

UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

Discipline : Mécanique, Génie Mécanique et Génie Civil
Formation doctorale : Mécanique des matériaux et des milieux complexes, des structures et des systèmes
École doctorale : Informatique, Structures, Systèmes

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2

Présentée et soutenue publiquement par

Nawfal Blal

Sujet

**Modélisation Micromécanique et Identification
Inverse de l'Endommagement par Approches
Cohésives**

Soutenue à Montpellier le 12 Septembre 2013 devant le jury composé de :

M.	F. Feyel	Chercheur, ONERA, Châtillon	Président
M.	J.-J. Marigo	Professeur, École Polytechnique, Palaiseau	Rapporteur
Mme.	A. Pandolfi	Professeur, Politecnico di Milano, Italie	Rapporteur
M.	M. Coret	Professeur, École Centrale, Nantes	Examineur
M.	S. Pagano	Directeur de Recherche, LMGC, Montpellier	Directeur
M.	L. Daridon	Professeur, Université Montpellier 2	Co-Directeur
M.	Y. Monerie	Ingénieur-Chercheur, IRSN, Cadarache	Co-Directeur

UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

Discipline : Mécanique, Génie Mécanique et Génie Civil
Formation doctorale : Mécanique des matériaux et des milieux complexes, des structures et des systèmes
École doctorale : Informatique, Structures, Systèmes

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2

Présentée et soutenue publiquement par

Nawfal Blal

Sujet

**Modélisation Micromécanique et Identification
Inverse de l'Endommagement par Approches
Cohésives**

Soutenue à Montpellier le 12 Septembre 2013 devant le jury composé de :

M.	F. Feyel	Chercheur, ONERA, Châtillon	Président
M.	J.-J. Marigo	Professeur, École Polytechnique, Palaiseau	Rapporteur
Mme.	A. Pandolfi	Professeur, Politecnico di Milano, Italie	Rapporteur
M.	M. Coret	Professeur, École Centrale, Nantes	Examineur
M.	S. Pagano	Directeur de Recherche, LMGC, Montpellier	Directeur
M.	L. Daridon	Professeur, Université Montpellier 2	Co-Directeur
M.	Y. Monerie	Ingénieur-Chercheur, IRSN, Cadarache	Co-Directeur

*à mes parents,
à mes deux frères*

Remerciements

Évidemment, ce travail n'aurait pas eu lieu sans le soutien et l'aide précieuse de trois personnes : Stéphane Pagano, Loïc Daridon et Yann Monerie. Je tiens à leur exprimer ma profonde gratitude pour tout ce qu'ils m'ont appris aussi bien scientifiquement qu'humainement. Je remercie Stéphane et Loïc de m'avoir ouvert la porte de la recherche. Merci pour votre aide, votre soutien, vos conseils et votre humour. Un grand merci à Yann pour ses remarques précieuses et son soutien moral dans les moments difficiles de cette aventure. Je te dois mes premiers pas en micromécanique et je n'oublierai jamais ta grande pédagogie, ton humour et tes qualités humaines. Qu'ils trouvent tous les trois ici le témoignage de ma profonde reconnaissance : j'ai eu beaucoup de chance de vous avoir comme encadrants ...

Je tiens ensuite à exprimer ma sincère reconnaissance aux membres du jury pour l'intérêt porté à mon travail. Je remercie M. Frédéric Feyel qui m'a fait l'honneur de présider mon jury, M. Jean Jacques Marigo et Mme. Anna Pandolfi d'avoir accepté d'être les rapporteurs de mes travaux, ainsi que M. Michel Coret examinateur de ma thèse. Je les remercie tous pour leurs remarques et discussions enrichissantes.

Je tourne maintenant le regard vers l'ensemble du personnel du LMGC afin de les remercier pour leur accueil ainsi que pour cette extraordinaire ambiance de travail. Je commence par Azdine, avec qui j'ai partagé, durant ces trois années, le bureau et des moments inoubliables (enseignements, conférences, repas, ...). Je tiens à remercier mes différents collègues du LMGC : Franck, Bertrand, Mathieu, Moulay Said, André, Fred, Hervé, Laurent, Emilien, Patrick, François, Thibault, Omar, ... ainsi que la bande des doctorants : Adrien, Vincent (dit deux mille), Patrick, Tarik, Wen, Antoine, Cécile, Kaytek, Lhassan, Li, Riccardo, Lorentzo ...

Une dédicace spéciale et un grand merci à Adil et Mohammed pour leur soutien et leur amitié précieuse.

Je tiens également à remercier F. Perales pour ses encouragements ainsi que sa disponibilité et son aide pour faire tourner le code Xper. Je remercie aussi P. G. Vincent et tous les membres du service LPTM de l'IRSN.

J'adresse ensuite mes remerciements à mes amis du laboratoire voisin LIRMM avec qui j'ai passé des moments inoubliables et que je remercie profondément pour leur gentillesse,

leur amitié et leurs encouragements : Abdrezak, Amine, Azhar, Hajer, Kamel, Kaouthar, Mohamed, Nadjeb (j'ai respecté l'ordre alphabétique).

Je remercie Aurélie pour sa gentillesse et son aide et j'espère qu'elle a pu acquérir des notions en mécanique en lisant ma thèse et celle d'Azdine.

Que les éventuels oubliés me pardonne ...

Finalement et non le moindre, que mes remerciements s'envolent au Maroc vers mes parents et mes frères. Quoique je dise, je ne vous remercierai jamais assez pour tout ce que vous m'avez offert. Un immense Merci pour votre amour et votre soutien.

Nawfal BLAL
Montpellier, le 20 Septembre 2013

Résumé

Modélisation micromécanique et identification inverse de l'endommagement par approches cohésives

Un modèle micromécanique est proposé pour une collection de zones cohésives insérées entre toutes les mailles d'une discrétisation de type éléments finis cohésifs-volumiques. Le principe de l'approche consiste à introduire un composite équivalent 'matrice-inclusions' comme une représentation de la discrétisation cohésive-volumique. Le modèle obtenu à l'aide de techniques d'homogénéisation (schéma de Hashin Shtrikman et approche de P. Ponte Castañeda) permet de décrire le comportement macroscopique élastique, fragile et ductile. Il est valable quel que soit le taux de triaxialité appliqué et la forme de la loi cohésive retenue, et permet de relier, d'une façon explicite, les propriétés macroscopiques du matériau aux différents paramètres cohésifs ainsi qu'à la densité de maillage.

Un premier résultat est l'établissement d'un critère pratique permettant de définir les raideurs cohésives au regard de la souplesse additionnelle inhérente à l'utilisation des modèles de zones cohésives intrinsèques. L'extension du modèle au cas de la rupture fragile et ductile, permet d'obtenir d'autres critères pratiques pour calibrer les autres paramètres cohésifs (contrainte cohésive maximale, ouverture critique, énergie de fissuration, ...). L'utilisation couplée des critères obtenus permet une calibration inverse des paramètres de la loi cohésive en fonction des propriétés macroscopiques du matériau et de la taille de maillage. De fait il est possible de prédire un comportement homogène global indépendamment de la taille du maillage.

Mots-clés : Micromécanique, Modèles de zones cohésives, Homogénéisation, Endommagement, Plasticité, Densité de maillage

Abstract

Micromechanical modeling and inverse identification of damage using cohesive approaches

In this study a micromechanical model is proposed for a collection of cohesive zone models embedded between two each elements of a standard cohesive-volumetric finite element method. An equivalent 'matrix-inclusions' composite is proposed as a representation of the cohesive-volumetric discretization. The overall behaviour is obtained using homogenization approaches (Hashin Shtrikman scheme and the P. Ponte Castañeda approach). The derived model deals with elastic, brittle and ductile materials. It is available whatever the triaxiality loading rate and the shape of the cohesive law, and leads to direct relationships between the overall material properties and the local cohesive parameters and the mesh density.

First, rigorous bounds on the normal and tangential cohesive stiffnesses are obtained leading to a suitable control of the inherent artificial elastic loss induced by intrinsic cohesive models. Second, theoretical criteria on damageable and ductile cohesive parameters are established (cohesive peak stress, critical separation, cohesive failure energy, ...). These criteria allow a practical calibration of the cohesive zone parameters as function of the overall material properties and the mesh length. The main interest of such calibration is its promising capacity to lead to a mesh-insensitive overall response in surface damage.

Keywords : Micromechanics, Cohesive zone models, Homogenization, Damage, Plasticity, Mesh density

Table des matières

Table des matières	1
Introduction	3
1 Quelques aspects de la mécanique de la rupture et de l'endommagement	11
1 Mécanique linéaire de la rupture	13
2 Mécanique continue de l'endommagement	14
3 Méthodes numériques pour la mécanique de fissuration	16
3.1 Érosion des éléments	16
3.2 XFEM	16
4 Les modèles de zones cohésives	18
4.1 Point D1 : instabilités	20
4.2 Point D2 : dépendance des chemins de fissuration au maillage	22
4.3 Point D3 : la perte de raideur artificielle	23
4.4 Point D4 : calibration de la loi cohésive	26
5 Bilan du chapitre	27
2 Le modèle micromécanique	29
1 Principe de l'approche	31
2 Milieu volumique avec des zones cohésives mixtes	33
2.1 Matrice élastique isotrope	33
2.2 Modèle de zone cohésive mixte	33
3 Le composite "matrice-inclusions cohésives" (MIC)	35
4 Bilan du chapitre	37
3 Comportement élastique	39
1 Homogénéisation linéaire	41
2 Critère pratique sur les raideurs cohésives et les longueurs des ondes élastiques	46
3 Application aux maillages plans	47
3.1 Maillage plan structuré	47
3.2 Maillage plan de type Delaunay	47
4 Validation numérique	48
4.1 Pertinence de l'estimation HS	48
4.2 Précision des critères sur les raideurs cohésives	49

5	Bilan du chapitre	52
4	Rupture fragile	55
1	Homogénéisation : formulation du problème non linéaire	57
2	Lien entre les paramètres cohésifs locaux et les paramètres globaux	59
3	Forme locale des lois cohésives pour la rupture fragile	61
3.1	Modèle cohésif bilinéaire mixte (BL)	63
3.2	Modèle cohésif mixte de type Monerie-Perales (MP)	66
3.3	Modèle cohésif mixte général (MZCG)	67
4	Critère sur la ténacité cohésive	70
5	Validation numérique	71
6	Bilan du chapitre	72
5	Rupture ductile	75
1	Théorie de la déformation	77
2	Homogénéisation : formulation du problème non linéaire	78
3	Application 1 : écoulement nul, plasticité parfaite	79
3.1	Matrice plastique avec des MZCs élastiques	79
3.2	Matrice plastique avec des MZCs "plastiques"	81
3.3	Matrice plastique avec des MZCs adoucissants	84
4	Critères pour le MZC ductile (cas de la plasticité parfaite)	88
5	Application 2 : écoulement non nul	90
6	Discussion	91
7	Bilan du chapitre	92
	Conclusion et perspectives	97
A	Quelques rappels sur les tenseurs du quatrième ordre	101
1	Isotropie	101
2	Isotropie transverse	102
B	Estimation HS pour le composite MIC	105
	L'approche PPC pour le cas d'un potentiel surfacique	111
C	Densité de maillage Z pour le cas 2D	115
1	Maillage structuré	115
2	Maillage de type Delaunay	115
2.1	Fonction de densité de probabilité de l	116
2.2	Densité de maillage Z	120
3	Résultats complémentaires pour d'autres maillages	121
	Bibliographie	127

Introduction

L'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN) est l'expert français public en matière de la recherche et d'expertise sur les risques nucléaires et radiologiques. Dans le cadre de l'étude de l'intégrité des structures nucléaires, essentiellement les cœurs de réacteurs nucléaires, le laboratoire de Micromécanique et d'Intégrité de Structures (MIST)¹ effectue des recherches sur le comportement et l'évolution microstructurale des matériaux dans des ambiances nocives (gradients thermiques et mécaniques, irradiation, etc). Plus particulièrement, et dans l'optique de mettre en place des outils numériques prédictifs pour la simulation de scénarii accidentels, il est nécessaire de modéliser les comportements adoucissants en tenant compte des mécanismes de fissuration et de rupture (FIGURE 1). Face aux difficultés liées à la microstructure complexe des matériaux utilisés dans ce domaine, la sûreté nucléaire doit tirer meilleur parti des développements analytiques et numériques des méthodes de changement d'échelles pour prédire le comportement équivalent du combustible et de son gainage en situations accidentelles.

Dans ce cadre, cette thèse vise à apporter quelques éléments de réponse concernant la modélisation et la simulation numérique de la *rupture des milieux hétérogènes et changements d'échelles* développées par le laboratoire MIST. On s'intéresse au développement de modèles micromécaniques dédiés aux simulations numériques des comportements adoucissants. La méthode numérique retenue est l'approche éléments finis cohésifs-volumique s'avérant efficace et pertinente. Cette approche repose sur une démarche multicorps pour l'analyse de la rupture en s'appuyant sur la notion des **Modèles de Zones Cohésives**. Le principe de l'approche multicorps consiste à scinder le comportement local en une partie adoucissante et une partie durcissante.

D'un point de vue numérique, le milieu discrétisé est décomposé en un ensemble de mailles éléments finis standards et considérées chacune comme un corps volumique indépendant. Ces mailles sont reliées entre elles par une loi surfacique intégrant tous les processus d'endommagement et de fissuration. Les modèles de zones cohésives sont utilisés pour modéliser cette loi surfacique.

Au travers d'une loi reliant l'effort de résistance à la séparation des lèvres d'une fissure en train de se créer à son ouverture, les modèles de zones cohésives permettent de suivre les mécanismes d'endommagement surfacique depuis l'amorçage des microfissures jusqu'à la rupture totale du matériau. Cependant, quelques aspects mécaniques et numériques

1. laboratoire "sans mur" commun tripartite entre l'IRSN, le CNRS et l'Université de Montpellier 2

concernant leurs applications restent grandement ouverts : la dépendance au maillage, la calibration des paramètres de la loi cohésive, la définition d'une longueur interne, le lien entre l'endommagement local et l'endommagement global, etc. L'objectif de cette thèse est d'apporter des éléments de réponses à ces questions à travers une modélisation micromécanique de l'endommagement sur la base d'une approche cohésive et de techniques d'**homogénéisation**.

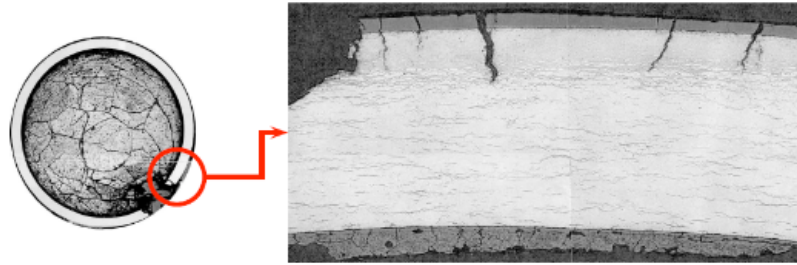


FIGURE 1 – Microstructure d'une gaine de Zircaloy irradiée et fissurée [Papin et al., 2000].

Comme annoncé, l'approche est basée sur une décomposition multicorps. Le principe de l'étude réside dans l'introduction d'un composite "matrice-inclusions cohésives" comme une représentation adéquate du milieu discrétisé avec une collection de zones cohésives. La matrice a le même comportement que les éléments volumiques tandis que le comportement des inclusions dérive de la loi cohésive surfacique en lui associant une épaisseur fictive destinée à tendre vers zéro. Le comportement effectif équivalent de ce composite est ensuite recherché à l'aide d'un schéma d'homogénéisation linéaire pour le comportement élastique et une méthode d'homogénéisation non linéaire pour la rupture fragile et ductile. Des relations directes entre les propriétés effectives du matériau considéré et ses propriétés locales sont obtenues. Ces relations font intervenir un paramètre lié à la densité de maillage, i.e la longueur (resp. surface) spécifique des interfaces cohésives pour un maillage 2D (resp. 3D). Une analyse inverse de ces relations permet *in fine* de redescendre dans les échelles et d'obtenir des *critères pratiques* pour la calibration des modèles de zones cohésives.

D'un point de vue général, cette thèse met en évidence les thématiques suivantes :

- a. **Les modèles de zones cohésives.** Quand les chemins de fissuration ne sont pas connus a priori et émergent du type de chargement appliqué, les modèles de zones cohésives intrinsèques, i.e. avec une raideur initiale finie, peuvent être insérés entre tous les éléments du maillage. Cette configuration conduit à une perte de raideur artificielle. Dans l'optique de ne pas biaiser l'élasticité globale du milieu étudié, cette perte de raideur doit être contrôlée au mieux.
- b. **Techniques d'homogénéisation.** Les techniques d'homogénéisation visent à estimer, au mieux, le comportement effectif d'un milieu hétérogène. Ce comportement dépend du comportement des différentes phases locales ainsi que de la microstructure.

