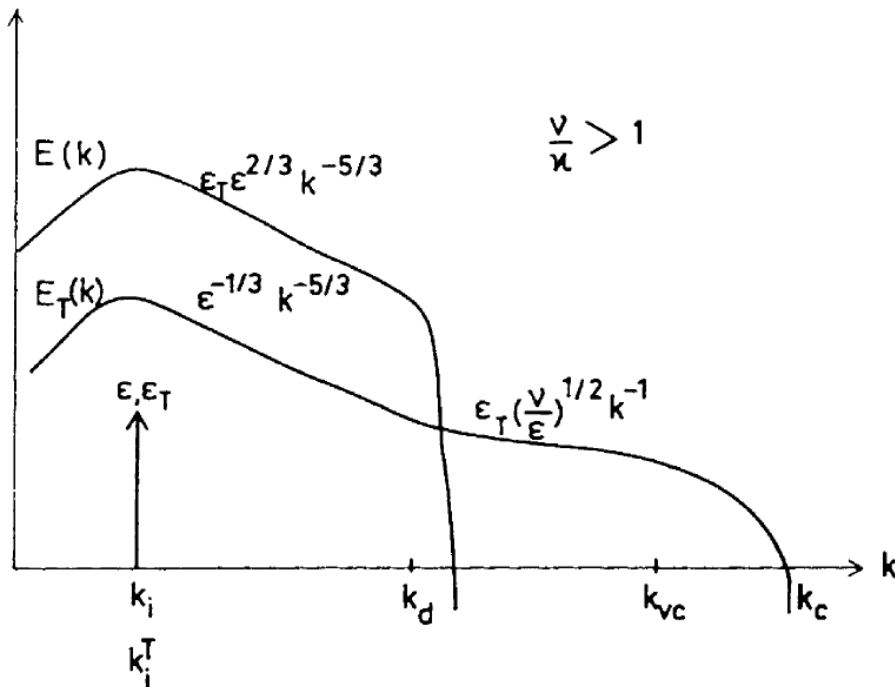


FIGURE 3.4 – Spectres dynamiques thermiques à fort nombre de Prandtl (≥ 1), d’après Lesieur (1997).

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{sm} = -C_1 \epsilon_{sm} \left(\frac{q_{sm}^T}{\epsilon_{sm}^T} \right)^2 \\ (\kappa_{sm}^A)_{ij} = \epsilon_{sm} \left(\frac{q_{sm}^T}{\epsilon_{sm}^T} \right)^3 (C_2 \bar{S}_{ij} + C_3 \bar{\Omega}_{ij}) \end{array} \right. \quad (3.57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\kappa_{sm}^A)_{ij} = \epsilon_{sm} \left(\frac{q_{sm}^T}{\epsilon_{sm}^T} \right)^3 (C_2 \bar{S}_{ij} + C_3 \bar{\Omega}_{ij}) \end{array} \right. \quad (3.58)$$

où le taux de dissipation d'énergie cinétique sous-maille ϵ_{sm} , la variance de température sous-maille q_{sm}^T et la dissipation de variance de température sous-maille ϵ_{sm}^T , sont donnés en fonction de $\bar{\Delta}$ et q_{sm}^2 . Les auteurs proposent :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0.446 \\ C_2 = 0.37 \\ C_3 = 0.21 \end{array} \right. \quad (3.59)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = 0.37 \\ C_3 = 0.21 \end{array} \right. \quad (3.60)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_3 = 0.21 \end{array} \right. \quad (3.61)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \end{array} \right. \quad (3.62)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \end{array} \right. \quad (3.63)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{sm} = 0.845 \frac{q_c^{3/2}}{\bar{\Delta}} \end{array} \right. \quad (3.64)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{sm}^T = 2.02 \frac{q_c^{1/2} K_\theta}{\bar{\Delta}} \end{array} \right. \quad (3.65)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_c = \frac{1}{2} (\bar{u}_i - \tilde{u}_i)^2 \end{array} \right. \quad (3.66)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_\theta = (\bar{\theta}_i - \tilde{\theta}_i)^2 \end{array} \right. \quad (3.67)$$

\tilde{u}_i fait référence à un filtre test de longueur de coupure supérieur à $\bar{\Delta}$. Ceci conduit à l'expression de \mathfrak{S}_i :

$$\mathfrak{S}_i = -0.0924 \bar{\Delta} q_c^{1/2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + \bar{\Delta}^2 (0.0379 \bar{S}_{ik} + 0.0215 \bar{\Omega}_{ik}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \quad (3.68)$$

3.2.2 Modèles structurels

3.2.2.1 Utilisation de la similarité des échelles

Une autre façon de modéliser le tenseur sous-maille \mathfrak{S}_i est d'utiliser la structure du champ de température sous-maille. De même que pour le tenseur sous-maille-dynamique, la similarité des échelles de [Bardina et al. \(1980\)](#) peut être appliquée. Le modèle de similarité des échelles s'écrit alors :

$$\mathfrak{S}_i = C_{se} \mathcal{L}_{iT} \quad (3.69)$$

où C_{se} est une constante (constante de Similarité des Echelles) et \mathcal{L}_{iT} est défini par

$$\mathcal{L}_{iT} = \widetilde{\bar{U}_i \bar{T}} - \bar{U}_i \bar{T} \quad (3.70)$$

On modélise donc $\overline{U_i T} - \overline{U_i} \overline{T}$ par $C_{se}(\widetilde{\overline{U_i T}} - \widetilde{\overline{U_i}} \widetilde{\overline{T}})$. A l'instar de la similarité des échelles dynamiques, la méthode proposée par [Cook \(1997\)](#) pour déterminer le coefficient C_{se} peut être utilisée. A défaut, là encore la valeur de 1 proposée par [Liu et al. \(1994\)](#) est une bonne alternative. Le modèle de similarité des échelles est en général trop peu dissipatif, et est souvent couplé à un modèle de diffusivité sous-maille pour donner un modèle mixte.

3.2.2.2 Ajout d'équations

[Chumakov et Rutland \(2004\)](#) proposent un autre type de modèle sous-maille thermique applicable à n'importe quel champ se comportant comme un scalaire passif. Ce modèle peut être vu soit comme un modèle de similarité des échelles particulier, soit comme un modèle dynamique proportionnel à la variance de température sous-maille. Selon ce modèle, le flux de chaleur sous-maille s'écrit :

$$\mathfrak{S}_i = \frac{\theta}{\Theta} [\widetilde{\overline{U_i T}} - \widetilde{\overline{U_i}} \widetilde{\overline{T}}] \quad (3.71)$$

où θ et Θ représentent la variance scalaire sous-maille au niveau respectivement du filtre de base et du filtre test, et sont définis par

$$\theta = \frac{1}{2}(\overline{T T} - \overline{T} \overline{T}) = \overline{T^2} - \overline{T}^2 \quad (3.72)$$

$$\Theta = \frac{1}{2}(\widetilde{\overline{T T}} - \widetilde{\overline{T}} \widetilde{\overline{T}}) \quad (3.73)$$

Θ est directement calculable avec les variables de la simulation alors que θ doit être modélisé. En s'appuyant sur les travaux de [Jimenez et al. \(2001\)](#), [Chumakov et Rutland \(2004\)](#) proposent de calculer θ en ajoutant son équation de transport aux équations à résoudre. A partir de l'équation de la chaleur, en commençant par la filtrer puis en la multipliant par $2\overline{T}$, nous obtenons l'équation (3.74). Ensuite, toujours à partir de l'équation de la chaleur, en commençant par la multiplier par $2T$ puis en la filtrant, nous obtenons l'équation (3.75).

$$\frac{\partial \overline{T^2}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i T^2}}{\partial x_i} = \kappa \frac{\partial^2 \overline{T^2}}{\partial x_i^2} - 2\kappa \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \right)^2 - 2\overline{T} \frac{\partial \overline{u_i T}}{\partial x_i} + 2\overline{T} \frac{\partial \overline{u_i} \overline{T}}{\partial x_i} \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial \overline{T^2}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i T^2}}{\partial x_i} = \kappa \frac{\partial^2 \overline{T^2}}{\partial x_i^2} - 2\kappa \overline{\left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2} - \frac{\partial \overline{u_i T^2}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i} \overline{T^2}}{\partial x_i} \quad (3.75)$$

En retranchant (3.74) à (3.75), nous obtenons alors l'équation régissant le transport de la variance de température θ

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i} \theta}{\partial x_i} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2} - 2\kappa \overline{\left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2} + 2\kappa \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i T^2} - \overline{u_i} \overline{T^2}) + 2\overline{T} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i T} - \overline{u_i} \overline{T}) \quad (3.76)$$

[Chumakov et Rutland \(2004\)](#) montrent que cette équation peut également s'écrire

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i} \theta}{\partial x_i} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2} - \chi - \mathfrak{S}_i \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} + O(\Delta^4) \quad (3.77)$$

avec

$$\chi = 2\kappa \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (3.78)$$

Le terme χ n'est pas accessible directement via les variables de la simulation et nécessite lui aussi une modélisation. [Chumakov et Rutland \(2004\)](#) proposent une modélisation basée sur la similarité des échelles à l'instar de \mathfrak{S}_i :

$$\chi \approx 4\kappa \frac{\theta}{\Theta} \left[\left(\widetilde{\frac{\partial T}{\partial x_i}} \right)^2 - \left(\widetilde{\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}} \right)^2 \right] \quad (3.79)$$

Les auteurs ont choisi de doubler le coefficient dans le modèle, mais les raisons n'apparaissent cependant pas évidentes.

Selon [Jimenez et al. \(2001\)](#), une telle approche permet de correctement représenter les interactions entre la variance et la dissipation du scalaire passif pour un faible coup de calcul supplémentaire. L'ajout d'une équation de transport ne permet cependant pas de s'affranchir de l'estimation d'éventuelles constantes (pour les modélisations par similarité des échelles par exemple) et introduit un terme supplémentaire à modéliser (χ).

3.2.3 Améliorations

3.2.3.1 Méthode dynamique

Comme pour les modèles sous-maille dynamiques, une grande partie des modèles sous-maille thermiques présentent des coefficients dont l'estimation n'est pas toujours évidente, et qui peuvent être considérés comme constants ou non. L'évaluation de ces coefficients peut générer une erreur relativement forte. En effet, ils peuvent être particulièrement sensibles à de nombreux paramètres, tels que la nature de l'écoulement, la géométrie, le temps, la distance à la paroi, etc. La méthode d'évaluation dynamique de ces coefficients proposée par [Germano et al. \(1991\)](#) et exposée précédemment pour les modèles dynamiques s'adapte sans problème à la modélisation du tenseur \mathfrak{S} . Par exemple, [Pham et al. \(2007\)](#) et [Taieb et al. \(2010\)](#) ont récemment utilisé une méthode dynamique pour l'évaluation du nombre de Prandtl sous-maille dans le cadre d'un canal turbulent.

3.2.3.2 Prise en compte des effets de flottaison

[Peng et Davidson \(2002\)](#) et [Montreuil \(2000\)](#) soulignent que lorsque la gravité a un effet important, il faut non seulement la considérer dans les équations de Navier-Stokes mais également dans les modèles sous-maille, en prenant en compte les couplages entre la température et la vitesse. En effet, la prise en compte de la gravité modifie l'expression de l'hypothèse d'équilibre local et donc l'expression de la viscosité sous-maille. [Montreuil \(2000\)](#) en déduit alors une expression modifiée du modèle de Smagorinsky dans laquelle une diffusivité sous-maille

algébrique est implicitement utilisée :

$$\nu_{sm} = (C_s \bar{\Delta})^2 \left(\|S\|^2 - \frac{\text{Ri}}{\text{Pr}_{sm}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right)^{1/2} \quad (3.80)$$

Peng et Davidson (2002) élargissent ce concept en proposant une expression générale de la viscosité sous-maille dans laquelle une expression du flux sous-maille autre que celle choisie par Montreuil (2000) peut être employée :

$$\nu_{sm} = (C_s \bar{\Delta})^2 \left(\|S\|^2 - \frac{g_k \beta}{\nu_{sm}} \mathfrak{S}_k \right)^{1/2} \quad (3.81)$$

où g_i et β représentent respectivement le vecteur gravité et le coefficient d'expansion thermique utilisé lors de l'approximation de Boussinesq dans les équations de Navier-Stokes.

3.2.4 Cas général

Dans le cas général, on peut utiliser les travaux effectués par Bataille *et al.* (2005). Ils utilisent un spectre dynamique et un spectre de fluctuations thermiques respectivement de formes :

$$\begin{cases} E(k) = A \epsilon^{e_1} k^{e_2} & (3.82) \\ E_T(k) = A' \epsilon_T \epsilon^{e'_1} k^{e'_2} & (3.83) \end{cases}$$

où :

- k représente le nombre d'onde,
- ϵ représente le taux de dissipation d'énergie par les petites échelles,
- $A, e_1, e_2, A', e'_1, e'_2$ sont des constantes.

L'équilibre énergétique s'écrit respectivement pour la dynamique et la thermique :

$$\begin{cases} \epsilon = 2\nu_{sm} \int_0^{k_c} k^2 E(k) dk & (3.84) \\ \epsilon_T = 2\kappa_{sm} \int_0^{k_c} k^2 E_T(k) dk & (3.85) \end{cases}$$

En utilisant ces hypothèses, Bataille *et al.* (2005) en déduisent une expression de κ_{sm} :

$$\kappa_{sm} = \frac{e'_2 + 3}{2} (A')^{-1} \epsilon^{-e'_1} k_c^{-e'_2 - 3} \quad (3.86)$$

Si la fréquence de coupure k_c se trouve dans la zone inertielle du spectre dynamique, et en posant :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.87)$$

$$S^2 = S_{ij} S_{ij} \quad (3.88)$$

on peut alors exprimer ϵ sous la forme :

$$\epsilon = 2\nu_{sm}S^2 \quad (3.89)$$

Il est à noter que dans l'équation (3.88) la convention de sommation sur les indices muets répétés est utilisée. Avec cette expression de ϵ l'équation (3.86) devient

$$\kappa_{sm} = 2^{-e'_1-1}(e'_2 + 3)(A')^{-1}(2\nu_{sm}S^2)^{-e'_1}k_c^{-e'_2-3} \quad (3.90)$$

On constate ici que l'expression du terme de diffusivité sous-maille κ_{sm} dépend uniquement des constantes du spectre des fluctuations thermiques, et d'informations sur les échelles dynamiques résolues. Aucune information sur les échelles thermiques résolues n'intervient. Ceci est dû à la linéarité de l'équation de la chaleur par rapport à la température.

En ce qui concerne le comportement asymptotique à la paroi, il est donné a priori par ν_{sm} et k_c , car le terme S^2 se comporte en $O(1)$ en proche paroi. Prenons l'exemple d'une progression de taille de maille géométrique. Les tailles des mailles successives sont données par :

$$\Delta(k) = u_0q^k, \quad 1 \leq k \leq N \quad (3.91)$$

où

- k représente le numéro du nœud,
- $\Delta(k)$ représente la taille de la k^{ieme} maille,
- u_0 représente la taille de la première maille,
- q représente le rapport de progression, ou autrement dit la raison de la suite géométrique ainsi définie.

La somme des termes de cette suite donne donc les ordonnées des nœuds de la grille de simulation :

$$y(k) = u_0 \times \frac{1 - q^k}{1 - q}, \quad 0 \leq k \leq N \quad (3.92)$$

En exprimant q^k dans l'équation 3.91 et en substituant dans 3.92, nous obtenons une expression de $\Delta(k)$ en fonction de y :

$$\Delta(k) = (q - 1)y + u_0 \quad (3.93)$$

Nous ne pouvons donc pas considérer que $\Delta(y)$ tende vers 0 à la paroi, mais bien vers u_0 . En prenant le problème à l'envers, supposer que $\Delta(k)$ tende vers 0 à la paroi conduit un nombre de nœuds qui tend vers l'infini, ce qui n'est pas raisonnable. $\Delta(k)$ varie donc en proche paroi en $O(1)$. Le comportement asymptotique de κ_{sm} est donc donné par celui de ν_{sm} . A noter également que dans la cadre d'une procédure dynamique d'évaluation de la constante, son comportement asymptotique peut également être étudié.

Nous avons à notre disposition deux modèles de viscosité sous-maille différents, qui peuvent permettre de jouer sur le comportement asymptotique de κ_{sm} , celui de Smagorinsky et le modèle WALE. Le premier propose une viscosité sous-maille qui se comporte en $O(1)$ à la paroi alors que le second en propose une en $O(y^3)$. Nous pouvons donc nous inspirer de la méthode utilisée par [Nicoud et Baggett \(1999\)](#) lorsqu'ils ont proposé le modèle WALE pour obtenir le comportement asymptotique désiré. L'idée est de définir une nouvelle viscosité sous-maille, qui ne servira que pour l'équation d'énergie mais pas pour celle de quantité de mouvement. Cette

viscosité, qui sera noté ν_{th} (pour thermique) peut être définie comme étant une moyenne géométrique pondérée de la viscosité définie par le modèle de Smagorinsky ν_s et celle obtenue avec un modèle WALE ν_w . Nous obtenons :

$$\nu_{th} = \nu_w^\alpha \nu_s^{1-\alpha} \quad (3.94)$$

ou α est un paramètre de pondération permettant de contrôler le comportement asymptotique de ν_{th} . De cette manière, ν_{th} conserve la dimension d'une viscosité cinématique, et présente un comportement en $O(y^{3\alpha})$ en proche paroi. On peut imaginer prendre comme valeur classique de α :

- $\alpha = 0$: Alors $\nu_{th} = \nu_s$. Le comportement est en $O(1)$.
- $\alpha = 1$: Alors $\nu_{th} = \nu_w$. Le comportement est en $O(y^3)$.
- Des valeurs de α de $1/3$ et $2/3$ conduisent respectivement à des comportements en $O(y)$ et $O(y^2)$.

De même que [Nicoud et Baggett \(1999\)](#), nous devons alors nous demander si la constante doit être modifiée. Nous considérons que si la viscosité ν_{th} était utilisée dans des équations de quantité de mouvement elle devrait en moyenne dissiper autant d'énergie que ν_s et ν_w . Soit A l'éventuelle constante à ajouter au modèle de sorte que

$$\nu_{th} = A \nu_w^\alpha \nu_s^{1-\alpha} \quad (3.95)$$

dissipe autant d'énergie en moyenne que le modèle de Smagorinsky. Nous rappelons que le modèle WALE dissipe la même énergie que celui de Smagorinsky par construction. Nous voulons donc résoudre

$$\langle 2A \nu_w^\alpha \nu_s^{1-\alpha} S^2 \rangle = \langle 2\nu_s S^2 \rangle \quad (3.96)$$

Où l'opérateur $\langle . \rangle$ désigne une moyenne d'ensemble. Ceci conduit à

$$A = \frac{C_s^\alpha \sqrt{2}^\alpha \langle S^{2(3/2)} \rangle}{C_w^\alpha \langle \left(\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_2}}\right)^\alpha S^{2(\frac{3-\alpha}{2})} \rangle} \quad (3.97)$$

En supposant alors que

$$\langle S^{2(p+q)} \rangle = \langle S^{2p} \rangle \langle S^{2q} \rangle \quad (3.98)$$

Il vient

$$A = \frac{C_s^\alpha \sqrt{2}^\alpha \langle S^{2(3/2)\alpha} \rangle}{C_w^\alpha \langle \left(\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_2}}\right)^\alpha S^{2\alpha} \rangle} \quad (3.99)$$

soit

$$A = 1 \quad (3.100)$$

Ecrire une diffusivité thermique sous-maille comme

$$\kappa_{sm} = 2^{-e'_1-1} (e'_2 + 3) (A')^{-1} (2\nu_w^\alpha \nu_s^{1-\alpha} S^2)^{-e'_1} k_c^{-e'_2-3} \quad (3.101)$$

permet donc d'obtenir le comportement désiré à la paroi, tout en conservant une bonne dissipation moyenne de l'énergie.

3.3 Lois de paroi

En SGE, les lois de paroi sont aussi des modélisations qui permettent de prendre en compte des phénomènes trop petits pour être correctement simulés. Le développement d'une couche limite près d'un mur fait intervenir des phénomènes dont les échelles sont relativement petites par rapports à l'ensemble des phénomènes de l'écoulement. Afin d'observer le bon comportement près des parois, deux solutions sont possibles : utiliser un maillage fin près des murs, ou bien modéliser le comportement pariétal par une loi de paroi. Cette seconde solution est certes légèrement moins précise, mais peut permettre de réduire considérablement les coûts de calcul.

De nombreuses lois de paroi différentes ont été développées par différents auteurs. Pour les définir, il est nécessaire d'introduire la notion d'adimensionnement qui sera approfondie au paragraphe 5.1.2. u et y représentent respectivement la vitesse parallèle au mur, et la distance au mur. Les valeurs adimensionnées correspondantes sont définies par :

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

$$y^+ = \frac{y}{l_\tau}$$

avec

$$u_\tau = \sqrt{\nu \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=0}}$$

$$l_\tau = \frac{\nu}{u_\tau}$$

Parmi les lois de paroi les plus utilisées, nous pouvons trouver :

- La loi logarithmique, qui pour des paramètres standards est définie par :

$$\begin{cases} u^+ = y^+ & \text{si } y^+ < 11,2 \\ u^+ = \frac{1}{0,419} \ln(9,793y^+) & \text{sinon} \end{cases}$$

- La loi de Werner et Wengle (cf. [Werner et Wengle \(1993\)](#)), qui pour des paramètres standards est définie par :

$$\begin{cases} u^+ = y^+ & \text{si } y^+ < 11,8 \\ u^+ = 8,3y^{+1/7} & \text{sinon} \end{cases}$$

- La loi de Reichardt (cf. [Reichardt \(1951\)](#)), qui pour des paramètres standards est définie par :

$$u^+ = \frac{1}{0,419} \ln(1 + 0,419y^+) + 7,8 \left(1 - e^{-y^+/11} - \frac{y^+}{11} e^{-0,33y^+} \right)$$

Deuxième partie

Canal plan turbulent

Chapitre 4

Introduction au canal plan

Ce chapitre a pour but l'introduction des travaux réalisés sur le canal plan. Nous présentons ici sa géométrie, certaines problématiques liées à la turbulence et ce que nous attendons de cette étude.

4.1 Domaine de calcul

Tout au long de cette partie, le domaine étudié est un canal plan turbulent à trois dimensions, périodique selon les directions longitudinales et transverses. Il est dimensionné par rapport à sa demi hauteur h . Il a pour longueur $L_x = 2,9h$ et pour profondeur $L_z = 1,4h$. Une épaisseur d de paroi fera partie du domaine de calcul dans certains cas. L'origine du repère est à l'angle inférieur gauche de la zone fluide, sur le plan visuellement le moins profond. Ce domaine de calcul est représenté sur la figure 4.1

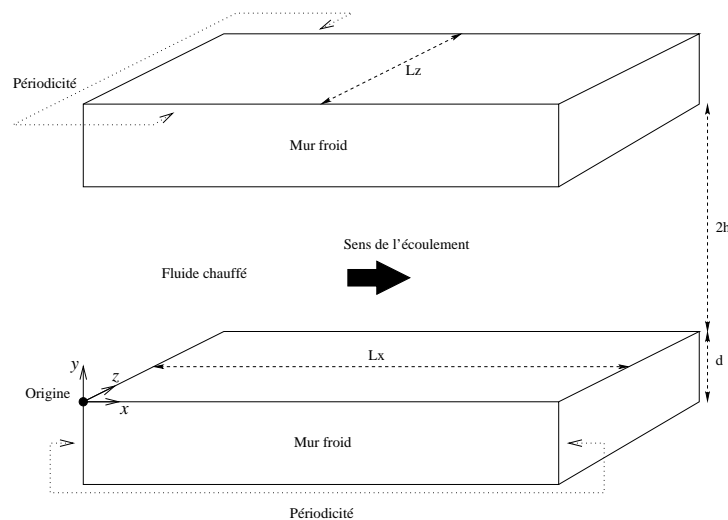


FIGURE 4.1 – Domaine de calcul

L'écoulement est entretenu par une force volumique F qui est recalculée à chaque itération pour conserver un débit constant. La précision du maillage pourra varier selon l'utilisation ou non d'une loi de paroi de type Werner et Wengle.

Deux configurations thermiques sont possibles. La première consiste en un canal dont l'une des parois est chaude et l'autre est froide. En cas de prise en compte de l'épaisseur du mur dans le domaine de calcul, la condition limite, qu'elle soit de type isotherme ou bien isoflux, est repoussée à l'extérieur de ce mur. Le flux thermique traverse ainsi le canal de part en part dans la direction verticale. Cette configuration présente le désavantage de ne pas être symétrique, et pose donc des problèmes de résolutions pour les codes de calcul à méthode spectrale, codes fréquemment utilisés pour les SND.

Pour pallier à ce problème, une autre configuration peut être étudiée. Elle consiste à ajouter une source volumique de chaleur proportionnelle à la vitesse au sein du fluide. Cette chaleur sera ensuite évacuée par les parois. Si ces dernières font parties de la zone de calcul, un puit de chaleur volumique y est ajouté, et la paroi extérieure du mur est considérée comme étant adiabatique. Sinon, l'énergie thermique s'évacue via la condition limite, qu'elle soit de type isotherme ou isoflux. Cette configuration est moins intuitive, et semble moins physique. Elle est néanmoins solvable par des méthodes spectrales, et assez répandue dans la littérature ([Tiselj et al. \(2001b\)](#); [Tiselj et Cizelj \(2012\)](#)). C'est donc celle-ci que nous avons retenue, dans le cadre de cette thèse et du projet européen THINS.

4.2 Turbulence

Dans la simulation d'un écoulement turbulent au sein d'un canal, deux difficultés principales se présentent : le développement de la turbulence et le maintien de la quantité de turbulence.

4.2.1 Création de la turbulence et condition initiale

L'une des problématiques principales est d'assurer la transition de l'état laminaire vers l'état turbulent au sein du canal. Le problème peut être plus ou moins délicat en fonction de nombre de Reynolds (noté Re) désiré et des schémas numériques utilisés. Les schémas considérés comme très stables vont souvent être trop diffusifs pour pouvoir provoquer cette transition. Deux méthodes simples et classiques ont été testées. La première méthode consiste à ajouter un bruit gaussien sur le profil parabolique servant de condition initiale. Pour la seconde, le débit est fortement augmenté afin de provoquer plus facilement la transition vers l'état turbulent. Puis, il est progressivement ramené vers la valeur désirée tout en s'assurant de la bonne conservation de la turbulence.

Le bruit gaussien que nous avons utilisé est proportionnel au niveau initial de la vitesse et de proportion p . Ainsi la vitesse initiale bruitée s'écrit :

$$u_{bruite} = u_{ini} + \mathcal{N}(0, (pu_{ini})^2) = u_{ini}(1 + p\mathcal{N}(0, 1)) \quad (4.1)$$

Notons que, à cause du bruit ajouté, le champs de vitesse initial n'est pas à divergence nulle. Ceci ne pose aucun problème, cette propriété est rétablie dès la première itération. Parmi les tests non concluants, on retrouve :

- $Re_\tau = 720$, à partir d'un profil parabolique sans bruit,
- $Re_\tau = 720$, à partir d'un profil plat à vitesse débitante, sans bruit
- $Re_\tau = 720$, à partir d'une vitesse nulle,
- $Re_\tau = 720$, à partir d'un profil parabolique avec 1% de bruit sur 1 la composante u_x .

Ces configurations initiales n'ont pas été suffisamment perturbées pour permettre la transition vers l'état turbulent. La figure 4.2 montre une coupe de la vitesse pour un canal n'ayant pas développé de turbulence. Au contraire, les simulations suivantes (4.3) ont développé de la tur-

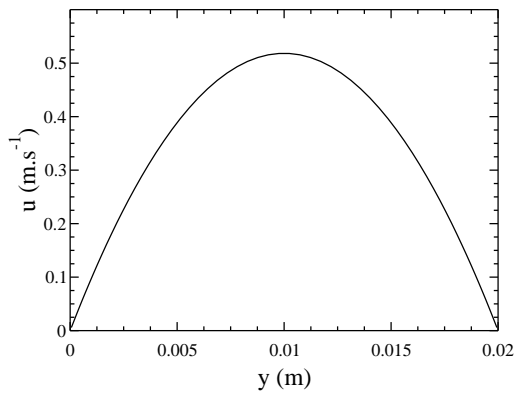


FIGURE 4.2 – Coupe d'un canal n'ayant pas développé de turbulence

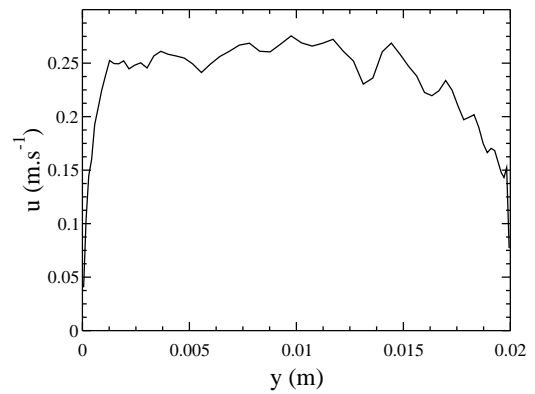


FIGURE 4.3 – Coupe d'un canal ayant développé de la turbulence

bulence :

- $Re_\tau = 720$, avec 1% de bruit sur 3 axes,
- $Re_\tau = 720$, avec 5% de bruit sur 1 axe,
- $Re_\tau = 720$, avec 5% de bruit sur 3 axes,
- $Re_\tau = 720$, à partir d'un profil plat à vitesse débitante avec 5% de bruit sur 3 axes.
- $Re_\tau = 3600$.

4.2.2 Maintien du nombre de Reynolds

Dans la littérature, les configurations de canal plan sont caractérisées par la valeur du nombre de Reynolds de frottement $Re_\tau = u_\tau h / \nu$, où u_τ représente la vitesse de frottement. Elle est définie par

$$u_\tau = \sqrt{\nu \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0}} \quad (4.2)$$

$\bar{u}(\xi)$ représente la vitesse moyenne longitudinale sur le plan d'équation $y = \xi$. Le contrôle de Re_τ peut se faire par l'intermédiaire du débit, comme le montre la corrélation de Dean (1978) :

$$Re_\tau = 0,175 Re_d^{7/8} \quad (4.3)$$

Re_d représente le Reynolds débitant basé sur la vitesse débitante, parfois noté Re_b pour Reynolds bulk en anglais. Le gradient moyen de pression étant nul à cause de la périodicité, le moteur de l'écoulement est assuré par une force volumique constante en espace, dont la valeur est réajustée à chaque itération. Elle a pour but de conserver un débit constant. Dans le code ISIS, nous avons implémenté une classe permettant à la fois de mesurer le débit et d'ajouter une force volumique dépendante de sa propre valeur aux instants précédents ainsi que du débit. Nous avons choisi d'utiliser la force proposée par [Rollet-Miet et al. \(1999\)](#), tout en permettant d'augmenter son ordre. Elle est calculée de la façon suivante :

$$F_{n+1} = F_n + \sum_{i=0}^I c_i (Q_{\text{ref}} - Q_{n-i}) \quad (4.4)$$

F_n et Q_n représentent respectivement la force volumique et le débit à l'itération n . L'ordre est défini par le nombre de coefficients. Une fois choisi, il reste à déterminer la valeur des coefficients, en prenant en compte que :

- des coefficients trop gros donnent de trop grandes amplitudes aux oscillations de débit, voire font diverger le calcul ;
- des coefficients trop petits donnent une trop grande longueur d'onde aux oscillations de débit.

[Rollet-Miet et al. \(1999\)](#) utilisent l'ordre 2 avec $c_1 = 1$ et $c_2 = -0,5$. C'est également cette solution que nous avons retenue.

4.3 Intérêts du canal plan

Le canal plan correspond à un cas test académique qui a le double avantage d'avoir des temps de calculs "raisonnables" et d'avoir été beaucoup étudié par le passé. La littérature est donc riche en résultats auxquels nous pouvons nous confronter pour valider nos propres résultats. Nous noterons par exemple des SND réalisées par [Hoyas et Jiménez \(2008\)](#) pour des valeurs de Re_τ allant jusqu'à 2003. [Tiselj et al. \(2001b\)](#) et [Moser et al. \(1999\)](#) proposent des résultats pour des valeurs de Re_τ de 180, 395 et 590, et [Kim et al. \(1987\)](#) pour des Reynolds de frottement plus faibles. Notons également que tous ces résultats ont été obtenus par des codes de calcul à méthodes spectrales. [Brillant et al. \(2006\)](#) présentent également des résultats sur un canal plan obtenus par SGE.

Les résultats de [Tiselj et Cizelj \(2012\)](#) ont pour nous beaucoup d'importance, car dans leurs travaux les auteurs résolvent également le champ de température (en scalaire passif) à l'intérieur du domaine fluide ainsi que dans la paroi. Ils participent également au projet européen THINS. Dans ce cadre, les auteurs nous ont permis d'utiliser la base de données de leurs résultats.

La configuration du canal plan a également un aspect historique puisqu'elle correspond à la première configuration étudiée par [Deardorff \(1971\)](#) avec la notion de SGE.

Le canal plan présente aussi un autre avantage. Il est assez proche d'une conduite à section carrée, à la périodicité transverse près. En modifiant cette périodicité en paroi au niveau de la condition limite, nous obtenons une conduite périodique turbulente à section carrée. Une

sauvegarde au cours du temps d'une coupe de cette conduite permet de générer une entrée turbulente, pour un Té de mélange par exemple. L'importance d'une entrée turbulente en SGE et les techniques de générations sont développées à la section 7.2.

4.4 Objectifs de l'étude

Compte tenu de ce qui a été dit ci-dessus, les objectifs de l'étude du canal plan sont les suivants :

Dans le cadre du projet européen THINS, nous voulons montrer qu'il est possible d'avoir de bon résultats par SGE pour des écoulements de fluide présentant un faible nombre de Prandtl (noté Pr) de l'ordre de 0,01. Pr représente le rapport de diffusion de quantité de mouvement par rapport à la diffusion de température. Par définition :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (4.5)$$

Dans un écoulement où $Pr \ll 1$, les plus petites échelles thermiques restent très grandes devant les plus petites échelles dynamiques. Le rapport est inversement proportionnel à Pr . Or, pour bien capter les phénomènes dynamiques, il est a priori nécessaire d'être bien résolu en proche paroi, même dans le cadre de la SGE. Cette résolution n'est cependant pas utile au champ de température, qui focalise notre intérêt dans cette étude. Il apparait donc intéressant d'utiliser une loi de paroi pour les équations de Navier-Stokes, pour permettre de relâcher le maillage, tout en gardant une excellente résolution pour le champ thermique. L'un des principaux objectifs de cette étude est de mettre en évidence la validité de cette technique.

Nous voulons montrer que les fluctuations de température à l'interface fluide-solide sont très sensibles à la condition limite utilisée, et que par conséquent, il est important de mailler la paroi pour bien les estimer. Par conséquent, nous effectuerons une étude paramétrique sur les propriétés physiques du mur.

Enfin, en remplaçant la condition de périodicité suivant la profondeur par des parois, nous simulons des conduites périodiques à section carrée pour pouvoir générer des entrées turbulentes pour le Té de mélange.

Chapitre 5

Équations régissant le cas du canal plan

Dans ce chapitre, nous présentons les équations régissant les transferts de masse et de chaleur au sein du fluide et du solide. Nous définissons également les paramètres numériques retenus pour l'ensemble des simulations.

5.1 Équations applicables à l'intérieur du fluide

5.1.1 Équations physiques

Nous nous plaçons ici dans le cadre d'un écoulement incompressible anisotherme dans un canal plan périodique dont la géométrie a été définie à la section 4.1. Une force volumique \mathbf{F} (conforme à la définition donnée en 4.2.2) sert de moteur à l'écoulement et conserve le débit la valeur du nombre de Reynolds de frottement. Une source volumique de chaleur $S = S_f u_x / u_B$ proportionnelle à la vitesse longitudinale est appliquée. Les équations mises en oeuvre sont les équations (1.5) à (1.7) développées dans la section 1.1. En tenant compte de la définition de la source de chaleur, elles s'écrivent sous forme vectorielle :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & (5.1) \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{\rho_f} \nabla P + \mathbf{F} & (5.2) \\ \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}T) + \kappa_f \nabla^2 T + S_f \frac{u_x}{u_B} & (5.3) \end{cases}$$

Les équations (5.1) à (5.3) sont définies pour $(x, y, z) \in ([0; L_x], [0; 2h], [0; L_z])$ et $t \in [0, t_{fin}]$. u_B représente la vitesse débitante dite Bulk, c'est à dire la vitesse moyenne sur une section du canal. Elle est définie par :

$$u_B = \frac{\int_0^{2h} u_x}{2h} \quad (5.4)$$

Dans toute cette seconde partie consacrée à l'étude du canal plan, les indices f se rapporteront à des caractéristiques du fluide, alors que les indices w concerneront les grandeurs liées au mur

(wall). Les indices i feront référence à l'interface, et pourront être combinés avec les deux autres indices que nous venons d'évoquer.

Nous pouvons aussi choisir d'écrire la source de chaleur S_f en fonction de q_w , le flux thermique à l'interface fluide-paroi. En régime établi, l'énergie produite au sein du fluide est entièrement évacuée par les murs. Le bilan thermique s'écrit $2q_w L_z = \rho_f c_{p_f} S_f \int_{y=0}^{2h} \int_{z=0}^{L_z} u_x / u_B$, d'où l'expression de S_f :

$$S_f = q_w / (2h\rho_f c_{p_f}) = T_\tau u_\tau / h \quad (5.5)$$

5.1.2 Équations adimensionnées

Afin de regrouper l'ensemble des problèmes isomorphes, le système d'équations (5.1) à (5.3) est souvent rencontré sous forme adimensionnée. Pour l'adimensionner, il faut au préalable choisir les variables de référence. Les plus couramment utilisées sont :

- vitesse : $u_\tau = \sqrt{\nu \left. \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right|_{y=0}}$
- distance : $l_\tau = \frac{\nu}{u_\tau}$ ou h
- temps : $t_\tau = \frac{l_\tau}{u_\tau}$
- pression : $P_\tau = \rho u_\tau^2$
- température : $T_\tau = \kappa \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{u_\tau} = \frac{q_w}{\rho c_p u_\tau}$

Nous noterons par un exposant $+$ une grandeur divisée par la variable de référence de même dimension. Pour les distances, l'exposant $+$ est utilisé pour les distances adimensionnées par l_τ et l'exposant $*$ pour les distances adimensionnées par h . Nous obtenons alors :

- $\mathbf{u}^+ = \frac{\mathbf{u}}{u_\tau}$
- $x^+ = \frac{x}{l_\tau}, y^+ = \frac{y}{l_\tau}, z^+ = \frac{z}{l_\tau},$
- $x^* = \frac{x}{h}, y^* = \frac{y}{h}, z^* = \frac{z}{h},$
- $t^+ = \frac{t}{t_\tau} = \frac{u_\tau t}{l_\tau}$
- $t^* = \frac{u_\tau t}{h}$
- $P^+ = \frac{P}{P_\tau}$
- $T^+ = \frac{T}{T_\tau}$
- $\text{Re}_\tau = \frac{u_\tau h}{\nu} = \frac{h}{l_\tau}$
- $\nabla^+ = \left(\frac{\partial}{\partial x^+}, \frac{\partial}{\partial y^+}, \frac{\partial}{\partial z^+} \right)$
- $\nabla^* = \left(\frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{\partial}{\partial y^*}, \frac{\partial}{\partial z^*} \right)$

Compte tenu des ces adimensionnements, quelque soit la distance ξ , nous avons la relation

$$\xi^+ = \text{Re}_\tau \xi^* \quad (5.6)$$

5.1.2.1 Système adimensionné en utilisant $l_\tau = \frac{\nu}{u_\tau}$

On multiplie :

- L'équation de masse par $\frac{l_\tau}{u_\tau}$
- L'équation de quantité de mouvement par $\frac{\nu}{u_\tau^3}$
- L'équation d'énergie par $\frac{\nu}{u_\tau^2 T_\tau}$

Pour obtenir

$$\begin{cases} \nabla^+ \cdot \mathbf{u}^+ = 0 & (5.7) \\ \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t^+} = -\nabla^+ \cdot (\mathbf{u}^+ \mathbf{u}^+) + \nabla^{+2} \mathbf{u}^+ - \nabla^+ P^+ + \mathbf{F}^+ & (5.8) \\ \frac{\partial T^+}{\partial t^+} = -\nabla^+ \cdot (\mathbf{u}^+ T^+) + \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^{+2} T^+ + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{u_x^+}{u_B^+} & (5.9) \end{cases}$$

Ce système est maintenant défini pour $(x^+, y^+, z^+) \in ([0; L_x/l_\tau], [0; 2\text{Re}_\tau], [0; L_z/l_\tau])$ et $t^+ \in [0, u_\tau t_{end}/l_\tau]$

5.1.2.2 Système adimensionné en utilisant h

On multiplie :

- L'équation de masse par $\frac{h}{u_\tau}$
- L'équation de quantité de mouvement par $\frac{h}{u_\tau^2}$
- L'équation d'énergie par $\frac{h}{u_\tau T_\tau}$

Pour obtenir

$$\begin{cases} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^+ = 0 & (5.10) \\ \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t^*} = -\nabla^* \cdot (\mathbf{u}^+ \mathbf{u}^+) + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \nabla^{*2} \mathbf{u}^+ - \nabla^* P^+ + \text{Re}_\tau \mathbf{F}^+ & (5.11) \\ \frac{\partial T^+}{\partial t^*} = -\nabla^* \cdot (\mathbf{u}^+ T^+) + \frac{1}{\text{Re}_\tau \text{Pr}} \nabla^{*2} T^+ + \frac{u_x^+}{u_B^+} & (5.12) \end{cases}$$

Ce système est maintenant défini pour $(x^*, y^*, z^*) \in ([0; L_x/h], [0; 2], [0; L_z/h])$ et $t^* \in [0, u_\tau t_{end}/h]$

5.2 Équations applicables à l'intérieur de la paroi

5.2.1 Équations physiques

Les transferts thermiques au sein de la paroi sont régis par le système

$$\begin{cases} T_{f,i} = T_{w,i} & (5.13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial y} \Big|_i = \lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial y} \Big|_i & (5.14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_w \nabla^2 T - S_w & (5.15) \end{cases}$$

Pour rappel, l'indice i désigne une grandeur à l'interface fluide-solide. Les équations (5.13) et (5.14) sont définies pour $y \in \{0; 2h\}$ et l'équation (5.15) pour $(x, y, z) \in ([0; L_x], [-d; 0] \cup [2h, 2h + d], [0; L_z])$ et $t \in [0, t_{end}]$. Ces équations représentent la condition de continuité de température ((5.13)), la condition de continuité du flux thermique ((5.14)), ainsi que les transferts thermiques au sein de la zone solide ((5.15)). Le bilan thermique au sein du mur s'écrit $q_w L_z = \rho_w c_{pw} S_w d L_z$ et conduit donc à l'expression du puit de chaleur dans le mur : $S_w = q_w / (d \rho_w c_{pw})$, où d représente la profondeur du mur.

5.2.2 Équations adimensionnées

5.2.2.1 Un premier adimensionnement

De même que pour les équations dynamiques, la forme du système adimensionné obtenu dépend de la longueur caractéristique choisie, l_τ ou h . Elle dépend également des rapports de paramètres entre le fluide et le mur que l'on désire mettre en avant. Nous serons amenés à utiliser plusieurs de ces rapports caractéristiques, dont voici les définitions. Dans tous les cas, il s'agira d'un paramètre intrinsèque au mur divisé par le même paramètre du fluide.

- $H = \frac{\lambda_f}{\lambda_w}$, le rapport des conductivités thermiques,
- $R = \frac{\rho_f c_{pf}}{\rho_w c_{pw}}$, le rapport des inerties thermiques,
- $G = \frac{\kappa_f}{\kappa_w} = \frac{\frac{\lambda_f c_{pf}}{\rho_f}}{\frac{\lambda_w c_{pw}}{\rho_w}}$, le rapport des diffusivités thermiques,
- $K = \frac{\sqrt{\lambda_f \rho_f c_{pf}}}{\sqrt{\lambda_w \rho_w c_{pw}}}$, le rapport des effusivités thermiques.

A priori, trois bases de paramètres paraissent intéressantes à étudier. Chacune conduit à sa propre écriture adimensionnée des équations, ainsi qu'à des interprétations différentes. Ces bases sont définies comme suit :

- $\mathcal{B}_1 = \{K, G, d^{**}\}$
- $\mathcal{B}_2 = \{H, R, d^*\}$
- $\mathcal{B}_3 = \{K, G, d^*\}$

d^{**} est défini par $d^{**} = d^* \sqrt{G}$, mais nous y reviendrons. Pour la suite de ce paragraphe, la grandeur retenue pour l'adimensionnement des distances est la demi-hauteur h . Les formes adimensionnelles des équations (5.13) à (5.15) sont obtenues respectivement par une multiplication de facteur $1/T_\tau$, h/T_τ et $h/(u_\tau T_\tau)$. Ainsi, sous forme adimensionnelle, le système (5.13)-(5.15) s'écrit dans la base \mathcal{B}_1 :

$$\begin{cases} T_{f,i}^+ = T_{w,i}^+ & (5.16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial T_f^+}{\partial y^*} \right|_i = \frac{1}{K} \left. \frac{\partial T_w^+}{\partial y^{**}} \right|_i & (5.17) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T^+}{\partial t^*} = \frac{1}{G \text{Re}_\tau \text{Pr}} \nabla^{*2} T^+ - \frac{K}{d^{**}} & (5.18) \end{cases}$$

Dans la base \mathcal{B}_2 , il s'écrit :

$$\begin{cases} T_{f,i}^+ = T_{w,i}^+ & (5.19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial T_f^+}{\partial y^*} \right|_i = \frac{1}{H} \left. \frac{\partial T_w^+}{\partial y^*} \right|_i & (5.20) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T^+}{\partial t^*} = \frac{R}{H \text{Re}_\tau \text{Pr}} \nabla^{*2} T^+ - \frac{R}{d^*} & (5.21) \end{cases}$$

et dans la base \mathcal{B}_3

$$\begin{cases} T_{f,i}^+ = T_{w,i}^+ & (5.22) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial T_f^+}{\partial y^*} \right|_i = \frac{1}{K \sqrt{G}} \left. \frac{\partial T_w^+}{\partial y^*} \right|_i & (5.23) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T^+}{\partial t^*} = \frac{1}{G \text{Re}_\tau \text{Pr}} \nabla^{*2} T^+ - \frac{K}{d^* \sqrt{G}} & (5.24) \end{cases}$$

Dans ces trois bases, $(x^*, y^*, z^*) \in ([0; L_x/h], [-d/h; 0] \cup [2, 2 + d/h], [0; L_z/h])$ et $t^* \in [0, u_\tau t_{end}/h]$.

Chacune des variables de base s'exprime comme un produit de certaines autres. Nous avons des bases multiplicatives. Le tableau 5.1 représente les matrices de passage pour les bases que nous venons d'évoquer. Les bases étant multiplicatives, pour un vecteur ligne de paramètres X^i dans la base \mathcal{B}_i , le vecteur ligne Y^j de paramètres correspondants dans la base \mathcal{B}_j est défini par la relation :

$$Y^j = \exp [\ln(X^i) \times P^{i \rightarrow j}] \quad (5.25)$$

5.2.2.2 L'adimensionnement double-étoile **

Si les transferts thermiques au sein du mur s'effectuent uniquement dans la direction normale à la paroi, le terme $\nabla^{*2} T^+$ n'a qu'une seule composante : $\nabla^{*2} T^+ = \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{*2}}$. Un nouvel

		\mathcal{B}_1			\mathcal{B}_2			\mathcal{B}_3		
		K	G	d^{**}	H	R	d^*	K	G	d^*
\mathcal{B}_1	K	1			1	1		1		
	G		1		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		1	$-\frac{1}{2}$
	d^{**}			1			1			1
\mathcal{B}_2	H	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1			$\frac{1}{2}$	1	
	R	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$		1		$\frac{1}{2}$	-1	
	d^*			1			1			1
\mathcal{B}_3	K	1			1	1		1		
	G		1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			1	
	d^*			1			1			1

TABLE 5.1 – Tableau des matrices de passage

adimensionnement ** des distances tel que $d^{**} = d^* \sqrt{G}$ est donc possible. Il conduit à réécrire l'équation (5.18) sous la forme :

$$\frac{\partial T^+}{\partial t^*} = \frac{1}{\text{Re}_\tau \text{Pr}} \nabla^{**2} T^+ - \frac{K}{d^{**}} \quad (5.26)$$

avec $y^{**} \in [-d\sqrt{G}/h; 0] \cup [2\sqrt{G}; 2\sqrt{G} + d\sqrt{G}/h]$.

Cependant, si la conduction thermique est considérée dans son intégralité, alors le terme $\nabla^{*2} T^+$ a trois composantes et s'écrit $\nabla^{*2} T^+ = \frac{\partial^2 T^+}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial z^{*2}}$. Les ensembles de définition des variables x^* et z^* étant fixés par les équations au sein du fluide, il n'est pas possible d'effectuer l'adimensionnement ** sur les distances. Ce verrou est parfois oublié dans la littérature.

5.3 Paramètres numériques retenus

5.3.1 Discrétisation spatiale

Dans le cadre de cette étude, nous réalisons nos simulations avec une discrétisation spatiale de type MAC. Les nœuds des scalaires sont situés au centre des mailles, et les nœuds de vitesses au centre des faces. Ils n'ont cependant qu'une seule composante correspondant à la composante de la vitesse normale à la face. Une représentation schématique de l'élément MAC est donnée en figure 5.1

Deux types de maillages sont utilisés. L'un est plutôt grossier, il est utilisé avec une loi de paroi. Nous le noterons MG. L'autre est plutôt fin et ne nécessite aucune loi de paroi. Nous le noterons MF.

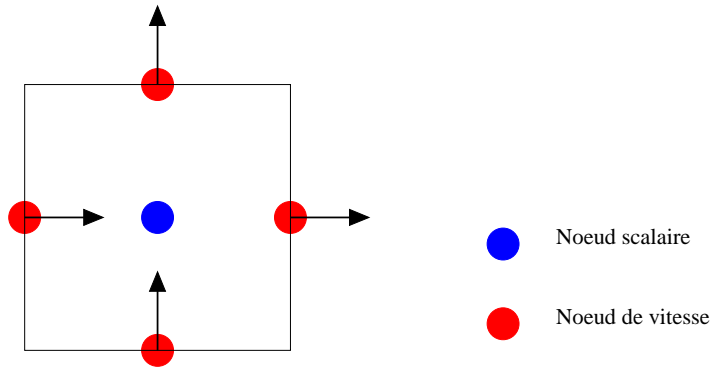


FIGURE 5.1 – Représentation schématique de l'élément MAC

Si aucune loi de paroi n'est utilisée, le maillage selon la direction verticale est progressif, et suit la formule (5.27) :

$$y_k = h \left\{ 1 + \frac{1}{a} \tanh \left[\left(-1 + \frac{2(k-1)}{N_y - 1} \right) \operatorname{atanh}(a) \right] \right\}, \quad k \in [1, N_y] \quad (5.27)$$

y_k représente l'ordonnée du $k^{\text{ième}}$ nœud, et N_y le nombre total de nœuds dans la direction y . Il est supérieur au nombre de mailles de une unité. Le paramètre a , compris entre 0 et 1 est à déterminer. Il permet de fixer la taille de la première maille. Nous avons choisi a tel que $\Delta y^+ = 1$ pour la première maille. Ceci donne un premier nœud de vitesse à $y^+ = 0,5$. Il est aussi important de vérifier que deux mailles adjacentes ne présentent pas un trop gros écart relatif de dimension. Une différence de volume inférieure à 15% entre deux mailles successives a été conservée dans la mesure du possible. La figure 5.2 montre le maillage obtenu en utilisant une progression de taille de maille selon la formule (5.27). Les paramètres des deux maillages MG et MF sont détaillés dans le tableau 5.2.

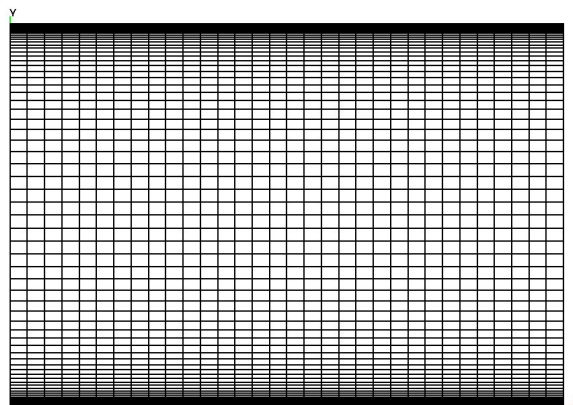


FIGURE 5.2 – Maillage du canal suivant x et y

		MG	MF
Nombre de maille suivant	x	32	32
	y	40	70
	z	24	48
Taille de maille adimensionnée	Δx^+	35,8	35,8
	Δy^+	19,7	$1 < \Delta y^+ < 27,2$
	Δz^+	23,0	11,5
Loi de paroi		oui	non
Paramètre de dilatation a		-	0,98267

 TABLE 5.2 – Définition des deux maillages utilisés pour le canal plan à $Re_\tau = 395$.

Nous allons maintenant approfondir quelques détails numériques spécifiques à chaque équation.

5.3.2 Équations de Navier-Stokes

Pour les équations de Navier-Stokes, nous avons opté pour les choix suivants :

- Le schéma en temps est de type Crank Nicholson. C'est un schéma d'ordre 2 en temps et peu dissipatif en terme d'énergie cinétique.
- Le terme convectif est modélisé à l'aide d'un schéma centré implicite. Ce schéma, bon compromis entre précision et stabilité, est d'ordre 2 en espace et permet entre autre de conserver l'énergie cinétique. Nous verrons dans la section 8.1 que ce schéma ne convient pas pour le cas du Té et nous en choisirons un autre.
- Le terme diffusif est modélisé par le schéma usuel de différences finies VF4 d'ordre 2.
- Le modèle sous maille adopté pour le terme visqueux est le modèle WALE avec une constante statique $C_w = 0,5$. Ce modèle est suffisamment précis pour ne pas requérir une méthode dynamique d'évaluation de la constante, beaucoup plus coûteuse. Pour l'estimation de la longueur de coupure, la correction de Scotti est utilisée (cf [Scotti et al. \(1997\)](#)). La longueur de coupure $\bar{\Delta}$ du filtre peut être exprimée par :

$$\bar{\Delta} = f(a_1, a_2) \cdot (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3} \quad (5.28)$$

Δ_x , Δ_y et Δ_z représentent respectivement la taille de la maille dans les directions x , y et z . Dans le cas général, f est une fonction constante égale à 1. Si la correction de Scotti est utilisée, f est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_k = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) \end{array} \right. \quad (5.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{\Delta_i}{\Delta_k}, \quad i \neq k \end{array} \right. \quad (5.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = \frac{\Delta_j}{\Delta_k}, \quad j \neq i, \quad j \neq k \end{array} \right. \quad (5.31)$$

$$f(a_1, a_2) = \cosh \left[\left(\frac{4}{27} [(\ln a_1)^2 - \ln a_1 \ln a_2 + (\ln a_2)^2] \right) \right] \quad (5.32)$$

- En cas d'utilisation du maillage grossier, la loi de paroi de Werner et Wengle est utilisée. Pour rappel, cette loi de paroi est défini par :

$$\begin{cases} u^+ = y^+, & \text{si } y^+ \leq 11,8 \\ u^+ = 8,3y^{+1/7}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.33)$$

$$(5.34)$$

Pour plus de précisions sur cette loi, le lecteur est invité à se référer à [Werner et Wengle \(1993\)](#). Si cette loi de paroi n'est pas utilisée, une condition de non glissement est appliquée.

- Une force volumique itérative définie comme au paragraphe 4.2.2 à deux coefficients avec $c_1 = 1$ et $c_2 = -0,5$ sert de moteur à l'écoulement.
- La température est traitée comme un scalaire passif. Elle n'a donc aucune influence sur les équations de Navier-Stokes.

5.3.3 Équations de température

Pour les équations de température, nous avons opté pour les choix suivants :

- Le nombre de Prandtl Pr est pris égal à 0,01.
- Le terme convectif est modélisé par un schéma explicite MUSCL (Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws), déjà présent dans le code ISIS. Ce schéma requiert un critère de CFL (Courant Friedrichs Lewy), et vérifie le principe du maximum. Il est d'ordre 2 en espace.
- Une discrétisation en temps d'Euler est utilisée. Elle permet la preuve de l'existence du critère de CFL pour le schéma MUSCL, ainsi que son calcul, ce qui assure un schéma positif (la température reste bornée par les conditions limites et les valeurs initiales). En contrepartie de cette preuve, ce schéma est d'ordre 1 en temps.
- Le terme diffusif est modélisé par le schéma usuel de différences finies VF4 d'ordre 2 en espace.
- Un modèle de diffusivité sous-maille basé sur une viscosité type WALE avec évaluation dynamique de la constante est adopté, afin de s'affranchir du choix de cette constante. De même que pour le modèle de viscosité sous maille, la correction de Scotti est utilisée.
- Les conditions limites sont de type isotherme, isoflux ou avec maillage de la paroi. Dans ce dernier cas, la condition limite entre la paroi et l'extérieur est de type adiabatique.
- Lorsque que la paroi est intégrée au domaine de calcul, le champ de température est résolu à l'aide d'une méthode pseudo 3D. Les transferts thermiques normaux à la paroi sont implicites, tandis que les transferts parallèles à la paroi sont explicites. De plus, les transferts entre parois adjacentes ne sont pas pris en compte. À l'origine, au mieux, les parois pouvaient supporter une condition limite modélisant la conduction 1D suivant la profondeur. Les transferts parallèles au mur n'étant pas possibles, les fluctuations de température au sein du mur étaient fortement sur-évaluées, ce qui n'était pas satisfaisant. Cette méthode pseudo 3D apparaissait comme un très bon compromis entre complexité d'implémentation et qualité des résultats. Elle a donc été ajoutée au code, et s'est révélée très efficace.
- Lorsque la paroi est intégrée au domaine de calcul, le schéma en temps à l'intérieur de la paroi est de type BDF2 d'ordre 2 en temps.

- Les simulations ont montré que le nombre de mailles dans la paroi n'a aucun impact significatif ni sur les résultats ni sur les temps de calcul. Il joue uniquement sur la résolution de la courbe de résultats lors de son tracé via le nombre de points. Il a donc été arbitrairement pris égal à 20. Ce résultat est illustré sur les figures 5.3 et 5.4 représentant respectivement la moyenne et l'écart type de la température dans le mur pour différentes résolutions.

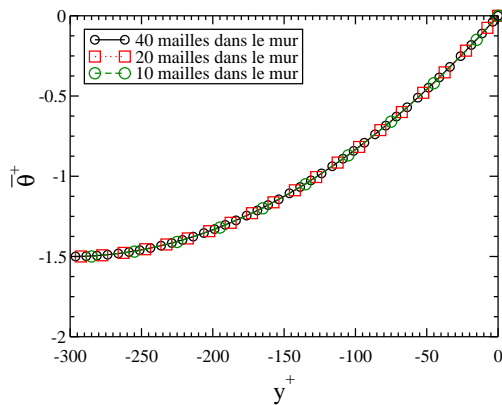


FIGURE 5.3 – Moyenne de θ^+ dans le mur pour différentes résolutions

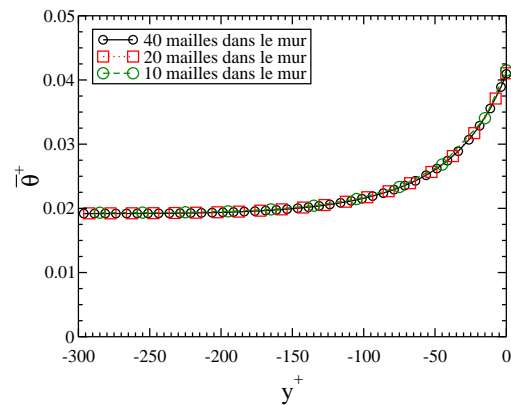


FIGURE 5.4 – Écart type de θ^+ dans le mur pour différentes résolutions

5.3.4 Post-traitement

Les grandeurs sont étudiées sous forme adimensionnée, pour permettre une comparaison avec la littérature. Les longueurs seront exprimées soit en unité de paroi (adimensionnement noté $^+$), soit en demi hauteur (adimensionnement noté *). Les vitesses sont visualisées en fraction de u_τ . Pour la température, deux opérations successives sont à effectuer pour obtenir une grandeur comparable à la littérature. Tout d'abord, il faut décaler le champ de température afin d'obtenir une température moyenne nulle à la paroi. Ensuite une division par T_τ est effectuée, où T_τ représente la température de friction et est définie par $T_\tau = \kappa \frac{\partial T}{\partial y} |_{y=0} = \frac{q_w}{\rho c_p u_\tau}$. Les variables adimensionnées étudiées sont donc :

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (5.35)$$

$$v^+ = \frac{v}{u_\tau} \quad (5.36)$$

$$w^+ = \frac{w}{u_\tau} \quad (5.37)$$

$$\theta^+ = \frac{T - T_w}{T_\tau} \quad (5.38)$$

Pour chacune de ces variables, des statistiques en temps et en espace sur des plans normaux à y sont réalisées. Les différents moments statistiques sont calculés. Un rappel sur ce qu'ils représentent se trouve en annexe A. Notamment, la moyenne d'une variable ϕ sera noté $\bar{\phi}$ et son écart type σ_ϕ . Nous considérons que l'écoulement est établi lorsque sur plusieurs sauvegardes

consécutives, les moments calculés oscillent autour d'une valeur moyenne. Cette propriété est à vérifier à l'instant où l'on commence à calculer les statistiques. Ensuite, nous considérons que les statistiques sont convergées lorsqu'elles deviennent peu sensibles à la prise en compte de données supplémentaires.

Dans notre étude, nous avons pris comme instant de départ du calcul des moments statistiques l'instant $t^* = 11,85$. Une particule fluide évoluant à vitesse débitante a alors réalisé 70 tours de canal. Les statistiques sont intégrées sur une période $\Delta t^* = 27,65$, ce qui correspond à la durée nécessaire pour parcourir 164 tours de canal à vitesse débitante.

Chapitre 6

Résultats

Dans ce chapitre, nous présentons l'ensemble des résultats théoriques et numériques relatifs au canal plan.

6.1 Résultats Analytiques

Dans la géométrie relativement simple du canal plan, il est possible d'exhiber certains résultats par des démonstrations analytiques. Dans cette section, nous présentons dans un premier temps les résultats analytiques du comportement du champ moyen de température au sein du mur. Ensuite, nous donnons l'évolution temporelle et spatiale exacte de la température au sein d'un mur semi infini soumis à une excitation forcée sinusoïdale.

6.1.1 Température moyenne dans le mur

Avec la base de paramètres (H, R, d^*) , l'équation de la chaleur s'écrit dans le mur sous forme adimensionnée :

$$\frac{\partial T^+}{\partial t^*} = \frac{R}{H \text{Re}_\tau \text{Pr}} \nabla^{*2} T^+ - \frac{R}{d^*} \quad (6.1)$$

Pour la visualisation des résultats, la variable $\theta^+ = T^+ - \overline{T_i^+}$ est utilisée. Cette opération conduit à $\overline{\theta_i^+} = 0$. L'adimensionnement par T_τ avait déjà conduit à $\left. \frac{\partial T^+}{\partial y^*} \right|_{i,f} = \text{Re}_\tau \text{Pr}$ donc

$\left. \frac{\partial \overline{\theta^+}}{\partial y^*} \right|_{i,f} = \text{Re}_\tau \text{Pr}$. En moyennant l'équation (6.1) sur les plans parallèles aux murs, nous obtenons l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 \overline{\theta^+}}{\partial y^{*2}} = \frac{H \text{Re}_\tau \text{Pr}}{d^*} \quad (6.2)$$

Cette équation a pour solution :

$$\overline{\theta^+}(y^*) = \frac{H \text{Re}_\tau \text{Pr}}{2d^*} y^{*2} + B y^* + C \quad (6.3)$$

À partir des deux conditions limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\theta}_i^+ = 0 \\ \frac{\partial \overline{\theta}^+}{\partial y^*} \Big|_{i,w} = H \frac{\partial \overline{\theta}^+}{\partial y^*} \Big|_{i,f} = H \text{Re}_\tau \text{Pr} \end{array} \right. \quad (6.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = H \text{Re}_\tau \text{Pr} \\ C = 0 \end{array} \right. \quad (6.5)$$

nous pouvons calculer B et C :

$$\left\{ \begin{array}{l} B = H \text{Re}_\tau \text{Pr} \\ C = 0 \end{array} \right. \quad (6.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = H \text{Re}_\tau \text{Pr} \\ C = 0 \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Ce qui aboutit à l'expression de $\overline{\theta}^+$

$$\overline{\theta}^+(y^*) = \frac{H \text{Re}_\tau \text{Pr}}{d^*} y^{*2} + H \text{Re}_\tau \text{Pr} y^* \quad (6.8)$$

6.1.2 Pénétration d'un signal sinusoïdal

Considérons un mur infini dans les directions longitudinale et transverse, et semi infini en profondeur, sollicité à l'interface fluide-solide par un signal de température sinusoïdal d'équation :

$$T_i(x, y, z, t) = \sin(\omega t + \alpha x + \beta z + \phi) \quad (6.9)$$

ω , α , β et ϕ représentent respectivement la pulsation en t , x , z et le déphasage. Rappelons que la conduction dans le mur est régie par l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad (6.10)$$

Nous allons montrer que en tout point (x, y, z, t) du mur l'expression de la température en régime établi s'écrit

$$T(x, y, z, t) = \exp \left[\frac{-y}{\sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}} \sqrt{\frac{\kappa(\alpha^2 + \beta^2)}{\omega} + \sqrt{\frac{\kappa^2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\omega^2} + 1}} \right] \sin \left(\omega t + \alpha x + \beta z + \phi + \frac{-y}{\sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}} \sqrt{\frac{\kappa(\alpha^2 + \beta^2)}{\omega} + \sqrt{\frac{\kappa^2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\omega^2} + 1}} \right) \quad (6.11)$$

Preuve : Nous noterons A , B et C les quantités suivantes :

$$A = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}} \quad (6.12)$$

$$B = \sqrt{\frac{\kappa(\alpha^2 + \beta^2)}{\omega} + \sqrt{\frac{\kappa^2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\omega^2} + 1}} \quad (6.13)$$

$$C = \omega t + \alpha x + \beta z + \phi + \frac{-y}{\sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}} \left/ \sqrt{\frac{\kappa(\alpha^2 + \beta^2)}{\omega} + \sqrt{\frac{\kappa^2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\omega^2} + 1}} \right. \quad (6.14)$$

Ainsi

$$T(x, y, z, t) = \exp\left[\frac{-y}{A}B\right] \sin(C) \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \exp\left[\frac{-y}{A}B\right] \cos(C) \omega \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\exp\left[\frac{-y}{A}B\right] \sin(C) \alpha^2 \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\exp\left[\frac{-y}{A}B\right] \sin(C) \beta^2 \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{B}{A} \exp\left[\frac{-y}{A}B\right] \sin(C) - \exp\left[\frac{-y}{A}B\right] \cos(C) \frac{1}{AB} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{B^2}{A^2} \exp\left[\frac{-y}{A}B\right] \sin(C) + \frac{B}{A} \exp\left[\frac{-y}{A}B\right] \cos(C) \frac{1}{AB} \\ &\quad + \frac{B}{A} \exp\left[\frac{-y}{A}B\right] \cos(C) \frac{1}{AB} - \exp\left[\frac{-y}{A}B\right] \sin(C) \frac{1}{A^2 B^2} \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \exp\left[\frac{-y}{A}B\right] \sin(C) \frac{1}{A^2} \left(B^2 - \frac{1}{B^2}\right) + \exp\left[\frac{-y}{A}B\right] \cos(C) \left(\frac{2}{A^2}\right) \quad (6.21)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \nabla^2 T &= \exp\left[\frac{-y}{A}B\right] \cos(C) \left(\omega - \kappa \frac{2}{A^2}\right) \\ &\quad + \kappa \exp\left[\frac{-y}{A}B\right] \sin(C) \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{A^2} \left(B^2 - \frac{1}{B^2}\right)\right) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Or

$$\omega - \kappa \frac{2}{A^2} = \omega - \frac{2\kappa}{\frac{2\kappa}{\omega}} = 0 \quad (6.23)$$

et

$$\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{A^2} \left(B^2 - \frac{1}{B^2} \right) = \alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{A^2} \left(\frac{B^4 - 1}{B^2} \right) \quad (6.24)$$

$$= \alpha^2 + \beta^2$$

$$- \frac{\omega \frac{\kappa^2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\omega^2} + 2 \frac{\kappa(\alpha^2 + \beta^2)}{\omega} \sqrt{\frac{\kappa^2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\omega^2} + 1} + \frac{\kappa^2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\omega^2}}{2\kappa \frac{\kappa(\alpha^2 + \beta^2)}{\omega} + \sqrt{\frac{\kappa^2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\omega^2} + 1}} \quad (6.25)$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \left[\frac{\kappa(\alpha^2 + \beta^2)}{\omega} + \sqrt{\frac{\kappa^2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\omega^2} + 1} \right]}{\frac{\kappa(\alpha^2 + \beta^2)}{\omega} + \sqrt{\frac{\kappa^2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\omega^2} + 1}} \quad (6.26)$$

$$= 0 \quad (6.27)$$

Ainsi, si T s'écrit conformément à l'équation ((6.11)), nous avons bien $\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \nabla^2 T = 0$.
 T peut alors aussi s'écrire sous la forme :

$$T(x, y, z, t) = \exp \left[-y \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^2 + \frac{\omega^2}{\kappa^2}}} \right] \sin \left(\omega t + \alpha x + \beta z + \phi - y \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega} \left(\frac{\kappa(\alpha^2 + \beta^2)}{\omega} + \sqrt{\frac{\kappa^2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\omega^2} + 1} \right)} \right) \quad (6.28)$$

Nous pouvons immédiatement tirer les conclusions suivantes : d'après l'équation (6.11), κ agit sur les fluctuations de température de deux manières opposées. Une forte valeur de κ favorise la pénétration des fluctuations dans le mur, et a donc tendance à en augmenter l'intensité. Cependant, dans le même temps cette diffusivité thermique lisse les fluctuations sur les plans parallèles aux murs via les flux transverses. En réécrivant la température selon la forme (6.28), nous constatons que c'est le phénomène de pénétration qui l'emporte sur le phénomène d'atténuation. Nous pouvons donc conclure qu'une forte valeur de κ produit des fluctuations de température plus importantes au sein du mur.

6.2 Résultats numériques

6.2.1 Présentations des cas étudiés

Dans ce chapitre, nous utiliserons l_τ pour adimensionner les distances, pour être en accord avec la littérature ou les valeurs de d sont le plus souvent données en unités de paroi.

La totalité des cas étudiés présentés dans les tableaux 6.1 à 6.4 ont en commun le domaine fluide, le nombre de Prandtl Pr , ainsi que les modèles sous maille dynamique et thermique. Les maillages correspondant à chacun des cas sont détaillés dans le tableau 5.2, et dépendent

Cas	Loi de paroi	Condition limite	K	G	d^{++}	Référence SND
001	oui	isotherme	-	-	-	oui
002	oui	isoflux	-	-	-	oui
003	non	isotherme	-	-	-	oui
004	non	isoflux	-	-	-	oui
005	oui	mur	1	1	300	oui
006	non	mur	1	1	300	oui

TABLE 6.1 – Cas utilisés pour étudier l'impact de la nature de la condition limite en température

Cas si loi de paroi	Cas sans loi de paroi	K	G	d^{++}	Référence SND
I01	101	1	0,1	300	-
I02	102	1	0,3	300	-
I03	103	1	3	300	-
I04	104	1	10	300	-
I05	105	0,1	1	300	oui
I06	106	0,3	1	300	oui
I07	107	3	1	300	oui
I08	108	10	1	300	oui
I09	109	1	1	10	oui
I10	110	1	1	100	oui
I11	111	1	1	590	-

TABLE 6.2 – Cas utilisés pour l'étude paramétrique des caractéristiques physiques du mur dans la base \mathcal{B}_1

uniquement de l'utilisation ou non de la loi de paroi. Pour la quasi totalité des résultats présentés ici, $Re_\tau = 395$. L'exception concerne le paragraphe sur l'étude de l'influence du nombre de Reynolds. Les résultats pour $Re_\tau = 590$ sont disponibles en annexe B.

La base \mathcal{B}_1 utilisée dans le tableau 6.2 est celle utilisée par [Tiselj et Cizelj \(2012\)](#). Les auteurs ayant considéré le paramètre G comme un adimensionnement, ils n'en ont pas étudié l'influence, ce qui explique l'absence de résultat de SND. Lors du changement de base de paramètres, il se peut que l'on retombe sur des cas déjà étudiés. C'est le cas par exemple pour l'étude de K dans la base \mathcal{B}_3 . Comme $G = 1$, les cas III05 à III08 et 305 à 308 sont parfaitement identiques aux cas I05 à I08 et 105 à 108. Pour les tableaux 6.3 à 6.4, si elle existe, cette correspondance est notée dans la colonne "Correspondance".

6.2.2 Validation

La validation de notre méthodologie s'effectue en trois étapes. La première étape concerne les champs de vitesse. Comme dans notre étude la température est considérée comme un scalaire passif, toutes les simulations ayant la même condition initiale, le même pas de temps, le

Cas si loi de paroi	Cas sans loi de paroi	H	R	d^+	Correspondance
II01	201	1	0,1	300	-
II02	202	1	0,3	300	-
II03	203	1	3	300	-
II04	204	1	10	300	-
II05	205	0,1	1	300	-
II06	206	0,3	1	300	-
II07	207	3	1	300	-
II08	208	10	1	300	-
II09	209	1	1	10	I09 et 109
II10	210	1	1	100	I09 et 109
II11	211	1	1	590	I09 et 109

TABLE 6.3 – Cas utilisés pour l'étude paramétrique des caractéristiques physiques du mur dans la base \mathcal{B}_2

Cas si loi de paroi	Cas sans loi de paroi	K	G	d^+	Correspondance
III01	301	1	0,1	300	-
III02	302	1	0,3	300	-
III03	303	1	3	300	-
III04	304	1	10	300	-
III05	305	0,1	1	300	I05 et 105
III06	306	0,3	1	300	I06 et 106
III07	307	3	1	300	I07 et 107
III08	308	10	1	300	I08 et 108
III09	309	1	1	10	I09 et 109
III10	310	1	1	100	I09 et 109
III11	311	1	1	590	I09 et 109

TABLE 6.4 – Cas utilisés pour l'étude paramétrique des caractéristiques physiques du mur dans la base \mathcal{B}_3

même nombre d'itérations, et exécutées suivant la même découpe par processeur en cas de calcul parallèle donneront exactement les mêmes résultats. Certains auteurs comme [Tiselj et al. \(2001b\)](#) disposent d'ailleurs d'un code capable de superposer plusieurs champs thermiques en scalaire passif sur un unique champ dynamique. Cela permet de résoudre une seule fois la dynamique, et globalement gagner en temps de calcul. Nous commençons donc par l'étude des champs de vitesse, une seule fois pour l'ensemble des simulations.

Ensuite, nous étudierons l'impact de la condition limite utilisée, parmi "isotherme", "iso-flux", et avec maillage de la paroi. Dans cette dernière condition limite, nous prendrons comme cas de référence les cas 005 et 006 définis au tableau 6.1. Pour chacune de ces simulations, nous confronterons nos résultats à ceux de la littérature.

Enfin, pour la condition limite consistant à mailler la paroi, une étude comparative est effectuée pour l'ensemble des cas pour lesquels nous disposons d'une référence. Ce sont les cas dont les paramètres sont exprimés dans la base \mathcal{B}_1 définis dans le tableau 6.2, et dont la dernière colonne indique l'existence d'une référence.

6.2.2.1 Champ de vitesse

Nous noterons u , v et w les trois composantes de la vitesse suivant les directions x , y et z . Nous représentons ici leurs principaux moments statistiques. Ce sont la moyenne, l'écart type, le skewness et le kurtosis pour u , et l'écart type pour v et w . Nous présentons également la covariance entre u et v noté $u'v'$. Le cas 005 est pris comme représentatif de la dynamique pour les calcul avec utilisation de loi de paroi, et le cas 006 pour les calculs sans loi de paroi. Les résultats sont confrontés aux SND de [Tiselj et Cizelj \(2012\)](#).

a) Profils de u , vitesse longitudinale

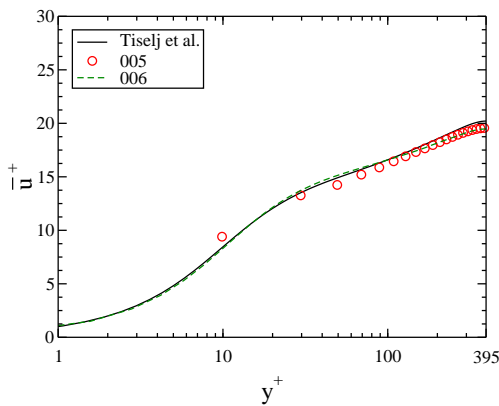


FIGURE 6.1 – Moyenne de u^+

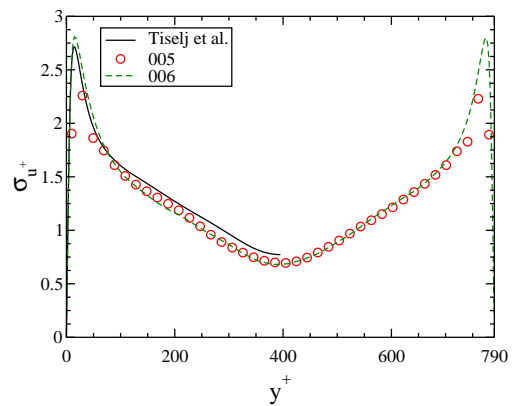


FIGURE 6.2 – Ecart type de u^+

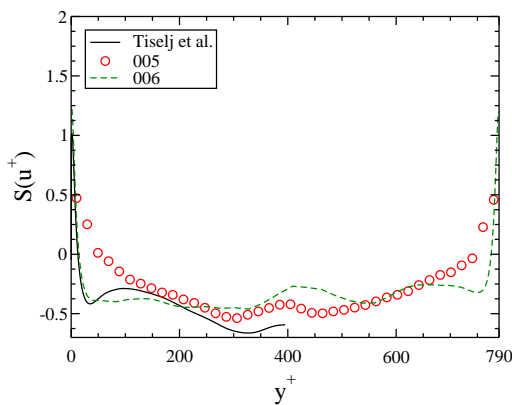


FIGURE 6.3 – Skewness de u

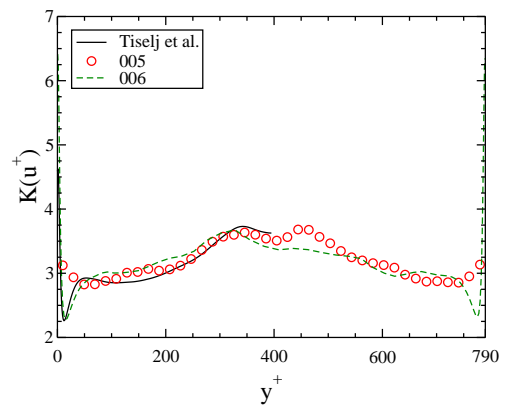


FIGURE 6.4 – Kurtosis de u

b) Écart Type des autres composantes de la vitesse

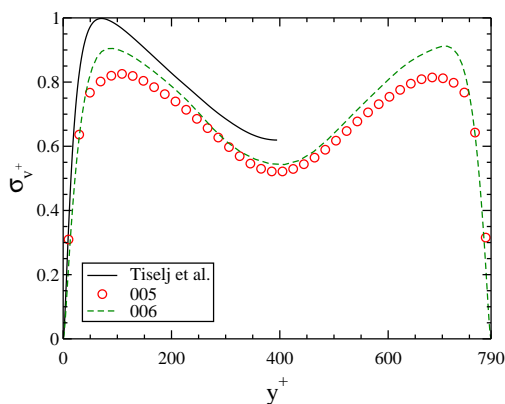


FIGURE 6.5 – Ecart type de v^+

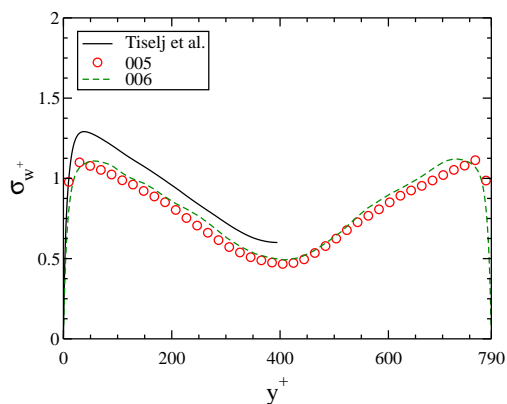


FIGURE 6.6 – Ecart type de w^+

c) Covariance

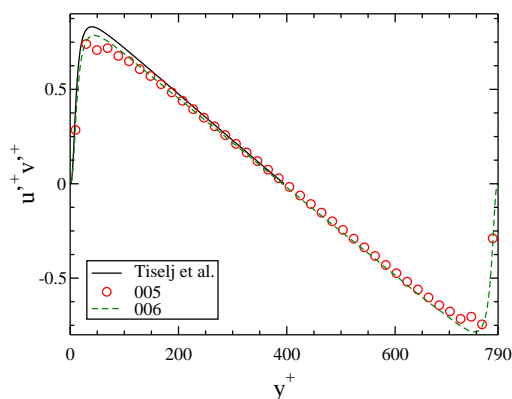


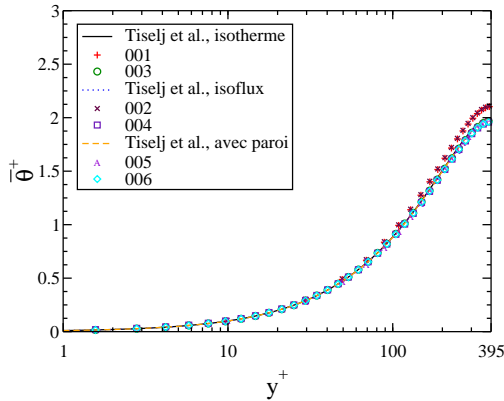
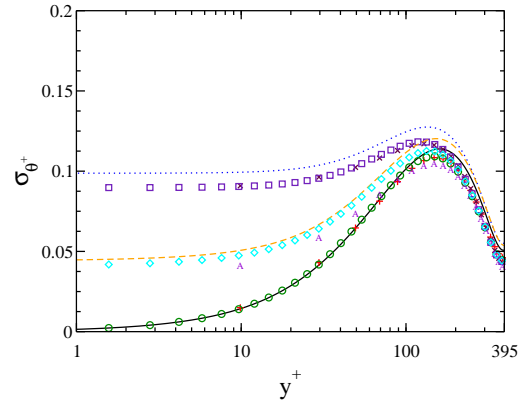
FIGURE 6.7 – Covariance de u et v

Nous constatons que pour tous les moments statistiques présentés, les résultats obtenus sont conformes aux résultats de la littérature. Malgré un léger écart près des bords pour les moments supérieurs à 3 de u et la covariance entre u et v , les profils obtenus avec utilisation d'une loi de paroi sont très proches de ceux obtenus sans loi de paroi avec un maillage plus fin. Le champ dynamique que nous avons simulé donne de bons résultats avec nos deux méthodes de simulations, et constituera un support précis pour les termes convectifs du champ thermique.

6.2.2.2 Influence de la condition limite

Ce paragraphe a deux objectifs. Nous voulons vérifier que notre code de calcul reste précis pour le champ de température avec et sans utilisation de loi de paroi pour le champ de vitesse. Cette exigence est requise pour chacune des trois conditions limites thermiques standards. Ensuite, nous voulons étudier l'impact de cette condition sur les deux premiers moments

statistiques du champ de température. Les cas utilisés dans ce paragraphe sont les cas référencés dans le tableau 6.1.

FIGURE 6.8 – Moyenne de θ^+ FIGURE 6.9 – Ecart type de θ^+

Les champs de température moyenne adimensionnée sont représentés sur la figure 6.8, alors que leurs fluctuations sont représentées sur la figure 6.9. La première conclusion que nous pouvons tirer est que tout comme pour les champs de vitesse, les champs de température que nous avons obtenus sont conformes à ceux attendus. L'utilisation d'un maillage relâché avec une loi de paroi pour la vitesse ne détériore pas significativement les résultats. Cette conclusion est valable pour la moyenne comme pour l'écart type de la température.

De plus, nous constatons que le niveau maximum de fluctuations thermiques est atteint pour la condition limite de type "isoflux", alors que le minimum concerne la condition limite "isotherme". La résolution des équations de thermique à l'intérieur du mur conduit à l'obtention d'un niveau de fluctuations thermiques à la paroi compris entre ces deux valeurs. C'est pourquoi, pour l'obtention de résultats précis sur les fluctuations thermiques à l'interface fluide-solide, il est important de mailler une portion de mur, et d'y résoudre les équations de thermique. Lorsque nous étudierons le Té de mélange dans la troisième partie de ce mémoire, c'est la stratégie que nous retiendrons sur la zone d'intérêt.

6.2.2.3 Validation des résultats dans la base $\mathcal{B}_1 = \{K, G, d^{++}\}$

Pour la base $\mathcal{B}_1 = \{K, G, d^{++}\}$, nous allons maintenant confronter nos résultats à ceux de la littérature quand ils existent. Les cas concernés sont les cas I05 à I10 et 105 à 110.

a) Cas I05 et I05 ($K = 0, 1 ; G = 1 ; d^{++} = 300$)

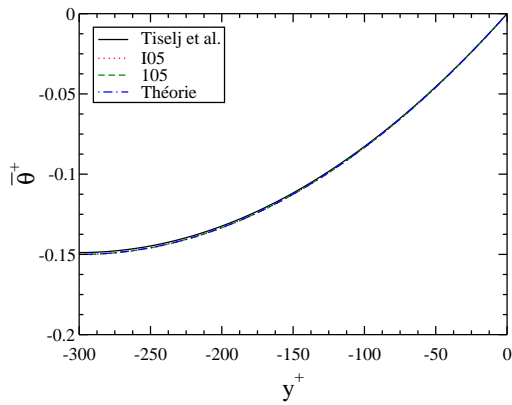


FIGURE 6.10 $-\bar{\theta}^+$ dans le mur cas I05 et I05

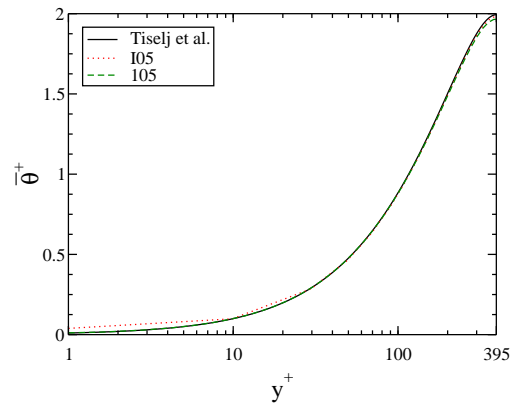


FIGURE 6.11 $-\bar{\theta}^+$ dans le fluide, cas I05 et I05

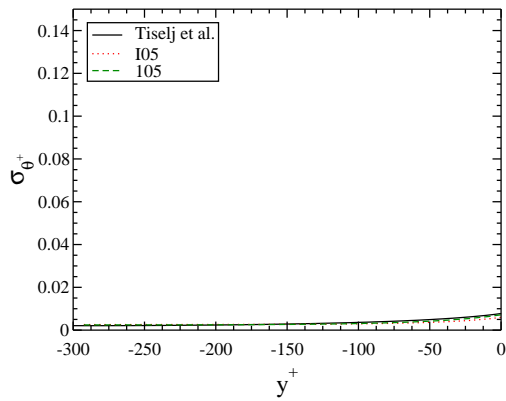


FIGURE 6.12 $-\sigma_{\theta^+}$ dans le mur, cas 5

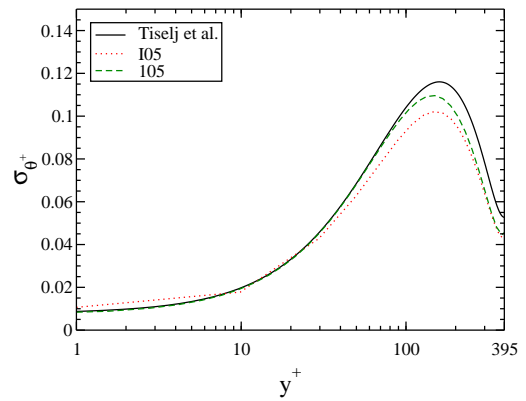


FIGURE 6.13 $-\sigma_{\theta^+}$ dans le fluide, cas 5

b) Cas I06 et I06 ($K = 0, 3 ; G = 1 ; d^{++} = 300$)

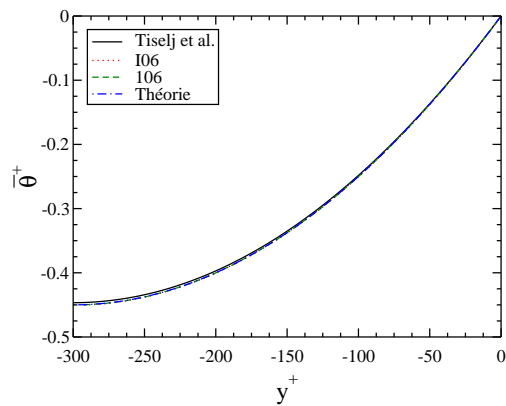


FIGURE 6.14 $-\bar{\theta}^+$ dans le mur cas I06 et I06

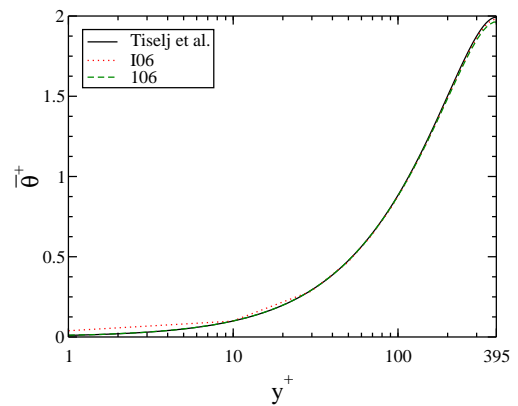


FIGURE 6.15 $-\bar{\theta}^+$ dans le fluide, cas I06 et I06

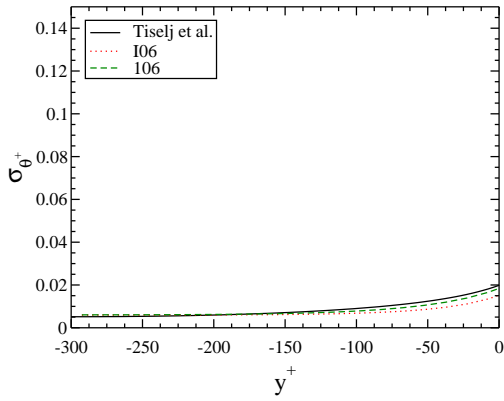


FIGURE 6.16 – σ_{θ^+} dans le mur, cas 6

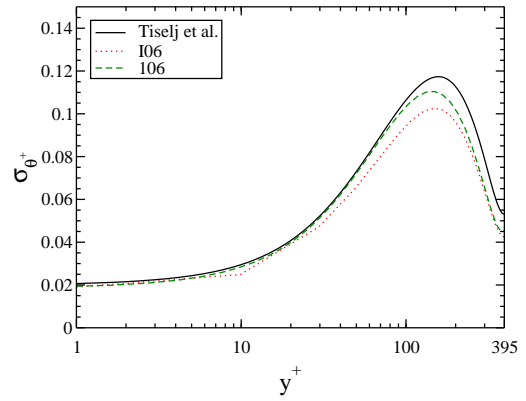


FIGURE 6.17 – σ_{θ^+} dans le fluide, cas 6

c) Cas I07 et I07 ($K = 3; G = 1; d^{++} = 300$)

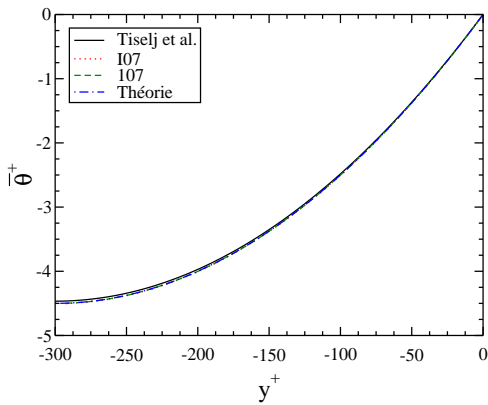


FIGURE 6.18 – $\bar{\theta}^+$ dans le mur cas I07 et I07

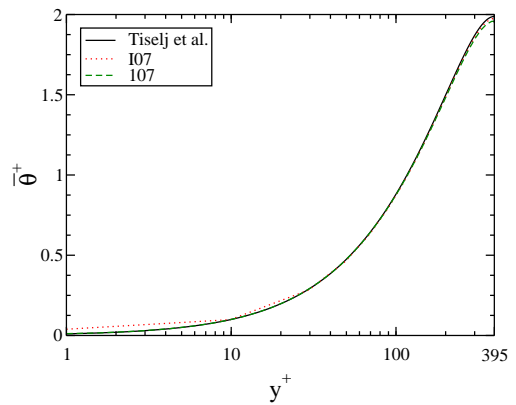


FIGURE 6.19 – $\bar{\theta}^+$ dans le fluide, cas I07 et I07

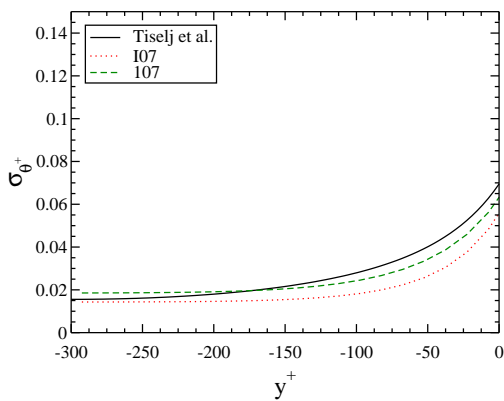


FIGURE 6.20 – σ_{θ^+} dans le mur, cas 7

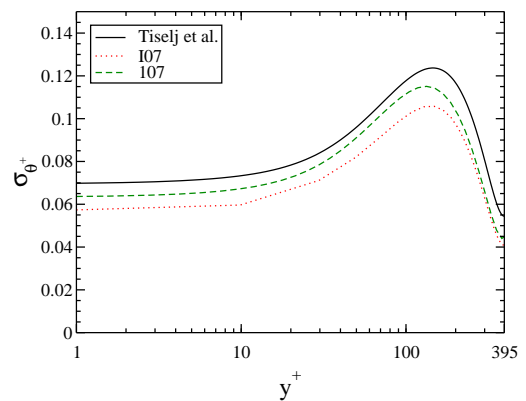


FIGURE 6.21 – σ_{θ^+} dans le fluide, cas 7

d) Cas I08 et 108 ($K = 10$; $G = 1$; $d^{++} = 300$)