Ce problème est appréhendé avec la construction de bornes ou estimations pour les propriétés élastiques effectives. Deux schémas d'homogénéisation sont abordés dans cette étude :

- un schéma d'homogénéisation linéaire dédié à l'estimation du comportement effectif du composite "matrice-inclusions cohésives" élastique. L'estimation retenue est celle de Hashin Shtrikman [Hashin et Shtrikman, 1963; Willis, 1977]. Le choix de ce schéma est justifié par : 1) l'aspect aléatoire de la microstructure. En effet, l'insertion de zones cohésives dans une discrétisation éléments finis standards doit recouvrir toutes les orientations et distributions spatiales pour ne pas privilégier des chemins de fissuration particuliers (e.g. un maillage de type Delaunay). Ainsi les inclusions cohésives doivent être distribuées et orientées aléatoirement dans le composite "matrice-inclusions". 2) L'estimation Hashin Shtrikman fournit une borne inférieure du comportement effectif pour le cas d'un maillage isotrope. Cette borne permet de contrôler la perte de raideur associée aux MZCs intrinsèques.
 - un schéma d'homogénéisation non linéaire dédié à l'estimation du comportement effectif du composite "matrice-inclusions" non linéaire (rupture fragile et ductile). L'approche variationnelle de [Ponte Castañeda, 1991] est adoptée pour le cas d'un potentiel surfacique non linéaire. Un composite linéaire de comparaison ayant la même microstructure que le composite "matrice-inclusions" est alors introduit. Son comportement "linéarisé" est décrit à travers le module sécant des phases non linéaires [Suquet, 1995]. Le schéma linéaire de Hashin Shtrikman est ensuite utilisé pour estimer le comportement effectif du composite linéaire de comparaison.
- c. **Méthodes des éléments finis cohésifs-volumiques.** La méthode des éléments finis cohésifs volumiques est utilisée pour la validation des différents résultats théoriques obtenus dans cette étude.

Trois résultats principaux sont obtenus dans cette étude :

Comportement élastique : contrôle de la perte de raideur artificielle. Pour le comportement élastique (matrice et zones cohésives élastiques), l'utilisation des modèles de zone cohésive intrinsèques induit une souplesse additionnelle artificielle ; cette souplesse est d'autant plus importante que le maillage est raffiné. Il est donc opportun de relier ces raideurs au maillage afin de ne pas biaiser l'élasticité globale. On propose un *critère rigoureux* permettant de contrôler cette perte de raideur en bornant par valeur inférieure l'énergie élastique macroscopique du milieu homogène équivalent au composite volumique-cohésif. Ce critère micromécanique permet de calibrer les raideurs cohésives en fonction de : 1/ le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau, 2/ la taille de maille et un paramètre lié à la morphologie de la discrétisation, et 3/ la perte de raideur apparente tolérée par l'utilisateur.

Rupture fragile : calibration de la ténacité cohésive. Pour le comportement fragile, le comportement des zones cohésives est régi par une loi non linéaire à 3 paramètres (raideur, contrainte maximale et énergie de fissuration). La loi macroscopique est obtenue

nue via l'approche variationnelle de [Ponte Castañeda, 1991]. Le problème final consiste à déterminer le paramètre d'endommagement surfacique solution d'un problème scalaire non linéaire. La résolution peut être obtenue analytiquement ou numériquement suivant le choix de la fonction d'adoucissement du modèle cohésif. Des relations directes entre les propriétés de fissuration globales et locales sont obtenues conduisant alors à des critères sur les deux paramètres cohésifs : la contrainte maximale et l'énergie cohésive.

Rupture ductile : effet de la triaxialité. L'extension du modèle micromécanique au cas d'un milieu volumique plastique est ensuite proposée. La théorie dite de la déformation (Ramberg-Osgood) est retenue pour le comportement de la matrice. L'application de l'approche variationnelle de [Ponte Castañeda, 1991] à ce cas où les deux phases, la matrice et les zones cohésives, ont un comportement non linéaire consiste à résoudre deux problèmes scalaires non linéaires. Des relations explicites entre les paramètres locaux et le comportement global sont obtenues et l'effet du taux de triaxialité sur le comportement effectif ductile est exhibé.

Les grands apports de ce travail peuvent être résumés dans les points suivants :

- i. L'estimation du comportement effectif d'un milieu volumique-cohésif est rigoureusement abordée avec une prise de moyenne adéquate et un passage à la limite au niveau de l'épaisseur fictive.
- ii. Un critère pratique pour la calibration des raideurs cohésives lors de l'usage de MZCs intrinsèques est obtenu. Ce critère ne se limite pas à des discrétisations 2D ou à un type particulier de chargement. Pour le cas des maillages plans isotropes, le critère obtenu est rigoureux et reste valable pour le cas des maillages isotropes 3D ou des maillages 2D et 3D structurés.
- iii. Un modèle micromécanique d'endommagement est obtenu pour les matériaux fragiles et ductiles sur la base d'une approche cohésive et l'extension non linéaire du schéma d'homogénéisation de Hashin Shtrikman. Le modèle permet de relier de façon explicite les propriétés de fissuration globales aux propriétés de fissuration locales. Une analyse inverse de ces relations conduit à des critères pour la calibration de la contrainte cohésive maximale et de l'énergie de fissuration cohésive.
- iv. Le modèle micromécanique obtenu exhibe l'effet du coefficient de Poisson sur la réponse globale ainsi que l'influence de la triaxialité pour les comportements ductiles.
- v. La calibration des lois cohésives suivant l'ensemble de ces critères proposés a l'avantage de dériver un comportement global indépendant de la taille de maillage. Cette indépendance doit être comprise au sens de la réponse matérielle du matériau (propriétés de fissuration du matériau) et pas au sens de l'indépendance spatiale des chemins de fissuration.

Deux résultats intermédiaires émergent de cette études et concernent :

- L'extension de la méthode variationnelle de [Ponte Castañeda, 1991] au cas d'un potentiel surfacique non linéaire.
- Les critères obtenus dans cette étude font intervenir le paramètre *densité de maillage*.

Ce paramètre est déterminé d'une façon déterministe pour le cas des maillages structurés et d'une façon stochastique pour le cas des maillages isotropes (e.g. maillage de Delaunay). L'estimation de ce paramètre pour les maillages isotropes générés par différents codes de calculs éléments finis est développée.

Le document suivant est organisé de la façon suivante : Dans un premier temps, un état de l'art des différents éléments et outils numériques de la mécanique de l'endommagement et de la fissuration est conduit dans le CHAPITRE 1. Ensuite le choix de la modélisation retenue pour aborder le problème étudié est présenté dans le CHAPITRE 2. Il s'agit de présenter le modèle micromécanique dont le principe remonte aux travaux de [Acary et Monerie, 2006], et qui consiste à remplacer une discrétisation de type éléments finis cohésifs volumiques par un composite "matrice-inclusions cohésives". Le CHAPITRE 3 est dédié à l'estimation du comportement effectif élastique par une technique d'homogénéisation variationnelle. Un critère sur la calibration des raideurs cohésives normale et tangentielle est obtenu. La pertinence de l'estimation et la précision du critère établi sont validées numériquement. Un modèle micromécanique d'endommagement est ensuite obtenu dans le CHAPITRE 4 pour les matériaux fragiles ainsi que des critères pour la calibration des paramètres cohésifs adoucissants. Finalement, le modèle micromécanique est étendu au cas des comportements ductiles dans le CHAPITRE 5.

L'ensemble des résultats obtenus dans cette étude se base sur un nombre de développements techniques concernant d'une part l'application de l'estimation Hashin Shtrikman avec une prise de moyenne sur les orientations équiprobables des inclusions, i.e. celles des arêtes du maillage sous-jacent, et un passage à la limite adéquat. Ce point est détaillé dans l'ANNEXE B. D'autre part le principe de la méthode variationnelle de Ponte Castñeda est étendu dans l'ANNEXE B au cas d'un potentiel surfacique non linéaire. Les différentes relations entre les propriétés globales et locales ainsi que les critères proposés font intervenir le paramètre clé : la *densité de maillage*. Le développement concernant l'estimation de ce paramètre pour les discrétisations planes est développé dans l'ANNEXE C.

Contribution scientifique

Reuves Internationales à comité de lecture

- [1] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie, S. Pagano, 2012. Micromechanics based criteria for the selection of cohesive zone parameters, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 246, 206-214.
- [2] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie, S. Pagano, 2012. Artificial compliance inherent to the intrinsic cohesive zone models : criteria and application to planar meshes, *International Journal of Fracture* 178, 71–83.
- [3] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie, and S. Pagano, 2011. Criteria on the artificial compliance inherent to the intrinsic cohesive zone. *Comptes Rendus de Mécanique* 339 789–795.

En préparation :

- [4] N. Blal, Y. Monerie, 2013. Mesh density in planar triangular tessellations, Soumis
- [5] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie, S. Pagano, 2013. Overall ductile behavior of a cohesive medium : a micromechanical-based approach, En préparation.

Conférences internationales

- [1] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie, S. Pagano, Overall elastoplastic behaviour of a cohesive medium, *3rd International Conference on Computational Modeling of Fracture and Failure of Materials and Structures*, Prague, Czech Republic, 2013
- [2] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie, S. Pagano, Some numerical and mechanical issues when using intrinsic cohesive approaches, *The 8th European Solid Mechanics Conference*, Graz, Austria, 2012
- [3] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie, S. Pagano, On mesh size to cohesive properties relationships, *Fifth International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering*, Liège, Belgium 2011
- [4] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie, S. Pagano, Overall behavior of elastic materials with embedded cohesive zone models, *ESIS Workshop on Numerical Modeling of Materials Failure*, Paris, France, 2011

Notations

Dans ce manuscrit, les scalaires seront notés par des lettres italiques romaines, e.g. a , ou grecques, e.g. α ; les vecteurs par des lettres romaines en caractères gras, e.g. \mathbf{u} (u_i en notation indicielle); les tenseurs du second ordre par des lettres à caractères gras romains, \mathbf{M} (M_{ij} en notation indicielle), ou grecques, $\boldsymbol{\varepsilon}$ (ε_{ij} en notation indicielle), et les tenseurs d'ordre quatre par des lettres doublement barrées romaines \mathbb{P} (P_{ijkl} en notation indicielle).

Le produit scalaire est dénoté par un seul point, e.g. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. En utilisant la sommation indicielle suivant la convention de Einstein, on a : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i$.

Le produit tensoriel dyadique est noté par \otimes , e.g. $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u_i v_j$ et $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$. Les autres produits tensoriels seront notés avec des points de façon à ce que le nombre de points désigne le nombre d'indices sur lesquels il faut sommer, e.g. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = A_{ij} u_j$, $\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}$, $\mathbb{P} : \mathbf{A} = P_{ijkl} A_{kl}$.

Chapitre 1

Quelques aspects théoriques et numériques de la mécanique de la rupture et de l'endommagement

*D*ans ce chapitre, on rappelle, brièvement, quelques éléments de la mécanique de la fissuration et de l'endommagement : i) la mécanique linéaire de la rupture, ii) la mécanique de l'endommagement et iii) les modèles de zones cohésives.

Le chapitre s'articule autour de trois axes : dans un premier temps, les différentes notions de la mécanique linéaire de la rupture et de la mécanique de l'endommagement seront abordées. Ensuite, l'accent sera mis sur les différentes méthodes numériques souvent utilisées pour la simulation des processus de fissuration avant de clôturer avec les modèles de zones cohésives. Il sera question de rappeler leur principe, avantages et limitations. Cet axe permettra de positionner le problème traité dans cette thèse.

Sommaire

1	Mécanique linéaire de la rupture	13
2	Mécanique continue de l'endommagement	14
3	Méthodes numériques pour la mécanique de fissuration	16
3.1	Érosion des éléments	16
3.2	XFEM	16
4	Les modèles de zones cohésives	18
4.1	Point D1 : instabilités	20
4.2	Point D2 : dépendance des chemins de fissuration au maillage	22
4.3	Point D3 : la perte de raideur artificielle	23
4.4	Point D4 : calibration de la loi cohésive	26
5	Bilan du chapitre	27

1 Mécanique linéaire de la rupture

La mécanique linéaire de la rupture (MLR) remonte aux travaux de [Griffith, 1920], qui, partant du premier principe de la thermodynamique, a établi une approche globale pour l'étude de l'évolution de la fissure en mettant en évidence une grandeur énergétique dite le *taux de restitution de l'énergie élastique* G : la fissure ne peut se propager que lorsque la quantité d'énergie disponible en pointe de la fissure atteint une valeur critique décrivant la ténacité du matériau G_c . En notant l la longueur de la fissure, le critère de Griffith de propagation de la rupture fragile s'écrit :

$$\begin{cases} G < G_c & \Rightarrow \dot{l} = 0 \\ G = G_c & \Rightarrow \dot{l} \geq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Parallèlement à cette approche globale et structurelle, [Irwin, 1957] a proposé un formalisme local et matériel permettant d'étudier l'avancée de la fissure en terme du facteur de concentration de contraintes à la pointe de la fissure K_M . Cette grandeur dépend de la géométrie du solide et du mode de chargement M ($M = I$ traction normale, $M = II$ cisaillement plan, $M = III$ cisaillement antiplan). Le critère de propagation de la fissure d'Irwin est alors :

$$\begin{cases} K_M < K_{Mc} & \Rightarrow \dot{l} = 0 \\ K_M = K_{Mc} & \Rightarrow \dot{l} \geq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

où les K_{Mc} sont des constantes intrinsèques au matériau. Ces deux approches sont reliées par la formule d'Irwin [Irwin, 1960] :

$$G = \frac{k+1}{2\mu} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2. \quad (1.3)$$

où k dépend de l'hypothèse adoptée (déformation plane ou contrainte plane) et μ est le coefficient de cisaillement du matériau. Les travaux de [Rice, 1968] ont permis d'introduire la notion de l'intégrale J définie par :

$$J = \int_{\Gamma} \left(\rho \omega(\boldsymbol{\varepsilon}) n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dx \quad (1.4)$$

avec Γ un contour quelconque ouvert, orienté, entourant la pointe de la fissure et de normale \mathbf{n} , ρ la masse volumique du matériau, ω son énergie élastique et \mathbf{u} (resp. $\boldsymbol{\sigma}$) le champ de déplacement (resp. contraintes). Dans le cas d'une fissure se propageant rectilignement suivant la direction x_1 , on montre que l'on a :

$$G = J. \quad (1.5)$$

D'un point de vue numérique, le concept de l'intégrale de contour J est souvent utilisé dans les simulations éléments finis dans l'optique d'appliquer un critère de propagation de type Griffith ou Irwin. L'intégrale de Rice est un moyen simple et efficace pour le calcul du taux de restitution d'énergie G loin de la pointe de la fissure en vertu de son indépendance

au contour du calcul en élasticité linéaire. D'autre part, l'intégrale de Rice permet de bien comprendre le lien entre l'approche locale d'Irwin et l'approche globale de Griffith : un bilan énergétique global peut traduire ce qui se passe localement.

La plupart des matériaux exhibent une zone dite d'élaboration de la fissure en amont de la pointe de la fissure. Pour les matériaux fragiles, cette zone est relativement petite par rapport à la taille de la structure, et la propagation de la fissure peut être décrite par la théorie de la mécanique linéaire de la rupture. Lorsque la zone de fissure est non négligeable devant la taille de la structure, deux cas se présentent : soit la zone est caractérisée par une dissipation plastique, et le comportement est dit être ductile, sinon et en absence des mécanismes de la plasticité, le comportement est dit être quasi-fragile. Pour ces deux cas d'autres outils de modélisation doivent être adoptés. Pour ces deux derniers cas, une méthode non linéaire doit être retenue pour la modélisation des processus de fissuration. Les critères obtenus par la MLR sous-entendent l'existence d'une pré-fissure et ne permettent pas de traiter le cas de l'initiation de la fissure. Ils ne permettent pas non plus de suivre l'évolution spatiale des chemins de fissuration. Cependant, ils sont implémentés dans plusieurs codes numériques, surtout pour les problèmes quasi-statiques.

2 Mécanique continue de l'endommagement

Le principe de la mécanique continue de l'endommagement repose sur la description de l'endommagement comme étant la mesure des micro-dégradations totales dans un volume élémentaire représentatif (VER) du matériau soumis à un chargement donné. [Kachanov, 1986] a posé les premières bases de ce formalisme en introduisant une variable d'endommagement définie comme le rapport entre l'aire totale des défauts vus dans une section du VER et la surface totale de cette section. [Lemaître et Chaboche, 1978] ont introduit la notion de contrainte effective permettant de mesurer, macroscopiquement, l'évolution de l'endommagement en mesurant la modification des caractéristiques élastiques du matériau considéré.

Plus généralement, la mécanique continue de l'endommagement relie la contrainte locale, σ , à la déformation locale, ε , à travers le module d'élasticité, \mathbb{C} , et une fonction d'adoucissement, \mathcal{S} , qui dépend de la variable d'endommagement scalaire d pour le cas de l'endommagement isotrope :

$$\sigma = \mathcal{S}(d) \mathbb{C} : \varepsilon, \quad (1.6)$$

La variable d est souvent comprise entre 1 et 0 ($d = 1$, le matériau est sain, $d = 0$, le matériau est totalement endommagé) et la fonction d'adoucissement \mathcal{S} vérifie :

- i. \mathcal{S} est régulière et vérifie $\mathcal{S}([0, 1]) = [0, 1]$
- ii. $\mathcal{S}(0) = 1$: matériau sain et $\mathcal{S}(1) = 0$: matériau rompu
- iii. \mathcal{S} est décroissante : évolution de l'endommagement.