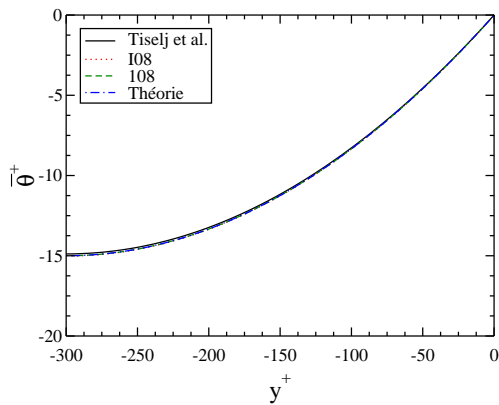


FIGURE 6.22 – $\bar{\theta}^+$ dans le mur cas I08 et 108

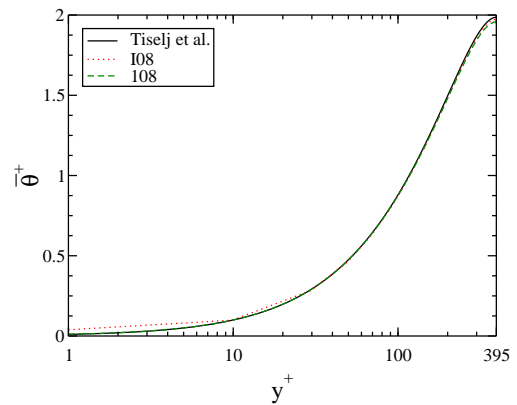


FIGURE 6.23 – $\bar{\theta}^+$ dans le fluide, cas I08 et 108

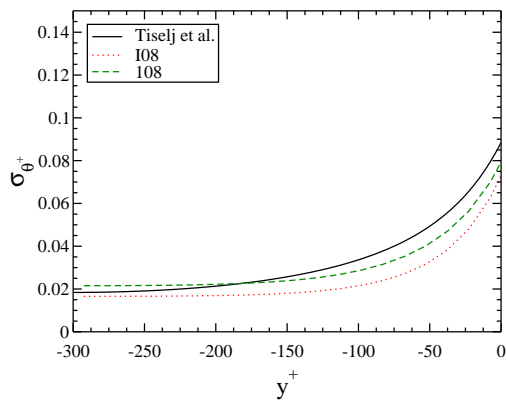


FIGURE 6.24 – σ_{θ^+} dans le mur, cas 8

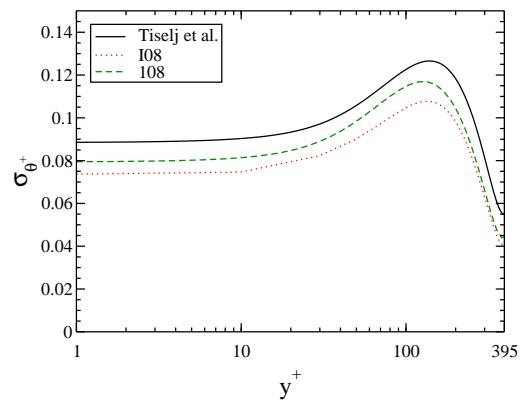


FIGURE 6.25 – σ_{θ^+} dans le fluide, cas 8

e) Cas I09 et 109 ($K = 1$; $G = 1$; $d^{++} = 10$)

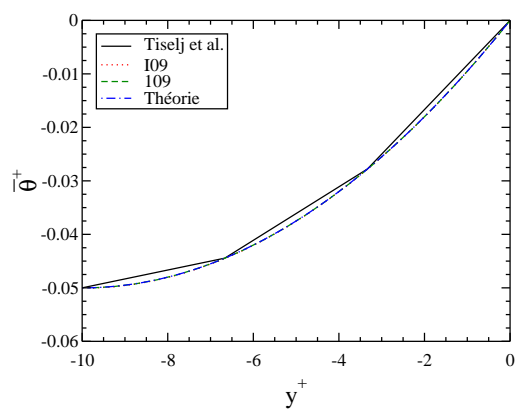


FIGURE 6.26 – $\bar{\theta}^+$ dans le mur cas I09 et 109

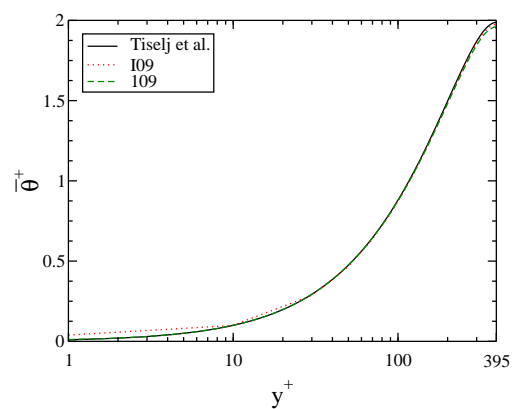


FIGURE 6.27 – $\bar{\theta}^+$ dans le fluide, cas I09 et 109

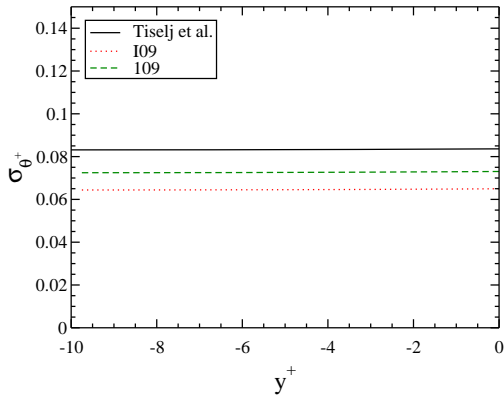


FIGURE 6.28 – σ_{θ^+} dans le mur, cas 9

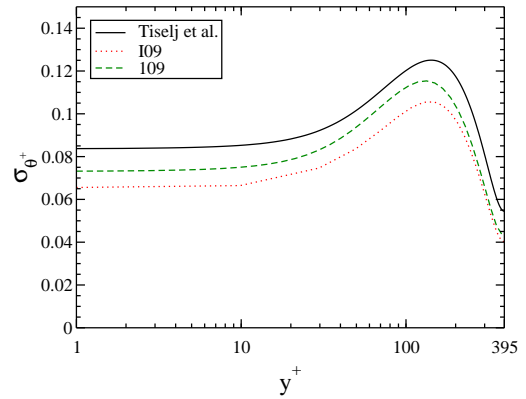


FIGURE 6.29 – σ_{θ^+} dans le fluide, cas 9

f) Cas I10 et 110 ($K = 1$; $G = 1$; $d^{++} = 100$)

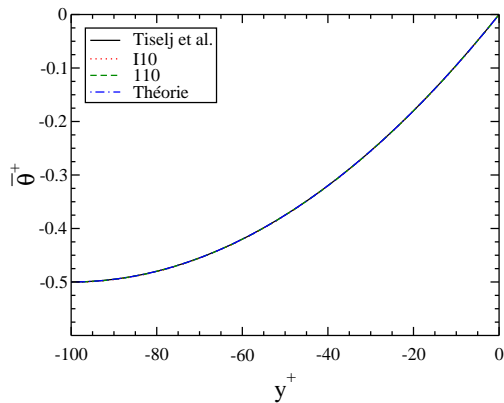


FIGURE 6.30 – $\bar{\theta}^+$ dans le mur cas I010 et 1010

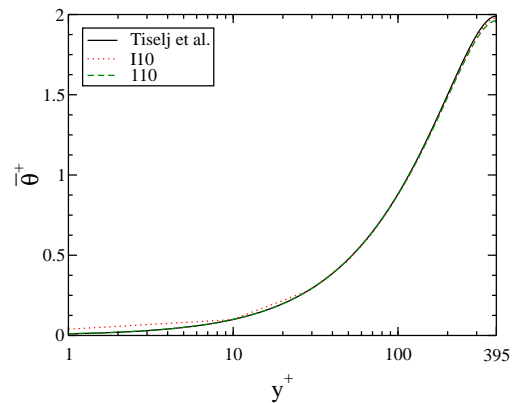


FIGURE 6.31 – $\bar{\theta}^+$ dans le fluide, cas I010 et 1010

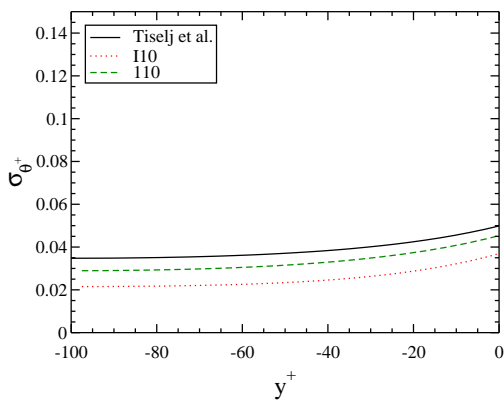


FIGURE 6.32 – σ_{θ^+} dans le mur, cas 10

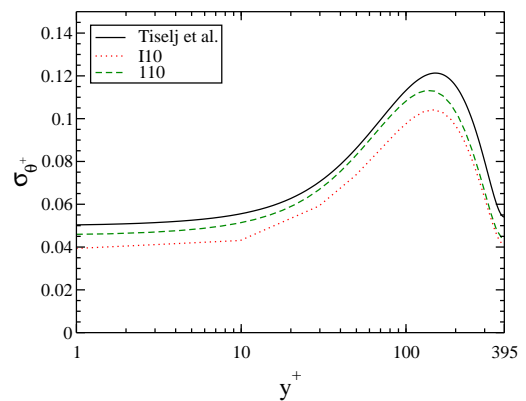


FIGURE 6.33 – σ_{θ^+} dans le fluide, cas 10

Nous pouvons constater que sur chacun des cas, I05 à I10 et 105 à 110, nos résultats sont très proches de ceux obtenus par SND. Pour les champs moyens, les courbes sont même quasiment

superposées. Ceci valide l'utilisation de notre méthode de résolution de la température au sein du mur. Le fait que les résultats soient également très bons pour les configurations I05 à I10, valide également l'utilisation d'un maillage relativement grossier associé à l'usage d'une loi de paroi pour la dynamique. Pour le cas du canal plan, les temps de calcul ont pu être divisés par 3. Avec cette méthode, nous n'observons pas de perte significative de précision, alors que le gain en temps de calcul est important. Cette méthode pourra donc être utilisée sur le Té de mélange.

6.2.3 Étude paramétrique sur le mur

Dans cette section, nous allons analyser l'impact de chaque paramètre sur la moyenne et les fluctuations de température dans le fluide et dans le mur. Cette étude est réalisée à partir des résultats obtenus avec l'utilisation de la loi de paroi. Elle pourrait être réalisée à partir des calculs sans loi de paroi, les résultats seraient les mêmes, comme nous l'avons vu à la section précédente. Pour chaque base, les courbes non redondantes seront exposées, puis les résultats discutés.

6.2.3.1 Base $\mathcal{B}_1 = \{K, G, d^{++}\}$

a) Étude de K

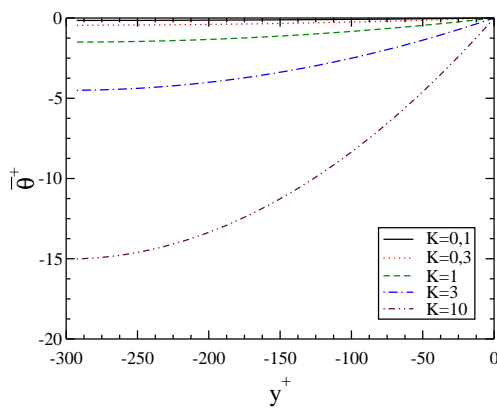


FIGURE 6.34 $-\bar{\theta}^+$ dans le mur

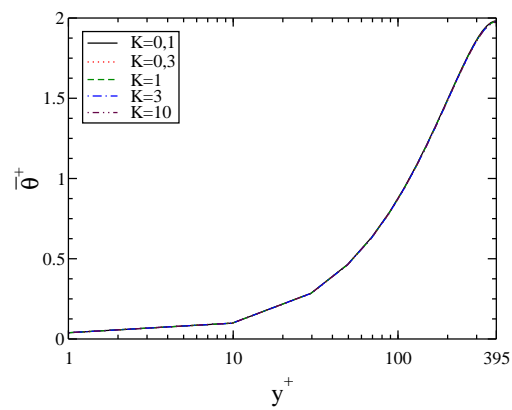
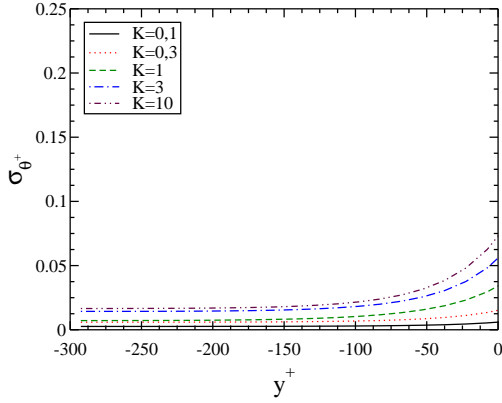
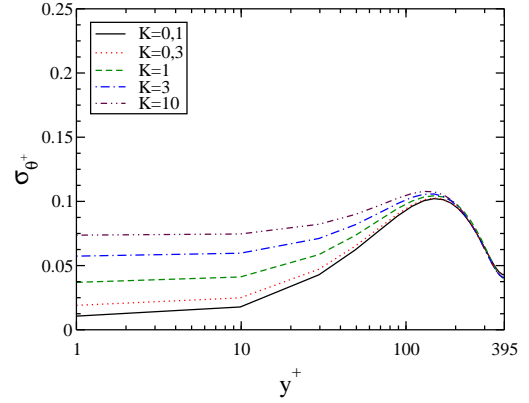


FIGURE 6.35 $-\bar{\theta}^+$ dans le fluide

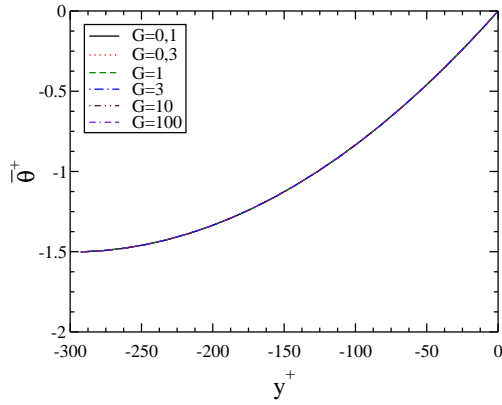
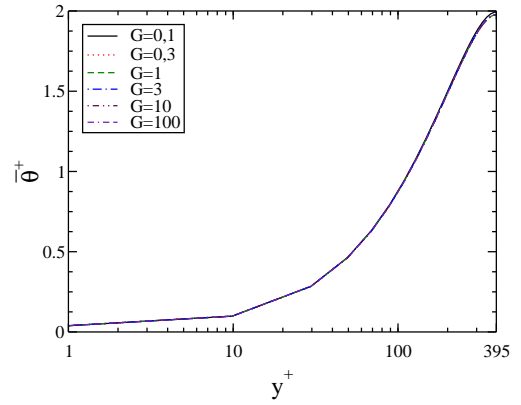
Lorsque nous regardons l'équation (5.17), nous constatons que K intervient dans l'expression du gradient de vitesse dans le mur au niveau de l'interface. Ce n'est donc pas surprenant de constater que la température dans le mur varie proportionnellement à K . C'est ce qui est visible sur la figure 6.34.

De plus, K représente le rapport des effusivités thermiques entre le fluide et le mur, c'est à dire la capacité du fluide à imposer sa température au niveau de l'interface. Les fortes valeurs de K correspondent donc à des situations où la température de contact est imposée principalement par le fluide. Les fluctuations de température à l'interface seront donc plus fortes pour les mêmes fluctuations dans le fluide. A l'inverse, pour les petites valeurs de K , la température de contact est fixée principalement par le mur, ce qui atténue les fluctuations.


 FIGURE 6.36 – σ_{θ^+} dans le mur

 FIGURE 6.37 – σ_{θ^+} dans le fluide

Le niveau de fluctuations à l'interface est ensuite propagé à l'intérieur des domaines solides et fluides. Un mur effusif lisse les fluctuations thermiques, alors que ces dernières pénètrent aisément dans les murs peu effusifs. Ces résultats sont observables sur les figures 6.36 et 6.37. La figure 6.35 montre que K n'a aucun impact sur le champ moyen de température au sein du fluide.

b) Étude de G


 FIGURE 6.38 – $\bar{\theta}^+$ dans le mur

 FIGURE 6.39 – $\bar{\theta}^+$ dans le fluide

N'intervenant pas dans les équations (5.16) et (5.17), il est normal que G n'ait aucun impact sur le champ moyen de température, que ce soit dans le mur ou dans le fluide, comme l'indiquent les figures 6.38 et 6.39. Cependant, l'équation (5.18) montre que \sqrt{G} agit comme l'inverse d'une diffusivité thermique transverse dans la base \mathcal{B}_1 . En effet, la direction y est exprimée en adimensionnement $^{++}$ dans le mur. Pour être conforme à la base \mathcal{B}_1 , le terme diffusif peut donc s'écrire :

$$\frac{1}{G \cdot \text{Pr}} \nabla^{++2} T^+ = \frac{1}{G \cdot \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T^+}{\partial x^{++2}} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial z^{++2}} \right) + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{++2}} \quad (6.29)$$

L'adimensionnement $^{++}$ n'est pas possible sur les direction x et z , car les ensembles de définition de l'équation pour ces deux variables sont déjà fixés par le fluide et ne peuvent donc pas

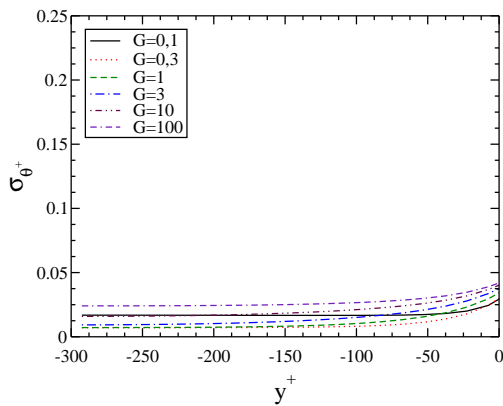


FIGURE 6.40 – σ_{θ^+} dans le mur

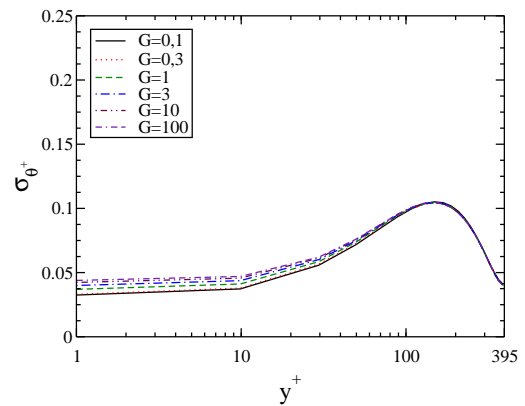


FIGURE 6.41 – σ_{θ^+} dans le fluide

être modifiés, contrairement à la profondeur du mur. C'est pour cela que G est bel et bien un paramètre.

\sqrt{G} agissant comme l'inverse d'une diffusivité thermique transverse dans le mur, ses impacts apparaissent donc immédiatement. Une petite valeur de G va augmenter le phénomène de diffusion thermique dans les directions transverses et donc atténuer les fluctuations dans le mur comme le montre la figure 6.40. Par rétroaction, ces fluctuations vont également être atténuées dans le fluide, comme le montre la figure 6.41.

Notons que ce résultat ne contredit pas le développement présenté à la section 6.1.2. En effet, la démonstration a été effectuée à profondeur fixée, alors qu'ici, du fait de l'adimensionnement $^{++}$, la profondeur physique de la paroi varie.

Le fait que G agisse comme une diffusivité thermique uniquement transverse, et pas du tout comme une diffusivité thermique normale au mur, confirme le fait que ce paramètre n'a aucune influence sur le champ moyen.

c) Étude de d^{++}

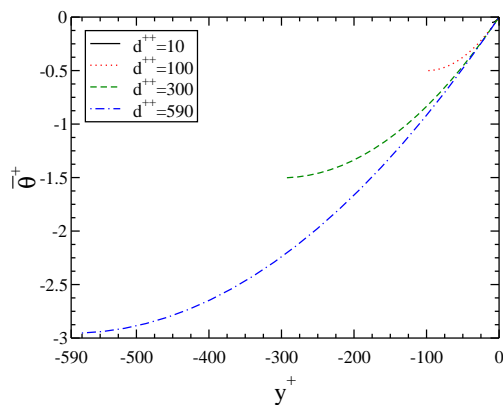


FIGURE 6.42 – $\bar{\theta}^+$ dans le mur

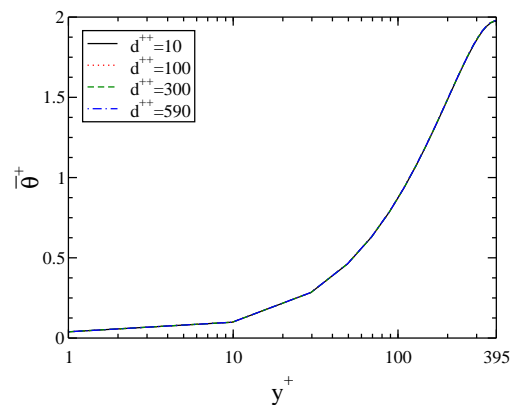
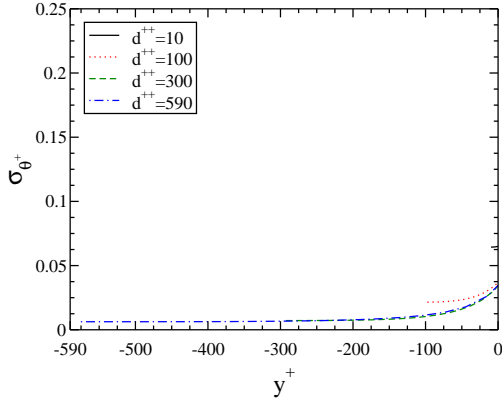
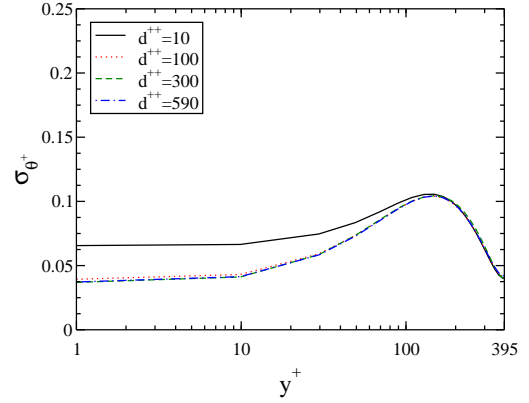


FIGURE 6.43 – $\bar{\theta}^+$ dans le fluide

La profondeur de paroi d^{++} n'a pas d'impact sur le champ moyen de température. Cependant, en traçant $\bar{\theta}^+$ en fonction de d^+ sur la figure 6.42 pour rester cohérent avec les autres cas,


 FIGURE 6.44 – $\sigma_{\theta+}$ dans le mur

 FIGURE 6.45 – $\sigma_{\theta+}$ dans le fluide

il est normal de ne pas avoir le même ensemble de définition. Une modification de d^{++} à G constant entraîne une modification de d^+ . En ce qui concerne les fluctuations, la figure 6.44 montre que plus la paroi est profonde et plus les fluctuations sont atténuées. Cependant, dans une paroi vraiment très fine, les fluctuations de température rebondissent sur la face extérieure, ne peuvent pas être atténuées, et rentrent à nouveau dans le fluide. Ceci explique le niveau élevé de fluctuation à l'interface coté fluide pour les parois fines. Ce phénomène est visible sur la figure 6.45. Comme pour les autres paramètres, d^{++} n'a aucune influence sur le champ moyen de température à l'intérieur du fluide.

d) Conclusion de l'étude paramétrique dans la base $\mathcal{B}_1 = \{K, G, d^{++}\}$

Cette base présente deux avantages majeurs. Tout d'abord, elle est historique. C'est à travers elle que [Tiselj et al. \(2001b\)](#) et auparavant [Kasagi et al. \(1989\)](#) ont étudié les transferts thermiques à l'intérieur de la paroi dans le cadre d'un canal plan turbulent. Elle permet donc d'obtenir des comparaisons dans la littérature (excepté pour G qui n'a pas été étudié). Ensuite, l'influence des différents paramètres s'explique bien. Une fois démontré que \sqrt{G} agit comme l'inverse d'une diffusivité thermique transverse, le sens physique de ces paramètres devient intuitif. Cependant, l'adimensionnement $^{++}$ pour la paroi reste assez obscur. Et une variation de G simultanée à une variation de la profondeur physique d peut aboutir à une même valeur pour d^{++} , ce qui devient difficile à interpréter. De plus, l'écriture du terme convectif devient lourde, compte tenu des adimensionnements différents utilisés pour les différents termes du Laplacien.

6.2.3.2 Autres bases

a) Base $\mathcal{B}_2 = \{H, R, d^+\}$

À première vue, les paramètres de cette base semblent assez physiques. Ils représentent les rapports des variables de base entre le fluide et le mur, que sont la conductivité thermique, la masse volumique et la capacité thermique. Or, bien que la représentation de ces paramètres soit intuitive lorsqu'ils sont pris séparément, ce n'est plus le cas dans notre étude. La diffusion dans le mur n'est pas décrite par la conductivité mais par la diffusivité thermique, et ce n'est pas le rapport des inerties R mais le rapport des effusivités K qui impose la température de contact à

l'interface fluide-solide. Par exemple, bien que le rôle de H soit évident dans l'explication du profil moyen de température au sein du mur, comme le montrent les équations (5.20) et (6.8), c'est à peu près la seule chose que nous pouvons conclure directement.

En effet, augmenter H en conservant R constant fait augmenter K et G en même temps. Augmenter K provoque une augmentation des fluctuations, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent. L'impact de G dans cette base est différent de celui dans la base \mathcal{B}_1 à cause de son lien ou non avec la profondeur de la paroi. Il faudrait étudier G dans la base \mathcal{B}_3 pour connaître son impact indépendamment de cette profondeur. Cependant la réponse est déjà connue grâce au développement effectué à la section 6.1.2, où nous avons démontré qu'augmenter la diffusivité thermique dans le mur augmente le niveau de fluctuations. Ainsi augmenter G fait diminuer le niveau de fluctuations. L'augmentation de H à R constant agit donc de deux manières différentes sur le niveau des fluctuations. L'influence de ce paramètre est par conséquent assez délicat à prévoir.

En conclusion, bien qu'a priori cette base semble naturelle, le rôle des paramètres y est extrêmement délicat à interpréter.

b) Base $\mathcal{B}_3 = \{K, G, d^+\}$

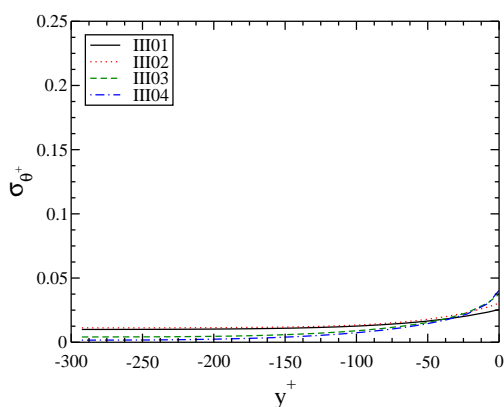


FIGURE 6.46 – σ_{T^+} dans le mur

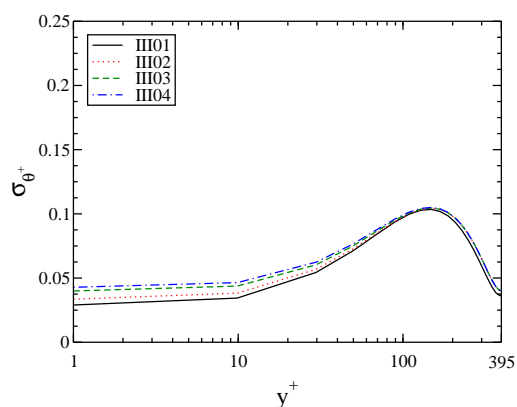


FIGURE 6.47 – σ_{T^+} dans le fluide

La base \mathcal{B}_3 diffère de la base \mathcal{B}_1 uniquement par l'absence de l'adimensionnement $^{++}$. Cependant, ceci n'a de conséquences que pour $G \neq 1$. C'est donc, comme le souligne le tableau 6.4, l'étude paramétrique de G qui va différer de la base \mathcal{B}_1 . Pour les autres paramètres, les courbes et les conclusions sont les mêmes.

Du fait de l'absence de l'adimensionnement $^{++}$, G ne peut plus être considéré comme une diffusivité thermique transverse. En effet il apparaît dans l'équation (5.23), ainsi que dans le puit de chaleur dans l'équation (5.24). Nous avons montré à la section 6.1.2, qu'une augmentation de la diffusivité thermique augmentait le niveau de fluctuations à l'intérieur de la paroi, pour une oscillation de température périodique et forcée à l'interface. Ce régime forcé ne tient pas compte de la rétroaction qu'il peut y avoir du mur vers le fluide. C'est ce phénomène que nous observons sur la figure 6.46. Loin de l'interface, le résultat analytique est retrouvé. Les faibles valeurs de G correspondant aux fortes valeurs de κ_w provoquent des hauts niveaux (relatifs) de fluctuations thermiques. Cependant, près de l'interface, cette forte diffusivité thermique atténue

par rétroaction les fluctuations au sein du fluide, ce qui explique des niveaux relatifs plus faibles de fluctuations au sein du mur. Nous pouvons visualiser ce phénomène en imaginant la chaleur rentrer dans le mur, se déplacer latéralement, puis ressortir pour retourner dans le fluide, au lieu de se déplacer latéralement dans le fluide. Ce phénomène est prépondérant entre le croisement des courbes de fluctuations dans le mur, et l'interface fluide-solide.

Cette base présente les avantages suivants :

- Le rôle des paramètres est physiquement explicable.
- L'étude de G s'effectue sans variation de la profondeur physique de la paroi.
- On s'affranchit de l'adimensionnement ⁺⁺ lourd à gérer.
- La rétroaction du mur vers le fluide est mesurable.

C'est cette base que nous suggérons d'utiliser en conclusion de l'article [Monod et al. \(2012a\)](#).

6.2.3.3 Influence du nombre de Reynolds

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'influence de Re_τ sur les différents profils. La validation des résultats à $Re_\tau = 395$ a été effectuée au paragraphe 6.2.2, et en annexe B pour $Re_\tau = 590$. [Hoyas et Jiménez \(2006\)](#) et [Hoyas et Jiménez \(2008\)](#) ont réalisé des SND de canaux plans pour des valeurs de Re_τ égales à 950 et 2000 entre autres. Ces simulations ont été lancées sur le super-ordinateur Marenostrium du centre de calcul de Barcelone. Elles ont utilisées 2048 processeurs pendant 122 jours et ont généré 25 TB de données. Même en SGE à maillage grossier en utilisant une loi de paroi, nos ressources de calculs ne nous ont pas permis de monter plus haut que $Re_\tau = 1400$. Cependant, alors que les auteurs n'ont résolu que le champ dynamique, nous avons également pu résoudre la thermique sur une configuration $\{K, G, d^+\} = \{1, 1, 590\}$ pour $Re_\tau \in \{395, 590, 950, 1300, 1400\}$.

Après avoir validé nos résultats dynamiques pour $Re_\tau = 950$, nous étudierons l'influence de Re_τ sur les différents profils. Re_τ variant, l'ensemble de définition de y^+ en unités de paroi varie également d'un calcul à l'autre. Dans ce paragraphe, nous avons donc choisi d'utiliser h pour l'adimensionnement des distances. Ainsi, les profils sont donnés en fonction de y^* . De plus, pour l'ensemble des simulations présentées ci-dessous, quelque soit la valeur de Re_τ , une loi de paroi est utilisée et associée à un maillage régulier. Le nombre de mailles suivant chaque direction est systématiquement ajusté afin de conserver la même résolution que dans le tableau 5.2, c'est à dire $\Delta x^+ \simeq 35, 8$; $\Delta y^+ \simeq 19, 7$ et $\Delta z^+ \simeq 23, 0$.

a) Validation à $Re_\tau = 950$

Comme le montrent les figures 6.48 et 6.49, malgré le faible nombre de points en proche paroi et une légère sous évaluation du niveau des fluctuations de vitesse, les résultats que nous obtenons sont tout à fait en accord avec ceux obtenus par SND.

b) Influence de Re_τ sur les profils dynamiques

L'influence du nombre de Reynolds sur les profils de vitesse d'un canal plan est un problème qui a déjà été largement étudié par le passé. Cependant, il continue d'être approfondi à l'aide

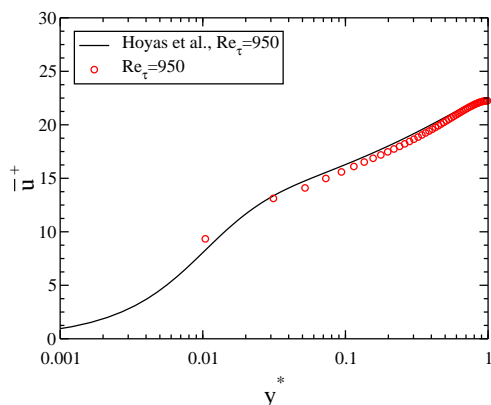


FIGURE 6.48 – Moyenne de u^+ pour $Re_\tau = 950$

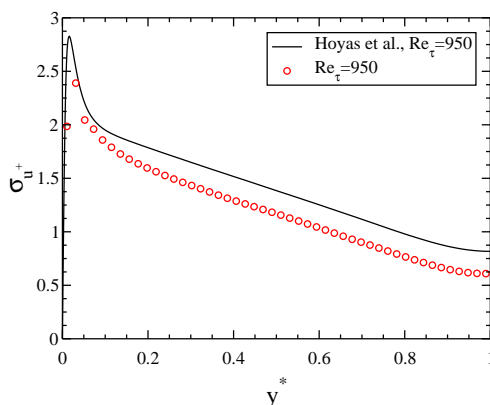


FIGURE 6.49 – Écart type de u^+ pour $Re_\tau = 950$

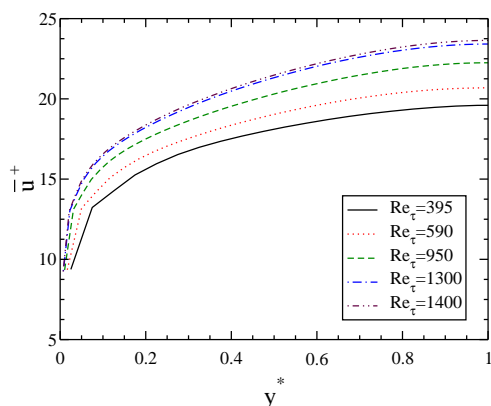


FIGURE 6.50 – Moyenne de u^+ pour différents Re_τ

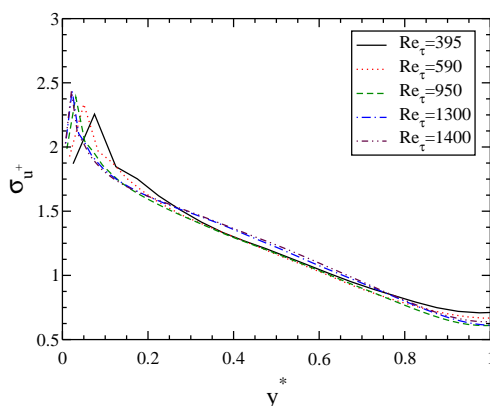


FIGURE 6.51 – Écart type de u^+ pour différents Re_τ

de méthodes de calcul plus précises et pour des valeurs de Re_τ plus élevées au fur et à mesure que les puissances de calculs progressent.

Avec l'augmentation de Re_τ , le gradient de vitesse à la paroi augmente, par définition. Cependant, malgré l'adimensionnement de la vitesse par u_τ qui augmente proportionnellement à Re_τ , le débit exprimé en u^+ progresse également avec Re_τ . Ce résultat est prévisible, car selon la corrélation de Dean, le frottement pariétal évolue proportionnellement à une puissance $7/8$ du débit. Pour rappel, la corrélation de Dean s'écrit (cf. [Dean \(1978\)](#)) :

$$Re_\tau = 0.175 Re_d^{7/8} \quad (6.30)$$

Ces résultats sont présentés sur la figure 6.50. Notons cependant que même si l'adimensionnement des abscisses par h est le même pour toutes les courbes, l'adimensionnement par u_τ lui, dépend de Re_τ .

En ce qui concerne les fluctuations, la figure 6.51 montre le résultat bien connu de l'augmentation et du décalage vers la paroi du pic de fluctuations en fonction de Re_τ . La très faible résolution de ce pic est liée à l'utilisation de la loi de paroi.

c) Influence de Re_τ sur les profils thermiques

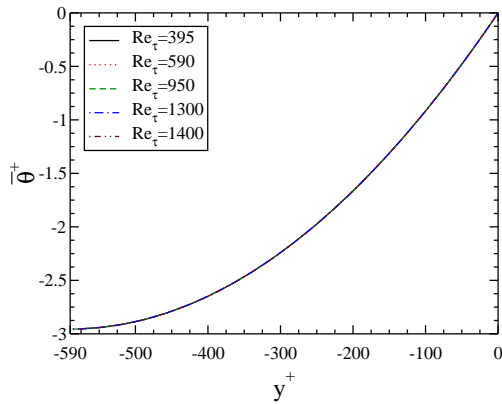


FIGURE 6.52 – Moyenne de θ^+ dans le mur

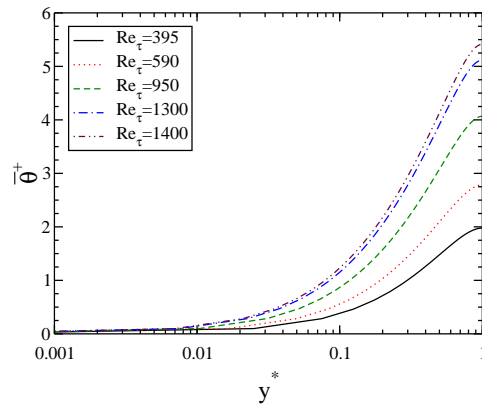


FIGURE 6.53 – Moyenne de θ^+ dans le fluide

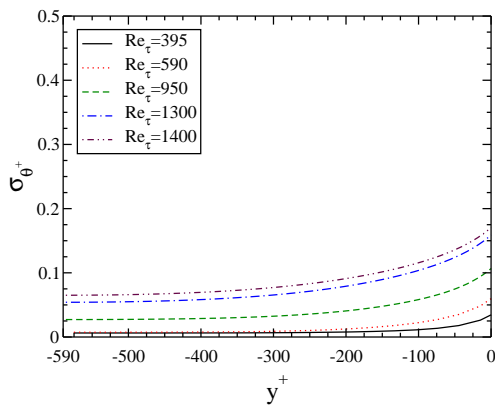


FIGURE 6.54 – Écart type de θ^+ dans le mur

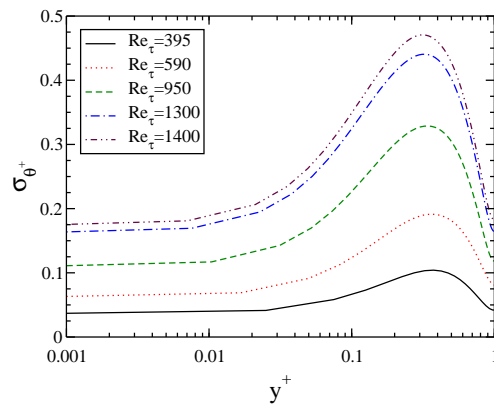


FIGURE 6.55 – Écart type de θ^+ dans le fluide

Dans les cas présentés maintenant, les murs ont pour propriété $K = 1$, $G = 1$ et $d^+ = 590$. Nous avons choisi des profondeurs de paroi définies en fonction de l_τ , ce qui signifie que la profondeur physique varie en fonction de la valeur de Re_τ étudiée.

Avec ce choix, comme le montrent les figures 6.52 et 6.53, nous constatons que la température augmente avec Re_τ au sein du fluide, mais est invariante dans le mur. Sur les figures 6.54 et 6.55, nous pouvons constater qu'au contraire, les fluctuations augmentent avec Re_τ à la fois dans le mur et dans le fluide. Pour l'évaluation des fluctuations de température dans un cas industriel, il sera donc important de se positionner au bon niveau de nombre de Reynolds, ou au moins d'appliquer un coefficient adapté si les ressources de calculs disponibles ne permettent pas la simulation à la valeur réelle de Re .

6.3 Conclusion de l'étude du canal plan

Au cours de cette étude, nous avons d'abord montré que la nature de la condition limite en température influait très fortement sur le niveau des oscillations thermiques à la paroi. Dans le cadre d'une étude sur la fatigue thermique, il apparaît donc indispensable de résoudre les équations de la thermique au sein du mur, sous peine de très forte sous-évaluation (condition limite isotherme) ou sur-évaluation (condition limite isoflux) du niveau de fluctuations.

Une étude analytique a permis de calculer le profil de la température moyenne au sein du mur en fonction des paramètres physiques de ce dernier. Nous avons également calculé la solution exacte du champ de température dans un mur semi infini en cas d'excitation forcée sinusoidale de la paroi. Ceci ne prend cependant en compte ni les murs de longueur finie, ni les rétroactions du mur vers le fluide.

Ensuite, nous avons constaté que pour des écoulements tels que $Pr \ll 1$, l'utilisation d'un maillage plutôt grossier associé à une loi de paroi (et évidemment un modèle sous maille) pour les équations de Navier-Stokes permet l'obtention de résultats tout à fait satisfaisants à moindre coût de calcul (cf. [Monod et al. \(2012b\)](#)). Sur le cas du canal plan, les temps de calcul ont pu être divisés par 3.

L'étude des équations a montré qu'à Re_τ constant, le problème était dépendant de trois paramètres distincts (cf. [Monod et al. \(2012a\)](#)), pouvant être exprimés dans plusieurs bases. Les deux paramètres utilisés jusqu'à présent ne permettent pas de couvrir totalement l'ensemble des configurations, et se restreignent aux situations ne présentant pas de transferts thermiques transverses à l'intérieur du mur.

Nous avons proposé plusieurs bases de paramètres pour étudier comment les propriétés du mur influent sur le niveau des fluctuations, et la manière de passer de l'une à l'autre. L'interprétation des résultats nous conduit à préférer la base $\mathcal{B}_3 = \{K, G, d^+\}$, où les paramètres représentent respectivement le rapport d'effusivité thermique, le rapport de diffusivité thermique et la profondeur adimensionnée de paroi. Dans cette base, les fluctuations de température dans le mur augmentent avec K et diminuent avec G . Cependant, en régime libre, la rétroaction du mur sur le fluide provoque un lissage des fluctuations en proche paroi pour les faibles valeurs de G . d^+ influe peu sur le niveau de fluctuation, excepté pour les très faibles épaisseurs.

Après avoir validé notre méthode de simulation sur des hauts Re_τ , nous avons pu étudier l'influence de ce paramètre pour des valeurs allant jusqu'à 1400. Les conséquences observées sur les moments statistiques de la vitesse sont conformes à ce qui est connu. Peu (voir pas) de résultats thermiques sont disponibles dans la littérature pour cette gamme de Re_τ . En définissant la profondeur de la paroi en fonction de Re_τ , ce paramètre influe sur le profil moyen de température au sein du fluide mais pas à l'intérieur du mur. Cependant, le niveau de fluctuations est affecté dans le fluide et dans le solide.

Enfin, compte tenu des bons résultats que nous obtenons, en remplaçant la périodicité suivant la profondeur, nous avons pu obtenir les données nécessaires à la réalisation d'une entrée turbulente pour des conduites à section carrée utilisables pour la configuration du Té de mélange.

L'ensemble des résultats relatifs au canal plan que nous avons présentés dans cette partie feront l'objet d'un rapport dans le cadre du projet THINS.

Troisième partie

Té de mélange

Chapitre 7

Introduction au Té de mélange

Ce chapitre constitue une introduction au Té de de mélange. Nous y présentons entre autre une étude bibliographique de la fatigue thermique dans les Tés de mélange, l'importance de l'entrée turbulente et la géométrie retenue pour nos simulations.

7.1 La fatigue thermique dans les Tés de mélange

7.1.1 Notion de fatigue

La fatigue est un processus qui sous l'action de contraintes modifie les propriétés locales d'un matériau et peut entraîner la formation de fissures et éventuellement la rupture de la structure. Ces contraintes peuvent être de différente

- nature : pression, traction, température, etc. Si la contrainte est une contrainte de température, on parle alors de fatigue thermique ;
- amplitude,
- fréquence,
- forme : sinusoïdale, créneau, etc.

La contrainte peut être quelconque. On peut alors la décomposer en séries de Fourier. Chaque terme est appelé mode. La période d'un mode est appelée cycle. La fatigue est notamment caractérisée par une étendue de variation de la contrainte bien inférieure à la résistance à la traction du matériau. Les étapes principales de la fatigue sont :

1. L'amorçage des fissures : durant cette étape, le matériau est endommagé de façon non détectable,
2. La propagation des fissures : des inspections peuvent être effectuées avant rupture,
3. La rupture finale.

Suivant les cas, ces différentes étapes peuvent être plus ou moins importantes en temps et en proportion dans le processus complet de fatigue. Dans le cas d'une éprouvette lisse par exemple, la durée de vie en propagation est faible. En revanche, pour une structure, l'étape propagation peut être significative.

Les contraintes subies par le matériau peuvent induire des déformations voire des ruptures. Il est possible d'effectuer le classement suivant :

- la rupture statique ou rupture en 1/4 de cycle,
- la déformation permanente (sortie du domaine d'élasticité) qui peut gêner le bon fonctionnement ultérieur de la structure,
- la rupture en fatigue oligocyclique, pour des chargements conduisant à la ruine en moins de 50 000 cycles,
- la fatigue conventionnelle au-delà de 50 000 cycles.

Traditionnellement en mécanique des structures, on considère que le matériau n'est pas altéré par des phénomènes de fatigue s'il ne rompt pas au bout de 10^7 cycles. Il faut également noter que le phénomène de fatigue est un phénomène statistique. On considère qu'il y a rupture lorsque 50% des éprouvettes ont rompu.

7.1.2 Le cas de la fatigue thermique

Lorsque la contrainte est d'origine thermique, on parle alors de fatigue thermique. On désigne par ce terme de fatigue thermique les déformations irréversibles que subit un matériau sous des contraintes de variations thermiques de faible amplitude mais répétées. Ces variations de température, après un grand nombre de cycles, peuvent amener à la création et à la propagation d'une fissure ou d'un réseau de fissures (on parle alors de faïencage thermique) au sein du matériau. Cette propagation peut aller jusqu'à la rupture du matériau. L'étude de ce phénomène s'inscrit dans le cadre des exigences de sûreté requises pour les installations nucléaires. Selon [Chellapandi *et al.* \(2009\)](#), la fatigue thermique peut se présenter sous trois formes différentes :

1. La stratification thermique : ce phénomène se rencontre lorsqu'un fluide, aux abords d'une paroi, présente un gradient de température parallèle à la paroi. Des fluctuations de faibles fréquences de ce fluide induisent des écarts de température sur la paroi.
2. Fluctuation de niveau : ce phénomène se rencontre en haut d'un récipient, au niveau de l'interface du liquide avec l'atmosphère. Les remous du liquide font que son niveau fluctue sur les bords, au contact de la paroi, provoquant des fluctuations thermiques au sein de celle-ci.
3. Le mélange thermique : ce phénomène se rencontre lorsque deux fluides de température différente sont mélangés. L'équilibre thermique ne s'effectue pas instantanément. Il y a apparition de "grumeaux" de températures différentes et donc alternance de particules fluides plus ou moins chaudes. Leur contact avec la paroi provoque au sein de celle-ci des fluctuations de température.

Des dommages peuvent aussi être provoqués aux structures par des chocs thermiques. Cette appellation désigne les dégradations subies par les installations à cause de fluctuations de température beaucoup plus fortes, mais sur seulement un ou quelques cycles. Lors d'un choc chaud, des fissures peuvent apparaître à cause de l'écart de température entre la paroi et le cœur du matériau. Lors d'un choc froid, la surface refroidie brutalement se rétracte, et craquelle sous la pression de la partie chaude encore dilatée qui est au centre.

7.1.3 La fatigue thermique dans les centrales nucléaires

7.1.3.1 Les zones critiques

Dans les centrales nucléaires, le phénomène de fatigue thermique va apparaître aux lieux de mélange entre un fluide chaud et un fluide froid. Dans le réacteur à sodium de type piscine étudié par [Chellapandi *et al.* \(2009\)](#), les trois phénomènes présentés ci-dessus sont présents. La fatigue par stratification est accentuée par la présence de sodium d'une température différente de 180°C de l'autre côté de la paroi. Cette dernière subit donc déjà en condition d'équilibre une forte contrainte mécanique due au fort gradient de température (cf. Fig. 7.1).

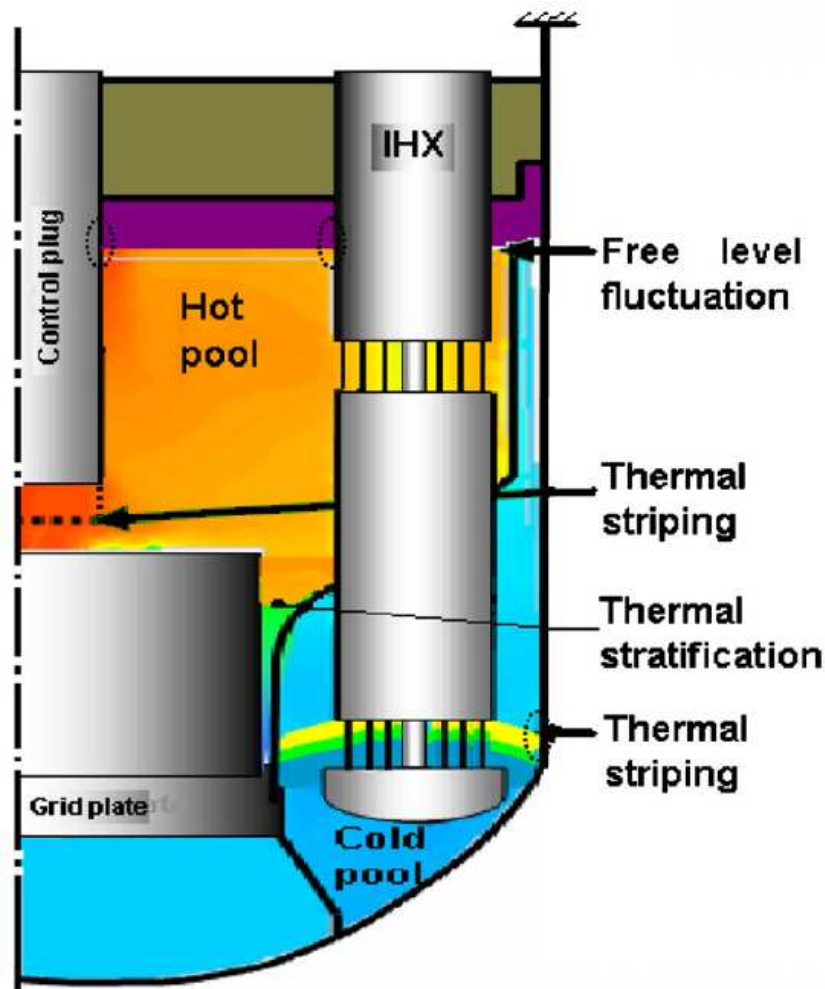


FIGURE 7.1 – Fatigue thermique dans une cuve de surgénérateur type piscine. Image [Chellapandi *et al.* \(2009\)](#).

Dans les réacteurs de type boucle, la fatigue thermique peut se rencontrer sur deux types différents de configurations. Le premier point critique se trouve en sortie de cœur. En fonction du nombre de crayons de combustible et de leur répartition géométrique, le caloporteur peut

présenter de forts gradients de température et endommager les parois proches. Le second point critique, objet de cette étude, concerne les tés de mélange. Les tés de mélange se rencontrent dans divers cas, comme l'évacuation de la puissance résiduelle lorsque le réacteur est à l'arrêt, ou sur des dérivations afin d'effectuer des mesures qui nécessitent une température différente de celle de la conduite principale. Les problèmes dus aux chocs froids peuvent se rencontrer aussi dans certains types de scénario d'accidents graves. Un fluide froid est déversé sur le cœur fondu (corium) afin de le refroidir et d'évacuer de la puissance.

Jusqu'à aujourd'hui, les problèmes de fatigue thermique sur des tés de mélange ont été identifiés dans plusieurs centrales nucléaires. Les incidents les plus célèbres ont été rencontrés dans les réacteurs à eau pressurisée Civaux-1 (France, 1998, cf. [Gourdin et al. \(2007\)](#)) et Tomari-2 (Japon, 2003) ainsi que dans le réacteur rapide à sodium Phenix (France, années 80, cf. [Chellapandi et al. \(2002\)](#)).

7.1.3.2 L'accident de Civaux-1

Le 12 mai 1998, une fuite a été détectée dans le circuit de Refroidissement du Réacteur à l'Arrêt (RRA) du réacteur Civaux-1 lors d'un arrêt à chaud. La fuite d'eau de 30m³/h a conduit à l'arrêt complet de la centrale. Un schéma de la zone de mélange est représenté sur la figure 7.2. La branche chaude arrive de la valve 101VP à une température de 180°C et la branche

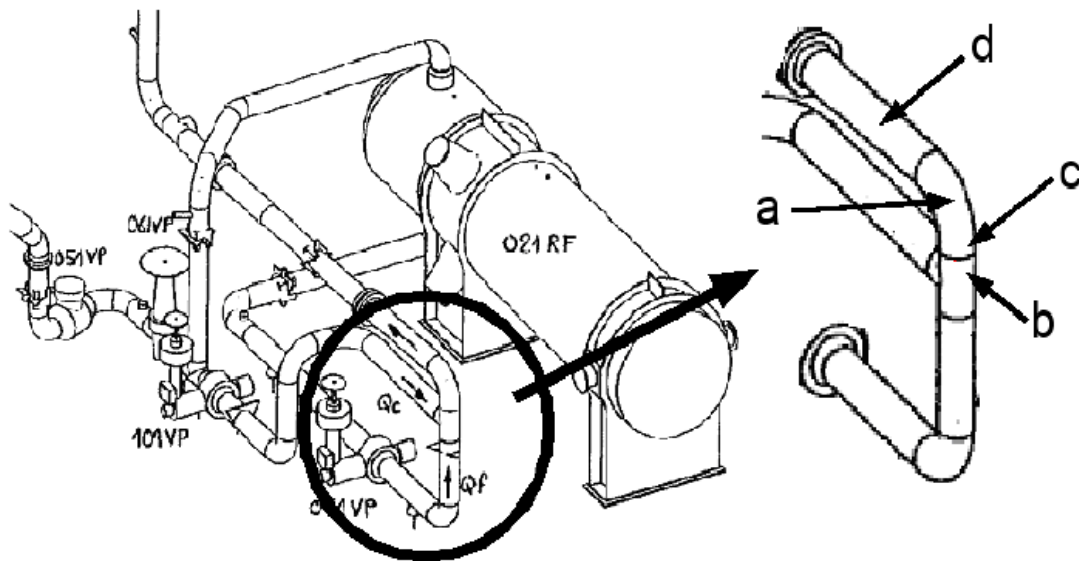


FIGURE 7.2 – Schéma de la boucle de refroidissement du réacteur à l'arrêt de Civaux-1. Image [Gourdin et al. \(2007\)](#).

froide de la valve 071VP à une température de 20°C. Les débits respectifs sont de 440 m³/h et 110 m³/h. Les principaux dommages ont été détectés :

- sur le coude en aval du té (a),
- sur le té (b),
- sur la soudure (c),

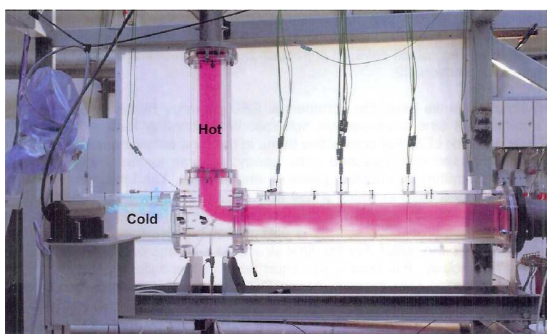
- sur la section droite en aval du coude (d).

La fissure traversante ayant provoqué la fuite se trouve sur le coude en aval de ce té (a). Elle mesure 18 cm sur la paroi externe et 30 cm sur la paroi interne. De plus, quelques fissures non-traversantes ont été détectées sur les soudures du coude (c) et sur la soudure longitudinale. Des réseaux de fissures (faïençage thermique) ont été observés sur la peau interne des tubes (b et d). Toutes ces fissures sont dues à de la fatigue à grand nombre de cycles. Les cycles de chargement correspondent à la fluctuation de la température interne causée par le mélange d'eau chaude et froide qui se produit dans le té ainsi que dans les parties en aval du té (coude et partie courante). C'est le phénomène de mélange thermique mentionné précédemment.

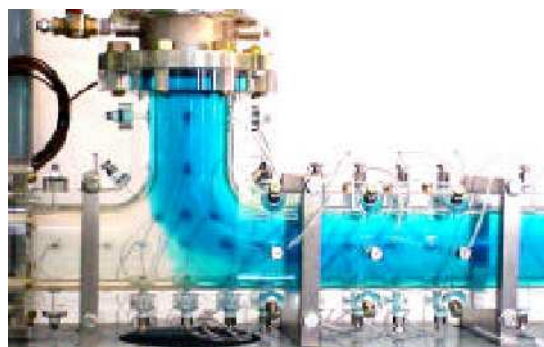
Devant l'étendue des dégâts, les centrales de même conception ont été mises à l'arrêt. Des examens non destructifs ont révélé des problèmes similaires dans les autres centrales. L'ensemble des tés à fort écart de température du parc nucléaire français a donc été examiné, mettant en évidence des dégradations. Ils ont été remplacés, sans changement de configuration du circuit tubulaire, mais dans des matériaux de meilleure finition, plus résistants à la fatigue thermique. Suite à l'incident de Civaux-1, EDF a mis au point une procédure par étape permettant d'évaluer les risques de fatigue thermique à grand nombre de cycle au sein des tés de mélange (cf. [Faidy \(2003\)](#)).

7.1.4 Les études sur les Tés de mélange

Les études numériques et expérimentales (cf. figure 7.3) sur les fluctuations de températures et la fatigue thermique dans les tés de mélanges se sont également développées, avec différentes méthodes et différents paramètres. Dans l'expérience de Vattenfall illustrée sur la figure 7.3(a), l'écart de température est pris soit nul, soit de 15°C. La vitesse est mesurée par un système Laser Diode Velocimetry (LDV), et la température par sept thermocouples placés à 1mm des parois. Dans la seconde expérience, les vitesses ne sont pas mesurées, et plusieurs thermocouples sont installés à l'intérieur de la paroi. L'écart de température est de 40°C (cf. [Kawamura *et al.* \(2003\)](#)).



(a) Expérience [Andersson *et al.* \(2006\)](#)



(b) Expérience [Ohtsuka *et al.* \(2003\)](#)

FIGURE 7.3 – Exemples d'expériences sur des Tés de mélange

7.1.4.1 Un cas de référence

Pour bien comprendre les phénomènes et pouvoir confronter les résultats, l'étude d'un cas de référence est nécessaire. C'est le té droit à section circulaire, où la température est considérée comme un scalaire passif, qui joue le rôle de situation standard fréquemment étudiée. Considérer la température comme un scalaire passif revient à considérer que les caractéristiques du fluide n'évoluent pas en fonction de la température, et entre autre à négliger l'effet gravitationnel. La température n'a alors aucune influence sur la dynamique de l'écoulement. Les premières conséquences directes sont l'absence d'importance de l'orientation du té et des positions respectives du fluide froid et du fluide chaud (conduite principale ou conduite secondaire). Expérimentalement, cette hypothèse est réalisée par l'étude d'une variable autre que la température se comportant comme un scalaire passif. La concentration d'une espèce chimique est un bon candidat. En effet, l'évolution de la concentration est régie par les mêmes équations de convection et de diffusion. Walker *et al.* (2009) réalisent ainsi une expérience dans un té de mélange, contenant de l'eau courante dans la conduite principale et de l'eau déminéralisée dans la conduite secondaire. Ils mesurent ensuite la concentration (et donc l'évolution du scalaire) par conductimétrie. La normalisation des résultats telle que :

$$T^* = \frac{T - T_{froid}}{T_{chaud} - T_{froid}} \quad (7.1)$$

permet ensuite de pouvoir comparer les différentes études sans difficulté, les températures (ou concentrations) étant ramenées à des valeurs comprises entre 0 et 1. Les auteurs proposent ainsi une large gamme de données expérimentales disponibles en ligne pouvant servir de référence pour de nombreuses simulations numériques.

Sur le plan numérique, le fait de considérer la température comme un scalaire passif présente aussi un gros avantage en terme de coût de calcul. Non seulement les simulations sont plus rapides de par le caractère constant des propriétés physiques du fluide, mais de plus une même résolution de la dynamique peut servir de support à plusieurs simulations thermiques. Cette idée a été utilisée entre autres par Tiselj *et al.* (2001a) qui, pour le prix d'une résolution dynamique, effectuent 40 simulations thermiques sur un canal plan.

7.1.4.2 Trois types de jets

Igarashi *et al.* (2003) proposent une classification des tés en 3 types de jets. Le type peut être prédit en fonction du rapport des moments de l'entrée principale et de l'entrée secondaire. Ce rapport M est défini par :

$$M = \frac{M_p}{M_s} = \frac{\rho_p V_p^2 (D_p D_s)}{\rho_s V_s^2 \pi (D_s/2)^2} \quad (7.2)$$

où l'indice p renvoie à la conduite principale et s à la conduite secondaire. Il en résulte :

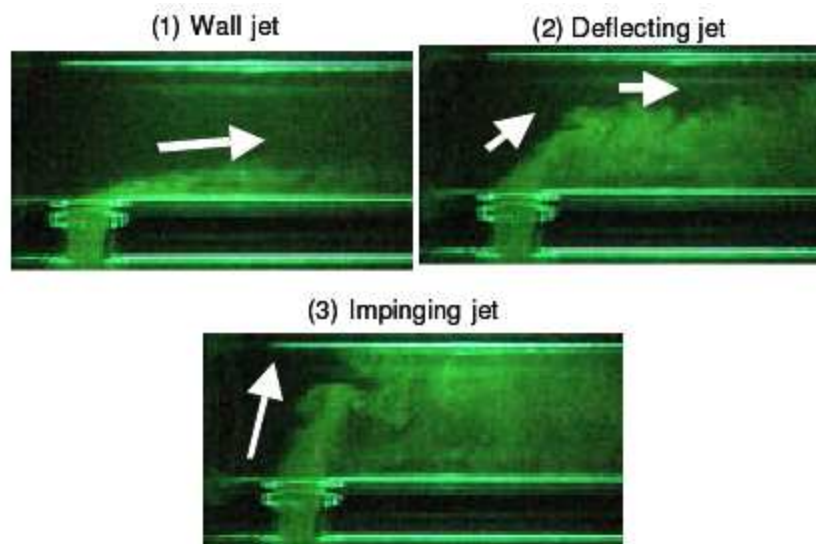
- Si $M > 1,35$, c'est un jet mural (Wall Jet) : Le fluide de la conduite secondaire a tendance à rester le long de la paroi de la conduite dans laquelle il a été injecté.
- Si $0,35 < M < 1,35$, c'est un jet déviant (Deflecting Jet) : L'écoulement de la conduite secondaire se stabilise vers le centre de la conduite principale.

Type de Jet	M sans coude en amont	M avec coude en amont
Jet mural (Wall Jet)	$M > 1,35$	$M > 2$
Jet déviant (Deflecting Jet)	$0,35 < M < 1,35$	$0,52 < M < 2$
Jet impactant (Impinging Jet)	$M < 0,35$	$M < 0,52$

TABLE 7.1 – Classification des types de jets en fonction des rapports des moments des entrées.

- si $M < 0,35$, c'est un jet impactant (Impinging Jet) : Le fluide de la conduite secondaire va impacter la paroi opposée à son entrée.

Initialement [Igarashi et al. \(2002\)](#) avaient proposé une classification en 4 groupes. Mais deux d'entre eux présentant des caractéristiques vraiment très proches, les auteurs les ont regroupés. Une visualisation des 3 types de jet est représentée sur la figure 7.4. [Hosseini et al. \(2008\)](#) montrent que les jets déviants sont ceux qui présentent la plus faible fluctuation de température à la paroi. Il est donc possible de réduire significativement le risque de fatigue thermique en jouant sur la configuration géométrique des tés. Encore faut-il que les autres contraintes de dimensionnement l'autorisent. En restant sur cette classification, [Ogawa et al. \(2005\)](#) étudient ex-

FIGURE 7.4 – Représentation des différents types de jets proposés par [Igarashi et al. \(2003\)](#).

périmentalement l'influence de la condition en amont. Ils montrent que la présence d'un coude en amont du té modifie sensiblement la valeur des rapports des moments de la classification. Ils obtiennent alors la classification du tableau (7.1). Dans leur étude, [Hosseini et al. \(2008\)](#) obtiennent des valeurs nettement différentes pour ce tableau. Les écarts peuvent s'expliquer par la distance entre le coude et le Té, et par la difficulté d'interprétation des résultats sur une échelle log-log.

7.1.4.3 Comportement de la zone de mélange

A l'intérieur d'un té, [Walker et al. \(2009\)](#) identifient 4 régions présentant des phénomènes et des statistiques différents. Sur son expérience à eau courante et eau déminéralisée, il rencontre une zone de pure eau courante (pure tap water), une zone de mélange (mixing zone), une zone de pure eau déminéralisée (pure DI) et une zone de recirculation présentant des tourbillons (separation region). L'étendue de ces zones dépend du rapport des vitesses débitantes des entrées du té. Une représentation symbolique de ces zones est visible en figure (7.5). La figure 7.6 représente le schéma expérimental des auteurs et permet l'orientation de la figure 7.5.

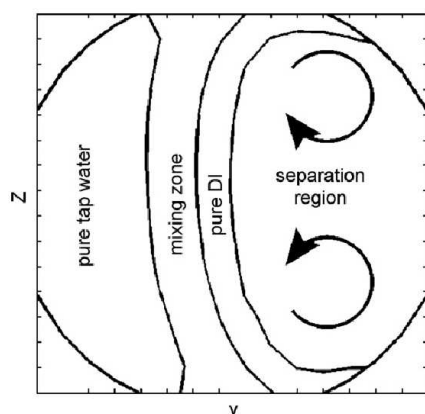


FIGURE 7.5 – Représentation symbolique des régions identifiées par [Walker et al. \(2009\)](#)

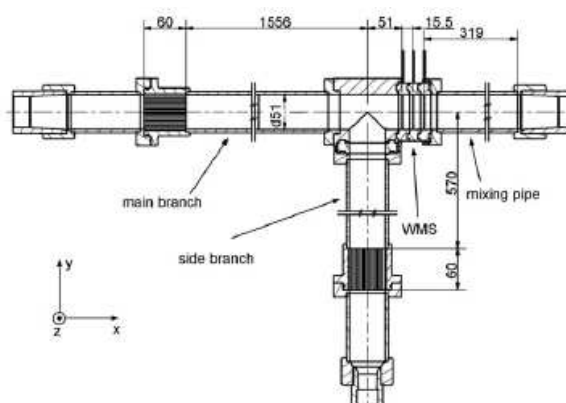


FIGURE 7.6 – Représentation de l'expérience réalisée par [Walker et al. \(2009\)](#)

7.1.4.4 Les spécialités concernées

L'une des difficultés de l'étude de la fatigue thermique dans un té de mélange réside dans le nombre de compétences et de spécialités mises en jeu. Cette problématique fait intervenir quatre disciplines scientifiques (cf. [Chapuliot et al. \(2005\)](#)) :

1. La thermo-hydraulique, pour évaluer les sollicitations thermiques et le mélange des deux fluides,
2. L'étude des champs thermiques, pour les conditions initiales et les échanges thermiques entre le fluide et la paroi,
3. La mécanique des structures, pour évaluer la réponse de la conduite aux contraintes thermiques complexes,
4. La résistance des matériaux, pour évaluer la capacité du matériau constituant la conduite à résister aux contraintes thermiques sur un grand nombre de cycles.

7.1.4.5 Les différents paramètres

Tous les auteurs n'approfondissent pas les mêmes points, ce qui conduit à des développements et des conclusions différents. La première stratégie rencontrée consiste à ne pas prendre

en compte la paroi et à ne simuler que le fluide. Le problème est alors que la température au bord est très fortement influencée par la nature de la condition limite thermique utilisée. [Tiselj et al. \(2001a\)](#) montrent d'énormes différences entre une condition type "isotherme" et une condition type "isoflux" dans le cadre d'un canal plan. Il n'est pas possible non plus de complètement séparer les deux domaines, car la réaction de la paroi va agir sur le champ de température au sein du fluide. [Aulery et al. \(2012\)](#) montrent également l'importance de la prise en compte de la paroi dans le domaine de calcul.

En prenant en compte la paroi, les fluctuations de température sur celle-ci vont être significativement atténuées (environ 50% selon [Wakamatsu et al. \(1995\)](#)) de par l'inertie thermique du matériau. A partir de la sollicitation thermique, il est alors possible d'évaluer le risque de faïençage. Pour cela, [Hannink et al. \(2009\)](#) ont utilisé deux codes commerciaux : FLUENT pour la partie thermo-hydraulique, avec maillage de la paroi, puis ANSYS pour la partie mécanique et résistance des matériaux. Les auteurs ont développé pour ce cas une interface de couplage entre les deux logiciels, afin de pouvoir charger les sollicitations thermiques depuis FLUENT vers ANSYS. [Chapuliot et al. \(2005\)](#) et [Gourdin et al. \(2007\)](#) ont opté pour l'utilisation du code CAST3M développé par le CEA. Ce code présente l'avantage d'être capable de simuler à lui seul aussi bien la partie thermo-hydraulique que la partie thermomécanique. Les auteurs l'ont utilisé pour l'étude du té de Civaux-1.

Les différentes approches numériques du problème sont aussi présentes dans la littérature. Par exemple, [Merzari et al. \(2009\)](#) et [Frank et al. \(2010\)](#) proposent une étude en URANS, et [Fukushima et al. \(2003\)](#) proposent une étude en SND sur un té à section carrée. Ils montrent également dans cette étude que l'effet de pesanteur a un rôle significatif.

En SGE, les études sont également nombreuses et couvrent une grande partie de ce que cette technique permet de réaliser. Les modèles sous-maille dynamiques rencontrés sont variés. [Kuhn et al. \(2010\)](#) utilisent le modèle de Smagorinsky sous sa forme classique ainsi que sous sa forme dynamique. La version modifiée par Lilly est comparée au modèle RNG par [Hu et Kazimi \(2006\)](#) et [Lee et al. \(2009\)](#). [Coste et al. \(2006\)](#) et [Westin et al. \(2008\)](#) utilisent le modèle WALE. [Kuczaj et al. \(2008\)](#) ont opté pour le modèle de Vreman. Et la liste n'est pas exhaustive. A contrario, lorsqu'un modèle sous-maille thermique est utilisé, il s'agit presque systématiquement d'un modèle à nombre de Prandtl sous-maille constant. C'est par exemple le cas pour [Kuczaj et al. \(2008\)](#) et [Kuhn et al. \(2010\)](#) qui utilisent $Pr_{sm} = 0,85$. [Kuhn et al. \(2010\)](#) réalisent également une étude où le nombre de Prandtl sous-maille est évalué par la méthode dynamique.

On peut également noter l'utilisation de différentes lois de paroi pour les équations de dynamique, comme la loi logarithmique classique chez [Coste et al. \(2006\)](#), la loi de Werner et Wengle chez [Kuczaj et al. \(2008\)](#) ou encore la loi de Spalding chez [Ohtsuka et al. \(2003\)](#). Les différentes méthodes évoluées de génération d'entrées turbulentes sont aussi utilisées. La méthode des vortex ainsi que celle de Davidson sont rencontrées chez [Kuhn et al. \(2010\)](#) et [Westin et al. \(2008\)](#). [Coste et al. \(2006\)](#) quant à eux, utilisent une méthode de recyclage à partir d'une section périodique. L'implémentation dans les dernières versions de FLUENT des modèles sous-mailles comme WALE, RNG et Vreman, ainsi que des méthodes des vortex et de Davidson pour la génération des entrées turbulentes a fortement favorisé leur utilisation dans la littérature.

Certains auteurs comme [Kuhn *et al.* \(2010\)](#) ont également étudié l'influence de l'épaisseur et du matériau composant la conduite sur l'évolution de la température sur la paroi interne de celle-ci. Ils remarquent que l'influence du mur est plus marquée dans le cas d'une conduite épaisse.

7.1.5 Les critères d'estimation de la fatigue thermique

Tous les auteurs ne poussent pas le développement jusqu'à l'obtention d'un nombre critique de cycles et une évaluation de la durée de vie de la tuyauterie. Cette évaluation dépend de nombreux paramètres de dimensionnement et de design, tels que la nature du matériau, son épaisseur, sa rugosité, son traitement, etc. Dans la littérature, les spécialistes de thermo-hydraulique et de simulation numérique de mécanique des fluides se contentent donc en général de l'évaluation d'un ou plusieurs critères représentatifs du risque de fatigue thermique. Ainsi en tout point de la paroi, les différents paramètres étudiés peuvent être l'écart maximum de température, l'écart type de la température ou encore la contrainte principale (cf. [Chapuliot *et al.* \(2005\)](#) et [Paffumi *et al.* \(2010\)](#)).

L'amplitude et la fréquence des contraintes jouant un rôle très important, un matériau est caractérisé en fatigue par sa résistance à une sollicitation sinusoïdale d'une certaine amplitude et d'une certaine fréquence. Si la fréquence est très faible, l'équilibre thermique au sein du matériau dispose du temps nécessaire pour s'établir. Les gradients de température internes ne sont pas trop élevés et les contraintes restent faibles. De même, pour des fréquences élevées, l'équilibre thermique entre la paroi et le fluide n'a pas le temps de s'établir à cause de l'inertie du matériau. Il reste à une température moyenne. Seule une gamme de fréquence est donc dommageable. A partir de l'historique de la température en un point de la paroi, il apparaît donc judicieux d'en étudier le spectre à l'aide d'une transformation de Fourier.

7.1.6 Récapitulatif bibliographique

Le tableau suivant donne un aperçu non exhaustif des différentes études qu'il est possible de trouver dans la littérature, que ce soient des études expérimentales ou numériques. Il montre aussi le but de l'étude, c'est à dire jusqu'où elle a été poussée :

- La température au sein du fluide,
- La température au sein de la paroi,
- Les contraintes subies par la paroi.

[Menanteau \(2012\)](#) propose une autre étude bibliographique très complète des configurations de Té de mélange étudiées dans la littérature.

But \ Type	SND	SGE	Expériences	URANS
Etude de la température du fluide (écart type et/ou spectre)	Fukushima et al. (2003) Té carré $-9,3 \leq Ri \leq 9,3$ Approx. de Boussinesq	Zhu et al. (2009) Té carré Code : Fluent Modèle : Smagorinsky-Lily Approx. de Boussinesq $\Delta T=40^\circ\text{C}$	Fukushima et al. (2003) Té carré $-11 \leq Ri \leq 11$ $-43 \leq \Delta T \leq 47$	Frank et al. (2010) Code : ANSYS CFX $T_f=15^\circ\text{C}$ $T_c=30^\circ\text{C}$
			Igarashi et al. (2002) Igarashi et al. (2003) $T_f=25^\circ\text{C}$ $T_c=40^\circ\text{C}$	Merzari et al. (2009) Scalaire passif
		Coste et al. (2006) Code : Trio U Modèle : WALE Té droit+Té coudé Scalaire passif $T_f=33^\circ\text{C}$ $T_c=48^\circ\text{C}$	Kawamura et al. (2002) $T_f=20^\circ\text{C}$ $T_c=50^\circ\text{C}$	
			Ogawa et al. (2005) $T_f=33^\circ\text{C}$ $T_c=48^\circ\text{C}$	
		Hu et Kazimi (2006) Code : Fluent Modèle : Smagorinsky-Lily + RNG $\Delta T=30^\circ\text{C}$	Wakamatsu et al. (1995) Eau : $T_f=20^\circ\text{C}$ $T_c=45^\circ\text{C}$ Sodium : $T_f=300^\circ\text{C}$ $T_c=450^\circ\text{C}$	
		Kuczaj et al. (2008) Modèle : Vreman $T_f=15^\circ\text{C}$ $T_c=30^\circ\text{C}$	Walker et al. (2009) Haute définition spatiale et temporelle Scalaire passif (concentration chimique) Données disponibles sur internet	
			Westin et al. (2008) Code : Fluent Modèle : WALE Scalaire passif	

TABLE 7.2 – Etudes sur le Té de mélange, partie 1

But \ Type	SND	SGE	Expériences	URANS
Etude de la température dans la paroi (écart type et/ou spectre)	<p><i>Simoneau et al. (1997)</i></p> <p>Code : Star CD</p> <p>Maillage de la paroi</p> <p>Sodium : $T_f=236^\circ\text{C}$ $T_c=266^\circ\text{C}$</p>		<p><i>Wakamatsu et al. (2003)</i></p> <p>$T_f=20^\circ\text{C}$ $T_c=60^\circ\text{C}$</p>	
		<p><i>Kuhn et al. (2010)</i></p> <p>Code : Fluent</p> <p>Modèle : Smagorinsky + Smagorinsky dynamique</p> <p>Etude de l'épaisseur du mur</p> <p>$T_f=8^\circ\text{C}$ $T_c=83^\circ\text{C}$</p>		
		<p><i>Ohtsuka et al. (2003)</i></p> <p>Modèle : Smagorinsky</p> <p>$T_f=20^\circ\text{C}$</p> <p>$T_c=52,9^\circ\text{C}$</p>		
Etude de la contrainte et/ou de la fatigue		<p><i>Chapuliot et al. (2005)</i></p> <p><i>Gourdin et al. (2007)</i></p> <p>Code : CAST3M</p> <p>Modèle : Smagorinsky</p> <p>Configuration Civaux</p> <p>$T_f=20^\circ\text{C}$</p> <p>$T_c=180^\circ\text{C}$</p>		<p><i>Chellapandi et al. (2002)</i></p> <p>Code : PHOENICS + CAST3M</p> <p>Configuration Phenix</p> <p>Sodium : $T_f=350^\circ\text{C}$</p> <p>$T_c=440^\circ\text{C}$</p>
		<p><i>Hannink et al. (2009)</i></p> <p>Code : Fluent + ANSYS</p> <p>$T_f=10^\circ\text{C}$ $T_c=90^\circ\text{C}$</p>		
		<p><i>Lee et al. (2009)</i></p> <p>Code : Fluent</p> <p>$\Delta T=115^\circ\text{C}$</p>		

TABLE 7.3 – Etudes sur le Té de mélange, partie 2

7.2 Importance de l'entrée turbulente

Le problème de la génération d'une entrée turbulente est un problème récurrent pour la simulation d'écoulements turbulents. Ce problème n'est pas spécifique à la SGE, mais se rencontre aussi en SND. En effet ces deux techniques présentent une forte sensibilité aux conditions limites, et en particulier à la nature de la condition d'entrée du fluide. De plus, cette sensibilité à la condition d'entrée ne concerne que la familles des configurations présentant des conditions limites d'entrée. Le problème est levé dans les domaines bi-périodiques tels que le canal plan ou dans les domaines tri-périodiques utilisés pour l'étude de la turbulence homogène isotrope. Lors de nos travaux, nous avons été confronté à la problématique de l'entrée turbulente uniquement dans la configuration du Té de mélange. C'est pourquoi, cette section n'est présenté que maintenant, et a été volontairement séparée des autres développements numériques développés au cours de la première partie de ce mémoire.

Cette sensibilité à la condition d'entrée a été démontrée dans le cadre de la SND et de la SGE pour un jet plan (cf. Klein *et al.* (2003)), un développement spatial de couches limites (cf. Lund *et al.* (1998)), une marche (cf. Jarrin *et al.* (2003)) ou encore pour un Té de mélange (cf. Monod *et al.* (2011)). La figure 7.7 montre sur une coupe normale à x le profil de température pour une configuration sans entrée turbulente (a) et en en utilisant une (b).

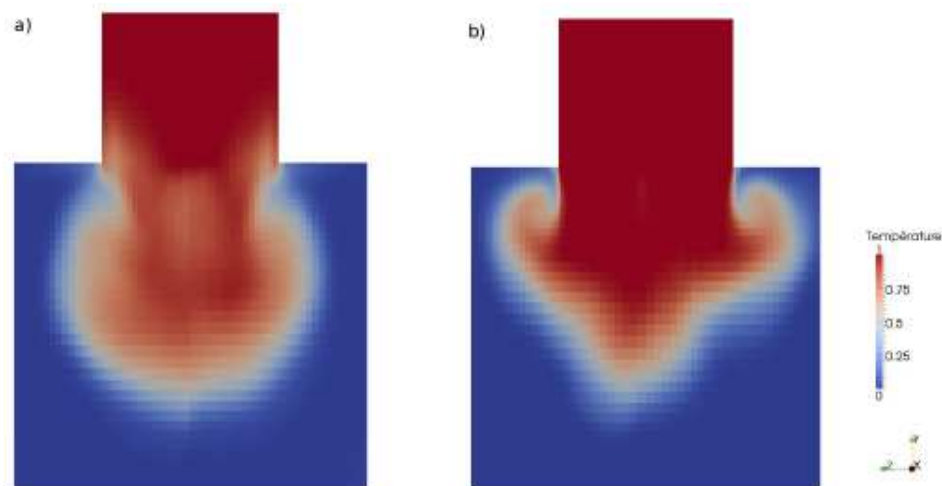


FIGURE 7.7 – Température en aval de la zone de mélange. (a) Sans entrée turbulente ; (b) Avec entrées turbulentes

Depuis une trentaine d'années, différentes méthodes pour la génération d'entrées turbulentes ont été développées. Il est possible de les classer en trois grandes catégories :

1. méthodes à génération de bruit aléatoire,
2. méthodes utilisant un recyclage,
3. méthodes faisant appel à des bases de données.

Cette classification est basée sur le traitement des champs moyens et fluctuants. Une revue de ces méthodes est présentée ci-dessous.

7.2.1 Génération de turbulence aléatoire

7.2.1.1 Bruit blanc

Cette méthode consiste à utiliser comme entrée turbulente un bruit superposé à un champ moyen. Ce bruit peut être de différente nature, et contrôlé jusqu'à des moments statistiques différents. Cette méthode a notamment été utilisée par [Ducros *et al.* \(1996\)](#). Elle présente les avantages d'être

- rapide,
- facile à implémenter.

En revanche, les principaux désavantages sont :

- un manque de sens physique,
- une zone d'établissement de la turbulence très longue,
- une absence de structure, c'est à dire de corrélations entre deux points,

le tout donnant des résultats non conformes aux expériences, du moins pour ce qui est de la SGE. Lorsqu'une telle entrée, est proche de la zone d'intérêt, on peut considérer qu'il s'agit de génération de turbulence de mauvaise qualité. Si elle se situe plus loin en amont de la zone d'intérêt, alors elle n'a plus un rôle de génération de turbulence, mais plutôt de déclencheur. La distance à la zone d'intérêt est alors directement corrélée à la qualité de la turbulence obtenue. De plus le manque de corrélation implique que les fluctuations soient énormément atténuées lors de la résolution des équations de Navier-Stokes. C'est pour ces raisons, que des méthodes plus évoluées ont été développées.

7.2.1.2 Méthodes à turbulence structurée

Sur ces constatations, [Jarrin *et al.* \(2006\)](#) ont développé une méthode basée sur un traitement Lagrangien de la vorticité. Des vortex sont générés suivant une certaine distribution et ajoutés au profil moyen. Cette méthode est connue sous le nom SEM (Synthetic Eddy Method) ou méthode des vortex. Elle s'appuie sur les travaux de [Sergent \(2002\)](#). Elle a été impl ment e dans certains codes commerciaux comme Fluent (cf. [Mathey *et al.* \(2006\)](#)). [Aulery *et al.* \(2012\)](#) utilisent cette entrée pour l'étude de la configuration du Té de la centrale Phenix. [Pami s *et al.* \(2009\)](#) présentent une version modifi e de cette méthode.

[Davidson \(2007\)](#) quant-à lui superpose au profil moyen plusieurs modes de Fourier (sinus ou cosinus), dont la phase est aléatoire et l'amplitude aléatoire mais contr l e. Les fluctuations ainsi ajout es permettent de contrôler le spectre d'énergie cinétique, que l'auteur impose d'être un spectre de Von K rm n modifié. Par construction les valeurs g n r es sont indépendantes. Afin de corréler correctement, l'auteur propose d'appliquer un filtre temporel asymétrique.

7.2.2 Méthodes à base de recyclage

L'idée est ici d'utiliser une coupe d'un écoulement turbulent totalement développé comme condition d'entrée. Cette coupe peut être obtenue de deux manieres différentes. Elle peut être effectu e sur le même domaine de calcul, un peu plus en aval, ou sur un domaine diff rent, simulé simultanément ou précédemment.

7.2.2.1 Avec deux domaines de calcul

Lorsque la coupe est effectuée sur un autre domaine, il s'agit alors d'un canal rendu infini à l'aide d'une condition de périodicité, dont la forme de la section correspond à l'entrée désirée. On ajoute alors un moteur à l'écoulement, souvent une force extérieure, et on laisse la turbulence s'établir. Elle peut ou non se développer en fonction des conditions initiales. C'est un plan quelconque (parfois la sortie) de ce canal d'étude qui servira d'entrée pour le second domaine. [Akselvoll et Moin \(1996\)](#), [Cook et Riley \(1996\)](#), et [Brillant *et al.* \(2008\)](#) par exemple utilisent deux domaines de calculs comme décrits ci-dessus.

7.2.2.2 Avec un seul domaine de calcul

Une autre solution consiste à prendre comme condition d'entrée une coupe plus aval du domaine, et donc de n'avoir qu'un seul domaine de calcul. On parle alors de recyclage. Le recyclage est une sorte de périodicité. La différence réside dans l'emplacement du plan utilisé pour calculer l'entrée au pas de temps suivant. Il est communément situé au sein du domaine, et pas forcément à sa sortie. Une telle technique comme le montre [Lund *et al.* \(1998\)](#), ne produit pas de zone d'établissement après l'entrée. Elle permet donc de réduire la taille du canal et donc les coûts de calculs. De plus une telle méthode peut être utilisée directement sur la zone d'étude, et ne nécessite donc pas de second domaine pour l'établissement de l'entrée turbulente. Cette méthode présente également l'avantage de bien contrôler les valeurs de l'épaisseur de la couche limite et du frottement pariétal. Elle nécessite par contre de rallonger un peu le domaine au niveau des conditions d'entrée, en amont de la zone d'intérêt. Cependant, la couche limite s'étant développée, son épaisseur n'est plus la même à l'entrée et à la sortie. Pour palier à ce problème, [Spalart \(1988\)](#) effectue un changement de variable sur son domaine pour faire correspondre les couches limites. Cette technique introduit des termes supplémentaires dans les équations de Navier-Stokes, appelés en anglais "growing terms" qui présentent le double désavantage d'être nombreux et complexes. Réutilisant cette idée, [Wu *et al.* \(1995\)](#) pratiquent ce changement de coordonnées uniquement sur le plan de sortie du canal, à la condition de périodicité. Ils évitent ainsi l'apparition des "growing terms" et peuvent donc résoudre les équations de Navier-Stokes avec un solveur classique.

7.2.3 Utilisation de bases de données

Parmi les méthodes développées pour produire des entrées turbulentes, nous pouvons également noter les méthodes d'interpolation à partir d'expériences (cf. [Ducros *et al.* \(1996\)](#)). Les entrées sont réalisées en laboratoire et sauvegardées pour pouvoir être ensuite utilisées telles quelles, ou après modifications (combinaison, interpolation, extrapolation, etc.). Cette technique a été introduite par [Adrian et Moin \(1988\)](#). [Druault *et al.* \(1999\)](#) et [Maruyama *et al.* \(1999\)](#) ont utilisé cette technique à partir de données mesurées au moyen de sondes à fils chauds. Cette technique présente une bonne résolution temporelle, mais le nombre limité de fils réduit la résolution spatiale, d'où la nécessité d'une interpolation pour conduire à une entrée turbulente numérique raisonnable et utilisable. On notera aussi la méthode de [Perret *et al.* \(2006\)](#), basée sur des mesures par SPIV (Stereoscopic Particle-Image Velocimetry). Cela permet contrairement à

Maruyama *et al.* (1999), d'avoir une bonne résolution spatiale au détriment de la résolution temporelle. Pour palier à ce problème, Perret *et al.* (2006) effectuent une décorrélation entre le temps et l'espace à l'aide d'une décomposition orthogonale (POD pour Proper Orthogonal Decomposition) et interpolent ensuite les mesures pour avoir une précision temporelle égale au pas de temps de l'étude numérique. La base de données servant aux entrées peut également être constituée à partir d'autres simulations.

7.2.4 Méthodes mixtes

Il existe des méthodes combinant plusieurs des principes précédemment évoqués. Nous noterons par exemple celle développée par Ferrante et Elghobashi (2004). Ils reprennent l'idée de Lund *et al.* (1998), qui s'appuie sur le changement de variable de Spalart (1988), mais juste sur le plan de recyclage. Ferrante et Elghobashi (2004) modifient la méthode de Lund *et al.* (1998) en ajoutant des étapes avant le processus de recyclage. Entre autre, ils imposent à l'entrée le spectre d'énergie cinétique, en gardant cependant des phases aléatoires (totalement au début, puis en majorant le déphasage autorisé d'un pas de temps à l'autre). Ils imposent aussi des conditions pour contrôler la corrélation entre les fluctuations de vitesses selon les axes verticaux et longitudinaux. Ils contrôlent ainsi les moments jusqu'à l'ordre 3. Les résultats qu'ils obtiennent alors en DNS sont très proches de ceux obtenus expérimentalement par DeGraaff et Eaton (2000).

Baba-Ahmadi et Tabor (2009) ont comparé 5 méthodes de recyclage. La méthode de référence est le recyclage périodique. Ils ne précisent cependant pas ce qui a servi de moteur lors de cette simulation de référence. A cette méthode, ils comparent :

1. une méthode où seul le débit est contrôlé
2. une méthode où une force artificielle constante et monodirectionnelle est ajoutée
3. une méthode où la vitesse est corrigée
4. une dernière méthode couplant les deux précédentes. Une force fonction de la vitesse, ajustée à chaque pas de temps est utilisée, ainsi qu'une correction de la vitesse sur les deux premiers moments.

Grâce aux modifications effectuées par rapport à la méthode de référence, de bons résultats sont obtenus, particulièrement lorsque ces techniques sont utilisées simultanément (méthode 4). Ces techniques puissantes sont faciles à utiliser et performantes selon tous les aspects.

Pour une revue plus complète des méthodes existantes, le lecteur est invité à se référer à Tabor et Baba-Ahmadi (2010). Parmi toutes ces solutions, nous avons choisi celle du second domaine avec périodicité, pour ses très bonnes performances et sa facilité d'implémentation. C'est une des raisons qui nous ont conduits à l'étude du canal plan.

7.3 Définition de la géométrie

7.3.1 La géométrie

Le Té que nous désirons étudier est un Té 3D à section carrée, avec deux entrées et une sortie. Les paramètres sont définis comme sur la figure 7.8. Ces paramètres représentent :

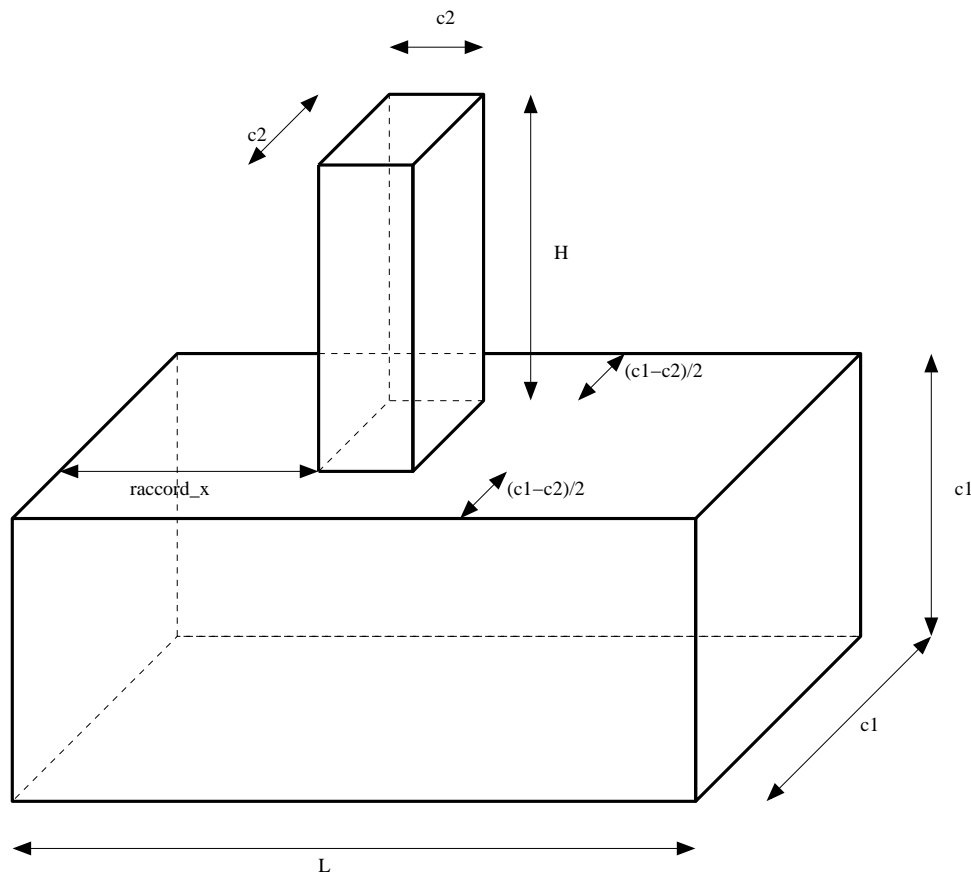


FIGURE 7.8 – Paramètres géométriques du Té.