Pour le modèle introduit par [Lemaître et Chaboche, 1978], on a $\mathcal{S} = 1 - d$. D'autres formes peuvent être retenues suivant le comportement du matériau. Si l'endommagement

TABLE 1.1 – Illustration de quelques variables locales à régulariser pour un modèle d'endommagement isotrope.

variable		modèle d'endommagement
la déformation	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}})) : \boldsymbol{\varepsilon}$
la variable d'endommagement	d	$\boldsymbol{\sigma} = \left(1 - \overline{d(\boldsymbol{\varepsilon})}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}$
taux de restitution d'énergie	G	$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d(\overline{G})) : \boldsymbol{\varepsilon}$

n'est pas isotrope, la diminution des caractéristiques élastiques du matériau est décrite à travers une variable tensorielle \mathbf{D} . Notons à ce stade que la mécanique continue de l'endommagement peut être revisitée dans le cadre du formalisme des *matériaux standards généralisés* [Nguyen, 1988] de façon à vérifier son admissibilité thermodynamique. Ce cadre repose sur la description de l'état mécanique du matériau avec la donnée d'une énergie libre et d'un potentiel de dissipation ainsi que des variables d'état observables et internes.

L'implémentation de la mécanique continue de l'endommagement dans les codes de calculs éléments finis exhibe une dépendance au maillage sévère qui se traduit par la localisation de l'endommagement dans une bande dont l'épaisseur est égale à la taille de maillage. Il en résulte que lorsque la taille de maillage tend vers zéro, l'énergie dissipée devient nulle contrairement à toute attente physique. Ce problème de *localisation* se traduit d'un point de vue mathématique par une perte d'ellipticité de l'opérateur tangent ([Lasry et Belytschko, 1988; Francfort et al., 2008]). Des techniques de régularisation dites *limiteurs de la localisation* ont été introduites afin de remédier à ce problème.

Le principe des méthodes de régularisation consiste à mesurer l'évolution de l'endommagement à travers une variable non locale qui est obtenue en régularisant la variable locale à l'aide d'un opérateur de régularisation. L'application de ces méthodes nécessite alors le choix de i) la variable à régulariser (e.g. TABLE 1.1) et ii) l'opérateur de régularisation adéquat. La variable à régulariser peut être la déformation, la variable d'endommagement, le taux de restitution d'énergie, etc. Quant à l'opérateur de régularisation, il peut être introduit sous une formulation intégrale explicite ou implicite ou sous une formulation à gradient (voir par exemple [Jirášek, 2007; Challamel, 2010] et les références citées). Une étude comparative entre différentes variables à régulariser (déformations, variable d'endommagement, taux de restitution d'énergie, contrainte inélastique, etc) peut être consultée dans [Jirášek, 2007] : les résultats obtenus pour le cas d'un modèle d'endommagement fragile unidimensionnel montrent qu'un choix non approprié de la variable à régulariser peut conduire à un comportement force-déplacement pathologique avec un état de contrainte qui ne s'annule pas même lorsque l'endommagement devient total (locking formulations). Notons que d'autres techniques de régularisation peuvent être utilisées pour surmonter le problème de localisation (e.g. l'introduction de la viscosité).

3 Méthodes numériques pour la mécanique de fissuration

3.1 Érosion des éléments

La méthode d'*érosion des éléments* est l'un des outils numériques simples utilisés pour simuler la propagation des fissures. Basés sur le formalisme de la mécanique linéaire de la rupture, les algorithmes dédiés à l'érosion des éléments consistent à éliminer l'ensemble des éléments finis dont l'énergie élastique vérifie le critère de propagation de Griffith (FIGURE 1.1). Souvent, les éléments ne sont pas érodés mais seulement remplacés avec des éléments à contraintes nulles. Bien que simples à implémenter numériquement, ces modèles exhibent une forte dépendance au maillage. D'autre part, la comparaison de quelques résultats expérimentaux avec cette méthode dans [Song et al., 2008] a mis en doute sa capacité pour être appliquée au cas dynamique.

Récemment, [Pandolfi et Ortiz, 2012] ont proposé de combiner cette méthode avec une approche en déformations propres (eigendéformations) pour les matériaux fragiles. Le principe de leur approche réside dans l'application du critère de Griffith en étendant le calcul de l'énergie élastique à un voisinage défini autour des éléments. L'élément est érodé si le critère de Griffith est vérifié, sinon il est conservé en gardant son comportement élastique. L'approche proposée par [Pandolfi et Ortiz, 2012] permet de surmonter l'obstacle de la dépendance au maillage grâce à la définition d'un voisinage pour le calcul du taux de restitution d'énergie.

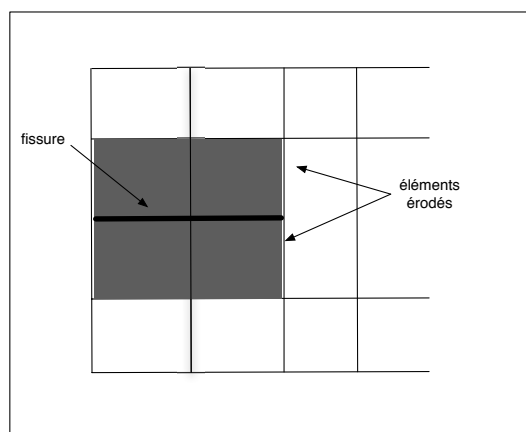


FIGURE 1.1 – Illustration de la méthode d'érosion des éléments.

3.2 XFEM

Les méthodes avec remaillage ont été utilisées en premier lieu pour modéliser les discontinuités dans les codes de calcul. Ces approches se basent sur un simple calcul éléments finis classique et un algorithme pour régénérer le maillage. Le grand inconvénient de ces

méthodes est que la fissure suit le maillage. L'utilisateur doit ainsi connaître a priori la réponse du modèle afin de pouvoir choisir les zones de raffinement et le chemin pour l'avancée de la fissure. Pour remédier à ce problème d'adaptation de maillage, plusieurs techniques ont été développées pour pouvoir suivre la fissure sans remaillage. Nous présenterons dans la suite deux d'entre elles.

La *méthode des éléments finis étendus* XFEM (eXtended Finite Element Method), introduite par [Belytschko et Black, 1999] et [Moës et al., 1999], se base sur l'enrichissement de l'interpolation du champ de déplacement pour tenir compte des discontinuités qui apparaissent lors de la fissuration du matériau. Cette méthode a l'avantage de prendre en compte l'évolution de la fissure partout dans la structure et dans toutes les orientations sans avoir besoin de remaillage. La géométrie de la fissure est décrite à travers deux fonctions de niveau dites "level set" (FIGURE 1.2) et l'enrichissement est effectué une fois que le critère de propagation de la fissure est vérifié (e.g. critère de perte d'ellipticité [Song et al., 2008]). L'approximation du champ de déplacement avec la méthode XFEM est de type :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{cont} + \mathbf{u}^{disc} \quad (1.7)$$

où \mathbf{u}^{cont} est l'interpolation standard éléments finis du champ de déplacement et \mathbf{u}^{disc} est un enrichissement du champ de déplacement tenant compte de la discontinuité et des singularités au niveau de la fissure.

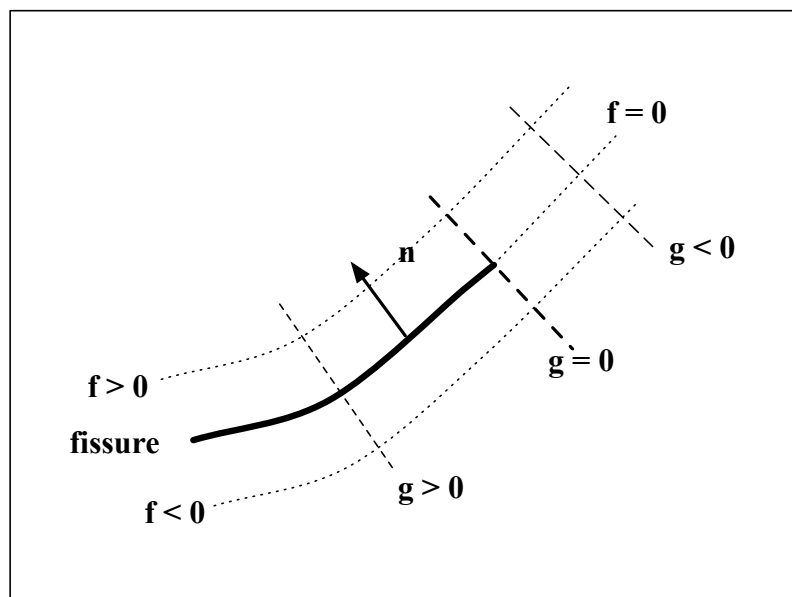


FIGURE 1.2 – Représentation de l'évolution de la fissure avec les fonctions de niveau f et g . Les fonctions "level set" permettant de définir : i) la distance signée à la surface fissurée (fonction f) et ii) la distance signée à la pointe de la fissure (fonction g).

La méthode XFEM est largement appliquée dans plusieurs codes de calcul pour les pro-

blèmes avec une fissure unique ou quelques fissures. Cependant son utilisation pour des cas avec plusieurs fissures devient coûteuse surtout au niveau de la bifurcation des fissures. D'autres méthodes numériques sont proposées dans la littérature, nous nous restreignons dans la suite à la méthode éléments finis cohésifs-volumiques qui a l'avantage de combiner la méthode des éléments finis et les modèles de zones cohésives. Le lecteur intéressé peut trouver une revisite détaillée sur les différentes méthodes numériques de la rupture, les différents critères utilisés et les différents algorithmes pour capturer les chemins de la fissuration dans [Rabczuk, 2012].

4 Les modèles de zones cohésives

Les *modèles de zones cohésives* (MZC) supposent l'existence d'une zone cohésive séparant la partie rompue du matériau (partie avec contrainte nulle) et la partie saine (FIGURE 1.3). Cette *process zone* est régie par une relation reliant la contrainte à l'ouverture de la fissure. Les MZCs peuvent être considérés comme une amélioration de la théorie de Griffith, qui suppose que la zone d'élaboration de la fissure est de taille négligeable devant les dimensions de la structure et n'offre pas un critère pour l'initiation de la fissure.

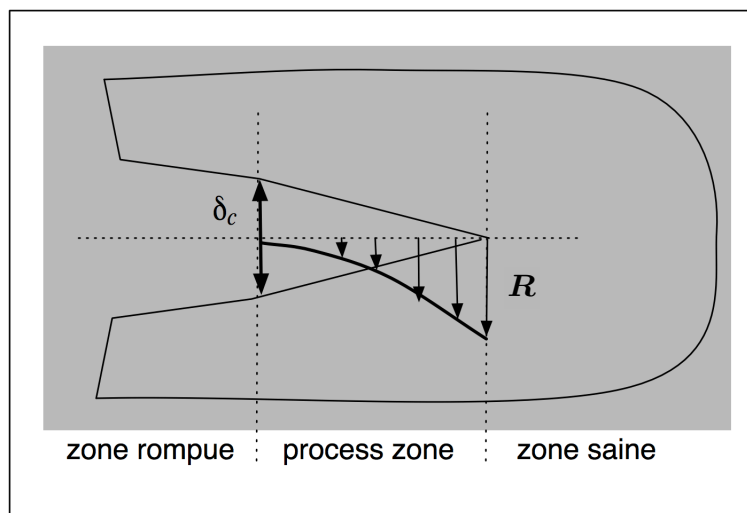


FIGURE 1.3 – Illustration du principe d'une fissure cohésive (Contrainte cohésive \mathbf{R} et ouverture critique δ_c).

Le principe des MZCs, dont on doit les bases conceptuelles aux travaux de [Dugdale, 1960] et [Barenblatt, 1962], réside dans la description de la relation entre l'effort résistant à la séparation de la fissure (le vecteur contrainte cohésive \mathbf{R}) et l'ouverture de la fissure (le vecteur saut de déplacement $[\mathbf{u}]$). Au travers cette relation, ces modèles permettent de suivre les mécanismes d'endommagement surfacique depuis l'amorçage des microfissures

jusqu'à la rupture totale du matériau sans critères ad-hoc. Cette loi surfacique est souvent donnée sous la forme d'une loi de type traction-séparation :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}([\mathbf{u}]),$$

ou à partir d'un potentiel surfacique, φ , dont dérive la contrainte cohésive \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \varphi}{\partial [\mathbf{u}]}.$$

Les modèles de zones cohésives peuvent être extrinsèques, i.e. sans partie élastique et une raideur initiale infinie (FIGURE 1.4 à droite en discontinu) [Camacho et Ortiz, 1996; Ortiz et Pandolfi, 1999] ou intrinsèques, i.e. avec une partie élastique et une raideur initiale finie (FIGURE 1.4 à droite en continu) [Needleman, 1987]. Les modèles extrinsèques s'avèrent être plus stables que les modèles intrinsèques.

Quand on connaît a priori le chemin de fissuration, les MZCs peuvent être incorporés dans une région précise du maillage. Sinon ils peuvent être insérés entre tous les éléments de la discrétisation et les chemins de fissuration émergent du chargement appliqué [Xu et Needleman, 1994]. Cette situation induit une perte de raideur artificielle qui doit être contrôlée.

Différents formes de lois existent dans la littérature : loi polynomiale [Needleman, 1987], loi exponentielle [Xu et Needleman, 1994], loi trapézoïdale [Tvergaard et Hutchinson, 1992], loi bilinéaire [Geubelle et Baylor, 1998], etc. Une zoologie détaillée des différents modèles disponibles dans la littérature peut être consultée dans [Monerie, 2000]. Bien que ces travaux présentent des formes différentes, on distingue toujours trois parties dans un modèle cohésif intrinsèque (FIGURE 1.4 à gauche) : *i*) une augmentation de la contrainte cohésive (partie 1) jusqu'à l'atteinte d'une valeur maximale, *ii*) un endommagement de la zone cohésive décrit par une décroissance de la contrainte cohésive jusqu'à ce qu'elle s'annule quand le saut de déplacement atteint sa valeur critique (partie 2), *iii*) une annulation de la contrainte cohésive correspondant à une zone totalement endommagée (partie 3). De plus, ces modèles offrent la possibilité de coupler facilement d'autres phénomènes physiques non linéaires accompagnant la fissuration (contact, frottement, pression) (e.g. [Raous, 1999; Monerie, 2000]) ou de coupler les aspects thermiques et mécaniques aux niveaux des interfaces à travers des MZCs thermo-mécaniques (e.g. [Özdemir et al., 2010] et les références citées dedans)

D'un point de vue numérique (FIGURE 1.5), ces modèles peuvent être utilisés comme des éléments joints (e.g. [Andersson et Stigh, 2004]), en couplage avec la méthode XFEM (e.g. [Moës et Belytschko, 2002]) ou comme conditions aux limites mixtes (e.g. [Perales et al., 2010]). Dans la suite de ce travail, on s'intéresse à la méthode des éléments finis cohésifs-volumiques qui repose sur une décomposition multicrops (cf FIGURE 1.6). Cette technique consiste à décomposer le comportement local du matériau en une partie surfacique adoucissante (modélisée par les MZCs) et une partie volumique durcissante (modélisée par les éléments volumiques classiques). Loin d'être seulement une vision numérique des choses, la pertinence de cette décomposition a été vérifiée d'un point de vue matériel : à l'échelle

des bandes de cisaillement, les mécanismes d'endommagement peuvent être résumés dans un comportement surfacique ([Richefeu et al., 2012]). On reviendra en détail sur cette méthode dans le CHAPITRE 2.

Malgré tous les développements proposés durant ces dernières années concernant les MZCs, leur utilisation a suscité différentes difficultés théoriques et numériques. Une illustration de ce qui a été, ou devrait être, approfondi concernant l'usage des MZCs est exposée dans [Acary et Monerie, 2006; Monerie, 2011]. D'une façon générale, les difficultés associées aux MZCs concernent essentiellement :

- D1. l'instabilité due à l'adoucissement qui rend le problème mal posé,
- D2. la convergence spatiale et matérielle des résultats numériques,
- D3. la maîtrise de la perte de raideur artificielle induite par les modèles intrinsèques,
- D4. et la calibration de la loi cohésive.

Si les derniers travaux de [Monerie, 2000; Chaboche et al., 2001; Acary et Monerie, 2006] ont permis d'avancer sur le premier point D1 en maîtrisant le problème des instabilités, les autres points D2, D3 et D4 restent grandement ouverts et doivent être approfondis.

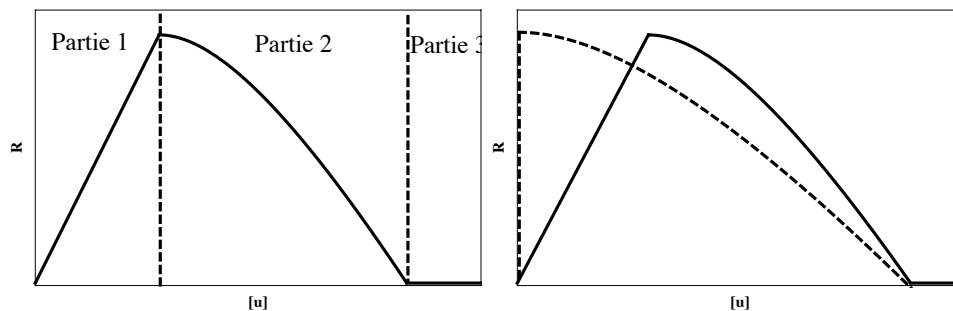


FIGURE 1.4 – Modèle de zone cohésive : illustration des différentes parties d'une loi cohésive (à gauche) et loi intrinsèque et extrinsèque (à droite).

4.1 Point D1 : instabilités

Le problème d'instabilité des MZCs est dû à leur aspect adoucissant qui rend le problème de cohésion entre deux solides mal posé en conduisant à une perte de l'unicité de la solution. [Monerie, 2000; Acary et Monerie, 2006] ont proposé un théorème d'unicité de la solution. Ce point peut être illustré avec l'exemple 1D développé dans [Chaboche et al., 2001] (FIGURE 1.7).

Considérons deux éléments volumiques (module de Young E , longueur L) séparé par une interface cohésive avec une évolution de la contrainte $T = -\zeta(u)$. Le déplacement total de la structure est :

$$U = u - \frac{L}{E}T. \quad (1.8)$$

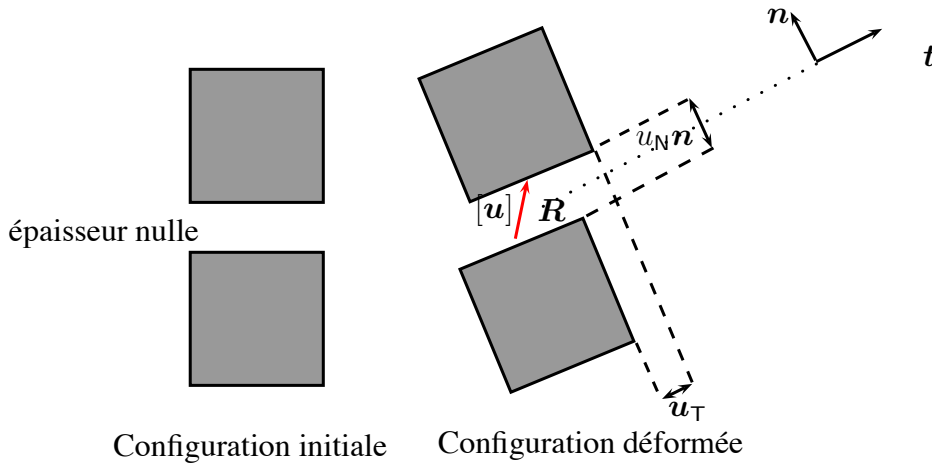


FIGURE 1.5 – Illustration d’un élément cohésif.

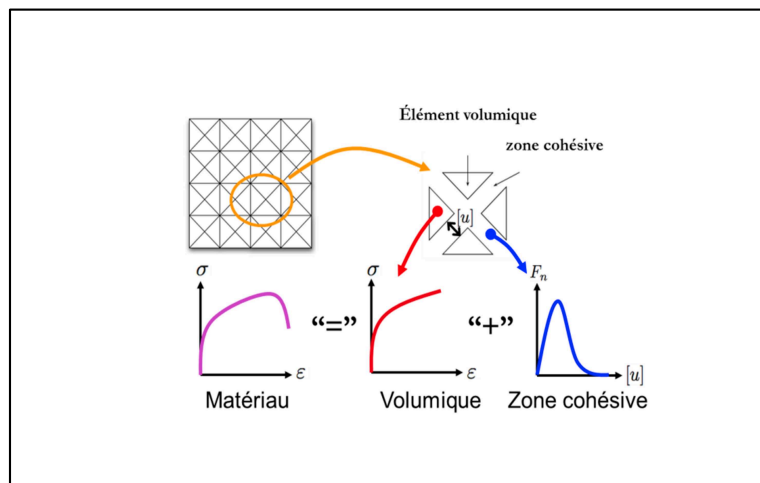


FIGURE 1.6 – Principe de la décomposition multicorps [Wen, 2012].

L’équilibre de la structure est l’intersection de la ligne :

$$-T = \frac{E}{L}(U - u) \tag{1.9}$$

et de la courbe de la contrainte cohésive $T = -\zeta(u)$. Ainsi deux situations peuvent se présenter :

- $k = E/L$ est suffisamment grand et il existera toujours un point de fonctionnement (stabilité),
- $k = E/L$ est petit ce qui conduit à un saut de solution (instabilité).

D’un point de vue énergétique, la deuxième situation correspond à une énergie consommée par la séparation des deux éléments qui n’équilibre pas l’énergie stockée. La condition

d'unicité de la solution pour ce cas s'écrit (u_{peak} est l'ouverture à contrainte maximale) :

$$\sup_{u > u_{peak}} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right| < \frac{E}{L} \quad (1.10)$$

Sur le plan numérique, le problème du saut de solution peut être surmonté avec des méthodes de régularisation. La méthode de régularisation dynamique est souvent utilisée et se base sur la transformation de l'énergie stockée dans la structure en énergie cinétique.

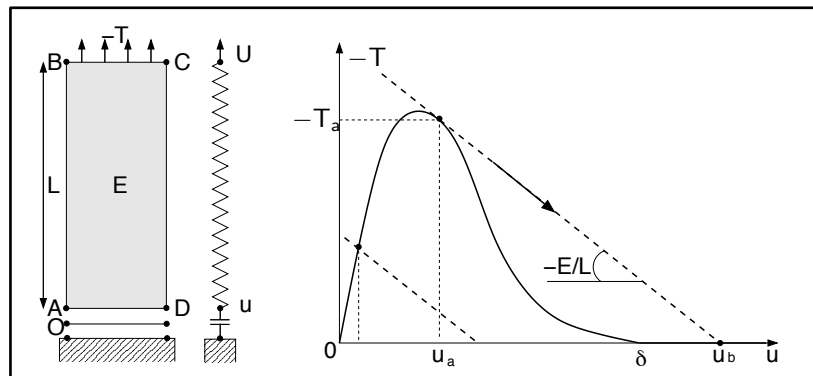


FIGURE 1.7 – Illustration unidimensionnelle du problème d'instabilité d'un modèle cohésif [Chaboche et al., 2001].

4.2 Point D2 : dépendance des chemins de fissuration au maillage

Le papier de [Tijssens et al., 2000] est le premier à avoir concrètement mis en évidence la dépendance des chemins de fissuration à la morphologie du maillage (FIGURE 1.8 à gauche et au centre). Néanmoins, ces auteurs ont remarqué que lorsque le calcul éléments finis converge, la réponse macroscopique traction-ouverture reste indépendante de la taille de maillage (FIGURE 1.8 à droite). Pour remédier au problème de la dépendance spatiale au maillage, plus particulièrement quand le chemin de fissuration est inconnu *a priori*, on peut utiliser une discrétisation respectant la propriété dite d'*isopérimétrie*, i.e. des interfaces cohésives recouvrant toutes les orientations de l'espace. Les maillages dits "pin-wheel tilling" développés par [Radin et Sadun, 1996] et utilisés par [Papoulia et al., 2006] pour les zones cohésives permettent d'avoir des résultats satisfaisants puisqu'ils vérifient cette propriété. Cependant, cette technique conduit à une dégénérescence de la qualité des mailles éléments finis.

Les faces des éléments finis (arêtes en 2D) sont les chemins de fissuration potentielles dans la méthode des éléments finis cohésifs volumiques. La discrétisation doit être alors *isotrope* par rapport aux : i) orientations et distributions des interfaces ainsi que par rapport aux ii) chemins de fissuration. L'isotropie du maillage par rapport aux orientations et

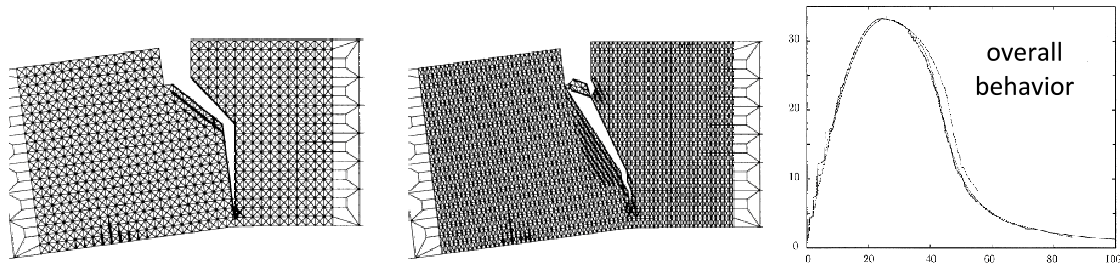


FIGURE 1.8 – Non unicité des chemins de fissuration suivant la topologie du maillage (à gauche) et convergence de la réponse globale (à droite) [Tijssens et al., 2000].

distributions permettent de ne pas privilégier des chemins particuliers pour la fissuration. L’isotropie par rapport à la fissure consiste à avoir une tortuosité qui reste indépendante de l’orientation de l’angle d’une fissure réelle. Dans le cas d’une fissure rectiligne, on définit la tortuosité comme étant le rapport entre la longueur d’une fissure réelle \mathcal{L} , et la longueur de la fissure numérique, qui suivra le chemin le plus court défini par les interfaces. En notant \mathcal{L}_c ($\mathcal{L}_c \geq \mathcal{L}$) la longueur de la fissure numérique, la tortuosité est définie par :

$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{L}_c}{\mathcal{L}}. \quad (1.11)$$

Pour un maillage structuré, cette tortuosité dépend fortement de l’orientation de la fissure puisque une telle discrétisation prévoit des chemins favorisés pour l’avancée de la fissure : e.g. la tortuosité atteint ses valeurs optimales pour les orientations 0 , $\pi/4$ et $\pi/2$ pour un maillage structuré en mailles carrées découpées en quatre triangles isocèles et qu’on notera dans la suite ”CTQ”¹ (FIGURE 1.9 en haut à gauche). Pour un maillage de type Delaunay, cette dépendance devient moins importante (FIGURE 1.9 en bas).

4.3 Point D3 : la perte de raideur artificielle

L’insertion de zones cohésives dans toutes les interfaces d’une discrétisation éléments finis s’avère efficace pour l’étude de la propagation des fissures. Cependant, cela induit une souplesse additionnelle artificielle, qui est d’autant plus importante que le maillage est raffiné. Pour illustrer cet aspect, considérons le cas simple 1D de deux éléments volumiques séparés par une zone cohésive [Song et al., 2006; Turon et al., 2007] (FIGURE 1.10). La condition d’équilibre statique s’écrit dans ce cas :

$$\frac{F}{S} = E^M \epsilon = C_N [\mathbf{u}], \quad (1.12)$$

où F est l’effort appliqué au bord de la structure (de section A et de longueur L_{mesh}), E^M le module de Young de la partie volumique, C_N la raideur normale cohésive et $[\mathbf{u}]$ le saut

1. CTQ pour Cross-Triangle Quadrilateral meshes

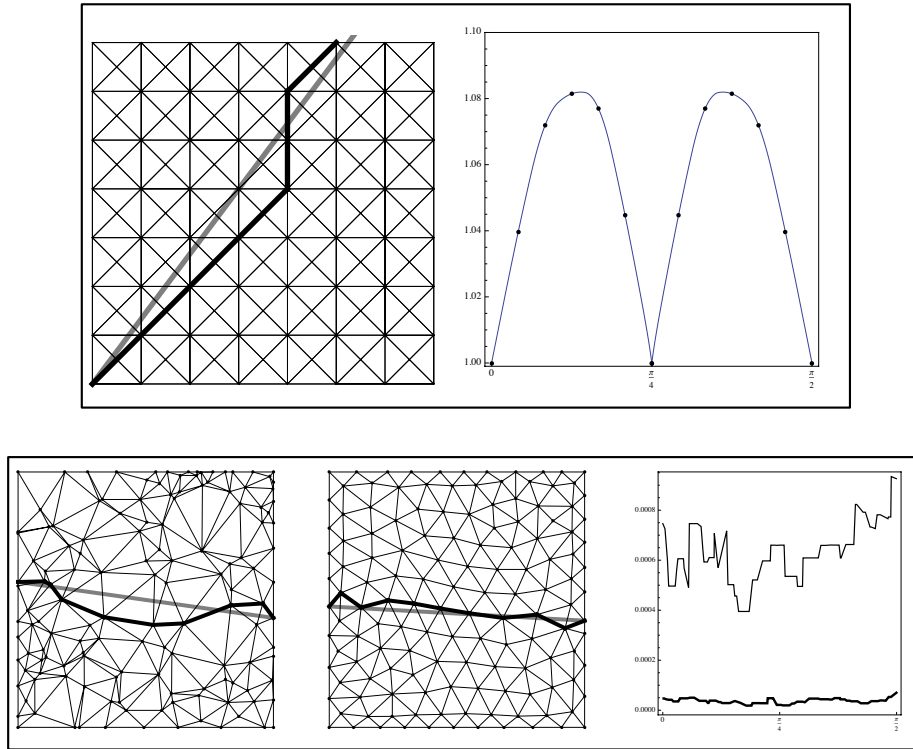


FIGURE 1.9 – Tortuosité en fonction de l'orientation de la fissure. En haut : cas d'un maillage structuré. En bas : cas d'un maillage de type Delaunay avec une distribution de Poisson des nœuds (à gauche) et cas d'un maillage de type Delaunay avec relaxation par l'algorithme de Lloyd [Lloyd, 1982] (au centre). Le cas d'un maillage avec relaxation s'avère plus isotrope.

de déplacement. A partir de la définition de la déformation totale :

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{F/A}{E^M} + \frac{F/A}{C_N L_{\text{mesh}}}, \quad (1.13)$$

le module d'Young apparent normé s'écrit sous la forme :

$$\frac{\tilde{E}}{E^M} = \frac{F/A}{E^M \tilde{\varepsilon}} = \frac{\xi}{1 + \xi} \quad \text{où} \quad \xi = \frac{C_N L_{\text{mesh}}}{E^M}. \quad (1.14)$$

D'après l'équation (1.14), le réel ξ semble être le paramètre clé pour contrôler la dépendance des approches intrinsèques au maillage. En effet, il est clair que la souplesse additionnelle disparaît ($\tilde{E} \rightarrow E^M$) quand $\xi \rightarrow +\infty$ (FIGURE 1.10 à droite). Autrement dit, l'introduction de MZCs intrinsèques le long de tous les éléments n'influence pas l'élasticité macroscopique quand le paramètre ξ tend vers $+\infty$.

Dans l'optique d'avoir des MZCs invisibles, i.e. faire disparaître la souplesse additionnelle induite par leur présence, des critères semi-empiriques portant sur le ratio ξ ont été proposés dans la littérature.

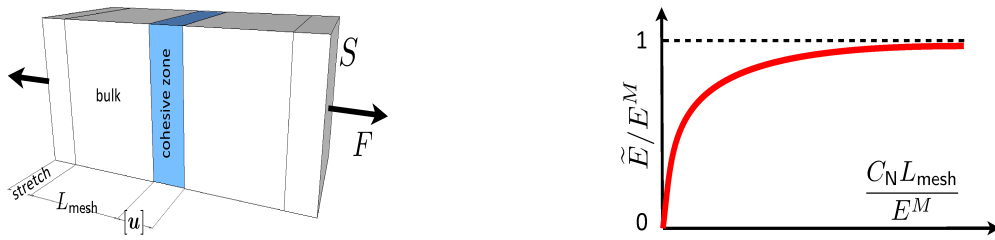


FIGURE 1.10 – Illustration de la relation entre le module de Young apparent et la taille de maillage dans le cas unidimensionnel : à gauche, une partie représentative d’une discrétisation éléments finis 1-D avec une zone cohésive insérée entre deux éléments, à droite, le module de Young apparent normé en fonction de la taille du maillage.

Les travaux de [Turon et al., 2007] concernant la simulation numérique de délimitage proposent de prendre $\xi > 50$ afin d’avoir une perte de raideur élastique ne dépassant pas 2% ($\tilde{E}/E^M < 2\%$). En se basant sur des résultats numériques d’essais en traction et en cisaillement, [Espinosa et Zavattieri, 2003] montrent que la vitesse des ondes élastiques reste invariante à travers une ligne cohésive séparant deux milieux isotropes quand $\xi \geq 10$. De leur côté, [Tomar et al., 2004] ont proposé un critère sur les raideurs cohésives en estimant la souplesse additionnelle pour un maillage de type CTQ en 2D. Leur critère est obtenu en étudiant trois types de chargement différents : traction 1D, traction bi-axiale et flexion. Afin d’illustrer leur procédure, on rappelle dans la suite la démarche suivie pour le cas d’un chargement en traction et on donnera sans détails les résultats obtenus pour les autres cas.