- bloc 1 : partie du domaine constituée de la conduite principale,
- bloc 2 : partie du domaine constituée de la conduite secondaire,
- c_1 : longueur d'un côté de la section de la conduite principale,
- L : longueur de la conduite principale,
- c_2 : longueur d'un côté de la section de la conduite secondaire,
- H : hauteur de la conduite secondaire,
- `raccord_x` : abscisse du point de raccordement.

L'ensemble des paramètres précédemment définis est nécessaire et suffisant à la définition unique et complète de la géométrie d'un Té de mélange à section carrée, dont la conduite secondaire se raccorde au centre (en ce qui concerne la profondeur) de la conduite principale. L'algorithme de maillage est décrit en annexe C.

Chapitre 8

Choix des paramètres numériques

Dans ce chapitre, nous présentons la démarche scientifique qui nous a conduit au choix de plusieurs paramètres numériques pour la simulation des Tés de mélange.

8.1 Schéma convectif pour la vitesse

8.1.1 Présentation du problème

Lors de l'étude du canal plan, nous avons utilisé comme schéma numérique pour le terme de convection de vitesse un schéma centré implicite. Ce schéma donnait une bonne précision tout en conservant l'énergie cinétique. Cependant, les schémas centrés et autres schémas d'ordre supérieur peuvent conduire à des oscillations numériques. Ce phénomène est apparu sur le Té de mélange, surtout autour de l'angle de raccord entre les deux branches où le fluide subit un choc. Ces oscillations se sont ensuite propagées sur le domaine de calcul. Elles peuvent être observées sur la figure 8.1, où elles se propagent jusqu'à l'entrée de la conduite principale.

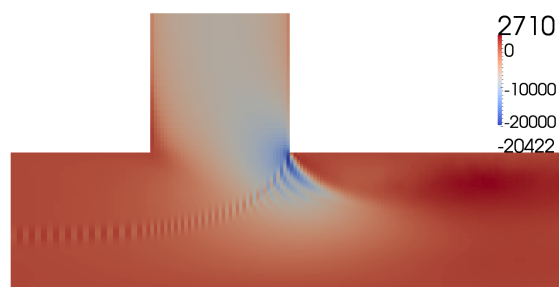


FIGURE 8.1 – \overline{u}_y sur une coupe d'équation $z = 1$

8.1.2 Vers l'utilisation d'un autre schéma convectif

Nous avons tout d'abord envisagé de changer le schéma convectif autour de l'angle du Té uniquement, sur une petite couronne de mailles. Nous pensions qu'utiliser un schéma robuste et stable tel que le schéma UPWIND sur cette zone empêcherait l'apparition de ces oscillations. Cette solution fut rapidement abandonnée pour deux raisons majeures. Premièrement, les oscillations ne sont que décalées, et réapparaissent à la limite entre les zones UPWIND et centrées. Ensuite, le schéma UPWIND en lui-même n'est pas convenable, car trop diffusif. Sur le cas test du canal plan, ce schéma laminarise l'écoulement.

Dans le code ISIS, nous pouvions choisir parmi trois schémas différents pour le terme convectif de vitesse : UPWIND, centré, et un schéma hybride entre les deux premiers. Aucun ne convenant à notre étude, un schéma QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) d'ordre 3 a été implémenté pour pouvoir palier à ce problème. Il a été programmé pour une résolution implicite ainsi que pour une résolution explicite. Comme les schémas d'ordre élevé ont tendance à provoquer des oscillations numériques, plusieurs limiteurs de pente ont également été ajoutés pour les schémas explicites. Ainsi, sept nouvelles possibilités s'offrent à nous :

- Schéma QUICK implicite,
- Schéma QUICK explicite,
- Schéma QUICK semi-explicite : le terme apportant systématiquement de l'instabilité est implicite, les autres sont explicites,
- Schéma QUICK explicite avec limiteur de pente MINMOD,
- Schéma QUICK explicite avec limiteur de pente ULTRA,
- Schéma QUICK limité par la valeur centrée. À noter que ce schéma, tout comme le schéma centré, peut ne pas vérifier le principe du maximum même pour des pas de temps très petits,
- Schéma MUSCL, correspondant à un schéma centré avec limiteur de pente MINMOD.

Excepté le schéma QUICK implicite, ils présentent tous au moins un terme explicite et doivent donc vérifier un critère de CFL pour garantir la stabilité.

8.1.2.1 Comportement des schémas explicites sous le critère de CFL

Nous allons commencer par comparer les résultats obtenus sur le cas test du canal plan en utilisant les schémas explicites et un pas de temps inférieur au critère de CFL. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par [Tiselj et Cizelj \(2012\)](#) en DNS.

Sur les figures 8.2 et 8.3, nous constatons que ce sont les schémas QUICK explicite et QUICK centré qui donnent les meilleurs résultats, que ce soit pour les profils moyens ou les fluctuations.

8.1.2.2 Comportement des schémas explicites au dessus du critère de CFL

Nous pouvons maintenant faire la même étude avec des pas de temps légèrement supérieurs à la CFL pour observer comment se comportent ces schémas à la limite du critère de CFL.

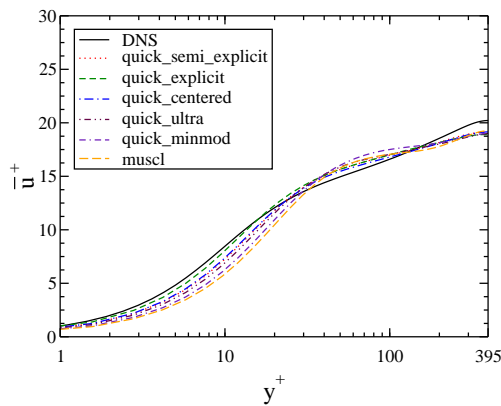


FIGURE 8.2 – Moyenne de u_x^+ pour les différents schémas explicites en dessous du critère de CFL

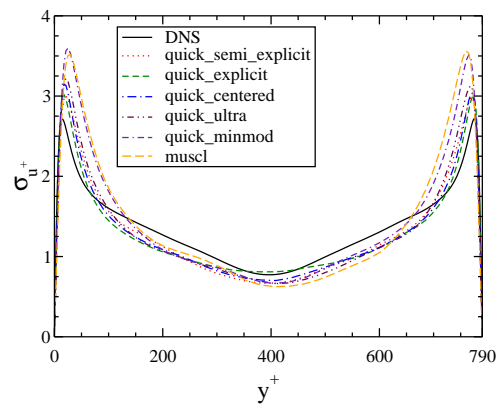


FIGURE 8.3 – Écart type de u_x^+ pour les différents schémas explicites en dessous du critère de CFL

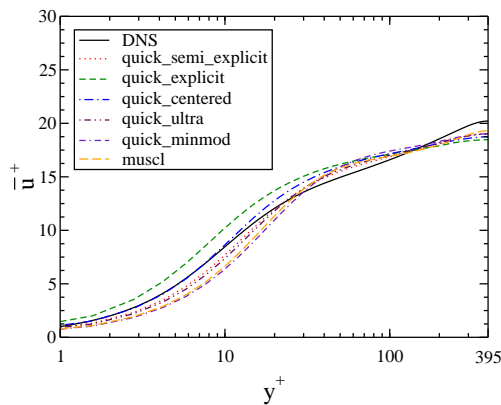


FIGURE 8.4 – Moyenne de u_x^+ pour les différents schémas explicites au dessus du critère de CFL

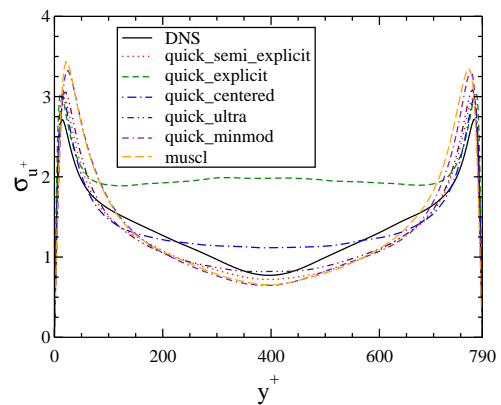


FIGURE 8.5 – Écart type de u_x^+ pour les différents schémas explicites au dessus du critère de CFL

Dans ce cas, nous observons sur les figures 8.4 et 8.5 que ce sont les schémas limités qui donnent les meilleurs résultats. Les schémas explicites sont par nature instables, et l'absence de limiteur les éloignent rapidement de la solution voire les fait diverger si le pas de temps est proche du critère de CFL.

8.1.2.3 Les meilleurs schémas

Le schéma implicite, lui, n'est pas sensible à la faible variation du pas de temps autour de la CFL. Sur les figures 8.6 et 8.7, la comparaison des meilleurs schémas explicites sous le critère de CFL avec le schéma QUICK implicite, le schéma centré et la DNS nous montre qu'ils donnent des résultats similaires et satisfaisants. Le schéma implicite est plus robuste que les explicites limités, eux même plus robustes que le schéma explicite non limité. L'ordre est inversé si l'on s'intéresse à la précision de ces schémas pour des pas de temps suffisamment petits.

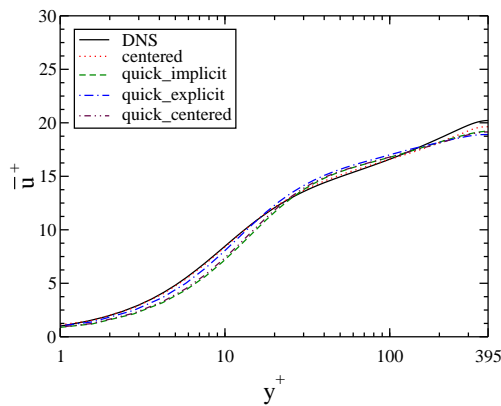


FIGURE 8.6 – Moyenne de u_x^+ pour les meilleurs schémas en dessous du critère de CFL

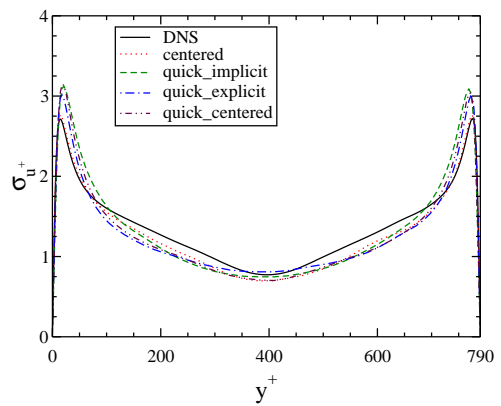


FIGURE 8.7 – Écart type de u_x^+ pour les meilleurs schémas en dessous du critère de CFL

8.1.3 Application au Té de mélange

Nous pouvons maintenant vérifier que sur le cas du Té de mélange, ces nouveaux schémas éliminent les oscillations numériques introduites par le schéma centré. Nous observons également que visuellement le schéma explicite et le schéma implicite donnent des résultats similaires (cf. figures 8.8 et 8.9).

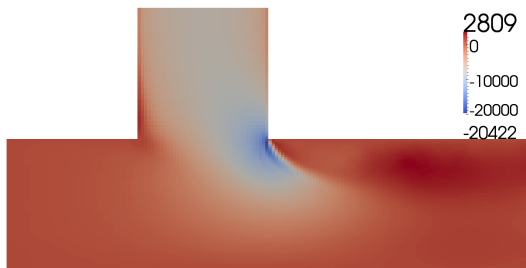


FIGURE 8.8 – Moyenne de u_y en $z = 0,5D$ avec un schéma QUICK explicite

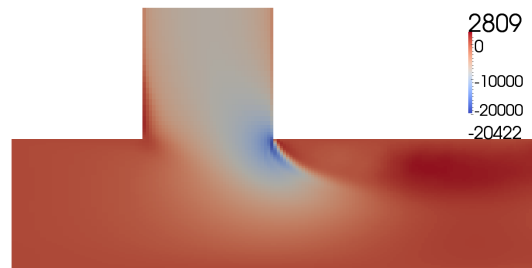


FIGURE 8.9 – Moyenne de u_y en $z = 0,5D$ avec un schéma QUICK implicite

Ces 3 nouveaux schémas présentent chacun leurs avantages et inconvénients. Le schéma implicite est robuste, et peut être utilisé pour des pas de temps relativement élevés. Cependant, dans de tels cas, la diffusion numérique lisse les résultats. Il est alors possible que nous passions à côté de certains phénomènes. De plus sa résolution requiert l'inversion d'une matrice, il demandera donc plus de ressources numériques qu'un schéma explicite pour un calcul à pas de temps et paramètre autre que le schéma convectif identiques. Le schéma QUICK explicite est précis et rapide à résoudre. En contrepartie, c'est le moins stable de tous. Le schéma QUICK centré est le schéma explicite qui se rapproche le plus du schéma centré initial. Le fait d'utiliser trois points au lieu de deux permet de lisser les oscillations. Le fait de le limiter avec la valeur centrée le rend un petit peu plus stable, mais il requiert néanmoins un critère de CFL.

8.1.4 Conclusion

Pour la suite de notre étude, nous choisirons d'utiliser le schéma QUICK implicite. Même si nous utilisons pour le schéma convectif thermique un schéma MUSCL nécessitant un petit pas de temps inférieur à un certain critère de CFL, cela n'est pas suffisant pour nous permettre d'utiliser un schéma explicite pour la convection de vitesse.

Tout d'abord, le calcul du critère de CFL est différent dans les deux cas à cause du décalage de la vitesse sur l'élément MAC.

De plus, nous cherchons à simuler des écoulements à faible nombre de Prandtl, autrement dit des écoulements où la diffusion d'enthalpie est bien supérieure à la diffusion de vitesse. Cette forte diffusivité thermique permet de stabiliser le champ de température en cas de léger dépassement du critère de CFL thermique au cours du calcul. Autrement dit, même s'il n'est pas possible de prouver théoriquement que le schéma convectif respecte le principe du maximum, dans la pratique, grâce à la forte diffusivité thermique, la température reste bornée. Ceci peut ne pas être le cas pour le champ de vitesse.

Ainsi, pour l'étude du Té de mélange, nous utiliserons un schéma QUICK implicite. Ce schéma semble être un bon compromis. Il résout notre problème d'oscillations numériques, et est celui qui ressemble le plus au schéma centré. Notons cependant que nous perdons la propriété de conservation de l'énergie cinétique, mais cela n'a pas de conséquences significatives.

8.2 Choix de la longueur des branches

8.2.1 Descriptif de la méthodologie

Pour la simulation d'un té de mélange, la longueur des branches d'entrée et de sortie a une forte importance. Une longueur trop longue alourdit considérablement et inutilement le calcul, alors que des branches trop courtes auront un impact sur la qualité des résultats.

En sortie, c'est la zone proche du mélange qui nous intéresse, car c'est ici que les fluctuations de température sont les plus importantes. Une longueur arbitraire couvrant la totalité de la zone de recirculation convient donc. La sortie n'aura pas une influence significative sur la zone de mélange située en amont.

Pour les entrées, le problème est autre. En effet, particulièrement pour la SGE, les résultats des calculs sont très sensibles aux conditions d'entrées et plus généralement aux conditions limites. Comme nous l'avons vu à la section 7.2, il est important d'avoir une entrée turbulente de bonne qualité, mais également suffisamment en amont de la zone de mélange.

Dans le cadre des écoulements incompressibles, instinctivement, nous pouvons comprendre qu'au niveau de la zone de mélange, le fluide venant de l'entrée principale va se diriger vers le bas de la conduite en accélérant, pour laisser de la place en haut de la conduite pour le fluide venant de l'entrée secondaire. Cela se traduit par une vitesse verticale en amont de la zone de mélange sur la conduite principale de moyenne non nulle, et une vitesse longitudinale non symétrique par rapport au centre de la conduite. L'entrée turbulente étant issue d'une conduite périodique, il apparaît donc important de la placer suffisamment en amont pour limiter l'influence

Cas	Longueur des entrées (en D)
0,5D	0,5
1D	1
1,5D	1,5
2D	2
3D	3

TABLE 8.1 – Cas étudiés pour définir la longueur des branches d'entrées

sur la zone de mélange. De plus, les branches doivent être aussi assez longues pour capter l'intégralité des phénomènes de remontée de température par re-circulation et par diffusion au sein des zones 1 et 2.

Dans cette section, nous allons définir la longueur des branches d'entrées à utiliser pour obtenir un bon compromis entre précision et temps de calcul. L'étude se fera pour un Té dont les deux entrées ont même section, pour un nombre de Reynolds de 395. Le schéma numérique pour le terme de convection de vitesse est un schéma QUICK implicite. La longueur des branches d'entrées varie suivant les cas entre 1 ; 1,5 ; 2 et 3 diamètres. Le diamètre sera noté D . Par la suite, ces différents calculs sont référencés dans le tableau 8.1.

8.2.2 Mode de calcul

Pour chacun des cas, le calcul est lancé sur 100 000 itérations. Les 10 000 premières itérations sont utilisées pour l'établissement de l'écoulement. Les 90 000 restantes le sont pour le calcul des moments statistiques des trois composantes de la vitesse et de la température. Sur chacune des branches d'entrées, une coupe de ces statistiques est réalisée à $0,05D$ en amont de la zone de mélange. Cette coupe est une surface carrée. Les profils obtenus sont alors comparés aux profils du cas 3D. La comparaison se fait au moyen de deux statistiques.

La première, que nous noterons $S1$, représente la moyenne des valeurs absolues des écarts entre le cas étudié et le cas 3D, divisée par la valeur moyenne du moment sur le plan, en pourcentage. La seconde, que nous noterons $S2$, représente la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts entre le cas étudié et le cas 3D, divisée par la valeur moyenne du moment sur le plan, en pourcentage. En notant :

- N_x le nombre de mailles sur la première direction du plan de coupe,
- N_y le nombre de mailles sur la seconde direction du plan de coupe,
- i le numéro de la maille suivant la première direction du plan de coupe,
- j le numéro de la maille suivant la seconde direction du plan de coupe,
- $p_{i,j}$ la surface de la maille (i, j) ,
- P la surface de la section coupée, $P = \sum_i^{N_x} \sum_j^{N_y} p_{i,j}$,
- $M_{i,j}$ la valeur du moment étudié dans le cas 3D sur la maille (i, j) ,
- $m_{i,j}$ la valeur du moment dans le cas étudié sur la maille (i, j) ,

nous obtenons les expressions suivantes pour $S1$ et $S2$:

$$S1 = \frac{\sum_i^{N_x} \sum_j^{N_y} p_{i,j} |M_{i,j} - m_{i,j}|}{\frac{1}{2} \sum_i^{N_x} \sum_j^{N_y} p_{i,j} (M_{i,j} + m_{i,j})} \times 100 \quad (8.1)$$

$$S2 = \frac{\sqrt{\sum_i^{N_x} \sum_j^{N_y} p_{i,j} (M_{i,j} - m_{i,j})^2}}{\frac{1}{2} \sum_i^{N_x} \sum_j^{N_y} p_{i,j} (M_{i,j} + m_{i,j})} \times 100 \quad (8.2)$$

Quelques exceptions cependant. Pour la moyenne de la température, le diviseur est pris égal à l'écart entre la température chaude et la température froide, afin d'avoir le même diviseur sur les deux branches. Il est également important de noter que pour σ_T et u_z , la valeur théorique vaut 0, ce qui implique un écart relatif énorme et non significatif. De même, pour σ_T , la valeur théorique tend vers 0 en s'éloignant de la zone de mélange. Là encore, l'écart relatif sera très important et non significatif. Nous cherchons à obtenir un cas où l'erreur serait de l'ordre de 5%. Notons également que pour chaque cas et chaque maille, les valeurs des variables ayant conduit à l'évaluation des moments ne sont pas indépendantes. Les tests statistiques classiques de comparaisons d'estimateurs tels que le test de Fisher-Snedecor ne peuvent pas être utilisés.

8.2.3 Visualisations et calculs d'erreurs

8.2.3.1 Premières visualisations en deux dimensions

Une variable est définie par sa nature (composante de vitesse ou température), son moment (moyenne ou écart type), sa branche d'entrée (principale ou secondaire) et son cas. Pour se donner une première idée de la longueur de branche à choisir à l'aide de la quantité de statistiques obtenues, nous pouvons tracer la valeur de $S1$ pour chaque variable, en fonction du cas. Le résultat, dense et peu lisible, est représenté sur la figure 8.10. Un tri permet d'y voir un peu plus

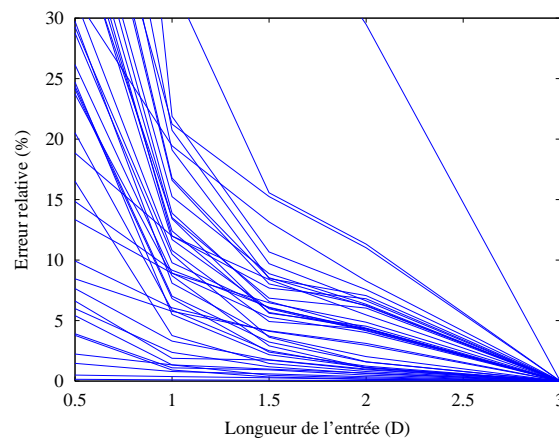


FIGURE 8.10 – Erreur relative par rapport à une entrée de longueur 3D pour les différentes variables

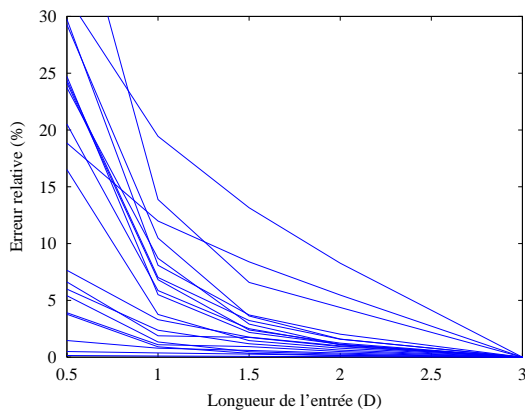


FIGURE 8.11 – Erreur relative par rapport à une entrée de longueur 3D pour les différentes variables sans point d’inflection pour 2D

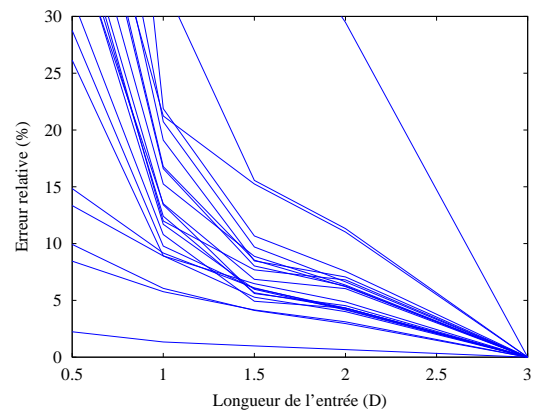


FIGURE 8.12 – Erreur relative par rapport à une entrée de longueur 3D pour les différentes variables avec point d’inflection pour 2D

clair. Nous séparons donc les courbes ne présentant pas de point d’inflection pour $x = 2$ sur la figure 8.11 de celles qui en présentent un sur la figure 8.12.

Sur ces figures, nous constatons que le gain de précision semble significatif jusqu’à $1,5D$. Au delà, le gain semble moindre par rapport au surcoût de calcul. En effet, sans oublier que la valeur 0 en $x = 3$ est artificielle et qu’elle cache les variations résiduelles, il semble qu’un palier soit atteint en $x = 1,5D$, que ce soit sur la figure 8.11 ou la figure 8.12.

8.2.3.2 Calcul des erreurs relatives

Les valeurs des statistiques $S1$ et $S2$ sont reportées sur le tableau 8.2. Nous constatons sur ce tableau que les erreurs entre le cas $1,5D$ et $3D$ sont acceptables, une seule statistique significative est supérieure à 10%.

8.2.3.3 Visualisation 3D

La valeur de $1,5D$ pour la longueur des branches d’entrées ayant été confirmée par le calcul des statistiques $S1$ et $S2$, nous pouvons maintenant vérifier graphiquement notre choix en comparant les coupes de différentes variables sur une section de la branche principale juste en amont de la zone de mélange. À titre d’exemple, les coupes pour $\overline{u_x}$ et σ_{u_x} sont représentées sur les figures 8.13 à 8.22 pour les cas $0,5D$ et $1,5D$. Nous constatons que les courbes représentant les écart avec le cas de références sont bien plus élevées pour le cas $0,05D$ que pour le cas $1,5D$.

8.2.3.4 Remontée de la température

Nous pouvons également vérifier que le fluide chaud ne remonte pas la branche 1 jusqu’à l’entrée froide (figure 8.23) et réciproquement que le fluide froid ne remonte pas la branche 2

Cas	entrée 1				entrée 2				sortie				
	0,5D	1D	1,5D	2D	0,5D	1D	1,5D	2D	0,5D	1D	1,5D	2D	
$\overline{u_x}$	S1	5,99	2,37	1,18	0,63	23,7	8,71	2,91	1,11	3,78	0,91	0,34	0,17
	S2	7,65	3,3	1,77	0,99	29,3	10,5	3,63	1,59	5,41	1,34	0,48	0,26
σ_{u_x}	S1	18,9	12	8,39	5,47	28,8	9,78	6,05	4,32	26,1	8,92	5,28	4,01
	S2	31,8	19,4	13,2	8,27	44,1	15,2	8,88	6,35	40,3	12	7,69	6,8
$\overline{u_y}$	S1	24,1	6,82	2,39	1,24	20,5	5,87	2,51	1,1	16,5	3,76	1,46	0,79
	S2	29,7	8,09	3,72	2,02	24,4	7,02	3,23	1,58	24,7	5,51	2,18	1,14
σ_{u_y}	S1	8,45	5,77	4,16	3,11	43,2	13,9	6,58	4,37	39,1	12,4	5,67	4,33
	S2	13,3	8,91	6,47	4,86	61,7	20,7	9,7	6,63	49,5	16,6	8,03	6,26
σ_{u_z}	S1	9,93	6,06	4,12	2,96	37,9	11,7	5,98	4,16	31,6	10,8	4,93	4,32
	S2	14,8	9,17	6,1	4,22	50,6	16,8	8,54	6,21	37,3	13,5	6,85	6,03
\overline{T}	S1	0,15	0,1	0,07	0,04	3,91	1,1	0,93	0,49	1,47	0,79	0,59	0,36
	S2	0,5	0,38	0,27	0,15	6,62	1,88	1,74	0,93	2,24	1,34	0,99	0,67
σ_T	S1	49,8	21,2	15,2	11	97	21,9	10,7	7,56	40,9	13,4	5,61	4,54
	S2	131	60,9	41,3	29,5	143	32,9	15,6	11,3	55,3	19,1	8,47	7,06

TABLE 8.2 – Erreur relative entre les différents cas et le cas 3D, en pourcentage. $\overline{u_z}$ n'est pas rapporté. σ_T n'est pas significatif.

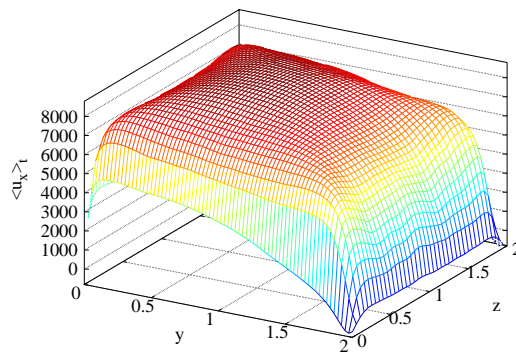


FIGURE 8.13 – $\overline{u_x}$ en amont de la zone de mélange, cas 3D

jusqu'à l'entrée chaude (figure 8.24). Sur ces figures, nous confirmons à nouveau que le choix de prendre des entrées de longueur $1,5D$ est valide. Nous constatons également un net écart du cas $0,5D$ par rapport aux autres cas. Cette longueur serait clairement insuffisante. La température d'entrée imposée ne serait pas compatible avec les phénomènes ramenant le fluide froid à une distance de $0,5D$ de la zone de mélange dans la branche secondaire. La qualité des résultats serait affectée.

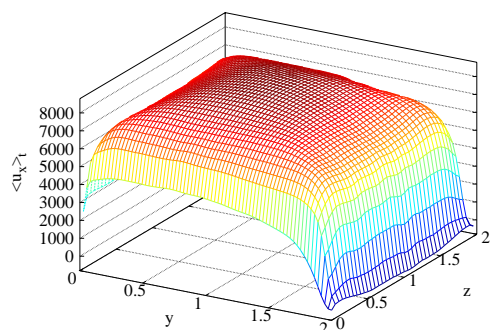


FIGURE 8.14 – $\langle u_x \rangle$ en amont de la zone de mélange, cas 0,5D

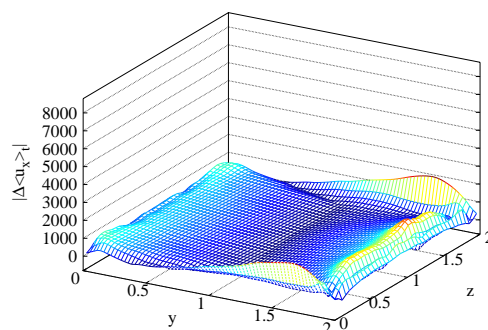


FIGURE 8.15 – $|\Delta \langle u_x \rangle|$ en amont de la zone de mélange, entre les cas 0,5D et 3D

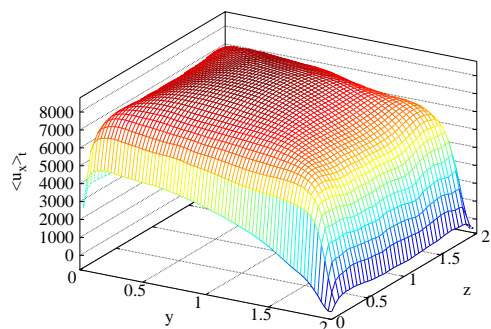


FIGURE 8.16 – $\langle u_x \rangle$ en amont de la zone de mélange, cas 1,5D

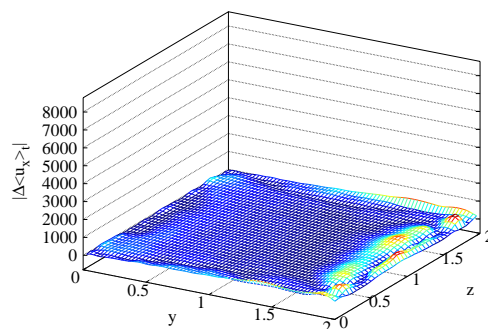


FIGURE 8.17 – $|\Delta \langle u_x \rangle|$ en amont de la zone de mélange, entre les cas 1,5D et 3D

8.2.3.5 Branche de sortie

Comme nous l'avons évoqué au début de cette section, pour la sortie, nous considérons qu'il est suffisant de simuler la re-circulation. La figure 8.25 montre qu'une longueur de $2D$ est satisfaisante. De plus, même si la qualité des résultats peu être légèrement altérée près de la sortie, cette sortie n'a aucune influence sur les zones de fortes fluctuations de température près des parois.

8.2.4 Conclusion

Toutes les observations amènent à la conclusion suivante : il faut prendre des entrées de longueur de 1,5 fois le diamètre de l'entrée principale pour obtenir un bon compromis entre précision et temps de calcul. Cette étude a été réalisée pour $Re_\tau = 395$ au sein des branches d'entrées du Té, et pour des sections identiques. Nous supposons que nos conclusions restent

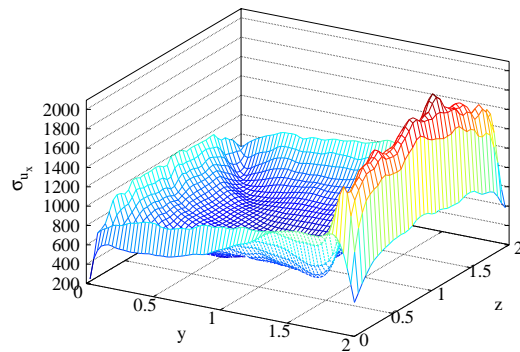


FIGURE 8.18 – σ_{u_x} en amont de la zone de mélange, cas 3D

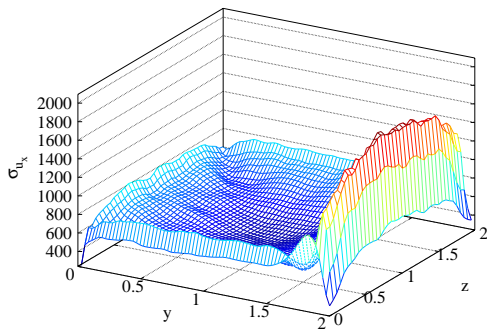


FIGURE 8.19 – σ_{u_x} en amont de la zone de mélange, cas 0,5D

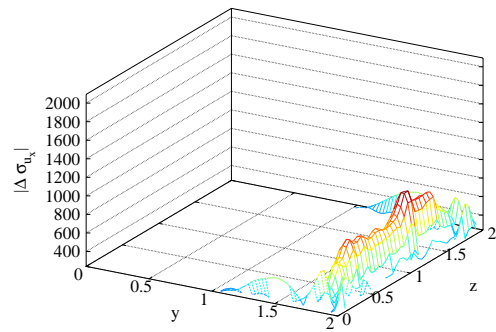


FIGURE 8.20 – $|\Delta\sigma_{u_x}|$ en amont de la zone de mélange, entre les cas 0,5D et 3D

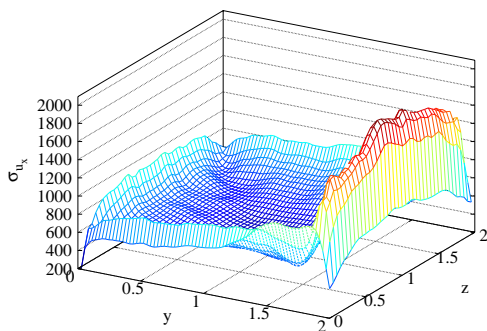


FIGURE 8.21 – σ_{u_x} en amont de la zone de mélange, cas 1,5D

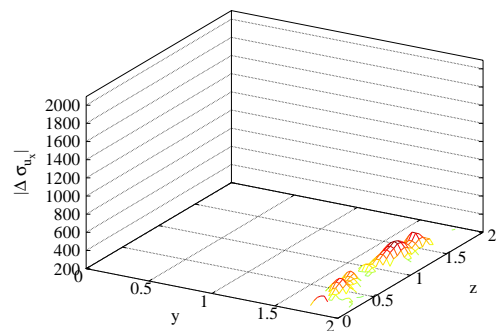


FIGURE 8.22 – $|\Delta\sigma_{u_x}|$ en amont de la zone de mélange, entre les cas 1,5D et 3D

valables pour des configurations différentes. Vérifier cette hypothèse dans chaque cas conduirait à multiplier le nombre de simulations.

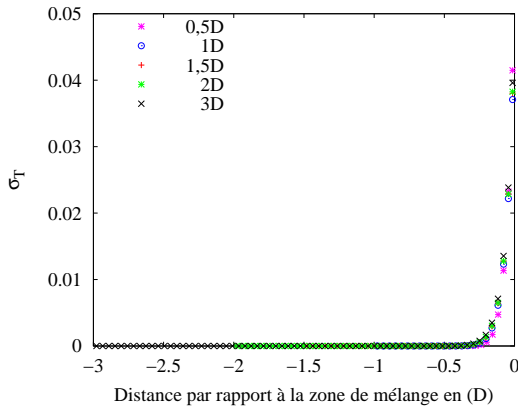


FIGURE 8.23 – σ_T en amont de la zone de mélange sur la branche principale

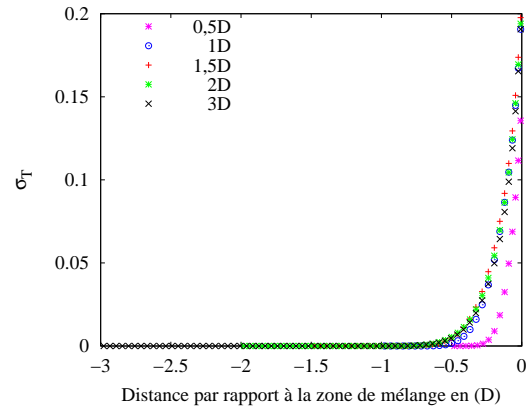


FIGURE 8.24 – σ_T en amont de la zone de mélange sur la branche secondaire

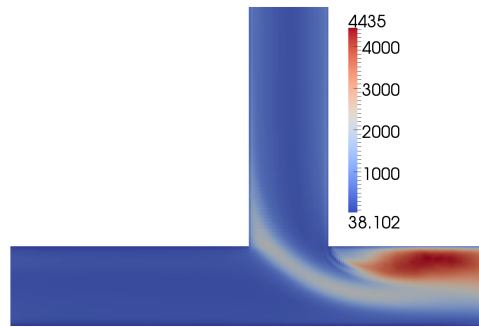


FIGURE 8.25 – σ_{u_y} sur une coupe d'équation $z = 0.5D$, pour le cas 3D

8.3 Paramètres retenus

8.3.1 Définitions des variables

Pour l'étude du Té de mélange, certaines variables et définitions supplémentaires sont requises.

Nous considérerons que le Té est composé de trois zones. Nous appellerons zone 1 la partie de la conduite principale située en amont de la zone de mélange ($\{raccord_x \leq x \leq raccord_x + c_2\} \cap \{y \leq c_1\}$). Elle est mathématiquement définie par $x \leq raccord_x$. L'ensemble de la conduite secondaire sera appelée zone 2. Elle est définie par $y \geq c_1$. Nous noterons zone 3 la partie du domaine composée de la zone de mélange et de l'aval de la conduite principale. Cette zone est donc définie par $\{raccord_x \leq x\} \cap \{y \leq c_1\}$. L'ensemble de ces zones est représenté sur la figure 8.26. Pour la suite, nous noterons avec un indice i les grandeurs se rapportant à la zone i .

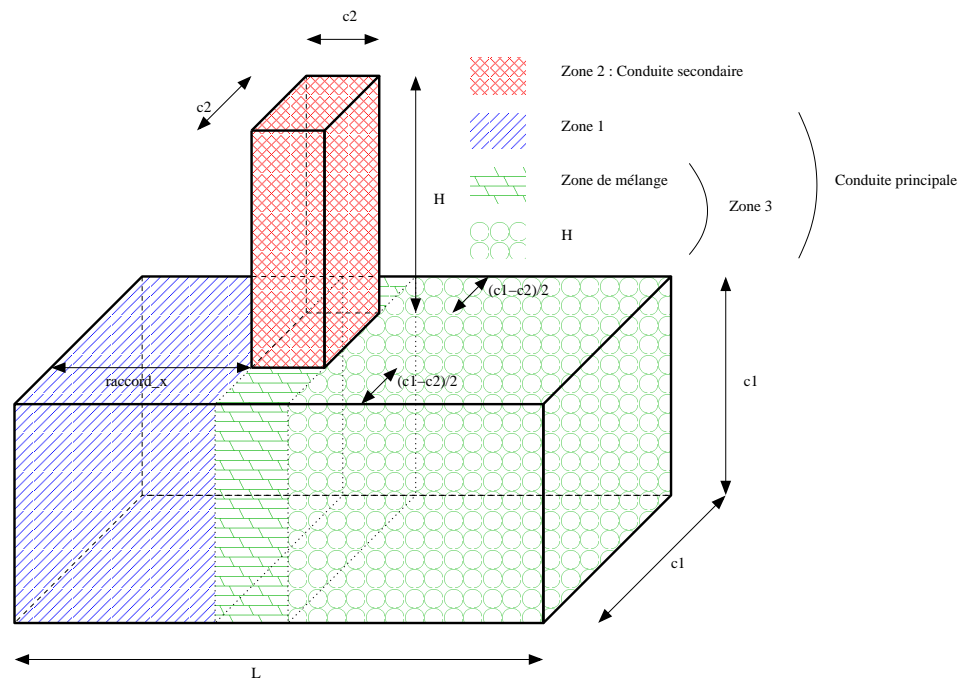


FIGURE 8.26 – Les différentes zones du Té.

Les différentes valeurs de Re_τ sont calculées à partir de la corrélation de Dean, en utilisant la demi-hauteur locale de la conduite comme longueur caractéristique. Ainsi

$$Re_{\tau_1} = 0,175 \left(\frac{\overline{u_1} c_1}{2\nu} \right)^{7/8} \quad (8.3)$$

$$Re_{\tau_2} = 0,175 \left(\frac{-\overline{v_2} c_2}{2\nu} \right)^{7/8} \quad (8.4)$$

$$Re_{\tau_3} = 0,175 \left(\frac{\left(\overline{u_1} - \frac{c_2^2 \overline{v_2}}{c_1^2} \right) c_1}{2\nu} \right)^{7/8} \quad (8.5)$$

Les signes "moins" devant les $\overline{v_2}$ sont liés à l'orientation des axes. La vitesse d'entrée dans la conduite secondaire est négative.

Pour adimensionner les temps, nous utiliserons une valeur unique de t_τ définie en utilisant le demi diamètre de la conduite principale comme longueur, et un Re_τ arbitraire de 395. Compte tenu de ces hypothèses, le pas de temps δt_{ech} que nous avons utilisé pour la totalité de nos simulation s'écrit en fonction de t_τ :

$$\delta t_{ech} = 3,95 \cdot 10^{-4} t_\tau \quad (8.6)$$

Une valeur différente de Re_τ pourrait être choisie pour cet adimensionnement sans que cela ne modifie l'interprétation des résultats.

Pour la suite, l'opération $\bar{\phi}$ désignera la moyenne temporelle de la grandeur ϕ . L'absence de direction d'homogénéité rend difficile l'opération de moyenne en espace. Lorsqu'une statistique sera requise sur un plan de coupe, cela sera clairement indiqué.

Le diamètre ou hauteur de l'entrée principale c_1 sera également appelé D . L'ensemble des distances relatives au Té seront exprimées en fonction de ce diamètre D .

8.3.2 Discrétisation spatiale

Comme pour le cas du canal, nos maillages sont structurés et utilisent l'élément MAC. Les géométries sont définies comme au paragraphe 7.3.1, et maillées suivant l'algorithme décrit en annexe C. Pour utiliser cet algorithme, nous considérons les valeurs des Re_{τ_i} comme définies au paragraphe 8.3.1. Les critères imposés sont les suivants :

- $mesh_x1_pas_max = 35l_\tau$ par rapport à Re_{τ_1} ;
- $mesh_x2_pas_max = 20l_\tau$ par rapport à Re_{τ_3} ;
- $mesh_x3_pas_max = 35l_\tau$ par rapport à Re_{τ_3} ;
- $mesh_y1_pas_max = 20l_\tau$ par rapport à Re_{τ_3} ;
- $mesh_y2_pas_max = 35l_\tau$ par rapport à Re_{τ_2} ;
- $mesh_z1_pas_max = 20l_\tau$ par rapport à Re_{τ_3} ;
- $mesh_z2_pas_max = 20l_\tau$ par rapport à Re_{τ_3} ;
- $mesh_x2_paroi = 20l_\tau$ par rapport à Re_{τ_3} ;
- $mesh_y1_paroi = 20l_\tau$ par rapport à Re_{τ_2} ;
- $mesh_z1_paroi = 20l_\tau$ par rapport à Re_{τ_3} ;
- $mesh_z2_paroi = 20l_\tau$ par rapport à Re_{τ_3} ;
- $mesh_x1_prog_max = 1, 15$;
- $mesh_x2_prog_max = 1, 15$;
- $mesh_x3_prog_max = 1, 15$;
- $mesh_y1_prog_max = 1, 15$;
- $mesh_y2_prog_max = 1, 15$;
- $mesh_z1_prog_max = 1, 15$;
- $mesh_z2_prog_max = 1, 15$;

8.3.3 Différences avec le cas du canal

Certaines options numériques du Té diffèrent du cas du canal. C'est le cas des entrées. Le canal plan est périodique, et ne nécessite donc pas de condition d'entrée particulière. Pour le cas du Té, les entrées E_1 et E_2 sont turbulentes. Elles sont générées par la lecture de sauvegardes issues d'une conduite périodique à Re_τ identique. L'interpolation se fait en temps et en espace. Cependant il est possible de générer des entrées turbulentes à Re_τ donné pour des conduites de toute taille à partir d'une seule conduite. En effet, le seul paramètre est Re_τ , le reste n'est qu'adimensionnement. Cependant, en cas de section de taille différente, certaines précautions sont à prendre, notamment appliquer les bons ratios sur les bonnes variables.

Considérons une entrée dont la hauteur est différente d'un rapport α de la hauteur de la conduite enregistrée. En notant avec des ' les grandeurs relatives à l'entrée et de façon standard

les grandeurs relatives à la sauvegarde, nous obtenons :

$$c' = \alpha c \quad (8.7)$$

Un rapport $1/\alpha$ est à appliquer sur les vitesses afin de conserver le même nombre de Reynolds.

$$u' = \frac{2 Re \nu}{c'} \quad (8.8)$$

$$= \frac{2 u c \nu'}{2 \nu \alpha c} \quad (8.9)$$

$$= \frac{u}{\alpha} \quad (8.10)$$

Enfin, et c'est le moins évident, afin de conserver les mêmes temps caractéristiques, il faut appliquer un coefficient $1/\alpha^2$ sur les temps.

$$t'_\tau = \frac{2u'_\tau}{c'} \quad (8.11)$$

$$= \frac{2u_\tau}{\alpha c \alpha} \quad (8.12)$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} t_\tau \quad (8.13)$$

Ainsi, le champ de vitesse \mathbf{u}'_1 imposé en condition limite sur l'entrée 1 doit vérifier la relation :

$$\mathbf{u}'_1(x', y', t') = \frac{1}{\alpha} \mathbf{u}(\alpha x, \alpha y, \frac{t}{\alpha^2}) \quad (8.14)$$

C'est pourquoi, désireux d'appliquer des entrées turbulentes possédant une valeur de Re_τ égale soit à 180 soit à 395, une seule conduite périodique pour chacun de ces cas a été simulée. Les coupes au centre du domaine ont été sauvegardées à chaque itération, afin d'obtenir une base de données pour un grand nombre de tours de canal.

Pour ce qui est de la température, une température froide de 0° est appliquée à l'entrée 1 et une température chaude de 1° est appliquée à l'entrée 2. L'écart entre les deux températures, que ce soit en norme ou en signe, n'a aucune importance étant donné que la température est considérée comme un scalaire passif.

Une condition de sortie inlet-outlet est appliquée à la fin de la zone 3. Cette condition permet au fluide de ré-entrer. Les détails de cette condition sont développés dans [Ansanay-Alex et al. \(2008\)](#). L'idée est de diviser le flux de vitesse par deux lorsqu'il est entrant. Cette opération permet la conservation de l'énergie pour un schéma centré. Nous avons également utilisé cette opération pour le schéma QUICK. La température de ré-entrée sera une moyenne des deux températures chaude et froide pondérée par les débits respectifs :

$$T_{\text{ré-entrée}} = \frac{c_1^2 \overline{u_1} T_1 - c_2^2 \overline{v_2} T_2}{c_1^2 \overline{u_1} + c_2^2 \overline{v_2}} \quad (8.15)$$

Conformément aux conclusions de la section 8.1, le schéma convectif utilisé pour l'advection de vitesse est un schéma QUICK implicite.

Nous avons démontré sur le cas du canal que l'utilisation d'un maillage plutôt grossier associé à une loi de paroi ne détériorait pas significativement les résultats. Nous appliquons donc cette méthode dans le cadre du Té de mélange. Les maillages définis au paragraphe 8.3.2 sont plutôt grossiers. La loi de Werner et Wengle sera systématiquement utilisée.