Considérons un domaine 2D discrétisé en $M \times N$ carrés (maillage CTQ). On note L_{mesh} la taille de maille correspondant à la longueur du côté des carrés. L’idée consiste à calculer l’énergie élastique du milieu cohésif-volumique discrétisé d’une part et du milieu homogène équivalent de l’autre part. L’énergie potentielle du milieu discrétisé, notée \mathcal{U}_d , est la somme de l’énergie dans les éléments volumiques, notée \mathcal{U}_v , et l’énergie dans les interfaces cohésives, notée \mathcal{U}_c :

$$\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_v + \mathcal{U}_c. \quad (1.15)$$

En appliquant une traction homogène uniaxiale, $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x$, on a :

$$\mathcal{U}_v = M \times N \times L_{\text{mesh}}^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sigma_0^2}{E'} \quad (1.16)$$

avec $E' = E^M$ sous l’hypothèse des contraintes planes et $E' = E^M / (1 - (\nu^M)^2)$ pour des déformations planes, et où l’on a noté ν^M le coefficient de Poisson du matériau. L’énergie associée aux interfaces cohésives (raideur normale C_N et tangentielle C_T) est :

$$\mathcal{U}_c = M \times N \times L_{\text{mesh}} \times \frac{1}{2} \sigma_0^2 \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \frac{1}{C_N} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{C_T} \right). \quad (1.17)$$

D'autre part, l'énergie potentielle du milieu homogène équivalent est :

$$\tilde{\mathcal{U}} = M \times N \times L_{\text{mesh}}^2 \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{\tilde{E}}. \quad (1.18)$$

L'identification des deux énergies $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}_b + \mathcal{U}_c$ donne :

$$\frac{1}{\tilde{E}} = \frac{1}{E'} + \frac{1}{L_{\text{mesh}}} \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \frac{1}{C_N} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{C_T} \right). \quad (1.19)$$

Afin d'estimer l'influence de l'incorporation des zones cohésives dans la discrétisation, la perte de raideur associée est quantifiée par la norme suivante :

$$R_1 = \frac{1/\tilde{E} - 1/E'}{1/E'} = \xi \alpha \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{C_N}{C_T} \right). \quad (1.20)$$

où $\alpha = 1$ pour les contraintes planes et $\alpha = 1/(1 - (\nu^M)^2)$ pour les déformations planes. De la même façon on peut estimer deux autres pertes de raideur : R_2 associée au cas d'une traction biaxiale et R_3 pour le cas d'un cisaillement (cf. TABLE 1.2). Ainsi l'insertion de zones cohésives n'influencera pas la raideur apparente du milieu si la condition suivante est vérifiée : $\max(R_1, R_2, R_3) \ll 1$. Pour le cas d'un modèle cohésif avec $C_N = C_T$ cela conduit à :

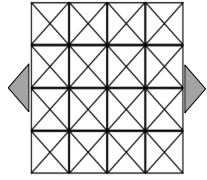
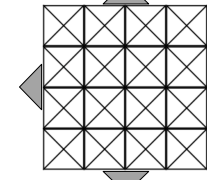
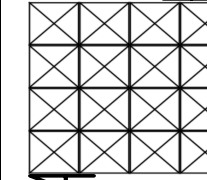
$$\xi \gg \alpha \frac{\sqrt{2} + 1}{1 - \nu^M}. \quad (1.21)$$

Les critères rappelés auparavant sont (semi) empiriques et se limitent à des situations simples (chargements particuliers ou modélisation 1D ou 2D). Aucun travail n'est disponible dans la littérature permettant de généraliser ce genre de résultats à des situations plus complexes. **On propose dans le Chapitre 3 un critère pratique pour contrôler la perte de raideur artificiellement induite par les MZCs intrinsèques. Le nouveau critère est applicable pour tout type de chargement et à des configurations 3D.**

4.4 Point D4 : calibration de la loi cohésive

Un modèle de zone cohésive est défini par un ensemble de paramètres ainsi que la forme de la loi cohésive (par forme il faut comprendre la forme géométrique de la relation $\mathbf{R} - [\mathbf{u}]$). L'utilisation des modèles de zones cohésives a longtemps suscité des questions sur le choix de ces paramètres, par exemple, combien de paramètres faut-il pour décrire une loi cohésive? comment faut-il les calibrer (propriétés matériaux ou pas)? quel est l'effet de la forme de la loi cohésive? Dans les travaux de [Tvergaard et Hutchinson, 1992], la contrainte maximale que peut supporter le modèle cohésif et l'aire sous la courbe de la loi cohésive semblent être les deux paramètres clé des MZCs. D'autres auteurs ont ensuite postulé qu'il suffit en général de deux paramètres pour définir une loi cohésive (contrainte

TABLE 1.2 – Estimation de la perte de raideur suivant les 3 modes de chargement [Tomar et al., 2004] (G coefficient de cisaillement)

$\sigma = \sigma_0 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x$	$\sigma = \sigma_0 (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y)$	$\sigma = 2\sigma_0 \mathbf{e}_x \otimes_s \mathbf{e}_y$
		
$R_1 = \frac{1/\tilde{E} - 1/E'}{1/E'}$ $= \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} C_N}{2 C_T} \right) \xi \alpha$	$R_2 = \frac{(1 - \tilde{\nu})/\tilde{E} - (1 - \nu^M)/E'}{(1 - \nu^M)/E'}$ $= \left(1 + \sqrt{2} \frac{C_N}{C_T} \right) \frac{\xi \alpha}{1 - \nu^M}$	$R_3 = \frac{1/\tilde{G} - 1/G^M}{1/G^M}$ $= \left(\sqrt{2} + \frac{C_N}{C_T} \right) \frac{\xi \alpha}{1 + \nu^M}$

maximale et énergie de fissuration) et que la forme de la loi n'est pas importante. Cependant, ce point a été mis en doute par d'autres travaux. L'influence de la forme géométrique de la loi cohésive a été abordée dans [Chandra et al., 2002] en comparant les résultats obtenus numériquement sur la base d'une loi bilinéaire et exponentielle aux résultats expérimentaux.

Une règle empirique souvent prescrite consiste à utiliser une loi triangulaire pour le cas de la rupture fragile et une loi trapézoïdale pour le cas ductile. La contrainte cohésive maximale est souvent prise de l'ordre de 3 fois la limite d'élasticité du matériau et l'énergie cohésive est prise égale au taux de restitution d'énergie critique du matériau. Récemment, [Richefeu et al., 2012] se sont servi de la technique de corrélation d'images numériques pour déterminer le comportement local du matériau à l'aide de mesures cinématiques. Cette démarche conduit à une méthodologie expérimentale efficace pour l'identification de la loi cohésive. En étendant ce principe, [Wen, 2012] a proposé une méthodologie hybride couplant mesures expérimentales et simulation numérique pour l'identification du comportement volumique ductile du matériau, de sa réponse surfacique adoucissante ainsi que d'une taille caractéristique pour la calibration de la loi cohésive en guise de simulations numériques. **On propose dans le Chapitre 4 et le Chapitre 5 une méthodologie pratique pour la calibration des lois cohésives indépendamment de leurs formes. Cette méthodologie concerne les matériaux fragiles comme ductiles.**

5 Bilan du chapitre

Plusieurs approches ont été proposées dans la littérature pour la modélisation des mécanismes d'endommagement et de fissuration. Les grandes classes ont été brièvement présentées dans ce chapitre : la mécanique linéaire de la rupture, la mécanique continue de l'endommagement et les modèles de zones cohésives. La mécanique linéaire de la rupture

se base sur le critère énergétique de Griffith et offre un critère pour la propagation des fissures. Elle peut être appliquée pour des cas simples de matériaux élastiques avec évolution quasi-statique. Cependant, elle ne permet pas de traiter le problème de l'initiation et l'évolution spatiale de la fissure. La mécanique de l'endommagement mesure l'évolution de l'endommagement en estimant la dégradation des propriétés élastiques du matériaux sain via une quantité scalaire (endommagement isotrope) ou tensorielle (endommagement anisotrope). Elle est confrontée au problème de localisation de la bande d'endommagement. Quant aux modèles de zones cohésives, ils étudient l'évolution de l'endommagement localement à travers une relation reliant la séparation des lèvres de la fissure à la contrainte s'opposant à cette séparation. Ces modèles permettent de surmonter les limites de la théorie de Griffith ainsi que de décrire les mécanismes de la fissuration en tenant compte de la microstructure.

Sur le plan numérique, une dizaine de méthodes numériques ont été développées ces dernières années. Elle se basent sur des critères énergétiques de type Griffith (érosion des éléments, XFEM, etc) ou des critères locaux de type cohésif (XFEM, éléments finis cohésifs-volumiques). Les avantages et limites de la méthode d'érosion des éléments et de la XFEM ont été exposés.

De nos jours, la méthode des éléments finis cohésifs-volumiques est largement utilisée dans les codes de calcul. Cependant, différentes difficultés théoriques et numériques ont accompagné son utilisation : dépendance des chemins de fissuration au maillage, perte de raideur artificielle induite par les modèles cohésifs intrinsèque, effet de la forme de la loi, calibration des paramètres cohésifs, etc. Un état de l'art de ce qui a été obtenu dans la littérature ou reste à obtenir, a été rappelé, permettant de mettre l'accent sur les motivations de cette thèse.

Chapitre 2

Le modèle micromécanique

*D*ans cette étude, l'estimation du comportement effectif d'un milieu volumique avec une collection de zones cohésives insérées entre toutes les mailles d'une discrétisation de type éléments finis cohésifs-volumiques repose sur l'introduction d'un composite continu "matrice-inclusions". Le comportement effectif de ce composite est ensuite recherché par une méthode d'homogénéisation variationnelle. Ce chapitre décrit, dans une première partie, le principe de la modélisation, dû aux travaux de [Acary et Monerie, 2006]. Dans une seconde partie, le comportement des différentes phases du composite (éléments volumiques et zones cohésives) retenues dans cette étude est exposé en détail.

Sommaire

1	Principe de l'approche	31
2	Milieu volumique avec des zones cohésives mixtes	33
2.1	Matrice élastique isotrope	33
2.2	Modèle de zone cohésive mixte	33
3	Le composite "matrice-inclusions cohésives" (MIC)	35
4	Bilan du chapitre	37

1 Principe de l'approche

On considère une discrétisation éléments finis de type cohésifs-volumiques (EFCV) : des zones cohésives intrinsèques (i.e. avec une raideur initiale finie) sont insérées entre tous les éléments volumiques du maillage. On note \mathcal{I} l'ensemble des zones cohésives et Ω le milieu volumique. On appelle densité de maillage, dénotée Z , la densité des interfaces cohésives correspondant au ratio entre la longueur (resp. la surface) totale des interfaces cohésives, notée $|\mathcal{I}|$, et la surface (resp. le volume) des éléments volumiques, notée $|\Omega|$, pour une configuration 2D (resp. 3D). Ainsi on a : $Z = |\mathcal{I}|/|\Omega|$.

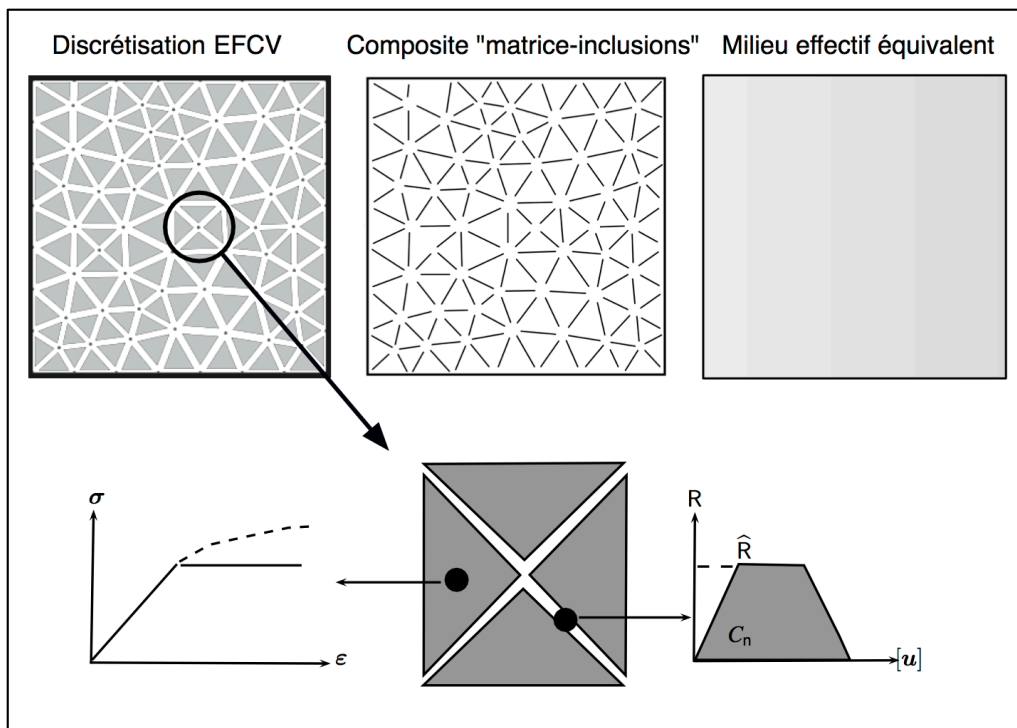


FIGURE 2.1 – Méthode EFCV et principe du modèle micromécanique. En haut, le principe de l'approche [Acary et Monerie, 2006] : une discrétisation cohésive-volumique (à gauche) est remplacée par un milieu homogène de même comportement que le comportement "volumique", i.e. des éléments finis, et contenant des inclusions lenticulaires distribuées et orientées aléatoirement de même comportement que le comportement "cohésif", i.e. des modèles de zone cohésive (au centre). Le comportement du milieu équivalent (à droite) est recherché par une technique d'homogénéisation. En bas, les lois de comportements : la loi de comportement du matériau est intégrée aux points de Gauss et le modèle cohésif au niveau des interfaces.

Le principe de la modélisation, dû aux travaux de [Acary et Monerie, 2006], est illustré sur la FIGURE 2.1 : une discrétisation cohésive-volumique est considérée comme un

milieu continu homogène contenant une distribution d'inclusions de forme ellipsoïdale aplaties ('penny-shaped'). Le milieu homogène, considéré comme une matrice, possède le même comportement durcissant des éléments volumiques alors que les inclusions possèdent le comportement adoucissant du modèle cohésif décrit par une loi de type traction-séparation. Les inclusions ont la même distribution spatiale que les interfaces cohésives dans la discrétisation EFCV. Pour le cas d'une discrétisation isotrope (maillage de Delaunay par exemple), les inclusions sont aléatoirement orientées et distribuées.

La définition d'un composite continu équivalent repose sur l'introduction d'une épaisseur fictive e associée aux zones cohésives et sensée tendre vers 0. De plus, l'hypothèse géométrique suivante est retenue le long de cette étude :

Hypothèse (H1) : *On suppose que les inclusions cohésives ont une forme oblate (forme ellipsoïdale aplatie) comme l'illustre FIGURE 2.2. Pour le cas 2-D, cette hypothèse n'aura aucune conséquence sur le schéma d'homogénéisation retenu une fois le passage à la limite $e \rightarrow 0$ effectué. Pour le cas 3-D, les deux situations sont voisines, mais différentes en toute rigueur.*

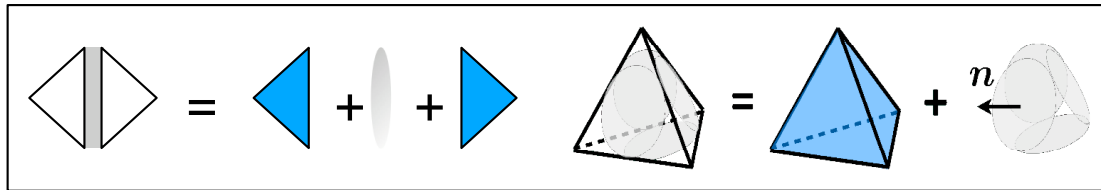


FIGURE 2.2 – Hypothèse géométrique de modélisation : pour une discrétisation plane 2D (à gauche), les faces linéiques des éléments finis sont remplacées par une ellipse. Pour une discrétisation 3D (à droite), les faces polyédriques sont remplacées par des ellipsoïdes aplaties.

Pour les éléments volumiques, la relation entre la contrainte locale, $\boldsymbol{\sigma}$, et la déformation locale, $\boldsymbol{\varepsilon}$, est définie par un potentiel de déformation ω :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.1)$$

Pour les interfaces cohésives, la relation entre le vecteur contrainte, \mathbf{R} , et le saut de déplacement, $[\mathbf{u}]$, est définie par un potentiel en saut de déplacement φ :

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \varphi}{\partial [\mathbf{u}]}. \quad (2.2)$$

Le *comportement effectif* issu de cette décomposition (FIGURE 2.1 à droite) est recherché par une technique d'homogénéisation. Ce comportement sera décrit par un potentiel effectif Ψ reliant la contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ et la déformation macroscopique \mathbf{E} :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}. \quad (2.3)$$

Le cadre de la théorie de la déformation sera adopté lorsque nécessaire.