L'équation d'énergie est résolue à l'intérieur des parois de la conduite principale selon la méthode détaillée au paragraphe 5.3.3. Nous effectuons cette résolution sur la totalité de la longueur de la conduite principale, car en l'absence de convection, la diffusion peut avoir de l'influence sur des échelles relativement grandes. Cependant, nous ne résolvons pas cette équation dans les parois de la zone 2, car notre méthode ne permet pas de modéliser les transferts d'énergie d'une paroi à l'autre. Nous considérons que la conduite secondaire ne présente pas un intérêt majeur, nous économisons donc en coût de calcul sur ce point. Les paramètres retenus pour la paroi sont $K = 1$, $G = 1$, $d^+ = 100$ sur une base de $Re_\tau = 395$, soit $d \simeq 0,127D$.

Tous les autres paramètres numériques sont identiques à ceux utilisés dans l'étude du canal plan.

8.3.4 Post-traitement

Les calculs sont lancés sur 100 000 itérations, soit $39,5t_\tau$. Le post-traitement se déroule en plusieurs étapes.

Les 5 000 premières itérations ($1,975t_\tau$) servent à obtenir un profil établi. Aucune opération supplémentaire n'est réalisée. Ensuite, à partir de l'itération 5 000, les moments statistiques temporels sont calculés jusqu'à la fin pour le champ thermique ainsi que pour chaque composante de la vitesse. Ces opérations ne sont pas réalisées en espace, car il n'y a plus de direction d'homogénéité. La sauvegarde finale permet alors de réaliser les coupes voulues a posteriori.

À l'itération 50 000 ($t = 19,75t_\tau$), l'écart type de la température d'interface est analysé. Un écart type élevé n'implique pas nécessairement la présence de fortes oscillations, tout dépend de la répartition temporelle des différentes valeurs à l'intérieur de la série statistique. Deux séries identiques arrangées différemment présenteront des modes différents après transformations dans le domaine spectrale pour un écart type identique. Cependant, dans la pratique, l'écart type est un bon estimateur du niveau des fluctuations. C'est pourquoi, aux endroits où les fluctuations sont maximales, la température instantanée à l'interface sera enregistrée jusqu'à la fin de la simulation. À partir de ces données, nous effectuons une transformation de Fourier permettant d'observer les différentes fréquences présentes dans le signal de température. C'est avec ce type d'informations qu'un mécanicien expert en matériaux peut alors évaluer le risque réel de détérioration de la conduite due à un phénomène de fatigue thermique.

Chapitre 9

Résultats

Ce chapitre présente les résultats obtenus sur le Té de mélange dans l'optique de l'évaluation des fluctuations de température près des parois.

9.1 Présentations des cas étudiés

Pour rappel, dans ce chapitre nous exprimons les distances en fonction de D , diamètre de la conduite principale. Les paramètres dont nous voulons connaître l'influence et que nous faisons varier dans cette étude sont la géométrie et le Re_{τ_i} de chaque entrée.

Nous étudions deux types de géométrie, différant par le diamètre de l'entrée secondaire. Les longueurs des trois branches sont définies par les résultats obtenus à la section 8.2 et restent constantes dans les deux géométries. Par conséquent, la longueur totale du Té, elle, varie. Pour la première géométrie que nous noterons T1, le diamètre de l'entrée secondaire est pris égal à celui de l'entrée principale, ce qui donne $c_1 = c_2 = D$. Pour la seconde géométrie que nous noterons T2, le diamètre de l'entrée secondaire sera égal à la moitié de celui de l'entrée principale, soit $c_2 = c_1/2$. Les caractéristiques (en fonction de D) nécessaires à la définition complète de ces deux géométries sont rappelées au tableau 9.1.

	Géométrie	
	T1	T2
c_1	1	1
c_2	1	0,5
$raccord_x$	1,5	1,5
L	4,5	4
H	1,5	1,5

TABLE 9.1 – Définition des géométries. Longueurs adimensionnées par le diamètre de la conduite principale.

Cas	Géométrie	Re_{τ_1}	Re_{τ_2}	Nombre de mailles
T1_bh	T1	180	395	318 960
T1_hh	T1	395	395	524 960
T1_hb	T1	395	180	123 408
T2_bh	T2	180	395	361 140
T2_hh	T2	395	395	687 350
T2_hb	T2	395	180	221 910

TABLE 9.2 – Nomenclature des configurations étudiées.

Nous utilisons deux valeurs de Re_{τ} pour les entrées turbulentes, une valeur basse de 180 et une valeur haute de 395. Pour chaque géométrie, nous étudions les cas suivants :

- Re_{τ_1} bas et Re_{τ_2} haut, noté bh,
- Re_{τ_1} haut et Re_{τ_2} haut, noté hh,
- Re_{τ_1} haut et Re_{τ_2} bas, noté hb.

Ces configurations permettent d'obtenir pour chaque géométrie, une situation où Re_{τ_1} et Re_{τ_2} sont identiques, une situation où Re_{τ_1} de l'entrée principale est dominant et une situation où Re_{τ_2} de l'entrée secondaire est dominant. Le maillage est adapté à chaque configuration selon les critères définis au paragraphe 8.3.2, afin d'obtenir un maillage le plus léger possible. La nomenclature des cas étudiés est donnée dans le tableau 9.2.

Nous pouvons déjà remarquer que l'utilisation d'un maillage structuré rend la résolution de la conduite secondaire plus coûteuse que celle de la conduite principale. Réduire la section de la conduite secondaire tout en conservant la même valeur de Re_{τ_2} augmente également le nombre de mailles.

Les phénomènes mis en jeu dépendant de la géométrie, nous allons maintenant présenter les résultats obtenus à partir de la géométrie T1, avant d'étudier ceux de la géométrie T2 à la section suivante.

9.2 Té à deux sections indentiques

9.2.1 Étude de l'écart type de température

Dans cette géométrie, la section de l'entrée principale est la même que celle de l'entrée secondaire. La figure 9.1 montre que les lignes de courant s'entrelacent peu. Aucun des deux fluides ne va pouvoir facilement fendre le second pour s'y frayer un chemin. Le fluide chaud ne peut que pousser le fluide froid vers le bas de la conduite principale pour pouvoir s'écouler dans la partie haute. C'est ce qui est observé sur la figure 9.2.

Du fait du changement de direction de l'écoulement moyen, le fluide chaud venant de la conduite secondaire développe un surplus de tourbillons dans la zone 3 du Té par rapport au fluide froid. Ce résultat est visible sur la figure 9.3 représentant la vorticité ω . La vorticité est

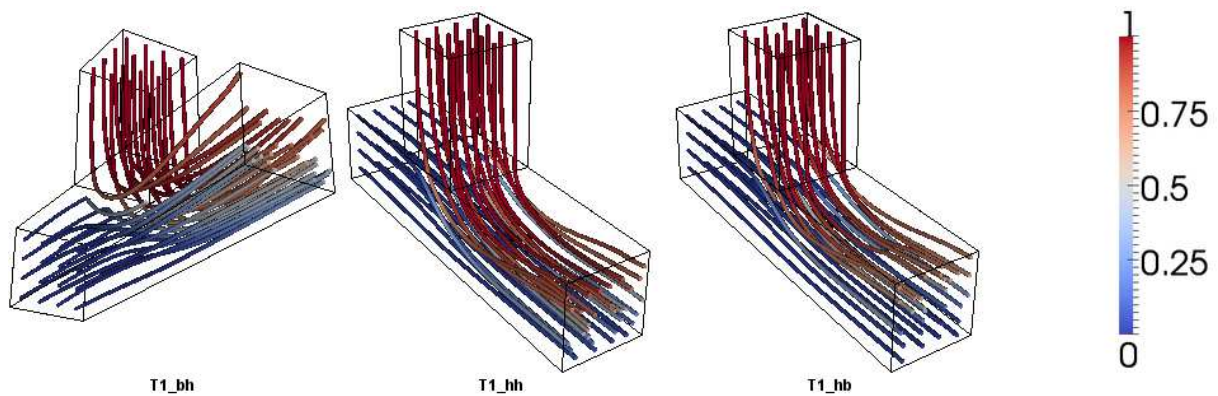


FIGURE 9.1 – Lignes de courant moyen au départ des deux entrées colorées par la température moyenne dans les trois configurations de la géométrie T1

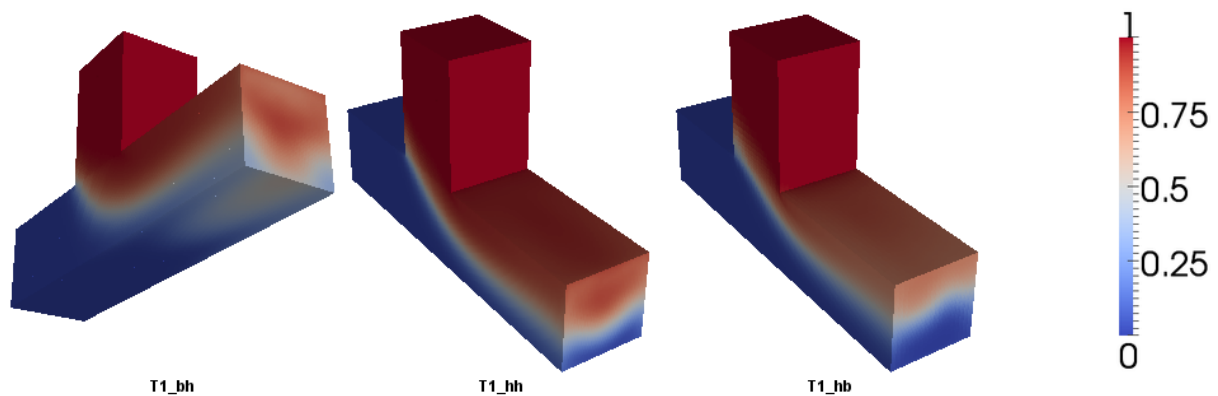


FIGURE 9.2 – Température moyenne dans les trois configurations de la géométrie T1

définie comme étant la norme du rotationnel de la vitesse, soit :

$$\omega = \|\nabla \wedge \mathbf{u}\| \quad (9.1)$$

$$= \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (9.2)$$

Elle est divisée par u_τ/D pour obtenir la vorticité adimensionnée ω^+ . Le haut de la zone 3 est la principale zone tourbillonnaire. Quelque soit le cas, pour cette géométrie les fluides se mélangent assez mal.

Dans de telles conditions, il n'y a que très peu de structures tourbillonnaires provoquant des fluctuations thermiques sur les parois. La principale zone de fluctuations est la frontière oscillante séparant les deux fluides, frontière visible sur la figure 9.4. Dans cette géométrie, c'est donc les parois latérales qui présentent le plus gros risque de détérioration par des phénomènes de fatigue thermique. Il semble intuitif de penser que le rapport des débits influe sur la position de la limite séparant les deux fluides et donc sur la hauteur du point de fluctuations maximales. Ce résultat est confirmé par les figures 9.2 à 9.5.

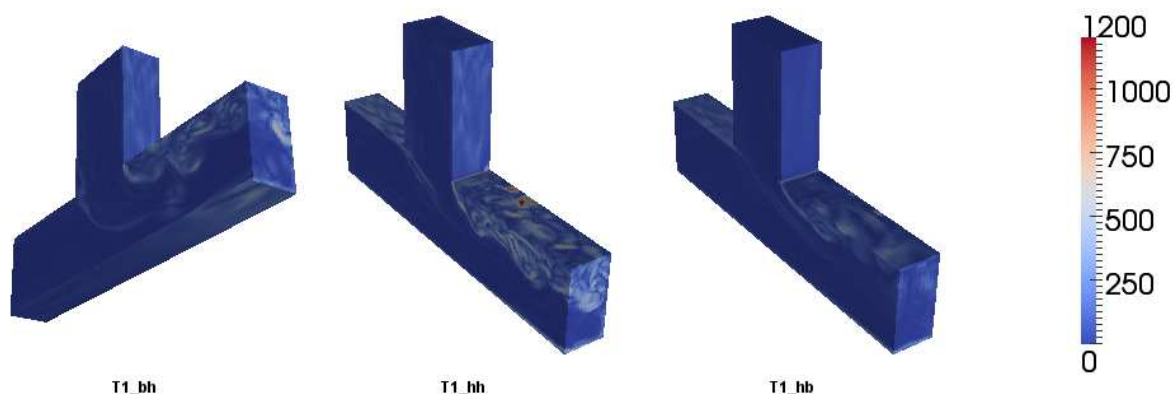


FIGURE 9.3 – Vorticité instantanée adimensionnée sur un demi-Té dans les trois configurations de la géométrie T1

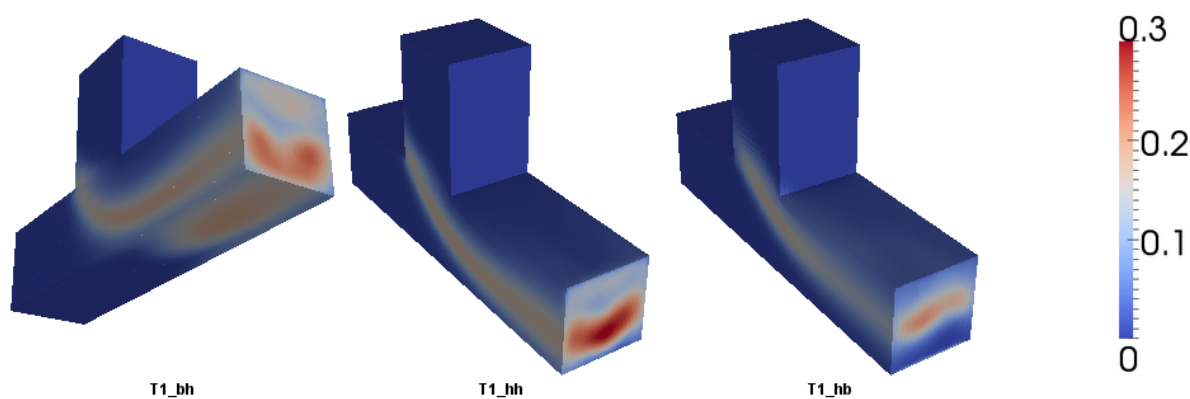


FIGURE 9.4 – Écart type de la température dans les trois configurations de la géométrie T1

Des oscillations apparaissent tout de même sur la paroi basse de la zone 3 lorsque Re_{τ_2} domine Re_{τ_1} (cas T1_bh). Nous sommes alors dans le cas d'un jet impactant. Pour ce cas, la température instantanée sur le point de fluctuations maximales de cette face est enregistrée au cours de la suite du calcul. Ce point est noté PT1_bh_2 dans le tableau 9.3.

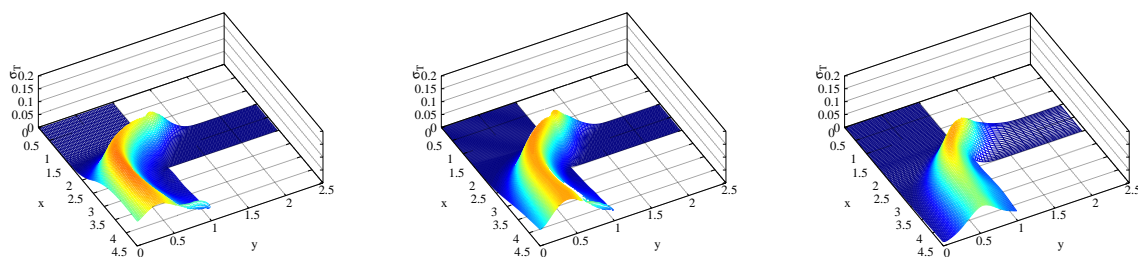


FIGURE 9.5 – Écart type de la température sur la face d'équation $z = D$ pour les trois configurations de la géométrie T1

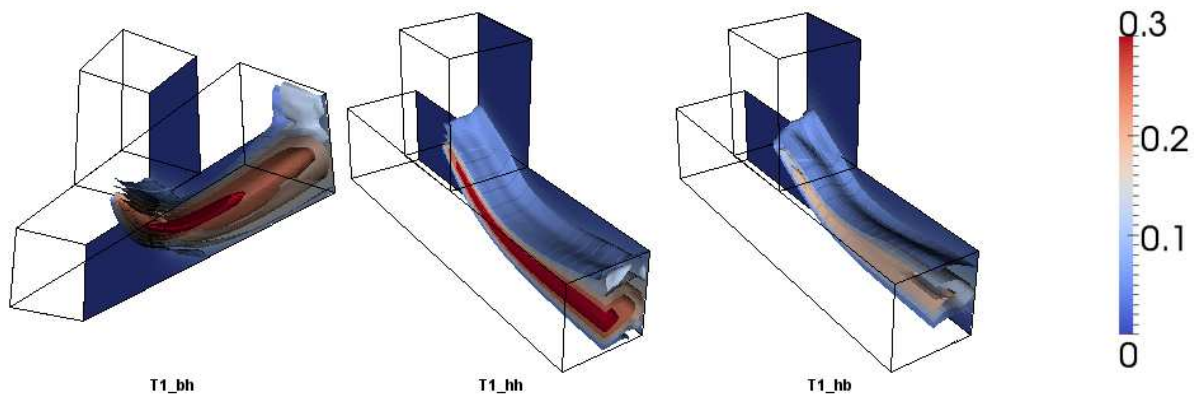


FIGURE 9.6 – Surfaces d’isovaleur de l’écart type de température pour des valeurs allant de 0,05 à 0,3 par pas de 0,05 dans les trois configurations de la géométrie T1

Nous allons nous intéresser aux fluctuations sur les murs latéraux, et pour des raisons de symétrie nous restreindre à la paroi d’équation $z = D$. L’extraction des statistiques sur cette paroi pour les trois cas considérés nous permet de tracer l’écart type de la température en fonction des coordonnées dans ce plan (figure 9.5). Sur cette figure, nous observons bien la bande de fluctuations correspondant à la séparation du fluide froid et du fluide chaud. Les isovaleurs de l’écart type de température sont représentées sur la figure 9.6, pour un demi-Té. Les cinq surfaces tracées correspondent aux valeurs allant de 0,05 à 0,3 par pas de 0,05. Les écarts types de température sont aussi tracés sur le plan d’équation $x = 0$. Cette figure montre que bien qu’à l’intérieur du Té les fluctuations de température sont plus élevées que sur les parois.

Une autre représentation consiste à réaliser plusieurs coupes sur ce plan. La figure 9.5 illustre cette visualisation pour le cas T1_HH. Nous constatons que l’abscisse du pic de fluctuations augmente avec l’ordonnée de la coupe sur le plan $z/D = 1$. La ligne de crête de cette bande de fluctuations maximales est tracée sur la figure 9.8. Nous vérifions un résultat que nous avons pressenti plus haut : plus $Re_{\tau 1}$ est dominant par rapport à $Re_{\tau 2}$, plus la ligne de fluctuations maximales est décalée vers le bas du Té.

Les points retenus pour l’analyse spectrale dans chacun des cas de cette première géométrie de Té de mélange sont reportés dans le tableau 9.3. Nous remarquons que l’écart type de température est plus important pour le point de la face de dessous du Té que pour les autres. L’impact du jet semble provoquer plus de fluctuations que l’oscillation de la séparation entre fluide chaud et fluide froid. Les points qui se trouvent sur la face portée par le plan d’équation $z = D$ sont également placés sur la face du Té de la figure 9.8.

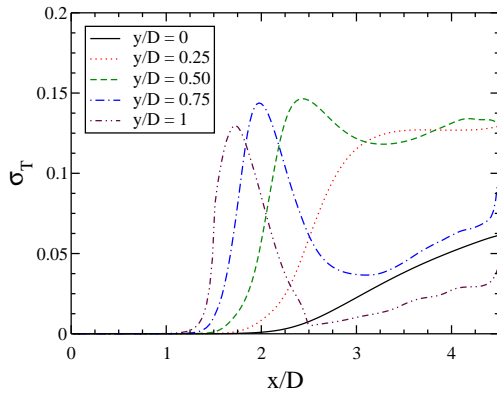


FIGURE 9.7 – Fluctuations thermiques sur différentes lignes du plan d'équation $z/D = 1$

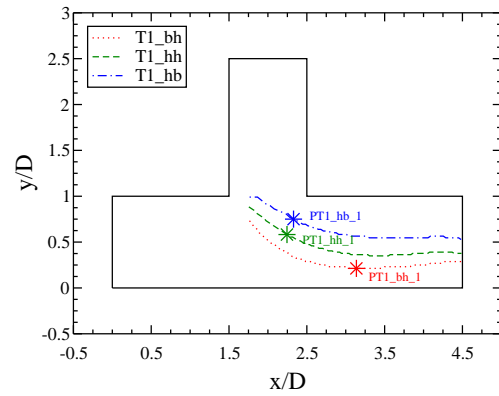


FIGURE 9.8 – Lignes de fluctuations maximales sur la paroi portée par le plan d'équation $z/D = 1$ pour $1,75 \leq x/D \leq 4,5$ et pour les trois configurations de la géométrie T1

Cas	Points			σ_T
	x/D	y/D	z/D	
PT1_bh	1,956	0,213	1	0,152
PT1_bh_2	3,531	0	0,488	0,160
PT1_hh	2,224	0,582	1	0,147
PT1_hb	2,329	0,750	1	0,143

TABLE 9.3 – Coordonnées des points de fluctuations thermiques maximales pour les trois configurations de la géométrie T1

9.2.2 Analyse spectrale

9.2.2.1 Méthodologie

Nous allons décomposer les signaux instantanés de température en fréquences pour les analyser. La procédure employée est décrite en annexe D. Elle consiste en une Transformation de Fourier Discrète (TFD), à laquelle nous supprimons la composante continue. Nous l'adimensionnons ensuite de façon à obtenir une Densité Spectrale de Puissance (DSP) dont l'intégrale discrète est égale à la variance du signal initial. Une opération de lissage à l'aide d'une moyenne mobile centrée sur 15 valeurs est ensuite effectuée.

Les fréquences mises en jeu dans les configurations étudiées dépendent des grandeurs physiques choisies. Elles nécessitent également un adimensionnement. Nous exprimerons donc les temps et les fréquences utilisés en fonction de t_τ , tel qu'il est défini au paragraphe 8.3.1 pour la totalité des configurations. Afin de faciliter les commentaires des courbes de DSP, nous utiliserons comme fréquence adimensionnée f^\bullet définie par :

$$f^\bullet = \frac{kt_\tau}{N\delta t_{ech}} \quad (9.3)$$

Suivant cet adimensionnement, la température instantanée est sauvegardée sur 50 001 points, sur l'intervalle de temps défini par $19,75t_\tau \leq t \leq 39,5t_\tau$.

9.2.2.2 Vérification des signaux de température

La première vérification concerne la fréquence d'échantillonnage. Le théorème de Shannon stipule qu'il faut avoir une fréquence d'échantillonnage au moins égale au double de la plus forte fréquence du phénomène observé. Le tracé sur 1000 points arbitrairement choisis montre que le signal mesuré est lisse et suffisamment bien résolu (cf figure 9.9). La période considérée pour cette vérification est l'intervalle de temps défini par $29.625t_\tau \leq t \leq 30.02t_\tau$, ce qui est équivalent à $29.625 \leq t^* \leq 30.02$. Nous constatons que le nombre de points est largement suffisant compte tenu du peu d'oscillations visibles sur cette fenêtre temporelle, et qu'il pourrait même être drastiquement réduit.

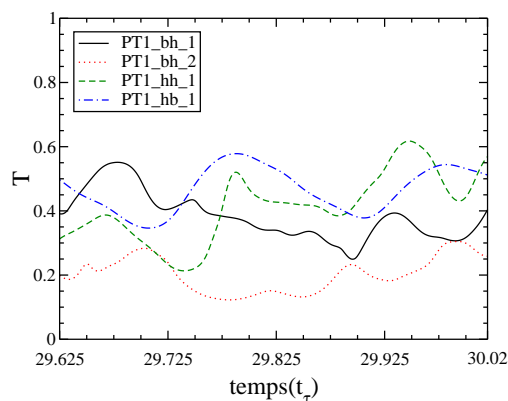


FIGURE 9.9 – Température instantanée sur 1000 instants de sauvegarde pour $29.625t_\tau \leq t \leq 30.02t_\tau$ et pour les 4 points considérés

La seconde vérification concerne la durée d'échantillonnage. Si la durée est assez longue, les moments statistiques et les spectres doivent être similaires sur les deux moitiés de la série enregistrée. Les deux premiers moments statistiques sur ces deux moitiés de l'échantillon sont calculés et transcrits dans le tableau 9.4. « ' » désigne les moments obtenus sur la première moitié de l'échantillon, et « '' » ceux obtenus sur la seconde moitié. Nous constatons que les écarts peuvent être relativement importants pour certains points. Il faudra donc considérer les résultats obtenus dans les faibles gammes de fréquences avec prudence. Il est possible que la durée d'enregistrement du signal ne soit pas suffisante pour une bonne précision de cette plage. Notons également que les écarts types de ce tableau ne peuvent pas être facilement comparés à ceux du tableau 9.3, car ces derniers représentent des écarts types au niveau de la première maille du fluide.

9.2.2.3 Étude des spectres

Nous venons de constater que le signal est suréchantillonné mais peut être pas assez long. Nous pouvons donc remarquer que nous captions les plus hautes fréquences temporelles du

Cas	\bar{T}'	\bar{T}''	Écart relatif	σ'_T	σ''_T	Écart relatif
PT1_bh	0,4605	0,5127	11,3%	0,1310	0,1669	27,5 %
PT1_bh_2	0,2667	0,2842	6,56%	0,1203	0,1256	4,36 %
PT1_hh	0,4542	0,4768	4,98%	0,1341	0,1318	1,78 %
PT1_hb	0,5169	0,4845	6,69%	0,0721	0,0884	22,7 %

TABLE 9.4 – Écarts relatifs sur les 2 premiers moments statistiques entre la première et la seconde moitié de l'échantillon pour l'ensemble des points de la géométrie T2

signal de température aux points de mesure, mais que le doute demeure sur les plus faibles. La DSP en ces points est représentée sur la figure 9.10. Nous pouvons découper chacune des courbes présentées en quatre bandes de fréquences : deux paliers distincts, une décroissance rapide et enfin une décroissance plus lente. Il semblerait que la principale différence entre les quatre spectres tracés réside dans les gammes de fréquences qui séparent ces bandes. Cette différence est particulièrement visible pour la séparation entre la bande 3 et la bande 4. La fréquence de rupture estimée varie de $30f^\bullet$ pour le point PT1_hb_1 à $90f^\bullet$ pour le point T1_bh_2.

Une autre différence concerne les plateaux. Le premier plateau semble assez plat, alors que le second présente plusieurs pics locaux d'énergie sur certaines gammes de fréquences. Ce phénomène est moins visible sur le spectre associé au point PT1_bh_2, car la transition entre les deux plateaux est relativement large, ce qui réduit d'autant la largeur de bande du deuxième plateau.

Compte tenu de la double échelle logarithmique utilisée, nous pouvons remarquer qu'une large portion de l'énergie est contenue dans les faibles fréquences. Cette propriété est illustrée dans le tableau 9.5. Pour chacun des quatre points, les fréquences de séparation de 95% et 99% de l'énergie sont calculées. Ce tableau rapporte aussi le nombre d'onde équivalent, ainsi que le pourcentage de points d'enregistrement que cela représente par rapport à l'étendue de l'échantillon. À noter que pour un échantillon de taille N , compte tenu des adimensionnements retenus lors de la définition de la DSP, les 100% de puissance sont atteints pour $k = N/2$. De ce tableau, nous pouvons tirer deux conclusions majeures. Tout d'abord, nous confirmons

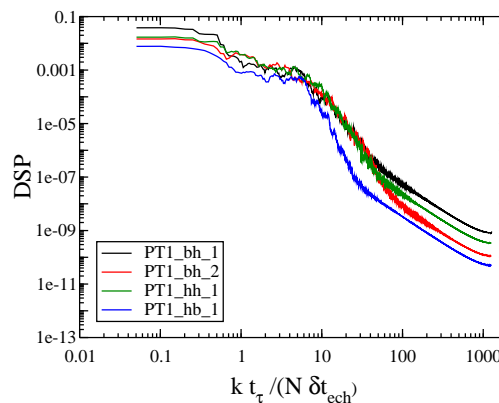


FIGURE 9.10 – Densité Spectrale de Puissance pour les quatre points considérés

Points	95%			99%		
	k	f^\bullet	%	k	f^\bullet	%
PT1_bh_1	124	6,28	0,50%	255	12,9	1,02%
PT1_bh_2	165	8,35	0,66%	297	15,0	1,19%
PT1_hh_1	173	8,76	0,69%	278	14,1	1,11%
PT1_hb_1	129	6,53	0,52%	200	10,1	0,80%

TABLE 9.5 – Limite des 95% et 99% de puissance dans le signal de température pour les 4 points considérés

ce que nous avons observé sur le signal temporel de la température, c'est à dire que le signal est suréchantillonné. Ensuite, nous observons également que la quasi totalité de l'énergie est contenue dans les fréquences inférieures à $15f^\bullet$.

9.3 Té à petite section secondaire

9.3.1 Étude de l'écart type de température

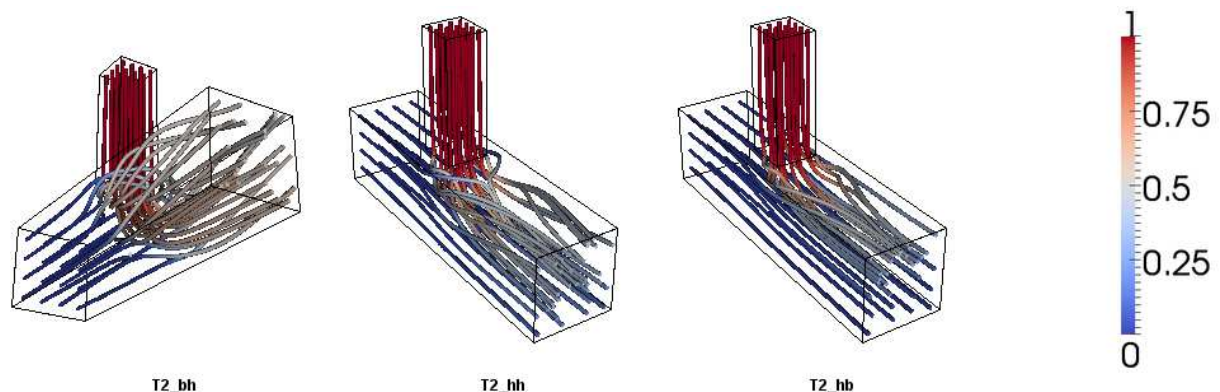


FIGURE 9.11 – Lignes de courant moyen au départ des deux entrées colorées par la température moyenne dans les trois configurations de la géométrie T2

Dans cette géométrie, la section de l'entrée secondaire a un diamètre égal à la moitié de celui de l'entrée principale. La figure 9.11 représentant les lignes de courant moyen nous montre que dans cette géométrie, le fluide froid et le fluide chaud se mélangent bien plus que dans la géométrie T1. Les lignes de courant moyen se croisent d'autant plus que le débit de l'entrée secondaire est dominant par rapport à celui de l'entrée principale. Le niveau de température que l'on pourrait qualifier de tiède le long de ces lignes de courant est la preuve d'un bon mélange au sein de la zone 3. Le niveau de vorticité repr esent e sur la figure 9.12 est aussi plus important que dans la géométrie T1.

Le rapport des vitesses débitantes et des sections combinées amène à évaluer un moment comme défini par [Igarashi *et al.* \(2003\)](#). Ce moment conduit à une classification des jets en trois catégories, comme expliqué au paragraphe 7.1.4.2. Les trois cas T2_bh, T2_hh, T2_hb, étudiés dans cette géométrie correspondent respectivement à un jet impactant, un jet déviant et un jet mural. Pour les cas T2_hh et T2_hb, ce résultat est visible sur la figure 9.13. Ceci l'est un peu moins pour le cas cas T2_bh. Dans ce dernier cas, ce sont plutôt les fluctuations sur la paroi opposées, visibles sur la figure 9.14, qui indiquent qu'il s'agit bien d'un jet impactant.

Dans cette géométrie, le fluide de l'entrée secondaire ne vient plus recouvrir le fluide de l'entrée principale comme c'était le cas pour la géométrie T1. Il pénètre au centre de la conduite. Il n'y a donc plus de ligne de séparation entre le fluide froid et le fluide chaud. Ce sont les recirculations induites par la zone de mélange qui vont provoquer des fluctuations sur les parois latérales, et sur la paroi supérieure ou inférieure selon les cas. La figure 9.15 montre l'écart type de la température sur la face portée par le plan d'équation $y = D$ pour les trois cas de la géométrie T2. La branche secondaire est représentée afin de faciliter la visualisation, bien qu'elle n'appartienne pas au plan d'équation $z = D$. Sur la figure 9.16, la face choisie est celle

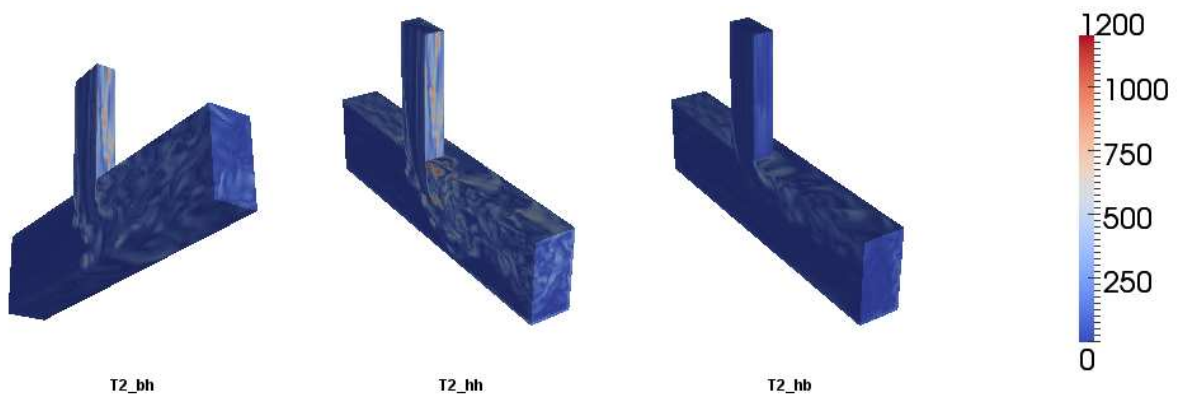


FIGURE 9.12 – Vorticité instantanée adimensionnée sur un demi-Té dans les trois configurations de la géométrie T2

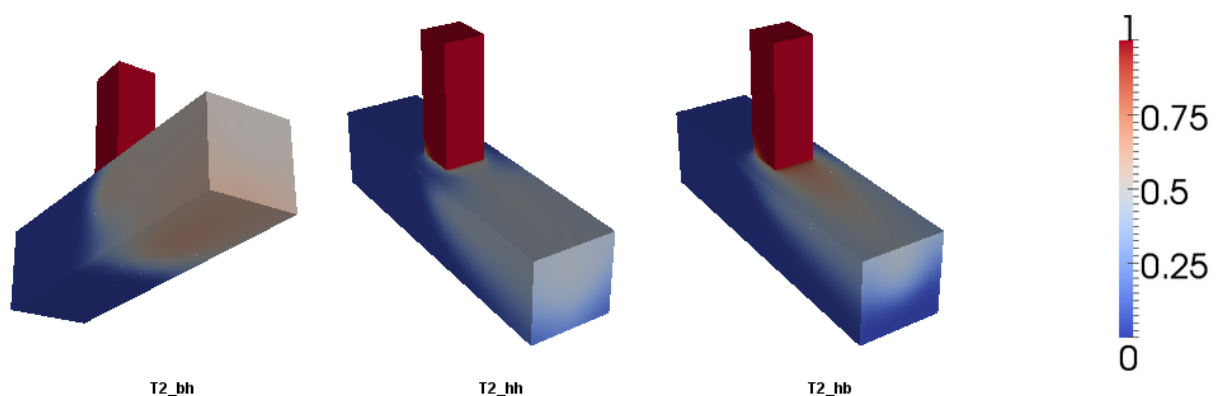


FIGURE 9.13 – Température moyenne dans les trois configurations de la géométrie T2

du dessous pour le cas T2_bh et la face du dessus pour les deux autres cas. Pour ces derniers, la zone de raccord entre les deux branches n'est pas représentée sur la figure 9.16 car elle ne correspond pas à une paroi, mais à l'intérieur du fluide, ce qui n'entraîne aucun risque de fatigue thermique.

La zone de fluctuation sur la face latérale ne présente plus une forme de ruban, mais plutôt une forme de virgule. Plus Re_{τ_1} est dominant par rapport à Re_{τ_2} (ce qui correspond à des moments élevés suivant la définition de [Igarashi et al. \(2003\)](#)), plus la virgule est allongée et présente des valeurs faibles. Au contraire, pour les Re_{τ_2} dominant, c'est à dire pour des moments faibles, la virgule est verticale et présente des valeurs élevées.

Dans le cas du jet impactant, la face inférieure du Té présente une zone de forte fluctuation relativement large, au niveau de l'impact du jet. Le point retenu pour l'étude spectrale est le centre de cette zone, correspondant au sommet du dôme de la figure 9.16. Les fluctuations sur la face du dessus ne sont pas étudiées ici, car elles ont une amplitude plus faible que sur la zone d'impact du jet. Elles n'entraînent pas de risque maximum.

Pour les deux autres cas, c'est la face supérieure de la zone 3 qui présente les plus gros écarts types de température. La situation est ici plus complexe. Nous commençons par nous affranchir de la moitié de la face pour les raisons de symétrie. Sur la demie face restante, le cas T2_hh présente trois pics locaux de fluctuations, alors que le cas T2_hb n'en présente que deux. Dans

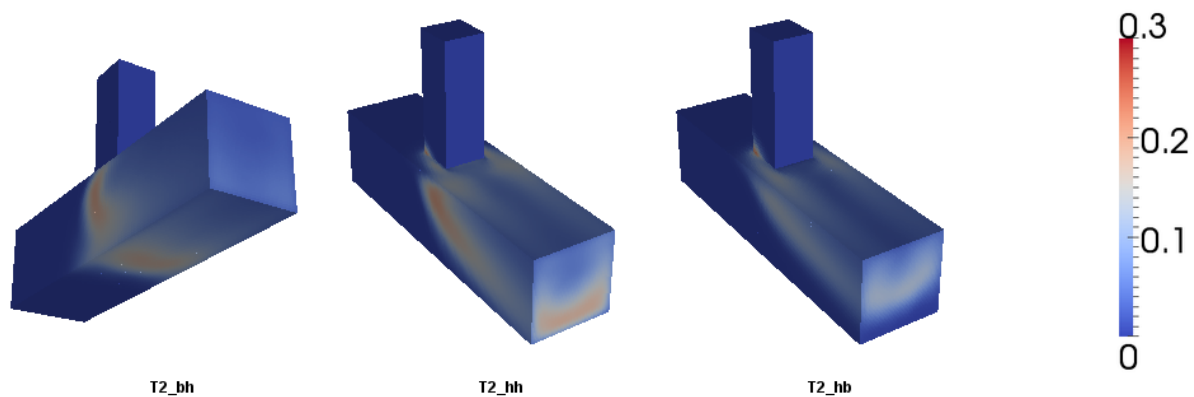


FIGURE 9.14 – Écart type de la température dans les trois configurations de la géométrie T2

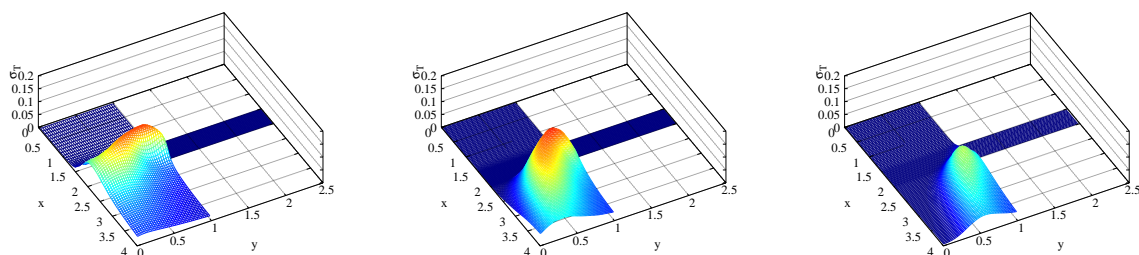


FIGURE 9.15 – Écart type de la température sur la face d'équation $z = D$ pour les trois configurations de la géométrie T2

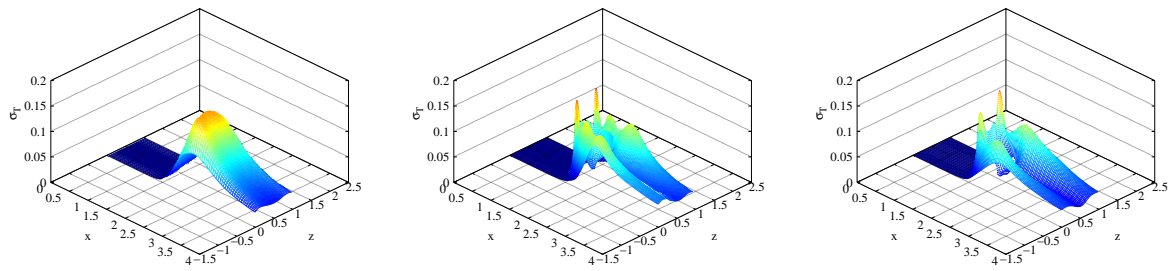


FIGURE 9.16 – Écart type de la température sur la face portée par le plan d'équation $y = 0$ pour le cas T2_bh, et sur la face portée par le plan d'équation $y = D$ pour les deux autres cas de la géométrie T2

Cas	Points			σ_T
	x/D	y/D	z/D	
PT2_bh_1	1,956	0,716	1	0,161
PT2_bh_2	2,178	0	0,544	0,144
PT2_hh_1	2,172	0,763	1	0,166
PT2_hh_2	1,569	1	0,756	0,160
PT2_hh_3	1,894	1	0,816	0,118
PT2_hh_4	2,356	1	0,903	0,113
PT2_hb_1	2,347	0,819	1	0,107
PT2_hb_2	1,569	1	0,758	0,156
PT2_hb_3	2,199	1	0,862	0,107

TABLE 9.6 – Coordonnées des points de fluctuations thermiques maximales pour les trois configurations de la géométrie T2

les deux cas, un pic est présent au niveau de la jonction entre les deux branches. Dans la pratique, cette zone pourrait être une zone de soudure. Nous observons à cet endroit un pic de fluctuations et nous y relèverons la température pour une étude spectrale. Cependant, il faudra interpréter les résultats avec beaucoup de précautions. En effet, la résolution des équations thermiques que nous avons adoptée ne permet pas de prendre en compte les échanges thermiques entre la paroi supérieure de la conduite principale et les parois de la conduite secondaire. Elle ne permet donc pas non plus de modéliser l'éventuel excès de matière que peut provoquer une zone de soudure. Ce sont là les limites de notre méthode. Pour chacun de ces cas, la totalité des pics locaux est étudiée, ce qui donne trois points pour la face supérieure du cas T2_hh et deux points pour le cas T2_hb, auxquels il faut ajouter le point de la face latérale. Les coordonnées des différents points étudiés pour la géométrie T2 sont reportées dans le tableau 9.6.

Comme pour la géométrie T1, les surfaces des isovaleurs de l'écart type de température (cf. figure 9.6) nous apprennent que le niveau des fluctuations de température est plus élevé au cœur de la conduite que près des parois. Ceci peut avoir des conséquences néfastes si un coude est placé en aval du Té. Les parois de ce coude pourrait subir des niveaux de fluctuations relativement élevés.

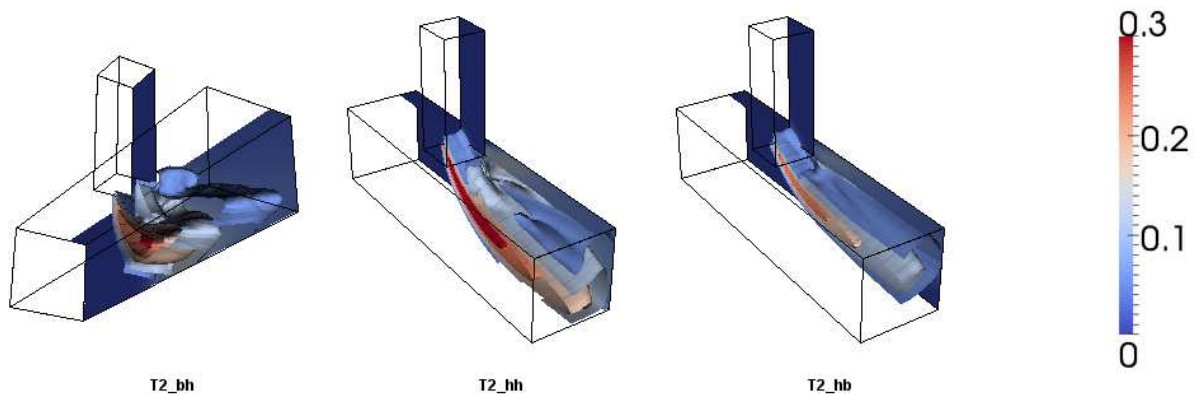


FIGURE 9.17 – Surfaces d’isovaleur de l’écart type de température pour des valeurs allant de 0,05 à 0,3 par pas de 0,05 dans les trois configurations de la géométrie T2

9.3.2 Analyse spectrale

9.3.2.1 Vérification des signaux de température

La méthodologie adoptée ici est la même que pour la géométrie T1. Les mêmes adimensionnements sont retenus pour les tracés de DSP. Comme précédemment, nous vérifions sur l’intervalle de temps défini par $29.625t_\tau \leq t \leq 30.02t_\tau$ que le signal de température est suffisamment échantillonné. Le tracé de la température visible sur les figures 9.18 et 9.19 nous amène à la même conclusion que pour la géométrie précédente, c’est à dire que le signal est très fortement suréchantillonné.

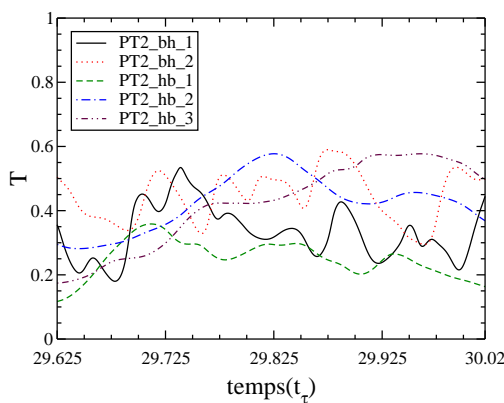


FIGURE 9.18 – Température instantanée sur 1000 instants de sauvegarde pour $29.625t_\tau \leq t \leq 30.02t_\tau$ et pour les 5 points des cas T2_bh et T2_hb

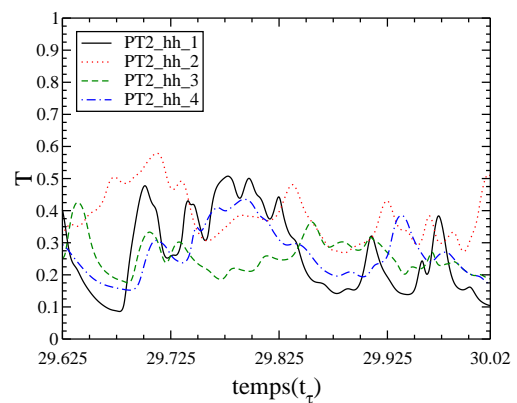


FIGURE 9.19 – Température instantanée sur 1000 instants de sauvegarde pour $29.625t_\tau \leq t \leq 30.02t_\tau$ et pour les 4 points du cas T2_hh

De même, le tableau 9.7 révèle que pour certaines courbes, il se peut que la plage d’enregistrement ne soit pas suffisamment étendue. Les résultats concernant les faibles fréquences sont donc à prendre avec précaution.

Cas	\bar{T}'	\bar{T}''	Écart relatif	σ'_T	σ''_T	Écart relatif
PT2_bh_1	0,3103	0,4107	32,3%	0,1378	0,1182	16,5%
PT2_bh_2	0,4703	0,4846	3,04%	0,1227	0,0975	25,9%
PT2_hh_1	0,2516	0,3420	35,9%	0,1404	0,1387	1,22%
PT2_hh_2	0,4000	0,4119	2,98%	0,1181	0,1072	10,2%
PT2_hh_3	0,2969	0,2489	19,3%	0,1009	0,0865	16,6%
PT2_hh_4	0,2741	0,3117	13,7%	0,0923	0,0988	7,06%
PT2_hb_1	0,1808	0,2552	41,1%	0,0743	0,1037	39,4%
PT2_hb_2	0,3051	0,3710	21,6%	0,0980	0,1018	3,85%
PT2_hb_3	0,3560	0,3944	10,8%	0,1013	0,0906	11,8%

TABLE 9.7 – Écarts relatifs sur les 2 premiers moments statistiques entre les deux moitiés de l'échantillon pour l'ensemble des points de la géométrie T2

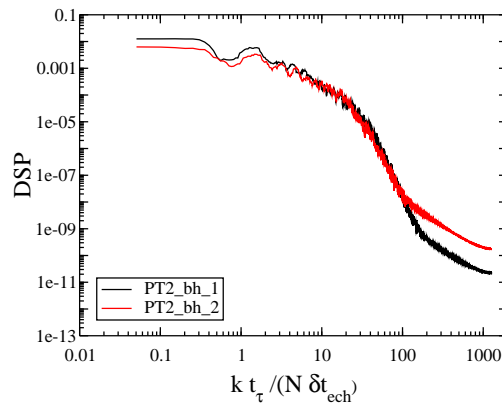


FIGURE 9.20 – Densité Spectrale de Puissance pour les 2 points de la configuration T2_bh

9.3.2.2 Études des spectres

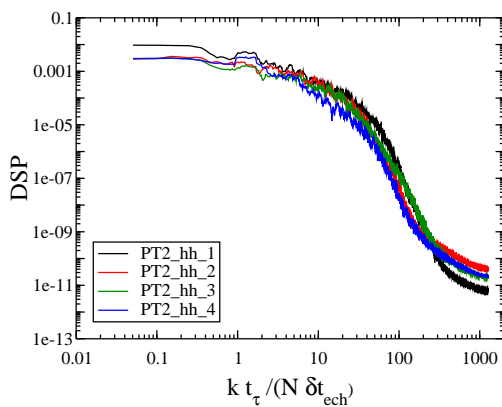


FIGURE 9.21 – DSP pour les 4 points de la configuration T2_hh

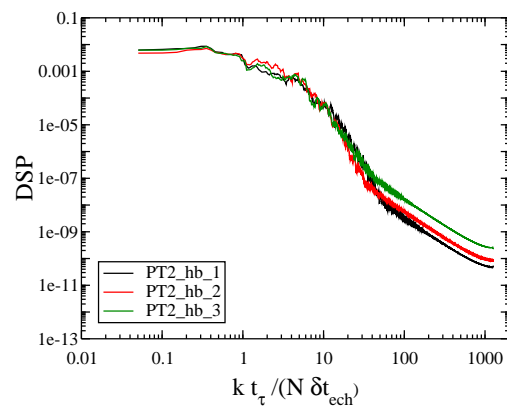


FIGURE 9.22 – DSP pour les 3 points de la configuration T2_hb

Points	95%			99%		
	k	f^\bullet	%	k	f^\bullet	%
PT2_bh_1	287	14,5	1,15%	561	28,4	2,24%
PT2_bh_2	341	17,3	1,36%	544	27,5	2,18%
PT2_hh_1	498	25,2	1,99%	919	46,5	3,68%
PT2_hh_2	446	22,6	1,78%	734	37,2	2,94%
PT2_hh_3	476	24,1	1,90%	816	41,3	3,26%
PT2_hh_4	304	15,4	1,22%	627	31,7	2,51%
PT2_hb_1	133	6,73	0,53%	257	13,0	1,03%
PT2_hb_2	125	6,33	0,50%	213	10,8	0,85%
PT2_hb_3	121	6,13	0,48%	223	11,3	0,89%

TABLE 9.8 – Limite des 95% et 99% de puissance dans le signal de température pour les 4 points considérés

Pour une meilleure visibilité des courbes de DSP qui restent relativement bruitées malgré le lissage par application de la moyenne mobile sur 15 points, les courbes relatives au cas T2_hh sont séparées des courbes relatives aux cas T2_bh et T2_hb.

Comme pour la géométrie précédente, nous pouvons à nouveau séparer les courbes en quatre bandes de fréquences, dont trois sont identiques. La différence porte sur la bande 2. Il est difficile sur les figure 9.20 à 9.22 d'apercevoir un plateau sur cette zone. Ce serait plutôt une décroissance lente en prolongement de la décroissance rapide de la bande 3. Cependant, la cassure entre la bande 3 et la bande 4 reste nettement marquée, et ses coordonnées semblent dépendre plus de la configuration géométrique que du point spatial où le signal de température est enregistré, tout comme l'allure générale du spectre. La fréquence de rupture est estimée à $40f^\bullet$ pour le cas T2_hb, $250f^\bullet$ pour le cas T2_hh et $170f^\bullet$ pour le cas T2_bh.

Le tableau 9.8 rapporte les fréquences de séparation des 95% et 99% de l'énergie des spectres pour l'ensemble des points étudiés. À nouveau, nous constatons que les signaux sont suréchantillonnés et que l'immense majorité de l'énergie est concentrée dans les faibles fréquences, c'est à dire ici les fréquences inférieures à $50f^\bullet$.

9.4 Conclusion de l'étude du Té de mélange

Au cours de cette étude, nous avons déterminé plusieurs paramètres importants pour la simulation d'un Té de mélange par SGE. Tout d'abord nous avons rencontré des problèmes d'oscillations numériques dues à l'utilisation d'un schéma convectif de vitesse centré. Ce problème a été résolu par l'implémentation et l'utilisation d'un schéma QUICK implicite.

Nous avons cherché à définir la longueur optimale des branches à utiliser en entrée et sortie du Té de mélange, afin d'obtenir un compromis satisfaisant entre précision et temps de calcul. Nous sommes arrivés à la conclusion que les branches d'entrées devaient présenter des longueurs égales à une fois et demie le diamètre de l'entrée principale, et qu'une longueur de deux diamètres était nécessaire pour la branche de sortie.

Ces premiers résultats nous ont permis d'étudier deux géométries de Té de mélange, présentant chacune 3 configurations de rapport de débits. Deux types d'oscillations de température ont été observés : les fluctuations de la zone de séparation du fluide froid et du fluide chaud essentiellement pour la première géométrie, et les fluctuations dues aux zones de recirculations. Les points présentant les valeurs maximales de l'écart type de température ont été situés.

Sur ces points, nous avons effectué une analyse spectrale. Bien que la durée d'échantillonnage semble trop courte, nous pouvons conclure que les spectres semblent plus impactés par la configuration du Té que par la zone d'évaluation au sein d'une même configuration. Ces spectres présentent quatre bandes de fréquences : un plateau, un second plateau ou une décroissance lente selon les cas, une bande de décroissance rapide, et à nouveau une bande de décroissance lente. La quasi totalité de l'énergie est contenue dans les fréquences inférieures à $50f^*$.

Pour les cas industriels, la gamme de fréquences dommageables pour les matériaux est située entre 0,1Hz et 20Hz. Nous avons exprimé nos spectres en fonction de f^* , fréquence adimensionnée. Il est possible de décrire plusieurs configurations de Té de mélange dont les paramètres adimensionnés seront identiques aux nôtres. Les résultats seront strictement isomorphes. Cependant, les fréquences dommageables sont dimensionnées. En fonction des paramètres choisis, la gamme 0,1Hz - 20Hz ne correspondra pas à aux mêmes fréquences en terme de f^* .

Conclusion générale

Au cours de cette étude, nous avons plusieurs objectifs corrélés. Dans le cadre du projet européen THINS, nous avons pour mission l'estimation des fluctuations de température dans un canal plan de fluide fortement conducteur par Simulation des Grandes Échelles. Ensuite, afin de pouvoir répondre aux dossiers de sûreté dans le cadre des installations nucléaires de génération IV, nous devons étudier les fluctuations de température dans un Té de mélange d'un fluide à faible nombre de Prandtl toujours à partir de la SGE. Enfin, l'implémentation et la validation des différents modèles numériques nécessaires à notre étude constituait également un objectif à part entière.

Dans le cadre du canal plan, nos résultats théoriques ont permis d'établir le comportement du champ moyen de température dans le mur, en fonction des différents paramètres physiques du fluide et du solide. Nous avons également pu obtenir le champ instantané de la température en fonction de l'espace et du temps au sein du mur si celui-ci est soumis à une excitation thermique forcée.

À partir des simulations, nous avons montré que pour les fluides présentant un faible nombre de Prandtl, l'utilisation d'un maillage grossier associé à une loi de paroi pour la dynamique permettait d'obtenir des résultats de grande qualité pour des coûts de calcul considérablement réduits. Des simulations ont pu être réalisées jusqu'à des valeurs de Re_τ de 1400. Il a ensuite été démontré que la nature de la condition limite thermique utilisée avait énormément d'influence sur les fluctuations du champ de température, et qu'il est important de résoudre l'équation d'énergie au sein du mur.

Nous avons ensuite prouvé que le comportement du champ thermique au sein de la paroi est régi par trois paramètres de plus qu'au sein du fluide, et non deux comme la littérature le laisse parfois supposer. Une étude de ces paramètres a été réalisée dans différentes bases. Enfin, ces travaux sur le canal plan ont servi à la génération d'une entrée turbulente utilisée comme condition limite d'entrée du Té de mélange.

Dans le cadre du Té de mélange, nous avons observé que le schéma centré pour la convection de la vitesse usuellement utilisé dans le logiciel ISIS ne convenait pas à cette géométrie. Ce schéma provoque l'apparition d'oscillations numériques. Pour y remédier, nous avons implémenté et utilisé un schéma QUICK. Nous avons également montré qu'en utilisant une méthode de recyclage pour la génération des entrées turbulentes, prendre des branches d'entrée de longueur 1,5 fois le diamètre de l'entrée principale était un bon compromis entre temps de calcul et qualité des résultats.

Les points de fluctuations maximales ont été localisés par la simulation. L'analyse spectrale de la température en ces points révèle un spectre en quatre zones dont l'essentiel de l'énergie est situé dans les faibles fréquences. L'étude a été réalisée pour des grandeurs caractéristiques adimensionnées. Cependant, les fréquences dommageables pour les parois sont fixes et comprises entre 0,1Hz et 20Hz. En fonction des caractéristiques physiques de l'écoulement, elles correspondent à des valeurs différentes de fréquences adimensionnées. Pour déterminer le risque réel de fatigue thermique à partir de notre étude, il est donc indispensable de redimensionner nos résultats en fonction de l'installation étudiée.

Au cours de cette thèse, de nombreuses améliorations ont été apportées au code de calcul ISIS dans le cadre de la SGE. Un certain nombre de modules ont été ajoutés ou enrichis. Nous rappelons ici les plus importants :

- les modèles de viscosité sous-maille WALE et de Vreman,
- une méthode dynamique d'évaluation des coefficients pour les modèles sous-maille,
- des modules de post-traitement permettant le calcul des moments statistiques jusqu'à l'ordre 4 ainsi que celui des covariances, par plan ou par maille,
- des schémas convectifs d'ordre 3 tels que les schémas QUICK implicite et explicite,
- des modules permettant la génération d'une entrée turbulente par la sauvegarde des coupes dans une conduite périodique,
- une force volumique permettant le contrôle du débit dans le canal,
- la conduction thermique pseudo 3D dans les parois.

Les perspectives de ces travaux sont multiples. Tout d'abord, dans le cadre du canal, il pourrait être intéressant d'atteindre des valeurs de Reynolds plus élevées qui n'ont pas pu être atteintes en raison de la limitation des puissances de calcul disponibles. En raison du faible nombre de Prandtl, l'écoulement n'est pas encore très turbulent en température. Dans le cadre du Té de mélange, outre le fait d'augmenter le nombre de Reynolds, il serait intéressant de simuler des Tés à section circulaire, plus proches de la réalité, et de prendre en compte les effets de flottaison. À défaut d'atteindre des niveaux de Reynolds industriels, l'établissement d'une corrélation liant le niveau des fluctuations aux nombres de Reynolds et de Prandtl pourrait se révéler très intéressant dans l'optique d'apporter des réponses toujours meilleures aux dossiers de sûreté nucléaire.

Une autre perspective serait de faire évoluer le code de calcul ISIS, afin de pouvoir impliquer la totalité des phénomènes. Ceci permettrait de réaliser des simulations avec des pas de temps plus grands, et donc de pouvoir étendre la période de simulation, ce qui permettrait une meilleure estimation des faibles fréquences du spectre de température dans les Tés de mélange.

Dans les installations industrielles, les Tés de mélange peuvent être précédés et suivis de coudes. Certains auteurs ont étudié l'influence de ces coudes sur la localisation des points de fluctuations maximales et le niveau de ces fluctuations. Ils ont montré que leur impact était significatif. Il pourrait être intéressant d'étudier cet impact sur un ou plusieurs Tés à sections carrées, en rajoutant une étape supplémentaire entre la simulation de la conduite périodique et celle du Té. Pour cela il suffirait de simuler la zone du coude en utilisant les données de la conduite comme entrée turbulente, de sauvegarder le champ de vitesse à différentes distances

en aval, et d'utiliser ces données comme entrée turbulente d'un Té de mélange similaire à ceux qui sont présentés dans ce mémoire. L'impact de la présence d'un coude à différentes distances en amont serait alors observable.

Bibliographie

- Adrian, R. et Moin, P., *Stochastic estimation of organized turbulent structure : homogeneous shear flow*, J. Fluid Mech., **190**, pp. 531–559, 1988.
- Akselvoll, K. et Moin, P., *Large-eddy simulation of turbulent confined coannular jets*, J. Fluid Mech., **315**, pp. 387–411, 1996.
- Andersson, U., Westin, J., et Eriksson, J., *Thermal mixing in a T-jonction*, Rap. tech. U06-66, Vattenfall Research and Development AB, 2006.
- Ansanay-Alex, G., Babik, F., Gastaldo, L., Larcher, A., Lapuerta, C., Latché, J. C., et Vola, D., *A finite volume stability result for the convection operator in compressible flows . . . and some finite element applications*, dans *Finite Volumes for Complex Applications V - Problems and Perspectives*, pp. 185–192, Aussois, France, 2008.
- Aulery, F., Toutant, A., Brillant, G., Monod, R., et Bataille, F., *Numerical simulations of sodium mixing in a t-junction*, Applied Thermal Engineering, **37**, pp. 38–43, 2012.
- Baba-Ahmadi, M. H. et Tabor, G., *Inlet conditions for LES using mapping and feedback control*, Comput. Fluids, **38(6)**, pp. 1299–1311, 2009.
- Bardina, J., Ferziger, J. H., et Reynolds, W., *Improved subgrid-scale models for large-eddy simulation*, AIAA Paper, 1980.
- Bataille, F., Rubinstein, R., et Hussaini, M. Y., *Eddy viscosity and diffusivity modeling*, Physics Letters A, **346**, pp. 168–173, 2005.
- Beaubert, F. et Viazzo, S., *Large eddy simulations of plane turbulent impinging jets at moderate Reynolds numbers*, Int. J. Heat Fluid Flow, **44**, pp. 512–519, 2003.
- Bricteux, L., Duponcheel, M., et Winckelmans, G., *A multiscale subgrid model for both free vortex flows and wall-bounded flows*, Phys. Fluids, **21(10)**, p. 105102, 2009.
- Brillant, G., Husson, S., et Bataille, F., *Subgrid-scale diffusivity : wall behaviour and dynamic methods*, J. Appl. Mech., Trans ASME, **73(3)**, pp. 360–367, 2006.
- Brillant, G., Husson, S., et Bataille, F., *Study of the blowing impact on a hot turbulent boundary layer using thermal large eddy simulation*, Int. J. Heat Fluid Flow, **29(6)**, pp. 1670–1678, 2008.
- Chaouat, B. et Schiestel, R., *A new partially integrated transport model for subgrid-scale stresses and dissipation rate for turbulent developing flows*, Phys. Fluids, **17(6)**, pp. 1–19, 2005.
- Chapuliot, S., Gourdin, C., Payen, T., Magnaud, J. P., et Monavon, A., *Hydro-thermal-mechanical analysis of thermal fatigue in a mixing tee*, Nucl. Eng. Design, **235(5)**, pp. 575–596, 2005.

- Chatelain, *Validation d'un nouveau modèle sous-maille en VDF dans le code priceles : Le modèle WALE*, Rap. tech. 2002-020, Direction de l'Energie Nucléaire, 2002.
- Chellapandi, P., Chetal, S. C., et Raj, B., *Thermal striping limits for components of sodium cooled fast spectrum reactors*, Nucl. Eng. Design, **239(12)**, pp. 2754–2765, 2009.
- Chellapandi, P., Velusamy, K., Biswas, A., Rama, R., Bhoje, S. B., Vaidyanathan, G., et Chetal, S. C., *Validation of fast reactor thermomechanical and thermohydraulic codes.*, tm. tecdoc1318, chap. Thermal hydraulics and thermomechanical analysis of thermal striping in a mixing Tee-junction of secondary sodium circuit of PHENIX reactor, pp. 63–88, IAEA, 2002.
- Chumakov, S. G. et Rutland, C. J., *Dynamic structure models for scalar flux and dissipation in large eddy simulation*, AIAA Journal, **42(6)**, pp. 1132–1139, 2004.
- Cook, A. W., *Determination of the constant coefficient in scale similarity models of turbulence*, Phys. Fluids, **9(5)**, pp. 1485–1487, 1997.
- Cook, A. W. et Riley, J. J., *Direct numerical simulation of a turbulent reactive plume on a parallel computer*, J. Comp. Phys., **129(2)**, pp. 263–283, 1996.
- Coste, P., Quemere, P., Roubin, P., P., E., M., T., et Kamide, H., *Large eddy simulation of a mixing-T experiment*, dans *Proceedings of ICAPP '06*, pp. 1626–1635, Reno, U.S.A., 2006.
- Davidson, L., *Hybrid LES-RANS : Inlet boundary conditions for flows including recirculation*, 5th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena TU Munich, **2**, pp. 689–694, 2007.
- Dean, R. B., *Reynolds number dependence of skin friction and other bulk flow variables in two-dimensional rectangular duct flow*, J. Fluids Eng. (ASME), **100**, pp. 377–377, 1978.
- Deardorff, J., *On the magnitude of the subgrid scale eddy coefficient*, Journal of Computational Physics, **7**, pp. 120–133, 1971.
- Deardorff, J., *Use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence.*, ASME Pap, (**73 -FE-21**), 1973.
- DeGraaff, D. et Eaton, J., *Reynolds-number scaling of the flat-plate turbulent boundary layer*, J. Fluid Mech., **422**, pp. 319–346, 2000.
- Drikakis, D. et Rider, W., *High-Resolution Methods for Incompressible and Low-Speed Flows*, Springer, 2004.
- Druault, P., Delville, J., Sagaut, P., et Bonnet, J., *Influence of spatio-temporal inflow organization on LES of a spatially developing plane mixing layer*, pp. 207–216, Elsevier Science Ltd., 1999.
- Ducros, F., Comte, P., et Lesieur, M., *Large-eddy simulation of transition to turbulence in a boundary layer developing spatially over a flat plate*, J. Fluid Mech., **326**, pp. 1–36, 1996.
- Faidy, C., *Thermal fatigue in mixing tees : a step by step simplified procedure*, dans 11th ICONE, p. 36425, Tokyo, Japan, 2003.
- Ferrante, A. et Elghobashi, S. E., *A robust method for generating inflow conditions for direct simulations of spatially-developing turbulent boundary layers*, J. Comp. Phys., **198(1)**, pp. 372–387, 2004.

- Frank, T., Lifante, C., Prasser, H.-M., et Menter, F., *Simulation of turbulent and thermal mixing in T-junctions using urans and scale-resolving turbulence models in ANSYS CFX*, Nucl. Eng. Design, **240**, pp. 2313–2328, 2010.
- Fukushima, N., Fukagata, K., Kasagi, N., Noguchi, H., et Tanimoto, K., *Numerical and experimental study on turbulent thermal mixing in a T-junction flow*, dans *The 6th ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference*, pp. TED–AJ03–582, Hawaii, 2003.
- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., et Cabot, W. H., *A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model*, Phys. Fluids A, **3(7)**, pp. 1760–1765, 1991.
- Gourdin, C., Chapuliot, S., Magnaud, J. P., Mermaz, F., et Monavon, A., *Effect of the mixing flows on the propagation of thermal fatigue cracks*, dans *Trans. SMiRT 19*, p. G05/4, Toronto, Canada, 2007.
- Hannink, M. H. C., Kuczaj, A. K., J., B. F., M., C. J., et J., K. E. M., *A coupled cfd-fem strategy to predict thermal fatigue in a mixing tees of nuclear reactors*, 2009.
- Hosseini, S. M., Yuki, K., et Hashizume, H., *Classification of turbulent jets in a T-junction area with a 90-deg bend upstream*, Int. J. Heat Mass Transfer, **51(9-10)**, pp. 2444–2454, 2008.
- Hoyas, S. et Jiménez, J., *Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to $Re_{\tau} = 2003$* , Phys. Fluids, **18(1)**, p. 011702, 2006.
- Hoyas, S. et Jiménez, J., *Reynolds number effects on the reynolds-stress budgets in turbulent channels*, Physics of Fluids, **20(10)**, p. 101511, 2008.
- Hu, L.-W. et Kazimi, M. S., *LES benchmark study of high cycle temperature fluctuations caused by thermal striping in a mixing tee*, Int. J. Heat Fluid Flow, **27(1)**, pp. 54–64, 2006.
- Husson, S., *Simulations des grandes échelles pour les écoulements turbulents anisothermes*, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2007.
- Igarashi, M., Tanaka, M., Kawashima, S., et Kamide, H., *Experimental study on fluid mixing for evaluation of thermal striping in T-pipe junction*, dans *Proceedings of ICONE 10*, tm. 3, pp. 383–390, Arlington, U.S.A., 2002.
- Igarashi, M., Tanaka, N., M. Kimura, et Kamide, H., *Study on fluid temperature fluctuation and transfer to wall in a mixing tee*, dans *11th ICONE*, p. 36299, Tokyo, Japan, 2003.
- Jarrin, N., Benhamadouche, S., Addad, Y., et D., L., *Synthetic turbulent inflow conditions for large eddy simulation*, dans *4th International Turbulence, Heat and Mass Transfer Conference*, Antalya, Turkey, 2003.
- Jarrin, N., Benhamadouche, S., Laurence, D., et Prosser, R., *A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations*, Int. J. Heat Fluid Flow, **27(4)**, pp. 585–593, 2006.
- Jeanmart, H. et Winckelmans, G., *Investigation of eddy-viscosity models modified using discrete filters : A simplified "regularized variational multiscale model" and an "enhanced field model"*, Phys. Fluids, **19(5)**, p. 055110, 2007.
- Jimenez, C., Ducros, F., Cuenot, B., et Bedat, B., *Subgrid scale variance and dissipation of a scalar field in large-eddy simulations*, Phys. Fluids, **13(6)**, pp. 1748–1754, 2001.
- Kasagi, N., Kuroda, A., et Hirata, M., *Numerical investigation of near-wall turbulent heat transfer taking into account the unsteady heat conduction in the solid wall*, J. Heat Trans. (ASME), **111(2)**, pp. 385–392, 1989.

- Kawamura, T., Shiina, K., Ohtsuka, M., Mizuno, T., Kurosaki, M., Wakamatsu, M., Tanimoto, K., Fukuda, T., Minami, Y., Moriya, S., et H., M., *Study on high-cycle fatigue evaluation for thermal striping in mixing tees with hot and cold water (2) (type B ; characteristics of temperature fluctuations and heat transfert in mixing tees with same pipe diameters)*, dans 11th ICONE, p. 36182, Tokyo, Japan, 2003.
- Kawamura, T., Shiina, K., Ohtsuka, M., Tanaka, I., Hirayama, H., Tanimoto, K., Fukuda, T., Sakashita, A., Mizutani, J., Minami, Y., Moriya, S., et Madarame, H., *Experimental study on thermal striping in mixing tees with hot and cold water*, dans 10th ICONE, tm. 3, pp. 325–332, Arlington, U.S.A., 2002.
- Kim, J., Moin, P., et Moser, R., *Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number*, J. Fluid Mech., **177**, pp. 133–166, 1987.
- Klein, M., Sadiki, A., et Janicka, J., *A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations*, J. Comp. Phys., **186(2)**, pp. 652–665, 2003.
- Kuczaj, A. K., De Jager, B., et Komen, E., *An assessment of large-eddy simulation for thermal fatigue prediction*, International Conference on Advances in Nuclear Power Plants, ICAPP 2008, **3**, pp. 1923–1933, 2008.
- Kuhn, S., Braillard, O., Niceno, B., et Prasser, H.-M., *Computational study of conjugate heat transfer in T-junctions*, Nucl. Eng. Design, **240(6)**, pp. 1548–1557, 2010.
- Lee, J. I., Hu, L., Saha, P., et Kazimi, M. S., *Numerical analysis of thermal striping induced high cycle thermal fatigue in a mixing tee*, Nucl. Eng. Design, **239(5)**, pp. 833–839, 2009.
- Leonard, A., *Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows*, Advances in Geophysics, **18A**, pp. 237–248, 1974.
- Lesieur, M., *Turbulence in fluids*, Kluwer academic publishers, 1997.
- Lilly, D., *On the application of the eddy viscosity concept in the inertial subrange of turbulence*, NCAR Manuscript 123, 1966.
- Lilly, D. K., *A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method*, Phys. Fluids A, **4(3)**, pp. 633–635, 1992.
- Liu, S., Meneveau, C., et Katz, J., *On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet*, J. Fluid Mech., **275**, pp. 83–119, 1994.
- Lund, T. S., *On the use of discrete filters for large eddy simulation*, dans *Annual Research Briefs 1997*, pp. 83–95, Center for Turbulence Research, 1997.
- Lund, T. S., Wu, X., et Squires, K. D., *Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations*, J. Comp. Phys., **140(2)**, pp. 233–258, 1998.
- Maruyama, T., Rodi, W., Maruyama, Y., et Hiraoka, H., *Large eddy simulation of the turbulent boundary layer behind roughness elements using an artificially generated inflow*, J. Wind Eng. Ind. Aerodyn., **83(1-3)**, pp. 381–392, 1999.
- Mathey, F., Cokljat, D., Bertoglio, J. P., et Sergent, E., *Assessment of the vortex method for large eddy simulation inlet conditions*, Progress in Computational Fluid Dynamics, **6(1-3)**, pp. 58–67, 2006.

- Menanteau, A., *Étude expérimentale et numérique des fluctuations de température en aval d'une jonction orthogonale d'écoulements turbulents de températures différentes*, Thèse de doctorat, École des mines de Douai et Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2012.
- Merzari, E., Ninokata, H., et Baglietto, E., *Large eddy simulation of the flow in a T-junction*, dans *ICAPP 2009*, p. 9463, Tokyo, Japan, 2009.
- Monod, R., Brillant, G., Toutant, A., et Bataille, F., *Étude numérique des fluctuations de température dans un té de mélange*, dans *Congrès Français de Thermique : Energie solaire et thermique*, Perpignan, France, 2011.
- Monod, R., Brillant, G., Toutant, A., et Bataille, F., *Dimensionless equations for conjugate heat transfers*, *Ann. Nucl. Ener.*, **in review process**, pp. –, 2012a.
- Monod, R., Brillant, G., Toutant, A., et Bataille, F., *Large eddy simulations of a turbulent periodic channel with conjugate heat transfer at low prandtl number*, dans *Journal of Physics : Conference Series*, tm. in review process, Poitiers, France, 2012b.
- Montreuil, E., *Simulations numériques pour l'aérothermique avec des modèles sous-maille*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2000.
- Montreuil, E., Labbé, O., et Sagaut, P., *Assessment of non-fickian subgrid-scale models for passive scalar in a channel flow*, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **49(1)**, pp. 75–98, 2005.
- Moser, R. D., Kim, J., et Mansour, N. N., *Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $re_\tau = 590$* , *Phys. Fluids*, **11(4)**, pp. 943–945, 1999.
- Najjar, F. M. et Tafti, D. K., *Study of discrete test filters and finite difference approximations for the dynamic subgrid-scale stress model*, *Phys. Fluids*, **8(4)**, pp. 1076–1088, 1996.
- Nicoud, F. et Baggett, J., *On the use of the optimal control theory for deriving wall models for les*, *CTR, Ann. Research Briefs*, pp. 329–341, 1999.
- Nicoud, F. et Ducros, F., *Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor*, *Flow Turb. Comb.*, **62**, pp. 183–200, 1999.
- Ogawa, H., Igarashi, M., Kimura, N., et Kamide, H., *Experimental study on fluid mixing phenomena in T-pipe junction with upstream elbow*, dans *NURETH11*, p. 448, Avignon, France, 2005.
- Ohtsuka, M., Shiina, K., Kawamura, T., Kurosaki, M., Fukuda, T., Minami, Y., Moriya, S., et Madarame, H., *LES analysis of fluid temperature fluctuations in a mixing tee pipe with the same diameters*, dans *11th ICONE*, p. 36064, Tokyo, Japan, 2003.
- Okamoto, M. et Shima, N., *Direct numerical and large eddy simulations of turbulent flows through concentric annuli*, dans *Engineering turbulent modelling and experiments 5*, pp. 219–223, 2002.
- Paffumi, E., Nilsson, K., et Taylor, N., *Thermal frequency response studies of a hollow cylinder subject to loads of different amplitude and shape*, *Nucl. Eng. Design*, **240(6)**, pp. 1355–1362, 2010.
- Pamiès, M., Weiss, P.-E., Garnier, E., Deck, S., et Sagaut, P., *Generation of synthetic turbulent inflow data for large eddy simulation of spatially evolving wall-bounded flows*, *Phys. Fluids*, **21(4)**, p. 045103, 2009.

- Peng, S.-H. et Davidson, L., *On a subgrid-scale heat flux model for large-eddy simulation of turbulent thermal flow*, Int. J. Heat Mass Transfer, **45**, pp. 1393–1405, 2002.
- Perret, L., Delville, J., Manceau, R., et Bonnet, J. P., *Generation of turbulent inflow conditions for large eddy simulation from stereoscopic PIV measurements*, Int. J. Heat Fluid Flow, **27(4)**, pp. 576–584, 2006.
- Pham, M. V., Plourde, F., et Doan, K. S., *Direct and large-eddy simulations of a pure thermal plume*, Phys. Fluids, **19(12)**, 2007.
- Poitou, D., *Modélisation du rayonnement dans la simulation aux grandes échelles de la combustion turbulente*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2009.
- Reichardt, H., *Vollständige darstellung der turbulenten geschwindigkeitsverteilung in glatten leitungen*, ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics, **31**, pp. 208–219, 1951.
- Rollet-Miet, P., Laurence, D., et Ferziger, J., *LES and RANS of turbulent flow in tube bundles*, Int. J. Heat Fluid Flow, **20(3)**, pp. 241–254, 1999.
- Sagaut, P., *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible*, Springer, 1998.
- Sagaut, P. et Grohens, R., *Discrete filters for large eddy simulation*, Int. J. Num. Meth. Fluids, **31(8)**, pp. 1195–1220, 1999.
- Scotti, A., Meneveau, C., et Fatica, M., *Dynamic smagorinski model on anisotropic grids*, Phys. Fluids, **9**, pp. 1856–1858, 1997.
- Sergent, E., *Vers une méthodologie de couplage entre la simulation des randes échelles et les modèles statistiques*, Thèse de doctorat, Ecole centrale de Lyon, 2002.
- Simoneau, J.-P., Noe, H., et Menant, B., *Large eddy simulation of sodium flow in a tee junction - comparison of temperature fluctuations with experiments*, dans *5th International Conference on Nuclear Engineering*, pp. ICONES–2145, Nice, France, 1997.
- Smagorinsky, J., *General circulation experiments with the primitive equations*, Monthly Weather Review, **91**, pp. 99–164, 1963.
- Spalart, P., *Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $r//\theta$ equals 1410*, J. Fluid Mech., **187**, pp. 61–98, 1988.
- Tabor, G. R. et Baba-Ahmadi, M. H., *Inlet conditions for large eddy simulation : A review*, **39(4)**, pp. 553–567, 2010.
- Taieb, D., Ribert, G., et Hadjadj, A., *DNS and LES of wall-bounded compressible turbulent flows in narrow cooling channels*, 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, **(2010-0638)**, 2010.
- Tiselj, I., Bergant, R., Mavko, B., Bajsić, I., et Hetsroni, G., *DNS of turbulent heat transfer in channel flow with heat conduction in the solid wall*, J. Heat Trans. (ASME), **123(5)**, pp. 849–857, 2001a.
- Tiselj, I. et Cizelj, L., *DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer at prandtl number 0.01*, Nucl. Eng. Design, **in review process**, 2012.
- Tiselj, I., Pogrebnyak, E., Li, C., Mosyak, A., et Hetsroni, G., *Effect of wall boundary condition on scalar transfer in a fully developed turbulent flume*, Phys. Fluids, **13(4)**, pp. 1028–1039, 2001b.

- Vreman, A. W., *An eddy-viscosity subgrid-scale model for turbulent shear flow : Algebraic theory and applications*, Phys. Fluids, **16(10)**, pp. 3670–3681, 2004.
- Wakamatsu, M., Hirayama, H., Kimura, K., Ogura, K., Shiina, K., Tanimoto, K., Mizutani, Y., J. Minami, Moriya, S., et H., M., *Study on high-cycle fatigue evaluation for thermal striping in mixing tees with hot and cold water (1) (type A ; characteristics of temperature fluctuations and heat transfert in collision-type mixing tees with same pipe diameters(1))*, dans 11th ICONE, p. 36208, Tokyo, Japan, 2003.
- Wakamatsu, M., Nei, H., et Hashifuchi, K., *Attenuation of temperature fluctuations in thermal striping*, J. Nucl. Sc. Tech., **32(8)**, pp. 752–762, 1995.
- Walker, C., Simiano, M., Zboray, R., et Prasser, H.-M., *Investigations on mixing phenomena in single-phase flow in a T-junction geometry*, Nucl. Eng. Design, **239(1)**, pp. 116–126, 2009.
- Werner, H. et Wengle, H., *Large eddy simulation of turbulent flow over and around a cube in a pate channel*, dans *Selected papers from the 8th Symposium on Turbulent Shear Flows*, pp. 155–168, 1993.
- Westin, J., Veber, P., Andersson, L., Mannetje, C., Anderson, U., Eriksson, J., Henriksson, M., Alavyon, F., et Andersson, C., *High-cycle thermal fatigue in mixing tees. Large-eddy simulations compared to a new validation experiment*, dans ICONE 16, p. 48731, Orlando, U.S.A., 2008.
- Wu, X., Squires, K. D., et Lund, T. S., *Large-eddy simulation of a spatially-developping boundary layer*, dans *ACM/IEEE Supercomputing Conference*, pp. 1–18, San Diego, 1995.
- Yakhot, A., Orszag, S. A., Yakhot, V., et Israeli, M., *Renormalization group formulation of large-eddy simulations*, SIAM J. Sc. Comp., **4(2)**, pp. 139–158, 1989.
- Zhu, W. Y., Lu, T., Jiang, P. X., Guo, Z. J., et Wang, K. S., *Large eddy simulation of hot and cold fluids mixing in a T-junction for predicting thermal fluctuations*, Appl. Math. Mech. (Eng. Ed.), **30(11)**, pp. 1379–1392, 2009.

Annexes

Annexe A

Traitements statistiques

A.1 Généralités

A.1.1 Les poids

L'ensemble des calculs s'effectue en temps et en espace. L'unité est la cellule à un instant "t". Chaque mesure effectuée sur une cellule, que ce soit la valeur étudiée, son carré, ou quelque autre puissance, est pondérée par le volume de la cellule et par le pas de temps de l'itération. Ce qui donne comme poids, en notant t l'indice de temps, et v l'indice de volume :

$$poids = dvdt \quad (A.1)$$

La somme des poids vaut donc

$$\sum_t \sum_v dvdt = \sum_t dt \sum_v dv \quad (A.2)$$

Pour chaque pas de temps, le volume total des mailles considérées est le même. Ainsi on peut écrire :

$$\sum_t dt \sum_v dv = \sum_t V dt \quad (A.3)$$

$$\sum_t dt \sum_v dv = V * (t_{final} - t_{initial}) \quad (A.4)$$

Et la somme des poids vaut :

$$\sum_poids = V * (t_{final} - t_{initial}) \quad (A.5)$$

A.1.2 Les statistiques conservées en mémoire

Pour chaque grandeur u étudiée, sont conservées en mémoire les données :

$$m_n = \frac{1}{VT} \sum_t \sum_v u^n dvdt = \mathbb{E}(u^n) \quad (A.6)$$

pour le calcul du moment d'ordre n . La valeur $N = \sum_{t,v} u^0$ correspondant au nombre de mesure est également conservée.

Par la suite nous calculerons les moments voulus à l'aide des m_i et de N .

A.2 Le moment d'ordre 1 : La moyenne \bar{u}

Par définition

$$\bar{u} = \mathbb{E}(u) \quad (\text{A.7})$$

Ainsi

$$\bar{u} = m_1 \quad (\text{A.8})$$

A.3 Le moment d'ordre 2 : L'écart type non biaisé $\sigma(u)$ ou u'

Par définition :

$$\sigma^2(u) = \frac{N}{N-1} [\mathbb{E}(u^2) - (\mathbb{E}u)^2] \quad (\text{A.9})$$

Ainsi

$$\sigma^2(u) = \frac{N}{N-1} (m_2 - m_1^2) \quad (\text{A.10})$$

A.4 Le moment d'ordre 3 : Le skewness ou coefficient de symétrie noté $S(u)$

Par définition :

$$S(u) = \frac{1}{\sigma^3} \cdot \mathbb{E}(u - \bar{u})^3 \quad (\text{A.11})$$

Or

$$\mathbb{E}(u - \bar{m})^3 = \mathbb{E}(u - m_1)^3 \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbb{E}(u - \bar{m})^3 = \mathbb{E}(u^3 - 3u^2 \cdot m_1 + 3u \cdot m_1^2 - m_1^3) \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbb{E}(u - \bar{m})^3 = m_3 - 3 \cdot m_2 \cdot m_1 + 3m_1 \cdot m_1^2 - m_1^3 \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbb{E}(u - \bar{m})^3 = m_3 - 3m_2 \cdot m_1 + 2m_1^3 \quad (\text{A.15})$$

Ainsi

$$S(u) = \frac{1}{\sigma^3} \cdot (m_3 - 3m_2 \cdot m_1 + 2m_1^3) \quad (\text{A.16})$$

Le Skewness indique la symétrie d'une distribution par rapport à sa moyenne. Pour une distribution symétrique, (comme une Gaussienne par exemple) le Skewness vaut 0.

A.5 Le moment d'ordre 4 : Le kurtosis ou coefficient d'aplatissement noté $K(u)$

Par définition :

$$K(u) = \frac{1}{\sigma^4} \cdot \mathbb{E} (u - \bar{u})^4 \quad (\text{A.17})$$

Or

$$\mathbb{E} (u - \bar{m})^4 = \mathbb{E} (u - m_1)^4 \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbb{E} (u - \bar{m})^4 = \mathbb{E} (u^4 - 4u^3 \cdot m_1 + 6u^2 \cdot m_1^2 - 4u \cdot m_1^3 + m_1^4) \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbb{E} (u - \bar{m})^4 = m_4 - 4m_3 \cdot m_1 + 6m_2 \cdot m_1^2 - 4m_1 \cdot m_1^3 + m_1^4 \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbb{E} (u - \bar{m})^4 = m_4 - 4m_3 \cdot m_1 + 6m_2 \cdot m_1^2 - 3m_1^4 \quad (\text{A.21})$$

Ainsi

$$K(u) = \frac{1}{\sigma^4} \cdot (m_4 - 4m_3 \cdot m_1 + 6m_2 \cdot m_1^2 - 3m_1^4) \quad (\text{A.22})$$

Il est à noter que le Kurtosis se compare traditionnellement à 3, valeur du Kurtosis pour une Gaussienne. Parfois il est recentré à 0, mais ce n'est pas le cas ici.

Annexe B

Canal à $Re_{\tau} = 590$

Les champs moyens à l'intérieur de la paroi tracés dans cette annexe peuvent présenter un écart avec les SND. Après discussion avec les auteurs, il est apparu que les SND n'étaient pas complètement convergées à l'intérieur des murs.