2 Milieu volumique avec des zones cohésives mixtes

2.1 Matrice élastique isotrope

Dans un premier temps, on se limite au cas d'un milieu volumique élastique isotrope contenant une collection de zones cohésives. La loi constitutive de la matrice relie la contrainte à la déformation par un tenseur d'élasticité du quatrième ordre isotrope \mathbb{C}^M :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^M : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}^M = 3k^M \mathbb{J} + 2\mu^M \mathbb{K}, \quad (2.4)$$

où k^M et μ^M sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice, et les tenseurs du quatrième ordre \mathbb{J} et \mathbb{K} sont les tenseurs de la base d'isotropie des tenseurs du quatrième ordre symétriques (voir l'annexe A) donnés par :

$$\mathbb{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\mathbf{i}_{ik}\mathbf{i}_{jl} + \mathbf{i}_{il}\mathbf{i}_{jk}), \quad \mathbb{J} = \frac{1}{3}\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} \quad \text{et} \quad \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \quad (2.5)$$

où \mathbf{i} est le tenseur identité du deuxième ordre. La loi de comportement (2.4) peut être mise sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sqrt{2}\sigma_{xy} \\ \sqrt{2}\sigma_{xz} \\ \sqrt{2}\sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(k^M + \frac{4\mu^M}{3}\right) & \left(k^M - \frac{2\mu^M}{3}\right) & \left(k^M - \frac{2\mu^M}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(k^M - \frac{2\mu^M}{3}\right) & \left(k^M + \frac{4\mu^M}{3}\right) & \left(k^M - \frac{2\mu^M}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(k^M - \frac{2\mu^M}{3}\right) & \left(k^M - \frac{2\mu^M}{3}\right) & \left(k^M + \frac{4\mu^M}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu^M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu^M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Notons que les propriétés élastiques k^M et μ^M sont liées au module de Young E^M et au coefficient de Poisson ν^M :

$$k^M = \frac{E^M}{3(1 - 2\nu^M)} \quad \text{et} \quad \mu^M = \frac{E^M}{2(1 + \nu^M)}. \quad (2.7)$$

2.2 Modèle de zone cohésive mixte

Dans ce travail, on postule une loi cohésive intrinsèque traitant les modes de fissuration mixtes. Soit \mathbf{n} le vecteur normal à l'interface cohésive, le plan transverse est défini par les deux vecteurs orthogonaux (\mathbf{s}, \mathbf{t}) . On note $[\mathbf{u}] = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$ le saut de déplacement (dit aussi ouverture) au niveau de la zone cohésive (\mathbf{u}^+ et \mathbf{u}^- sont les déplacements des faces en vis-à-vis qui constituent les lèvres de la fissure créée) et \mathbf{R} la contrainte cohésive résistante à l'ouverture de la zone. Dans le repère local $(\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ associé à la zone cohésive,

le saut de déplacement $[\mathbf{u}]$ et la contrainte cohésive \mathbf{R} se décomposent en partie normale et tangentielle :

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}] &= u_N \mathbf{n} + \mathbf{u}_T \quad \text{avec} \quad u_N = [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_T = [\mathbf{u}] - u_N \mathbf{n} = [\mathbf{u}] \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ \mathbf{R} &= R_N \mathbf{n} + \mathbf{R}_T \quad \text{avec} \quad R_N = \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_T = \mathbf{R} - R_N \mathbf{n} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Pour un modèle intrinsèque, le saut de déplacement $[\mathbf{u}]$ et la contrainte cohésive \mathbf{R} sont reliés à travers un tenseur du second ordre de raideur cohésive initiale \mathbf{K} et une quantité liée à l'endommagement surfacique β . Ce paramètre d'endommagement évolue en fonction de l'ouverture de la zone et peut être exprimé en fonction de deux fonctions positives \mathcal{S} et \mathcal{N} , i.e. $\beta = \mathcal{S} \circ \mathcal{N}([\mathbf{u}])$. La fonction $\mathcal{S} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ est une fonction d'adoucissement positive et décroissante et la fonction $\mathcal{N} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction associant au vecteur saut de déplacement une valeur scalaire. La loi cohésive est alors de la forme :

$$\mathbf{R} = \mathcal{S} \circ \mathcal{N}([\mathbf{u}]) \times \mathbf{K} \cdot [\mathbf{u}] \quad \text{avec} \quad \mathbf{K} = C_N \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + C_T (\mathbf{i} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (2.9)$$

où C_N (resp. C_T) est la raideur normale (resp. tangentielle) cohésive. La situation $\mathcal{S} \circ \mathcal{N}([\mathbf{u}]) = 1$ correspond à une zone vierge, $0 < \mathcal{S} \circ \mathcal{N}([\mathbf{u}]) < 1$ une zone partiellement endommagée et $\mathcal{S} \circ \mathcal{N}([\mathbf{u}]) = 0$ une zone totalement rompue.

La contrainte cohésive (2.9) dérive du potentiel surfacique suivant :

$$\varphi([\mathbf{u}]) = \int_0^{u_N} \mathcal{S} \circ \mathcal{N}([v]) C_N v_N \cdot dv_N + \int_0^{\|\mathbf{u}_T\|} \mathcal{S} \circ \mathcal{N}([v]) C_T v_T \cdot dv_T \quad \text{telle que} \quad \mathbf{R} = \frac{\partial \varphi}{\partial [\mathbf{u}]}. \quad (2.10)$$

Afin d'éviter tout saut de contrainte quel que soit les trajets de fissurations, le potentiel φ doit vérifier la condition de raccord \mathcal{C}^1 , i.e. :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_N \partial u_T} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_T \partial u_N}, \quad (2.11)$$

ceci est équivalent à vérifier la continuité en termes des contraintes :

$$\frac{\partial R_N}{\partial u_T} = \frac{\partial R_T}{\partial u_N}. \quad (2.12)$$

La vérification de cette condition implique que la fonction \mathcal{S} dépend du saut de déplacement effectif [Maalej et al., 2007] :

$$u_{\text{eff}} = \sqrt{u_N^2 + \frac{C_T}{C_N} \|\mathbf{u}_T\|^2}. \quad (2.13)$$

Ainsi, si l'on prend $\mathcal{N} : [\mathbf{u}] \mapsto u_{\text{eff}}$, le potentiel φ vérifie bien la condition de raccord (2.11). Les surfaces ultimes à l'amorçage et à la rupture sont elliptiques (FIGURE 2.3). Dans ce qui suit on suppose que cette condition est vérifiée et que :

$$\mathbf{R} = \mathcal{S}(u_{\text{eff}}) \times \mathbf{K} \cdot [\mathbf{u}]. \quad (2.14)$$

Le potentiel surfacique φ peut être alors exprimé en fonction de la variable scalaire u_{eff} :

$$\varphi(u_{\text{eff}}) = C_N \int_0^{u_{\text{eff}}} \mathcal{S}(\mathbf{v}_{\text{eff}}) \mathbf{v}_{\text{eff}} d\mathbf{v}_{\text{eff}}, \quad (2.15)$$

et on peut définir une contrainte cohésive effective R_{eff} dérivant de ce potentiel :

$$R_{\text{eff}} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_{\text{eff}}} = \mathcal{S}(u_{\text{eff}}) C_N u_{\text{eff}} = \mathcal{S}(u_{\text{eff}}) \sqrt{R_N^2 + \frac{C_N}{C_T} \|\mathbf{R}_T\|^2}. \quad (2.16)$$

Le lien entre le vecteur contrainte cohésive et la contrainte cohésive effective est :

$$\mathbf{R} = \frac{R_{\text{eff}}}{u_{\text{eff}}} \left(u_N \mathbf{n} + \frac{C_T}{C_N} \mathbf{u}_T \right). \quad (2.17)$$

Pour une loi cohésive permettant d'atteindre la rupture ($\mathbf{R} = \mathbf{0}$) (FIGURE 2.4), on peut définir les deux ouvertures effectives δ_a et δ_c telles que : la zone cohésive est saine si $u_{\text{eff}} < \delta_a$, l'endommagement débute pour $u_{\text{eff}} = \delta_a$, il évolue pour le cas $\delta_a < u_{\text{eff}} < \delta_c$ et devient total pour $u_{\text{eff}} = \delta_c$. Quand la zone cohésive est totalement rompue ($u_{\text{eff}} = \delta_c$), l'énergie cohésive (aire sous la courbe de la loi cohésive effective $R_{\text{eff}} - u_{\text{eff}}$, FIGURE 2.4) atteint une valeur critique qu'on note $\varphi = G_c$.

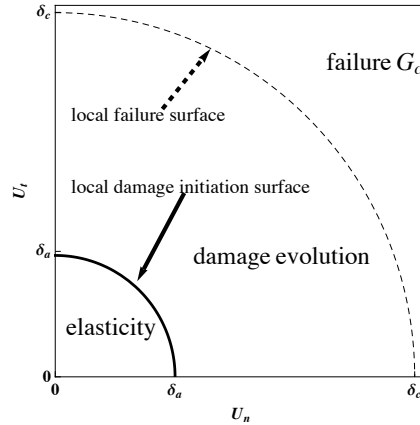


FIGURE 2.3 – Surface ultime elliptique à l'amorçage de la fissuration $\varphi = \varphi_e$ (courbe continue) et à la rupture $\varphi = G_c$ (courbe discontinue).

3 Le composite "matrice-inclusions cohésives" (MIC)

Les inclusions cohésives sont définies en associant aux MZCs une épaisseur fictive e . Cela permet de définir une déformation, $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{coh}}$, associée aux inclusions à travers l'épaisseur e ainsi qu'un tenseur de raideur du quatrième ordre, \mathbb{C}^{coh} , pour la phase cohésive. La combinaison de (2.14) avec la définition de la contrainte locale $\mathbf{R} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{coh}} \cdot \mathbf{n}$ conduit à l'expression suivante de la contrainte cohésive [Acary et Monerie, 2006] :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{coh}} = \mathcal{S}(u_{\text{eff}}) \times (C_N \mathbb{E}_l + C_T \mathbb{K}_l) : ([\mathbf{u}] \otimes_s \mathbf{n}), \quad (2.18)$$

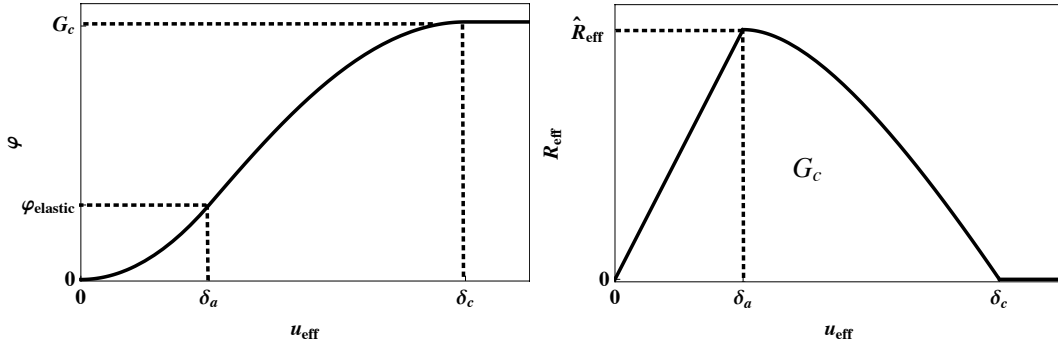


FIGURE 2.4 – Potentiel surfacique (à gauche) et la loi cohésive mixte dérivée (à droite).

avec \otimes_s est le produit tensoriel symétrisé ($2\mathbf{a} \otimes_s \mathbf{b} = a_i b_j + a_j b_i$ pour deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b}), et $\mathbb{E}_l, \mathbb{K}_l$ sont deux composantes de la base des tenseurs du quatrième ordre symétriques et isotropes transverses (voir ANNEXE A) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_l &= \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ \mathbb{K}_l &= 2(\mathbf{j}_s \otimes \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_t \otimes \mathbf{j}_t) \quad \text{où} \quad \mathbf{j}_s = \mathbf{n} \otimes_s \mathbf{s} \quad \text{et} \quad \mathbf{j}_t = \mathbf{n} \otimes_s \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En définissant la déformation au niveau de l'inclusion par [Michel et al., 1994; Kulkarni et al., 2010] :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{coh}} = \frac{[\mathbf{u}] \otimes_s \mathbf{n}}{e}, \quad (2.20)$$

un tenseur de rigidité du quatrième ordre peut être alors défini pour les inclusions cohésives, à savoir :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{coh}} = \mathbb{C}^{\text{coh}}(u_{\text{eff}}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{coh}} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}^{\text{coh}}(u_{\text{eff}}) = e \times \mathcal{S}(u_{\text{eff}}) \times (C_N \mathbb{E}_l + C_T \mathbb{K}_l). \quad (2.21)$$

Dans le repère local $(\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$, cette loi s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{ss} \\ \sqrt{2}\sigma_{nt} \\ \sqrt{2}\sigma_{ns} \\ \sqrt{2}\sigma_{st} \end{bmatrix} = e \times \mathcal{S}(u_{\text{eff}}) \times \begin{bmatrix} C_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{tt} \\ \varepsilon_{ss} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{nt} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{ns} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{st} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

La définition *cylindrique* de la déformation (2.20) définit ainsi des inclusions de type cylindrique; cette définition est sans influence sur l'hypothèse géométrique de la forme ellipsoïdale des inclusions, puisque une forme cylindrique reste équivalente à une forme 'penny-shaped' quand l'épaisseur disparaît ($e \rightarrow 0$).

La fraction volumique des inclusions f est mise alors sous la forme du produit de la densité cohésive Z avec l'épaisseur e :

$$f = e \times Z. \quad (2.23)$$

Dans la suite on cherche à déterminer : *i/* le comportement effectif du composite MIC élastique, i.e. matrice et inclusions élastiques (CHAPITRE 3), *ii/* le comportement effectif du MIC fragile, i.e. matrice élastique et inclusions endommageables (CHAPITRE 4) et *iii/* le comportement effectif du composite MIC ductile, i.e. matrice plastique et inclusions plasto-endommageables (CHAPITRE 5).

4 Bilan du chapitre

L'approche retenue pour décrire le comportement effectif issu d'une discrétisation de type éléments finis cohésifs-volumiques repose sur l'introduction d'un composite "matrice-inclusions cohésives" équivalent. Ce composite est obtenu en associant aux zones cohésives une épaisseur fictive destinée à tendre vers 0. Il contient deux phases :

- une matrice **durcissante** qui décrit le comportement des éléments volumiques sans endommagement (élasticité, plasticité, viscosité).
- une collection d'inclusions cohésives **adoucissantes** dont dérive la relation mixte associée aux modèles de zones cohésives. Les modèles de zones cohésives décrivent les processus d'endommagement depuis l'amorçage des fissures jusqu'à la rupture totale.

On utilise dans cette étude une loi cohésive intrinsèque, i.e avec raideur initiale, et mixte, i.e. permettant de traiter les différents modes de la fissuration (normal, tangentiel et mixte). L'évolution de l'endommagement surfacique est décrite à travers une fonction décroissante qui dépend du saut de déplacement effectif.

Chapitre 3

Comportement élastique

*L*e comportement élastique homogène équivalent du composite "matrice-inclusions cohésives" (MIC) est borné par valeur inférieure à l'aide de l'estimation de Hashin-Shtrikman (HS). Une prise de moyenne ad-hoc de l'estimation HS et le passage à la limite au niveau de l'épaisseur fictive permettent d'estimer les modules de compressibilité et de cisaillement du milieu effectif. Dans le cas d'une microstructure isotrope, i.e. un matériau isotrope et des orientations équiprobables des arêtes, un critère rigoureux pour calibrer les raideurs cohésives est obtenu. Ce critère est appliqué pour le cas des maillages plans (isotrope et structuré). Finalement, la pertinence de l'estimation HS obtenue ainsi que la précision des critères dérivés sont validées numériquement.

Sommaire

1	Homogénéisation linéaire	41
2	Critère pratique sur les raideurs cohésives et les longueurs des ondes élastiques	46
3	Application aux maillages plans	47
3.1	Maillage plan structuré	47
3.2	Maillage plan de type Delaunay	47
4	Validation numérique	48
4.1	Pertinence de l'estimation HS	48
4.2	Précision des critères sur les raideurs cohésives	49
5	Bilan du chapitre	52

1 Homogénéisation linéaire

Dans cette partie, l'endommagement n'évolue pas dans la structure. La zone cohésive est vierge et la fonction d'adoucissement (2.14) vérifie : $\mathcal{S}(u_{\text{eff}}) = 1$ avec $0 \leq u_{\text{eff}} \leq \delta_a$. Les inclusions ont alors un comportement élastique décrit par :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{coh}} = \mathbb{C}^{\text{coh}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{coh}} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}^{\text{coh}} = e \times (C_{\text{N}}\mathbb{E}_I + C_{\text{T}}\mathbb{K}_I), \quad (3.1)$$

et on rappelle que la matrice suit la loi élastique (2.4) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^{\text{M}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}^{\text{M}} = 3k^{\text{M}}\mathbb{J} + 2\mu^{\text{M}}\mathbb{K}.$$

Le composite MIC ne contient alors que des phases élastiques linéaires. Son comportement effectif équivalent est recherché sous la forme :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \tilde{\mathbb{C}} : \mathbf{E} \quad (3.2)$$

où $\tilde{\mathbb{C}}$ est le tenseur d'élasticité effectif du milieu homogénéisé liant le tenseur contrainte macroscopique, $\boldsymbol{\Sigma}$, à la déformation macroscopique \mathbf{E} :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} dV \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \otimes_s \mathbf{n} dS. \quad (3.3)$$

Sous l'hypothèse d'une microstructure isotrope, i.e. le comportement volumique est isotrope et la distribution des inclusions cohésives est équiprobable (cette situation correspond au cas d'une discrétisation isotrope, e.g. triangulation de Delaunay), le tenseur homogène $\tilde{\mathbb{C}}$ est isotrope et s'exprime en fonction de deux paramètres apparents : le module de compressibilité effectif \tilde{k} et le module de cisaillement effectif $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{\mathbb{C}} = 3\tilde{k}\mathbb{J} + 2\tilde{\mu}\mathbb{K}. \quad (3.4)$$

Le comportement macroscopique d'un milieu hétérogène dépend du comportement de ces constituants ainsi que de la microstructure, i.e. leur distribution spatiale. A l'exception de quelques cas simples (e.g. microstructure périodique), le détail de la distribution spatiale des phases est inconnu ou compliqué à décrire en toute rigueur. Par conséquent, l'expression exacte du tenseur effectif $\tilde{\mathbb{C}}$ ne peut pas être déterminé analytiquement. Le problème d'homogénéisation est ainsi appréhendé en construisant des bornes et des estimations du module élastique macroscopique du milieu effectif $\tilde{\mathbb{C}}$: estimation de Mori Tanaka (MT) [Mori et Tanaka, 1973], estimation auto-cohérente (SC pour self-consistent) [Hill, 1965], estimation de Hashin Shtrikman (HS) [Hashin et Shtrikman, 1963], estimation de Ponte Castañeda Willis (PCW) [Ponte Castañeda et Willis, 1995], etc.

Dans cette étude, l'estimation du comportement du milieu effectif est asymptotiquement obtenue à l'aide de la famille des estimations HS [Hashin et Shtrikman, 1963; Willis, 1977] après une moyenne adéquate sur les orientations et le passage à la limite $e \rightarrow 0$. Dans ce qui suit, il convient de noter \mathbb{C}^{HS} l'estimation de HS avant le passage à la limite et \mathbb{C}^{hom}

l'estimation du tenseur effectif $\tilde{\mathbb{C}}$, i.e. $\tilde{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{e \rightarrow 0} \mathbb{C}^{\text{HS}}$. On obtient alors pour le cas des inclusions aléatoirement orientées et distribuées (voir l'ANNEXE B) :

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{e \rightarrow 0} \mathbb{C}^{\text{HS}} = \lim_{e \rightarrow 0} \left[eZ \langle \mathbb{C}^{\text{coh}} : \mathbb{T} \rangle_{\circ} + (1 - eZ) \mathbb{C}^{\text{M}} \right] : \left[eZ \langle \mathbb{T} \rangle_{\circ} + (1 - eZ) \mathbb{I} \right]^{-1} \quad (3.5)$$

où $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*(w, \mathbf{n}) + \mathbb{C}^{\text{coh}}(\mathbf{n}))^{-1} : (\mathbb{C}^*(w, \mathbf{n}) + \mathbb{C}^{\text{M}})$ et $\mathbb{C}^*(w, \mathbf{n})$ est le tenseur d'influence de Hill qui dépend d'un milieu de référence \mathbb{C}^0 et du rapport d'aspect w des inclusions ellipsoïdales et $\langle \bullet \rangle_{\circ}$ correspond à la moyenne sur toutes les orientations de l'espace. Cette moyenne est équivalente à la projection sur la base d'isotropie des tenseurs du quatrième ordre [Gatt et al., 2005], i.e. pour tout tenseur du quatrième ordre \mathbb{A} on a :

$$\langle \mathbb{A} \rangle_{\circ} = \frac{\mathbb{J} :: \mathbb{A}}{\mathbb{J} :: \mathbb{J}} \mathbb{J} + \frac{\mathbb{K} :: \mathbb{A}}{\mathbb{K} :: \mathbb{K}} \mathbb{K} \quad (3.6)$$

D'autres prises de moyenne pouvant être envisagées dans le cas d'inclusions avec une distribution différente de leur orientation (voir l'ANNEXE B).

Notons à ce niveau que différentes estimations ou bornes sont obtenues suivant le choix du milieu de référence \mathbb{C}^0 comme l'illustre FIGURE 3.1.

Puisque le tenseur $\mathbb{C}^{\text{coh}} < \mathbb{C}^{\text{M}}$ quand e tend vers zéro¹ (voir l'équation (2.21)), l'estimation de Mori-Tanaka (MT) (équivalente dans ce cas à la borne supérieure de Hashin-Shtrikman) est obtenue pour le cas $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}^{\text{M}}$. Ce choix du milieu de référence conduit après passage à la limite $e \rightarrow 0$ au résultat trivial $\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^{\text{M}}$. Le même résultat est obtenu pour le cas implicite $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}^{\text{hom}}$ correspondant au schéma auto-cohérent (AC) ou encore en utilisant le schéma de [Ponte Castañeda et Willis, 1995]. On s'intéresse dans cette étude à la borne inférieure de Hashin-Shtrikman, $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}^{\text{coh}}$. Le tenseur \mathbb{T} se réduit alors à :

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathbb{C}^{\text{coh}}) = \mathbb{I} + \mathbb{P}(\mathbb{C}^{\text{coh}}) : (\mathbb{C}^{\text{M}} - \mathbb{C}^{\text{coh}}).$$

Tous développements faits, le développement de Taylor du tenseur d'élasticité HS au voisinage du point $e = 0$ est :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\text{HS}^-} = & \left[(3k^{\text{M}} - 2Zk^{\text{M}}e) \mathbb{J} + \left(2\mu^{\text{M}} - \frac{14}{15}Z\mu^{\text{M}}e \right) \mathbb{K} + o(e) \right] : \\ & \left[\left(\frac{C_{\text{N}}}{C_{\text{N}} + k^{\text{M}}Z} + g(e) \right) \mathbb{J} + \left(\frac{15C_{\text{N}}C_{\text{T}}}{15C_{\text{N}}C_{\text{T}} + 12C_{\text{N}}Z\mu^{\text{M}} + 4C_{\text{T}}Z\mu^{\text{M}} + h(e)} \right) \mathbb{K} + o(e) \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

avec $g(e)$ et $h(e)$ deux fonctions linéairement proportionnelles à l'épaisseur e . Les détails techniques des différentes formules et étapes du calcul de l'estimation HS sont exposés dans l'ANNEXE B. Finalement, le passage à la limite $e \rightarrow 0$ permet de dériver l'expression du tenseur d'élasticité effectif :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\text{hom}}(\mathbb{C}^{\text{M}}, \mathbb{C}^{\text{coh}}) = & 3k^{\text{hom}} \mathbb{J} + 2\mu^{\text{hom}} \mathbb{K} \quad \text{avec} \\ & \left\{ \begin{array}{l} k^{\text{hom}} = \frac{\xi_{\text{k}}}{1 + \xi_{\text{k}}} k^{\text{M}} \quad \text{avec} \quad \xi_{\text{k}} = \frac{C_{\text{N}}}{Zk^{\text{M}}} \\ \mu^{\text{hom}} = \frac{\xi_{\mu}}{1 + \xi_{\mu}} \mu^{\text{M}} \quad \text{avec} \quad \xi_{\mu} = \frac{15}{4(1 + 3C_{\text{N}}/C_{\text{T}})} \frac{C_{\text{N}}}{Z\mu^{\text{M}}}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.8)$$

1. égalité à comprendre au sens quadratique, i.e. $\mathbf{a} : \mathbb{C}^{\text{coh}} : \mathbf{a} \leq \mathbf{a} : \mathbb{C}^{\text{M}} : \mathbf{a}$ pour tout tenseur du second ordre non nul \mathbf{a} .

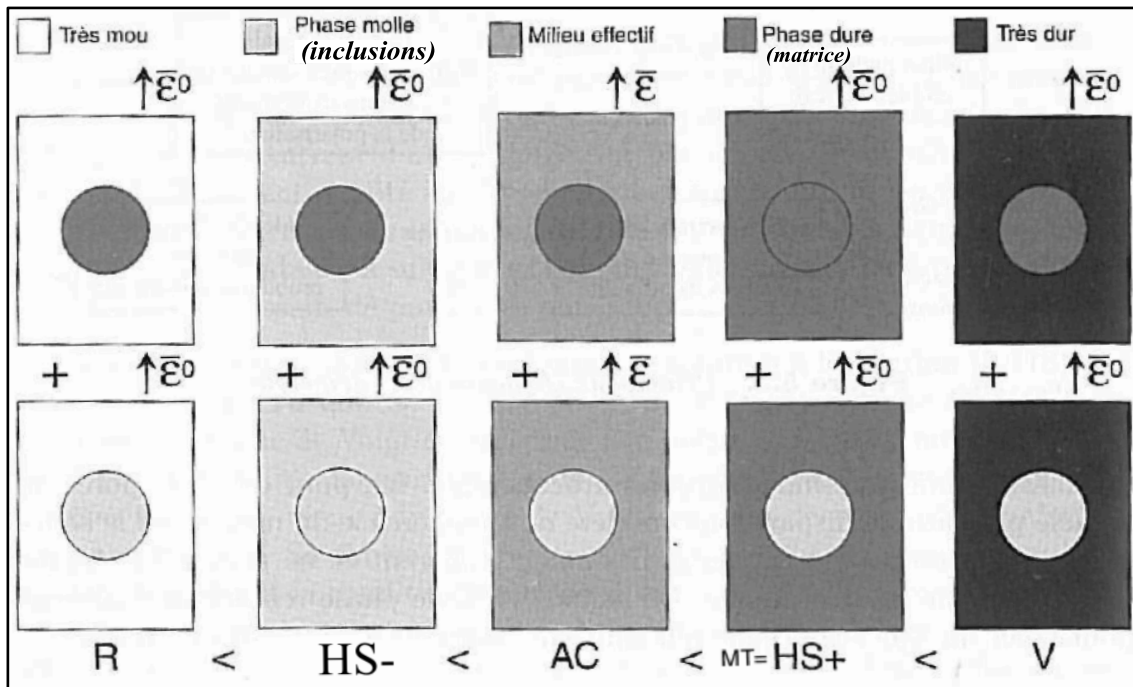


FIGURE 3.1 – Illustrations des différentes bornes et estimations du tenseur HS selon le choix du milieu de référence \mathbb{C}^0 : R borne de Reuss, V borne de Voigt, HS+ borne supérieure de Hashin Shtrikman correspondant dans le cas de notre étude à l'estimation de Mori Tanaka MT, HS- borne inférieure de Hashin Shtrikman et AC estimation obtenue par le schéma autocohérent (d'après [Bornert et al., 2001]).

On rappelle que, si la condition d'une microstructure isotrope est vérifiée, les coefficients k^{hom} et μ^{hom} sont des bornes inférieures i.e. :

$$k^{\text{hom}} \leq \tilde{k} \leq k^{\text{M}} \quad \text{et} \quad \mu^{\text{hom}} \leq \tilde{\mu} \leq \mu^{\text{M}}. \quad (3.9)$$

Pour le cas de notre modélisation, l'aspect borne inférieure est assuré pour le cas d'une discrétisation 2D avec un maillage isotrope (e.g. Delaunay). Pour les autres cas, i.e. une discrétisation 2D non isotrope (e.g. maillage structuré) ou le cas d'une discrétisation 3D, le tenseur \mathbb{C}^{hom} est seulement une estimation et non une borne inférieure en toute rigueur à cause de l'hypothèse géométrique H1 retenue dans cette étude.

L'énergie macroscopique du milieu volumique-cohésif estimée par le schéma HS est alors :

$$\Psi(\mathbf{E}) = \frac{9}{2} \frac{\xi_k}{1 + \xi_k} k^{\text{M}} E_{\text{m}}^2 + \frac{3}{2} \frac{\xi_\mu}{1 + \xi_\mu} \mu^{\text{M}} E_{\text{eq}}^2. \quad (3.10)$$

où E_{m} (resp. E_{eq}) dénote la partie hydrostatique (resp. équivalente) du tenseur de défor-

mation macroscopique \mathbf{E} :

$$E_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{E}) \quad \text{et} \quad E_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{E} : \mathbb{K} : \mathbf{E}}. \quad (3.11)$$

L'énergie effective (3.8) est une borne inférieure pour le cas d'un maillage isotrope 2D puisque l'hypothèse géométrique H1 n'a pas d'influence sur la vraie forme géométrique des zones cohésives, et une estimation convenable pour le cas des maillages 2D anisotropes et pour le cas des maillages 3D (structurés ou isotropes). Ce point est mis en évidence numériquement dans la partie suivante.

L'équation (3.8) montre que si l'on incorpore des zones cohésives à raideur tangentielle nulle partout dans une discrétisation EFCV, le comportement global ne possède pas de résistance en cisaillement $\mu^{\text{hom}} \rightarrow 0$. De plus, on constate que la forme de l'expression des modules élastiques apparents est identique à celle obtenue pour le cas unidimensionnel (2.11) avec des pré-facteurs ξ_k, ξ_μ à la place de ξ . D'une façon générale, la perte de raideur élastique est d'autant plus négligeable que ces pré-facteurs tendent vers l'infini : e.g. si l'on tolère que l'insertion des zones cohésives perturbe l'élasticité globale de moins de 5% alors on a :

$$\begin{cases} \frac{k^{\text{hom}}}{k^{\text{M}}} \geq 0.95 \text{ est assurée pour } \xi_k \geq 20 \\ \frac{\mu^{\text{hom}}}{\mu^{\text{M}}} \geq 0.95 \text{ est assurée pour } \xi_\mu \geq 20. \end{cases} \quad (3.12)$$

Cela définit un critère pour la calibration des raideurs cohésives en fonction des propriétés du matériaux et des caractéristiques du maillage. D'un point de vue pratique, et dans l'optique de définir des "*critères d'usage ingénieur*" pour les raideurs cohésives, on exprime l'estimation du module de Young et de coefficient de Poisson macroscopique issue du schéma HS. En inversant (2.7), l'expression du module de Young et du coefficient de Poisson est :

$$E^{\text{hom}} = \frac{9k^{\text{hom}}\mu^{\text{hom}}}{3k^{\text{hom}} + \mu^{\text{hom}}}, \quad \text{et} \quad \nu^{\text{hom}} = \frac{3k^{\text{hom}} - 2\mu^{\text{hom}}}{2(3k^{\text{hom}} + \mu^{\text{hom}})}. \quad (3.13)$$

Les mêmes relations sont obtenues pour E^{M} et ν^{M} en remplaçant les exposant **hom** par **mat**. Les expressions (3.13) combinées avec (3.8) conduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{E^{\text{hom}}}{E^{\text{M}}} &= \frac{\xi_E}{1 + \xi_E} \quad \text{avec} \quad \xi_E = \frac{5}{1 + (4/3)(C_N/C_T)} \times \frac{C_N}{E^{\text{M}}Z}, \\ \frac{\nu^{\text{hom}}}{\nu^{\text{M}}} &= \frac{15C_N\nu^{\text{M}} + (-1 + 2C_N/C_T)E^{\text{M}}Z}{15C_N\nu^{\text{M}} + (3 + 4C_N/C_T)E^{\text{M}}Z\nu^{\text{M}}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Il convient de rappeler à ce stade que, même si les modules de cisaillement et de compressibilité obtenus par le schéma HS sont des bornes inférieures pour une microstructure isotrope, les deux propriétés macroscopiques E^{hom} et ν^{hom} , issues du même schéma HS, ne sont pas forcément des bornes du module de Young et du coefficient de Poisson effectifs, mais seulement des estimations.

On associe ensuite au module de Young et au coefficient de Poisson une perte de raideur $R = E^{\text{hom}}/E^{\text{M}}$ et $r = \nu^{\text{hom}}/\nu^{\text{M}}$. Le cas idéal $R = 1$, i.e. des zones cohésives sans perte de raideur apparente pour le module de Young, ne peut pas être atteint. Cependant pour une perte de raideur fixée $R \in [0, 1[$, le paramètre $C_{\text{N}}/E^{\text{M}}Z$ est implicitement borné par valeur inférieure en fonction du ratio $C_{\text{N}}/C_{\text{T}}$:

$$E^{\text{hom}} = RE^{\text{M}} \Rightarrow \frac{C_{\text{N}}}{E^{\text{M}}Z} \geq \frac{1}{5} \frac{R}{1-R} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{C_{\text{N}}}{C_{\text{T}}} \right). \quad (3.15)$$

D'autre part, l'estimation HS permet d'avoir $r = 1$, i.e. le coefficient de Poisson apparent est le même que celui de la matrice, ce qui conduit à un critère pour la calibration du ratio $C_{\text{N}}/C_{\text{T}}$:

$$\nu^{\text{hom}} = \nu^{\text{M}} \Rightarrow \frac{C_{\text{N}}}{C_{\text{T}}} = \frac{1}{2} \frac{1 + 3\nu^{\text{M}}}{1 - 2\nu^{\text{M}}}. \quad (3.16)$$

Il en découle que la calibration des raideurs cohésives suivant les relations (3.15) et (3.16), dans les expressions (3.8) et (3.14), conduit à la même perte de raideur apparente pour tous les coefficients élastiques, i.e. :

$$\frac{k^{\text{hom}}}{k^{\text{M}}} = \frac{\mu^{\text{hom}}}{\mu^{\text{M}}} = \frac{E^{\text{hom}}}{E^{\text{M}}} = R. \quad (3.17)$$

Un résultat similaire à (3.17), basé sur une modélisation cohésive micromécanique de l'endommagement et des MZCs de type [Barenblatt, 1962] ne s'ouvrant qu'en mode normal, est proposé dans les travaux de [Li et Wang, 2004] comme condition de fermeture pour un schéma d'homogénéisation de type auto-cohérent.