B.1 Présentation des cas étudiés

Cas	Loi de paroi	Condition limite	K	G	d^{++}	Référence SND
021	oui	isotherme	-	-	-	oui
022	oui	isoflux	-	-	-	oui
023	non	isotherme	-	-	-	oui
024	non	isoflux	-	-	-	oui
025	oui	mur	1	1	590	oui
026	non	mur	1	1	590	oui

TABLE B.1 – Cas utilisés pour étudier l'impact de la nature de la condition limite en température

Cas si loi de paroi	K	G	d^{++}	Référence SND
I21	1	0,1	590	-
I22	1	0,3	590	-
I23	1	3	590	-
I24	1	10	590	-
I25	0,1	1	590	oui
I26	0,3	1	590	oui
I27	3	1	590	oui
I28	10	1	590	oui
I29	1	1	10	oui
I30	1	1	100	oui
I31	1	1	300	oui

TABLE B.2 – Cas utilisés pour l'étude paramétrique des caractéristiques physiques du mur dans la base \mathcal{B}_1

B.2 Validation

B.2.1 Champ de vitesse

a) Profils de u , vitesse longitudinale

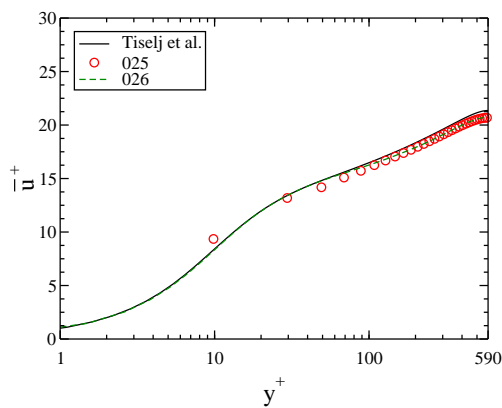


FIGURE B.1 – Moyenne de u^+

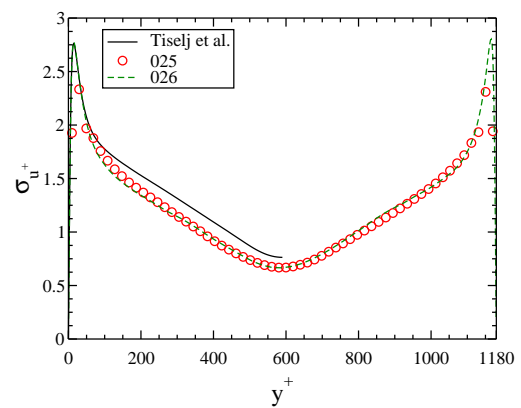


FIGURE B.2 – Ecart type de u^+

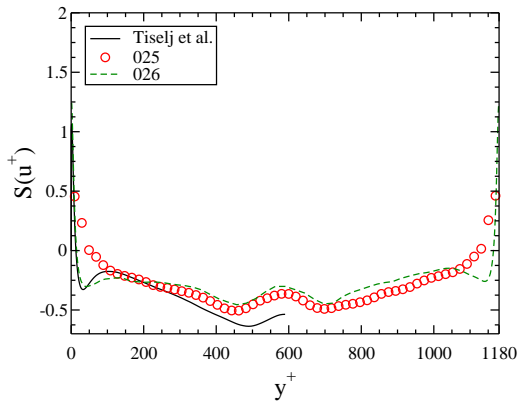


FIGURE B.3 – Skewness de u

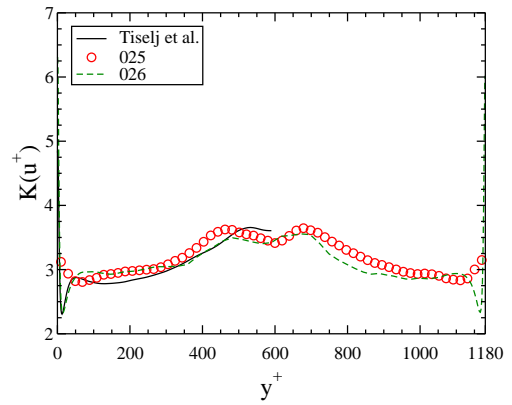


FIGURE B.4 – Kurtosis de u

b) Écart Type des autres composantes de la vitesse

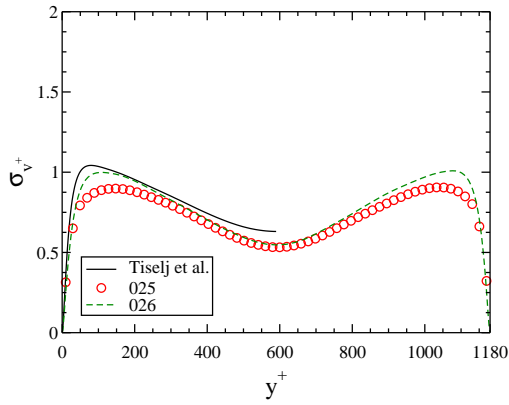


FIGURE B.5 – Ecart type de v^+

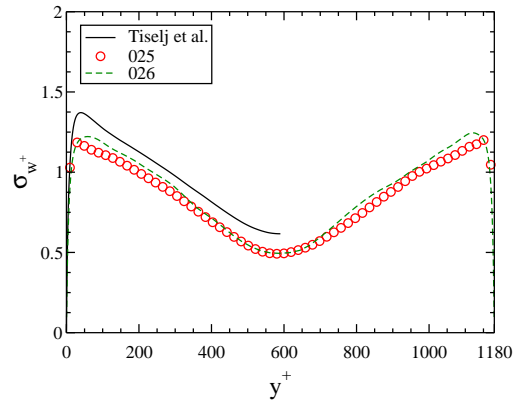


FIGURE B.6 – Ecart type de w^+

c) Covariance

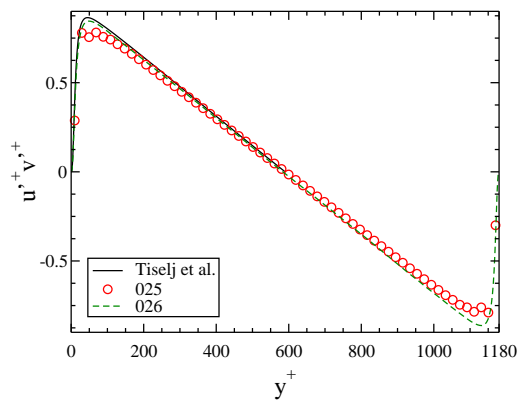


FIGURE B.7 – Covariance de u et v

B.2.2 Influence de la condition limite

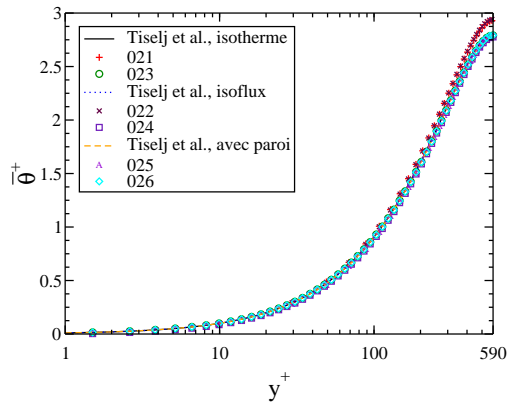


FIGURE B.8 – Moyenne de θ^+

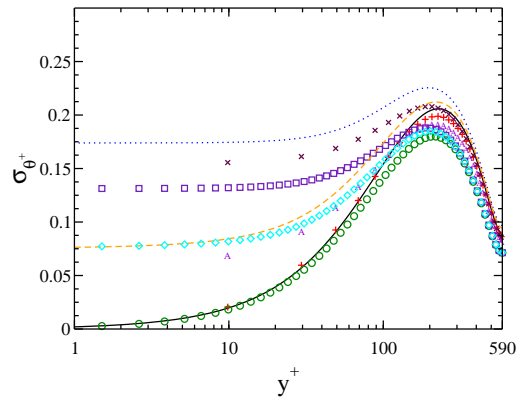


FIGURE B.9 – Ecart type de θ^+

B.2.3 Validation dans la base $\mathcal{B}_1 = \{K, G, d^{++}\}$

B.2.3.1 Cas I25

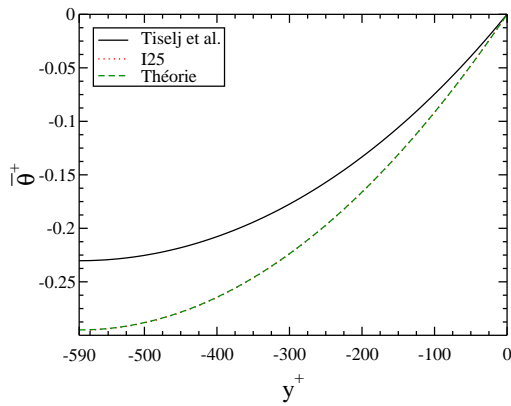


FIGURE B.10 – $\bar{\theta}^+$ dans le mur cas I25

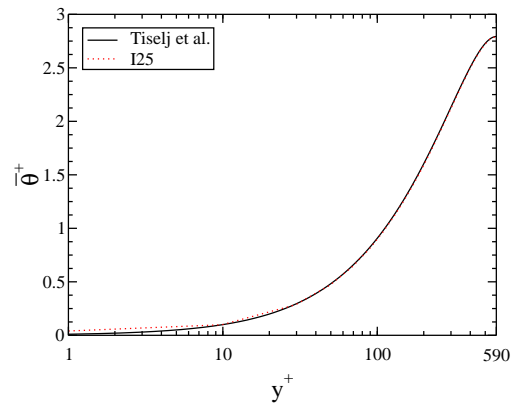


FIGURE B.11 – $\bar{\theta}^+$ dans le fluide, cas I25

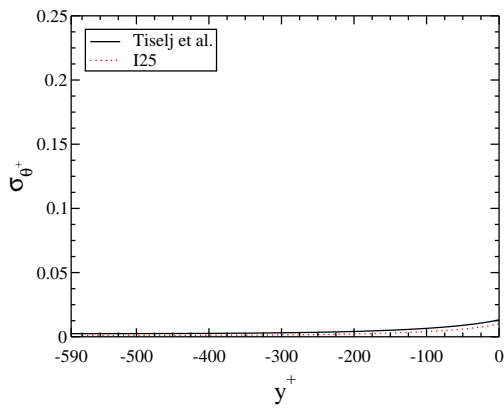


FIGURE B.12 – σ_{θ^+} dans le mur, cas I25

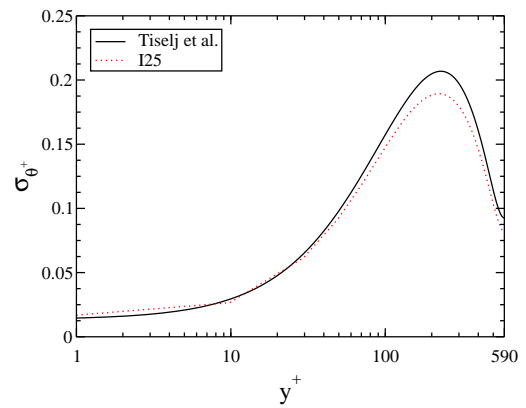


FIGURE B.13 – σ_{θ^+} dans le fluide, cas I25

B.2.3.2 Cas I26

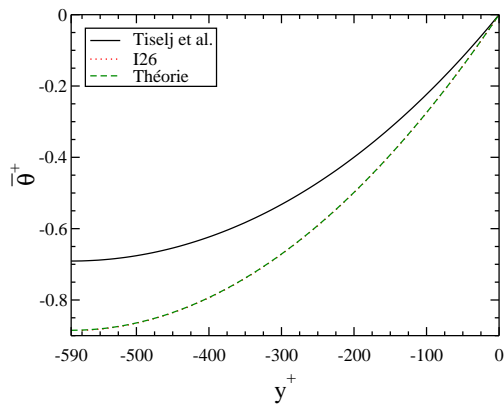


FIGURE B.14 – $\bar{\theta}^+$ dans le mur cas I26

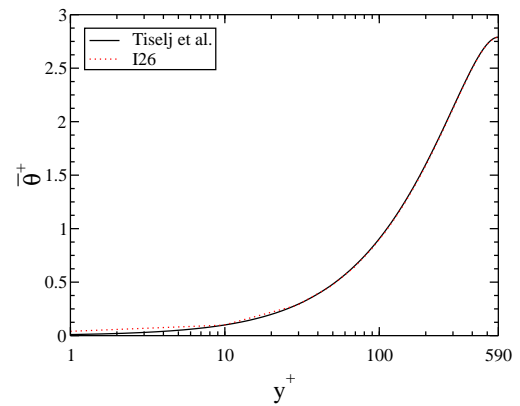


FIGURE B.15 – $\bar{\theta}^+$ dans le fluide, cas I26

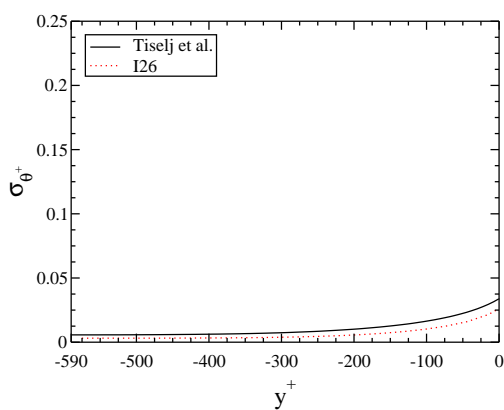


FIGURE B.16 – σ_{θ^+} dans le mur, cas I26

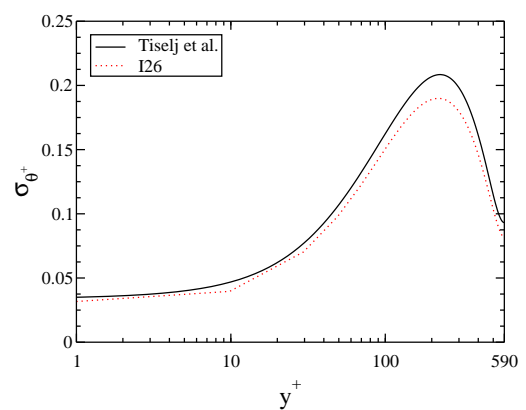


FIGURE B.17 – σ_{θ^+} dans le fluide, cas I26

B.2.3.3 Cas I27

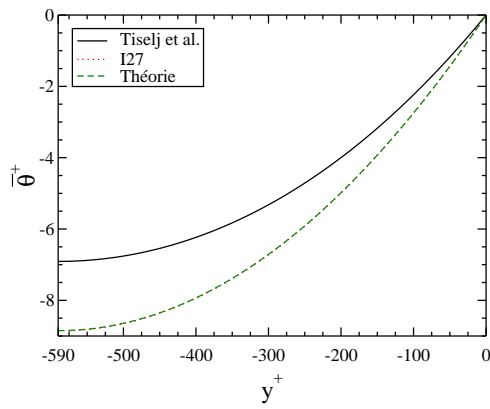


FIGURE B.18 $-\bar{\theta}^+$ dans le mur cas I27

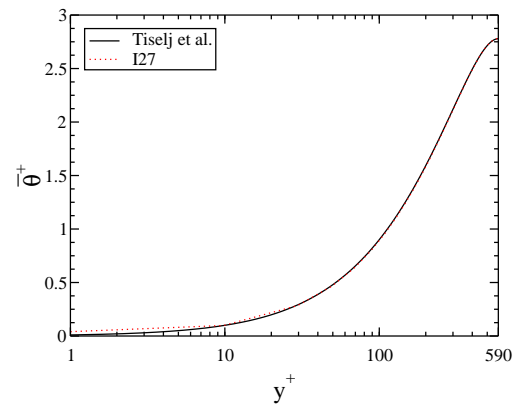


FIGURE B.19 $-\bar{\theta}^+$ dans le fluide, cas I27

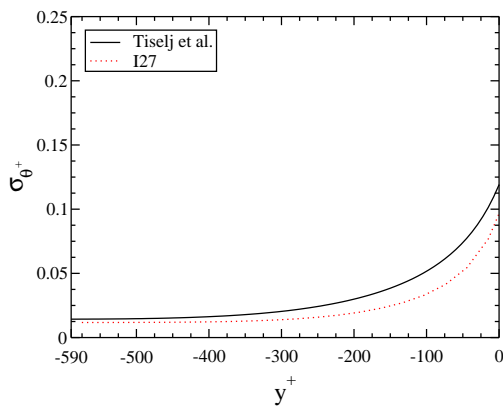


FIGURE B.20 $-\sigma_{\theta^+}$ dans le mur, cas I27

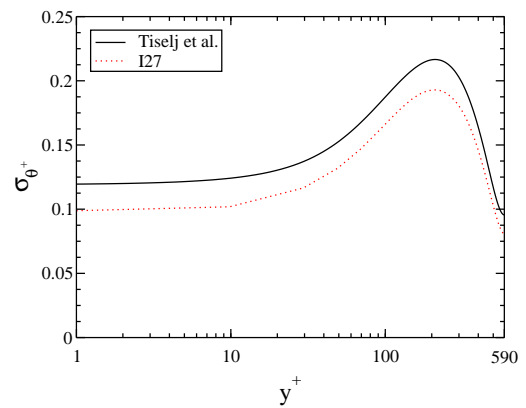


FIGURE B.21 $-\sigma_{\theta^+}$ dans le fluide, cas I27

B.2.3.4 Cas I28

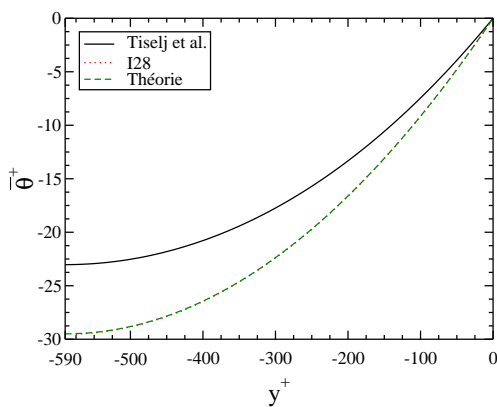


FIGURE B.22 $-\bar{\theta}^+$ dans le mur cas I28

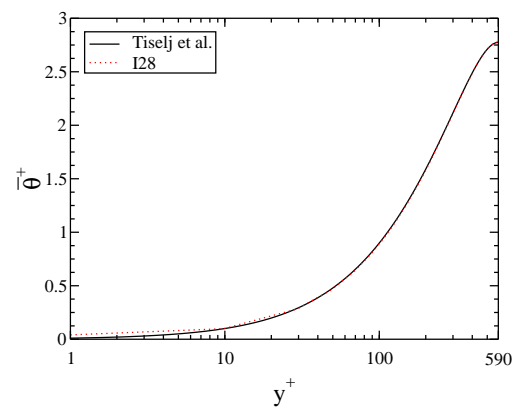


FIGURE B.23 $-\bar{\theta}^+$ dans le fluide, cas I28

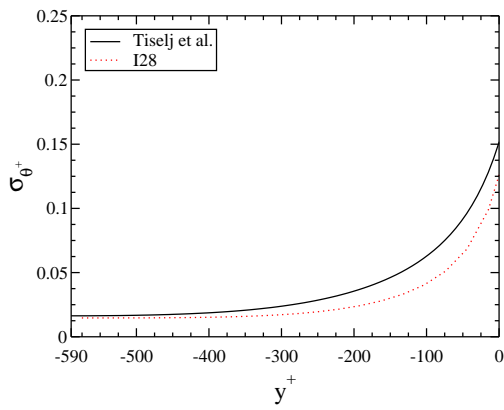


FIGURE B.24 – σ_{θ^+} dans le mur, cas I28

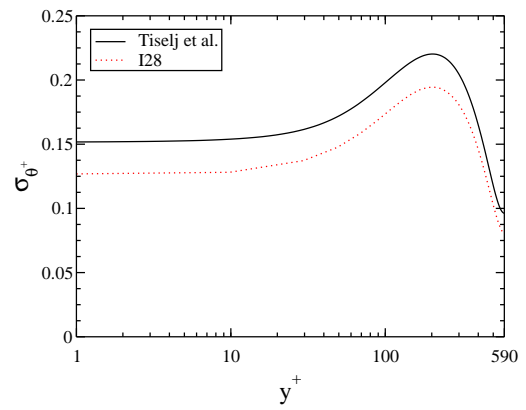


FIGURE B.25 – σ_{θ^+} dans le fluide, cas I28

B.2.3.5 Cas I29

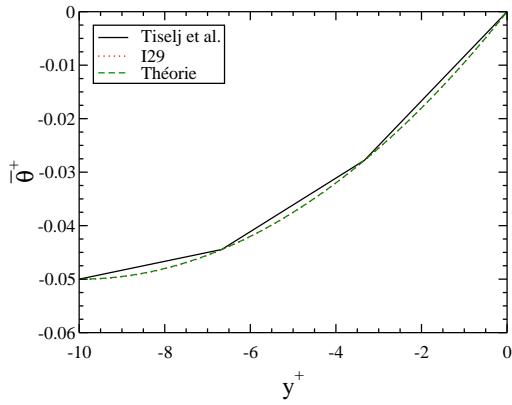


FIGURE B.26 – $\bar{\theta}^+$ dans le mur cas I29

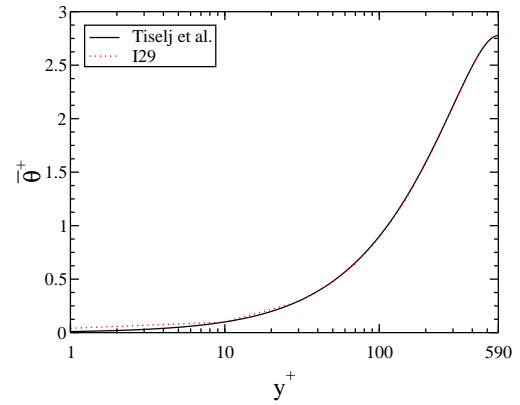


FIGURE B.27 – $\bar{\theta}^+$ dans le fluide, cas I29

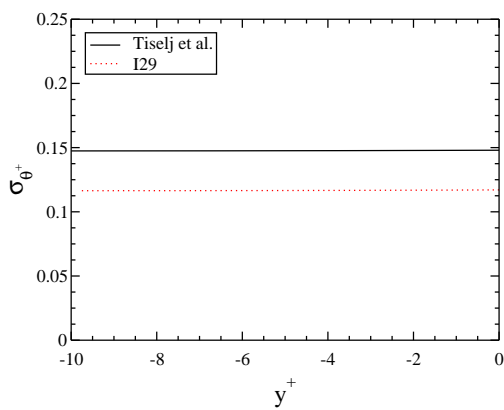


FIGURE B.28 – σ_{θ^+} dans le mur, cas I29

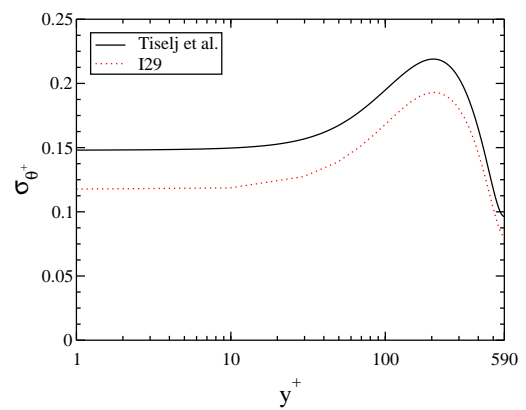


FIGURE B.29 – σ_{θ^+} dans le fluide, cas I29

B.2.3.6 Cas I30

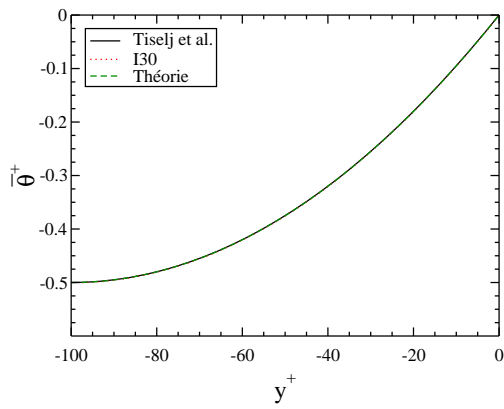


FIGURE B.30 $-\bar{\theta}^+$ dans le mur cas I30

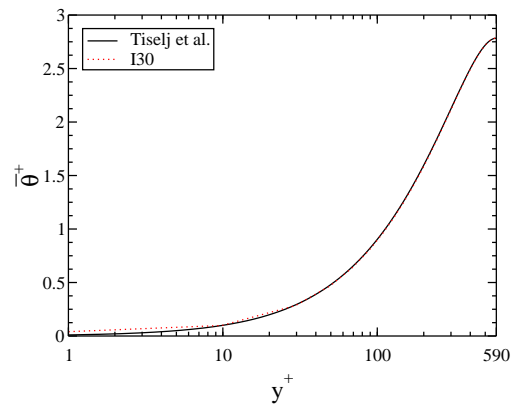


FIGURE B.31 $-\bar{\theta}^+$ dans le fluide, cas I30

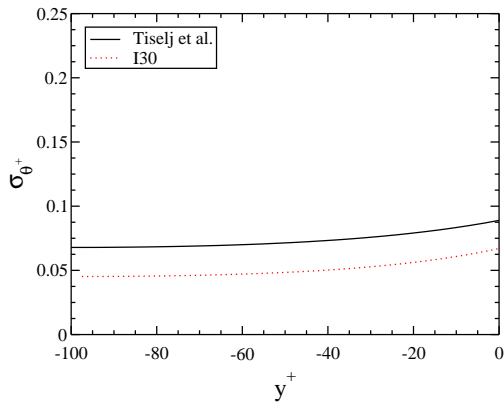


FIGURE B.32 $-\sigma_{\theta^+}$ dans le mur, cas I30

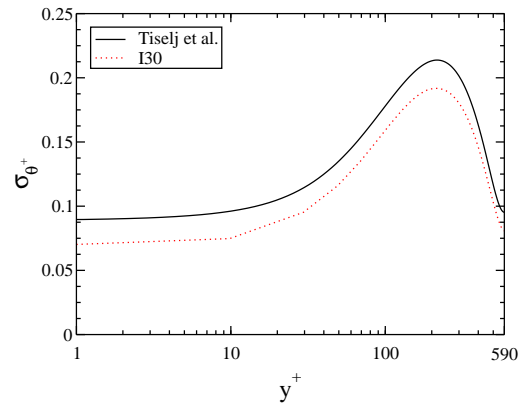


FIGURE B.33 $-\sigma_{\theta^+}$ dans le fluide, cas I30

B.2.3.7 Cas I31

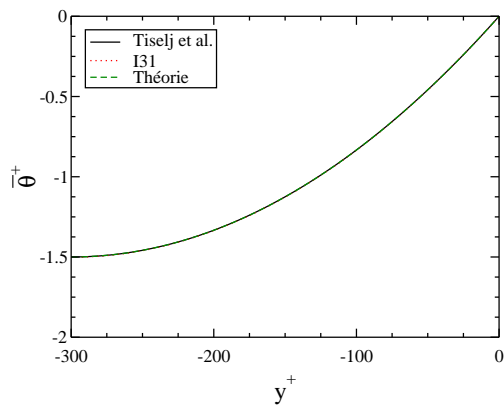


FIGURE B.34 $-\bar{\theta}^+$ dans le mur cas I31

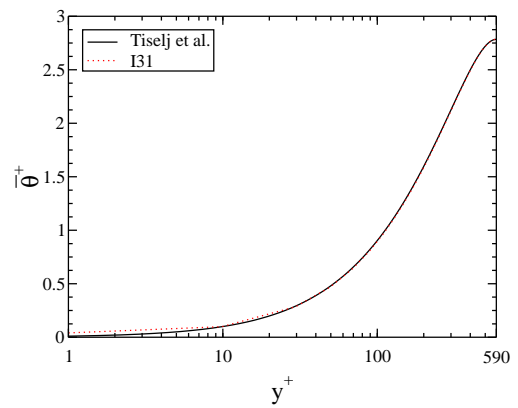


FIGURE B.35 $-\bar{\theta}^+$ dans le fluide, cas I31

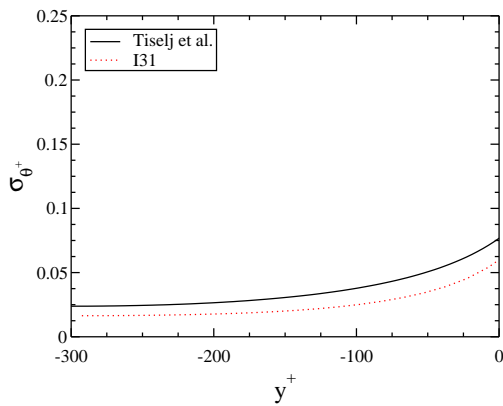


FIGURE B.36 – $\sigma_{\theta+}$ dans le mur, cas I31

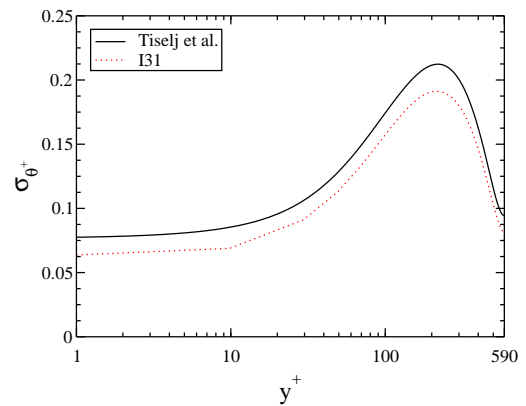


FIGURE B.37 – $\sigma_{\theta+}$ dans le fluide, cas I31

B.3 Étude paramétrique

B.3.1 Étude de K

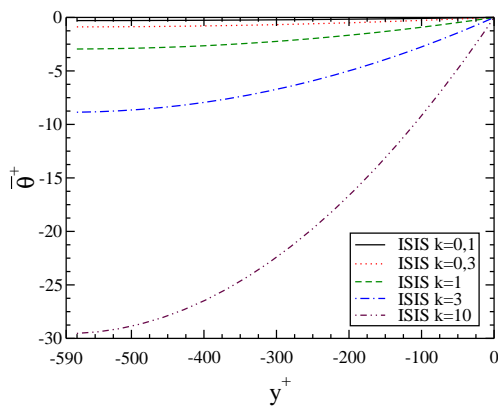


FIGURE B.38 – $\overline{T^+}$ dans le mur

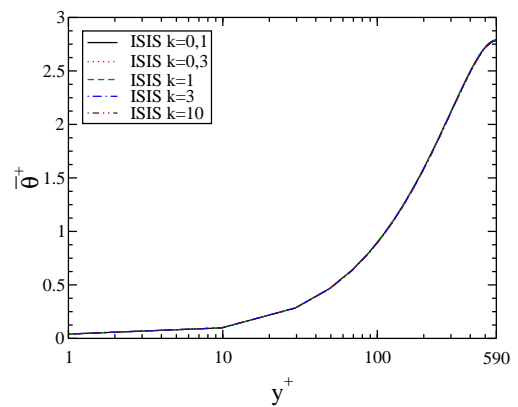


FIGURE B.39 – $\overline{T^+}$ dans le fluide

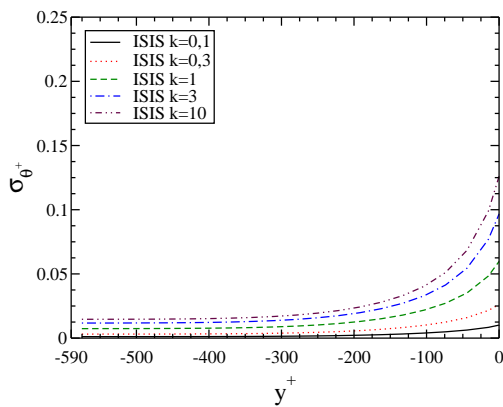


FIGURE B.40 – σ_{T^+} dans le mur

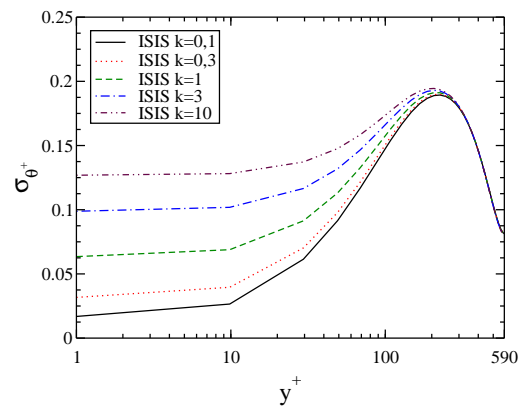


FIGURE B.41 – σ_{T^+} dans le fluide

B.3.2 Étude de G

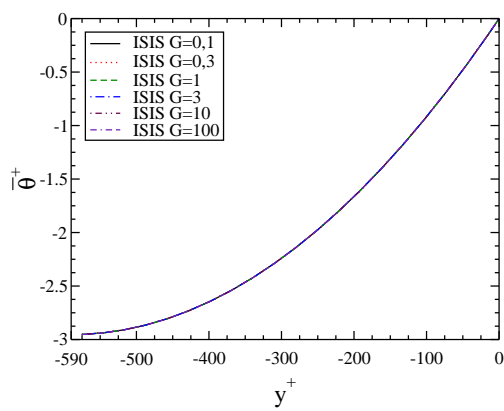


FIGURE B.42 $-\bar{\theta}^+$ dans le mur

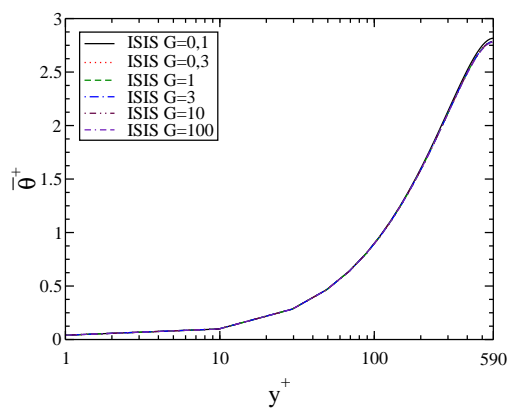


FIGURE B.43 $-\bar{\theta}^+$ dans le fluide

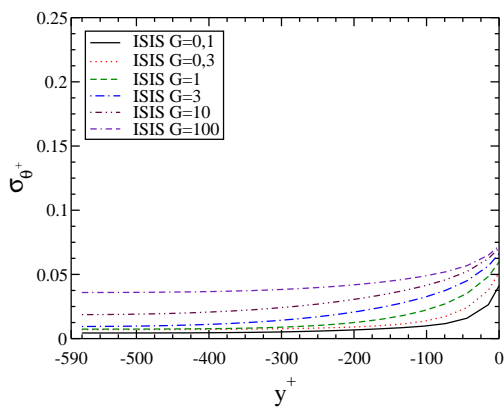


FIGURE B.44 $-\sigma_{\theta^+}$ dans le mur

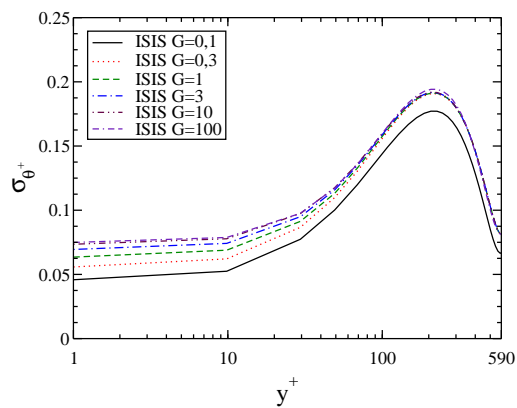


FIGURE B.45 $-\sigma_{\theta^+}$ dans le fluide

B.3.3 Étude de d^{++}

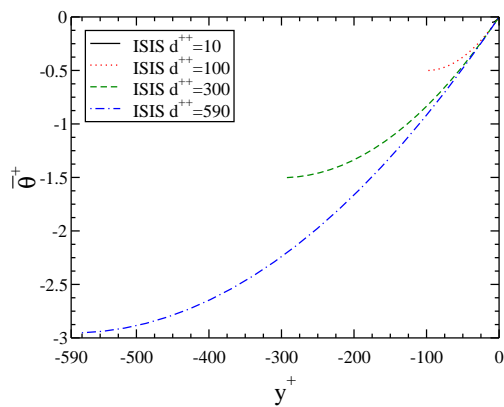


FIGURE B.46 $-\bar{\theta}^+$ dans le mur

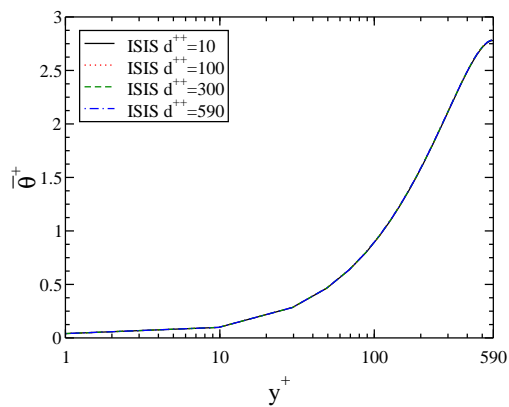


FIGURE B.47 $-\bar{\theta}^+$ dans le fluide

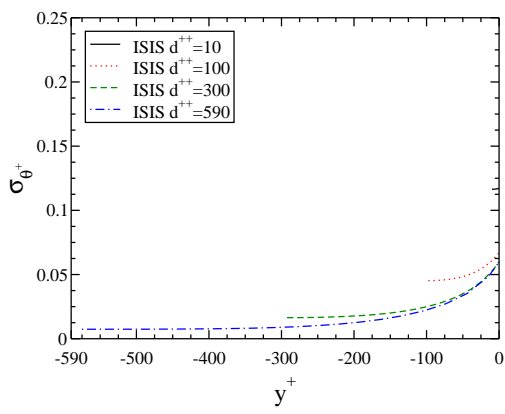


FIGURE B.48 – $\sigma_{\theta+}$ dans le mur

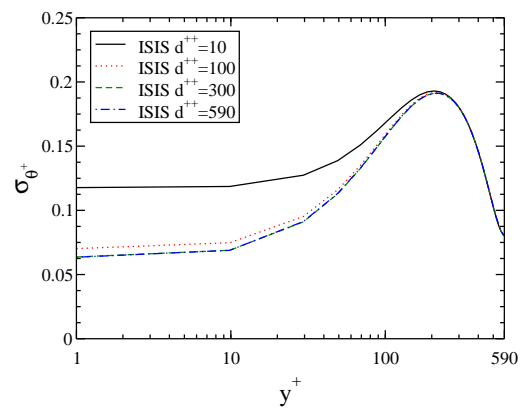


FIGURE B.49 – $\sigma_{\theta+}$ dans le fluide

Annexe C

Maillage du Té de mélange

Cette annexe décrit comment sont maillés les différents Tés de mélange que nous avons étudié.

C.1 Décomposition pour ISIS

Le maillage désiré ici est structuré et conforme. L'ensemble des nœuds se trouve donc sur une grille cartésienne. Le Té est une union de deux domaines parallèpipédiques. Nous pouvons donc décomposer les directions comme indiqué sur la figure C.1. Le bloc 1 peut donc être maillé dans ISIS à l'aide de la classe `IS_BoxWithBoxes` où :

- $x = \text{concaténation} (x1, x2, x3)$
- $y = y1$
- $z = \text{concaténation} (z1, z2, z3)$

De même, le bloc 2 peut être maillé avec cette même classe où :

- $x = x2$
- $y = y2$
- $z = z2$

Il reste donc à écrire ces 8 vecteurs à l'aide d'Octave par exemple, en fonction des différentes contraintes que l'on s'impose.

C.2 Les contraintes et le paramétrage

Pour chacun des 8 vecteurs définis ci-dessus, nous nous imposons une taille de cellule maximale, ainsi qu'une progression maximale pour deux cellules consécutives. Pour les directions normales aux murs, une progression suivant la formule (C.1) est désirée.

$$y_k = h \left\{ 1 + \frac{1}{a} \tanh \left[\left(-1 + \frac{2(k-1)}{N_y - 1} \right) \operatorname{atanh}(a) \right] \right\}, \quad k \in [1, N_y] \quad (\text{C.1})$$

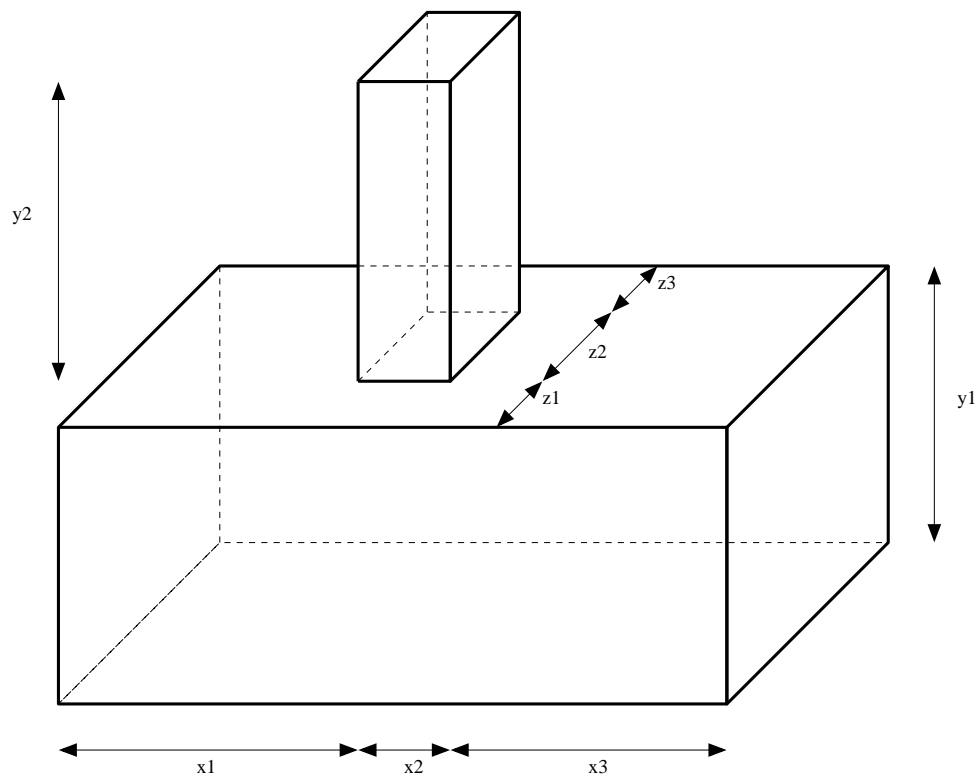


FIGURE C.1 – Décomposition du Té pour ISIS.

Il faut également vérifier que la jonction d'un domaine à l'autre (par exemple de x_1 à x_2) n'ait pas une progression supérieure au ratio maximum toléré. Une taille maximale de première maille au bord des parois est également imposée. Les paramètres de maillage qui viennent s'ajouter aux paramètres géométriques sont donc les suivants :

- mesh_x1_pas_max ;
- mesh_x2_pas_max ;
- mesh_x3_pas_max ;
- mesh_y1_pas_max ;
- mesh_y2_pas_max ;
- mesh_z1_pas_max ;
- mesh_z2_pas_max ;
- mesh_x2_paro ;
- mesh_y1_paro ;
- mesh_z1_paro ;
- mesh_z2_paro ;
- mesh_x1_prog_max ;
- mesh_x2_prog_max ;
- mesh_x3_prog_max ;
- mesh_y1_prog_max ;
- mesh_y2_prog_max ;

- mesh_z1_prog_max ;
- mesh_z2_prog_max ;

Pour des raisons de symétrie, le domaine z_3 n'a pas de contrainte particulière. Ce sont les mêmes que pour le domaine z_1 .

C.3 L'algorithme de maillage

Pour mailler le Té, nous procédons comme suit :

1. x_2 : Il est défini comme pour la hauteur d'un canal plan. Il y a la contrainte de la taille de maille au bord de la paroi, et une progression suivant la formule (C.1). Le nombre de nœuds est pris minimal de façon à ce que la progression de taille entre deux cellules consécutives ne dépasse pas le ratio maximum toléré.
2. x_1 : La première cellule de x_2 limite la taille de la dernière cellule de x_1 . La progression est ensuite géométrique suivant la progression maximum autorisée afin d'arriver jusqu'au pas maximum au début de x_1 .
3. x_3 : Même algorithme que pour x_1 .
4. y_1 : Même algorithme que pour x_2 .
5. y_2 : Même algorithme que pour x_1 .
6. z_2 : Même algorithme que pour x_2 .
7. z_1 : Les nœuds coté $z < 0$ sont définis à partir de la taille de cellule contre la paroi et suivant une progression selon la formule (C.1), et les nœuds coté $z > 0$ sont définis à partir de la taille de maille contre la paroi de z_2 et en suivant une progression géométrique du pas maximum autorisé. Ces deux séries de nœuds sont raccordées sur un pas de taille égal.
8. z_3 : Il est défini en symétrie de z_1 par rapport à l'axe $z = c_1/2$.

C.4 Résultats

A l'aide des paramètres de géométrie et de maillage, Octave génère un fichier contenant la définition des 8 vecteurs dont ISIS a besoin pour mailler le Té. Ce fichier contient également en commentaire les paramètres initiaux, ainsi que des tests de vérification. Le fichier généré est le suivant :

```
// Paramètres géométriques

// c1 = 0.1000
// c2 = 0.0500
// L = 0.3000
// H = 0.1000
```

```
// raccord_x = 0.1000

// Paramètres du maillage

// mesh_x1_pas_max = 0.0100
// mesh_x2_pas_max = 0.0100
// mesh_x3_pas_max = 0.0100
// mesh_y1_pas_max = 0.0100
// mesh_y2_pas_max = 0.0100
// mesh_z1_pas_max = 0.0100
// mesh_z2_pas_max = 0.0100

// mesh_x2_paroï = 0.0010
// mesh_y1_paroï = 0.0010
// mesh_z1_paroï = 0.0010
// mesh_z2_paroï = 0.0010

// mesh_x1_prog_max = 1.2000
// mesh_x2_prog_max = 1.2000
// mesh_x2_prog_max = 1.2000
// mesh_y1_prog_max = 1.2000
// mesh_y2_prog_max = 1.2000
// mesh_z1_prog_max = 1.2000
// mesh_z2_prog_max = 1.2000

// taille_x : 19 24 24 67
// taille_y : 32 19 0 51
// taille_z : 15 24 15 54

// verif : 1 1 1 1 1 1 1 1
// jonction : 1 1 1 1 1

$DV_te_mesh_x1 = <0.0000000000e+00 8.7742139655e-03 1.7548427931e-02
2.6322641897e-02 3.5096855862e-02 4.3871069828e-02 5.2645283793e-02
6.1419497759e-02 6.8849581466e-02 7.5041317888e-02 8.0201098240e-02
8.4500915200e-02 8.8084096000e-02 9.1070080000e-02 9.3558400000e-02
9.5632000000e-02 9.7360000000e-02 9.8800000000e-02 1.0000000000e-01 >

...
```

Il suffit ensuite d'inclure ce fichier dans ISIS. Le résultat obtenu est visible sur la figure C.2.

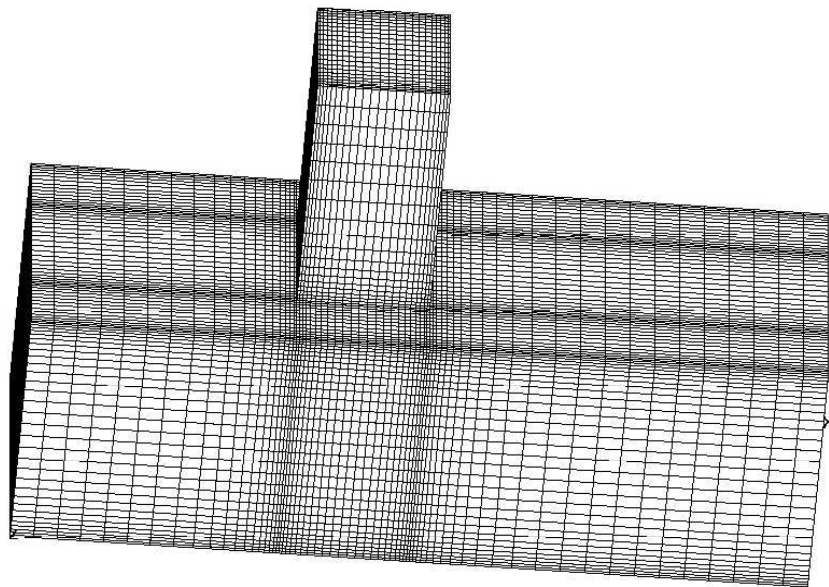


FIGURE C.2 – Té maillé.

Annexe D

Transformation de Fourier Discrète

D.1 Définition

Soit $\phi(n)$ un signal discret enregistré pour $0 \leq n \leq N - 1$. On appelle Transformation de Fourier Discrète, ou TFD, l'opération qui à ϕ associe la fonction $\hat{\phi}$ telle que :

$$\hat{\phi}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \phi(n) e^{-2i\pi k \frac{n}{N}}, \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (\text{D.1})$$

$\hat{\phi}$ est appelée transformée de Fourier. Notons que cette opération est disponible dans Matlab et Octave sous le nom de "fft".

D.2 Moyenne et TFD

Une première propriété immédiate concerne la moyenne de ϕ . En prenant $k = 0$ nous obtenons :

$$\hat{\phi}(0) = \sum_{n=0}^{N-1} \phi(n) \quad (\text{D.2})$$

soit

$$\frac{\hat{\phi}(0)}{N} = \bar{\phi} \quad (\text{D.3})$$

D.3 Écart type et TFD

Sous couvert de certaines hypothèses de régularité, le théorème de Parseval-Plancherel permet d'écrire pour des fonction continues :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(k)|^2 dk \quad (\text{D.4})$$

Sous forme discrète, compte tenu du changement de variable, cette égalité s'écrit :

$$\sum_{n=0}^{N-1} [\phi(n)]^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{\phi}(k)|^2 \quad (\text{D.5})$$

Sachant que $\frac{\hat{\phi}(0)}{N} = \bar{\phi}$, nous pouvons relier la variance de ϕ avec sa transformée de Fourier.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\phi(n)]^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{\phi}(k)|^2 \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\phi(n)]^2 - \bar{\phi}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{\phi}(k)|^2 - \frac{|\hat{\phi}(0)|^2}{N^2} \quad (\text{D.7})$$

$$\sigma_{\phi}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} |\hat{\phi}(k)|^2 \quad (\text{D.8})$$

D.4 Normalisation

Selon la définition (D.1), la transformée de Fourier de ϕ aura un module d'autant plus grand que la taille de l'échantillon est grande. De plus, la fréquence d'échantillonnage n'entre pas en jeu, ce qui peut être gênant lors d'applications réelles. Pour nos études, nous décidons donc d'utiliser la Densité Spectrale de Puissance (DSP) définie par

$$DSP_{\phi} \left(\frac{k}{N\delta t_{ech}} \right) = \frac{2\delta t_{ech}}{N} |\hat{\phi}(k)|^2, \quad 1 \leq k \leq (N-1)/2 \quad (\text{D.9})$$

δt_{ech} représente le pas d'échantillonnage. La DSP ainsi définie n'est étudiée que pour la moitié des valeurs de k avec un coefficient 2 pour des raisons de symétrie. La valeur en 0 est éliminée car elle représente la valeur moyenne du signal initial et n'a donc aucune importance lors d'une analyse de spectre. Pour des valeurs de N impaires, cette formulation permet d'obtenir une DSP exprimée en fonction de la fréquence d'échantillonnage et dont l'intégrale est égale à la variance du signal initial. La durée d'enregistrement n'a pas d'influence sur sa valeur.

Résumé

La présente étude a pour objectif de développer des outils et des modèles pour la simulation des grandes échelles en thermique dans le cadre d'un écoulement turbulent à faible nombre de Prandtl. Ceci est réalisé afin de pouvoir estimer les fluctuations de température près des parois dans le but d'évaluer le risque de fatigue thermique. Pour les écoulements à faible nombre de Prandtl, les structures thermiques sont bien plus grosses que les structures dynamiques, ce qui permet d'utiliser un maillage relativement large associé à une loi de paroi et un bon modèle sous maille pour la vitesse. Dans un premier temps, nous avons validé notre approche dans le cadre du canal plan périodique, et étudié différentes conditions limites en température : isotherme, isoflux et avec résolution de la thermique dans le mur. En outre, l'étude du canal a permis la génération d'une entrée turbulente pour un Té de mélange. Nous avons estimé la longueur des trois branches du Té afin de conserver un bon compromis entre précision et coût de calcul. Sur plusieurs configurations de Tés de mélange, les points présentant des maxima de fluctuations de température ont été situés, et une analyse spectrale a été réalisée.

Mots clefs : simulation des grandes échelles thermiques, faible nombre de Prandtl, entrée de fluide turbulente, modèles sous mailles, méthode dynamique, fatigue thermique, canal plan, Té de mélange, ISIS.

Abstract

The aim of this work is to develop tools and models to study thermal large-eddy simulations of low Prandtl number fluid flows. The goal is to quantify temperature fluctuations near the walls in order to estimate the risk of thermal striping. For low Prandtl number fluid flows, thermal structures are much smaller than dynamic ones ; this allows the use of a relatively coarse meshing grid associated to a wall law and a good subgrid-scale model for velocity. To start with, we validated our approach by studying periodic plane channel and analysed the impact of different thermal boundary conditions : isothermal, isoflux and conjugate heat transfer. Moreover, the periodic channel study permitted the generation of a turbulent inlet for a mixing Tee junction. To keep a good compromise solution between accuracy and computational cost, we estimated the length of the three pipe sections of the mixing Tee. On several configurations of mixing Tees, points with maximal values of temperature fluctuations were localized, and later a spectral analysis was made.

Keywords : large-eddy simulation, low Prandtl number, turbulent inlet, subgrid-scale models, dynamic method, thermal striping, plane channel, mixing Tee, ISIS.