La combinaison de l'inégalité (3.9) et de la relation (3.17) permet de borner les modules de compressibilité et de cisaillement :

$$Rk^{\text{M}} \leq \tilde{k} \leq k^{\text{M}} \quad \text{et} \quad R\mu^{\text{M}} \leq \tilde{\mu} \leq \mu^{\text{M}}. \quad (3.18)$$

Plus pratiquement, on peut dériver une borne inférieure pour le module de Young apparent \tilde{E} et le coefficient de Poisson apparent $\tilde{\nu}$ pour la cas d'une microstructure isotrope. En effet en utilisant la relation (3.13), on a :

$$\frac{\tilde{E}}{E^{\text{M}}} = \frac{\tilde{k}\tilde{\mu}}{3k + \tilde{\mu}} \times \frac{3k^{\text{M}} + \mu^{\text{M}}}{k^{\text{M}}\mu^{\text{M}}} \quad (3.19)$$

et par (3.18), on obtient :

$$R^2 E^{\text{M}} \leq \tilde{E}. \quad (3.20)$$

De la même façon le coefficient de Poisson apparent peut être minoré :

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 - 2\nu^{\text{M}}}{R} \right) \leq \tilde{\nu}. \quad (3.21)$$

Ainsi l'utilisateur dispose d'une estimation a priori de la perte d'élasticité induite par un modèle cohésif intrinsèque : en tolérant *a priori* une perte de raideur de 5% par exemple,

i.e. $R = 95\%$, on est sûr que la perte de raideur apparente n'excède pas 5% pour les coefficients de cisaillement et de compressibilité effectifs, i.e. $95\%k^M \leq \tilde{k}$ et $95\%\mu^M \leq \tilde{\mu}$, et d'environ 10% pour le module de Young effectif, i.e. $90\%E^M \leq \tilde{E}$. Cette perte de raideur dépend du coefficient de Poisson de la matrice pour $\tilde{\nu}$, e.g. si $\nu^M = 0.3$, la perte de raideur apparente au niveau du coefficient de Poisson n'excède pas 3.5% pour la même perte de raideur $R = 95\%$. La précision de ces résultats est discutée dans la partie numérique (CHAPITRE 4).

2 Critère pratique sur les raideurs cohésives et les longueurs des ondes élastiques

La densité de maillage Z est inversement proportionnelle à une longueur. On montre qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$Z = \frac{\gamma}{L_{\text{mesh}}}, \quad (3.22)$$

où γ est un paramètre lié à la morphologie du maillage (cf. ANNEXE C). En combinant (3.22), (3.15) et (3.16), on définit un *critère pratique* pour la calibration des raideurs cohésives en fonction de la taille de maillage L_{mesh} étendant ainsi les résultats semi-empiriques disponibles dans la littérature [Espinosa et Zavattieri, 2003; Tomar et al., 2004; Turon et al., 2007] :

$$\frac{C_N L_{\text{mesh}}}{E^M} \geq \gamma \frac{R}{1-R} \frac{1}{3(1-2\nu^M)} \quad \text{et} \quad \frac{C_N}{C_T} = \frac{1}{2} \frac{1+3\nu^M}{1-2\nu^M}. \quad (3.23)$$

Le critère (3.23) assure une perte de raideur pour les vitesses d'ondes élastiques moins importante : si la perte de raideur pour les propriétés élastiques est de l'ordre de $R \leq 1$, la perte de raideur pour la vitesse de propagation des ondes élastiques est de l'ordre de $R^{1/2} \geq R$. En effet, si l'on suppose que la densité volumique ρ^{hom} est la même que celle de la matrice ρ^M , les vitesses apparentes des ondes longitudinales, c_d , et de cisaillement, c_s , sont :

$$c_d = \sqrt{\frac{3k^{\text{hom}} + 4\mu^{\text{hom}}}{3k^M + 4\mu^M}} = \sqrt{R} \quad (\text{par (3.17)}) \quad (3.24)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu^{\text{hom}}}{\mu^M}} = \sqrt{R} \quad (\text{par (3.17)}).$$

En tolérant par exemple une perte d'élasticité globale de 5%, i.e. $R = 95\%$, on tolère une réduction des vitesses des ondes élastiques de moins de 3% ($\sqrt{R} \simeq 0.97\%$).

3 Application aux maillages plans

3.1 Maillage plan structuré

Considérons le cas d'un maillage carré coupé en 4 triangles isocèles (dit "Cross-Triangle Quadrilateral meshes" et que l'on a noté CTQ). Dans la suite et à l'exception d'indication inverse, cette discrétisation sera désignée par un maillage structuré (FIGURE 3.2 à gauche). La taille de maillage L_{mesh} correspond à la longueur du plus grand coté des triangles. Pour cette morphologie, la valeur du paramètre γ est déterministe et vaut pour un maillage raffiné : $\gamma = 2(1 + \sqrt{2})$ (cf. ANNEXE C). Un critère d'usage pour le cas d'un maillage plan structuré avec une perte de 5% est alors :

$$\boxed{\frac{C_N L_{\text{mesh}}}{E^M} \geq \frac{30}{1 - 2\nu^M} \quad \text{et} \quad \frac{C_T}{C_N} = 2 \frac{1 - 2\nu^M}{1 + 3\nu^M}} \quad \text{maillage CTQ} \quad (3.25)$$

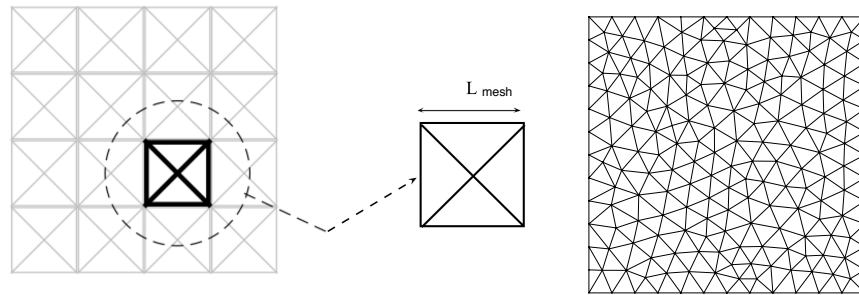


FIGURE 3.2 – Maillage structuré CTQ (à gauche) et maillage de type Delaunay (à droite).

3.2 Maillage plan de type Delaunay

Pour ce type de maillage (FIGURE 3.2 à droite), la taille des arêtes et la densité de maillage sont stochastiquement déterminées à l'aide d'une fonction de densité de probabilité (voir l'ANNEXE C). Pour cette discrétisation, on définit la taille de maillage par :

$$L_{\text{mesh}} = 2 \sqrt{\frac{A}{\sqrt{3} N_t}}$$

avec N_t le nombre de triangles de la discrétisation et A l'aire du domaine maillé. Autrement dit, une triangulation Delaunay à N_t triangles est remplacée par une triangulation contenant N_t triangles équilatéraux. On obtient que $\gamma = 3.64$ (voir l'ANNEXE C). Un critère d'usage pour le cas d'un maillage Delaunay avec une perte de 5% est alors obtenu :

$$\boxed{\frac{C_N L_{\text{mesh}}}{E^M} \geq \frac{23}{1 - 2\nu^M} \quad \text{et} \quad \frac{C_T}{C_N} = 2 \frac{1 - 2\nu^M}{1 + 3\nu^M}} \quad \text{maillage Delaunay} \quad (3.26)$$

4 Validation numérique

La plateforme numérique Xper [Perales et al., 2008, 2010] est utilisée pour la validation des différents résultats obtenus analytiquement dans la partie élastique. Dans le cadre de la méthode des éléments finis cohésifs-volumiques, le logiciel Xper permet une mise en œuvre numérique de l’amorçage et de la propagation des fissures sans critères d’amorçage adéquats. Les simulations numériques sont effectuées en 2D sous l’hypothèse des déformations planes. La géométrie considérée se réduit à des cellules carrées de dimensions : 1 (m) \times 1 (m) soumises à des conditions aux limites cinématiques (déformations homogènes sur le bord). On cherche à mettre en œuvre la précision des modules macroscopiques prédits par l’estimation HS (3.5) ainsi que la pertinence des critères (3.25) et (3.26) pour la calibration des raideurs cohésives afin de limiter la souplesse artificielle due aux lois cohésives intrinsèques.

4.1 Pertinence de l’estimation HS

Les résultats représentés sur la FIGURE 3.3 concernent les coefficients de compressibilité et de cisaillement macroscopiques obtenus par homogénéisation numérique (symboles carrés) et ceux prédits par le modèle analytique HS (3.5) (courbes continues) pour différentes valeurs du ratio C_N/C_T . Le cas d’un maillage structuré de type ”carré avec triangles croisés” (CTQ) est considéré. Les résultats numériques montrent que le coefficient de compressibilité effectif k^{hom} n’est pas sensible au ratio C_N/C_T (FIGURE 3.3 en haut) contrairement au coefficient de cisaillement μ^{hom} (FIGURE 3.3 en bas) : la perte de raideur effective en terme du coefficient de cisaillement est d’autant plus importante que le ratio C_N/C_T est grand. Ces résultats sont en parfaite adéquation avec le résultat analytique obtenu par l’équation (3.8). De plus, on constate que l’estimation analytique du coefficient de cisaillement obtenu par le schéma HS (3.8) est très minorante lorsque le ratio C_N/C_T augmente (FIGURE 3.3-bas, courbe noir-gras).

La précision des modules prédits analytiquement est illustrée sur FIGURE 3.4 pour le cas d’un maillage isotrope (maillage de type Delaunay) en symboles carrés et le cas d’un maillage anisotrope (maillage ”CTQ”) en symboles circulaires. On constate que le résultat obtenu est une borne inférieure rigoureuse pour le cas d’un maillage 2-D isotrope (symboles avec des barres d’erreur) et ne peut être qu’une estimation pour le cas d’un maillage anisotrope (symboles fermés) puisque cette topologie de discrétisation ne vérifie pas en toute rigueur la propriété d’isotropie de la distribution des interfaces cohésives. Le cas d’un maillage anisotrope induit plus de perte de raideur que le cas isotrope. Notons aussi qu’il existe une valeur minimale de ξ_k et ξ_μ et donc de C_N pour laquelle la perte de raideur globale ne dépasse pas 5% (lignes discontinues). Ce résultat confirme le résultat obtenu analytiquement (3.12).

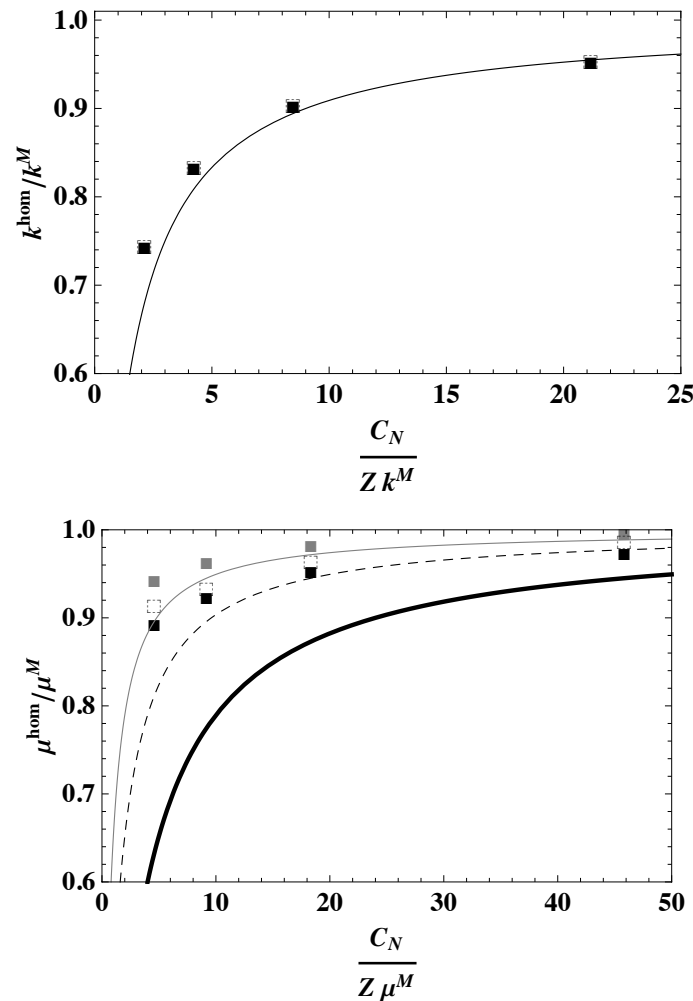


FIGURE 3.3 – Modules élastiques apparents normés obtenus numériquement (symboles carrés) et prédiction du modèle analytique (3.8) (courbes) pour différents ratio C_N/C_T : module de cisailment (en haut) et de compressibilité (en bas) : $C_N/C_T = 1/3$ carrés et courbe en gris, $C_N/C_T = 1$ carrés et courbe en discontinue et $C_N/C_T = 3$ carrés et courbe en noir.

Données matériaux : $E^M = 119$ (GPa), $\nu^M = 0.3$.

Données numériques : taille de maillage $L_{\text{mesh}} = 0.05$ (m) ; éléments finis linéaires.

4.2 Précision des critères sur les raideurs cohésives

La précision des critères obtenus est validée numériquement en calculant l'énergie globale d'une cellule carrée maillée avec des zones cohésives insérées partout. La cellule 2D est soumise à une traction équibiaxée. Les propriétés du matériau et de la loi cohésive sont données dans TABLE 3.1. Le premier test (FIGURE 3.5) concerne la comparaison de l'énergie globale pour le cas d'une discrétisation avec un maillage de type Delaunay. Afin de tester la pertinence du modèle prédit analytiquement, on tolère deux valeurs pour la perte

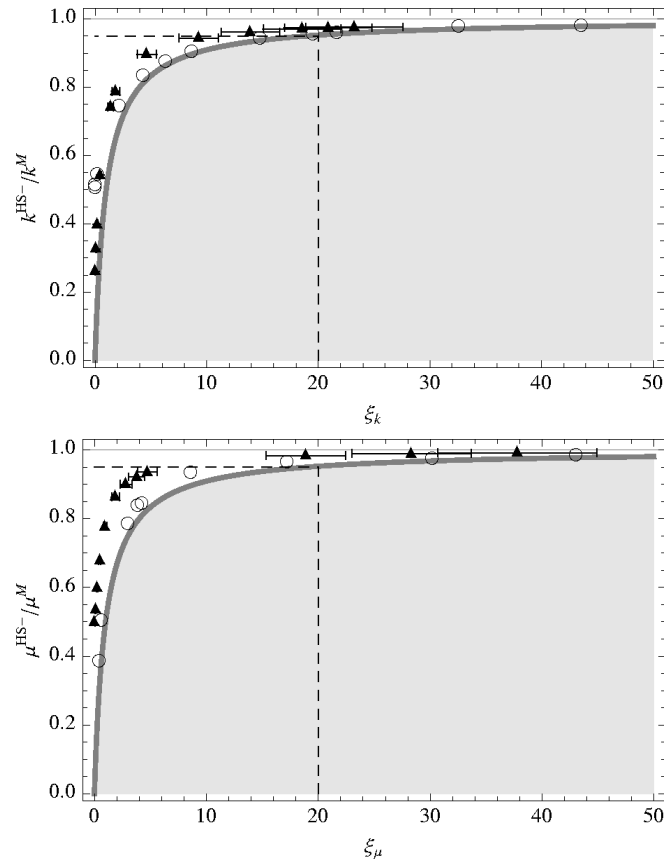


FIGURE 3.4 – Modules élastiques apparents normés issus d’une modélisation cohésive-volumique avec un modèle intrinsèque (cas $C_N = C_T$) : en haut, le module de compressibilité, en bas, le module de cisaillement. Estimation (3.8) (en gras), critère (3.12) (en discontinu) et résultats numériques pour un maillage Delaunay (triangles avec variance) et un maillage ”cross-triangle quadrilateral” (cercles).

Données matériaux : $E^M = 119$ (GPa), $\nu^M = 0.3$.

Données numériques : taille de maillage $L_{\text{mesh}} = 0.05$ (m) ; éléments finis linéaires.

de raideur effective : 0.01% (courbe continue noire) et 0.15% (courbe continue grise). On calibre ainsi les raideurs cohésives C_N et C_T suivant le critère (3.23) et on compare l’énergie élastique macroscopique obtenue numériquement à celle obtenue par l’estimation HS (courbes en discontinues) ainsi qu’à l’énergie élastique d’un milieu homogène sans zones cohésives (courbe en rouge). On remarque que : $i/$ en calibrant les raideurs cohésives avec une perte de raideur plus grande (R plus petit), les zones cohésives induisent plus de souplesse : le cas $R = 99\%$ conduit à un écart entre l’énergie macroscopique avec des MZCs et l’énergie sans MZCs qui n’est pas trop grand (courbes noir et rouge) alors que le cas d’une calibration en fixant la perte de raideur à $R = 85\%$ rend cet écart non négligeable (courbes grise et rouge).

Le deuxième résultat (FIGURE 3.6) concerne la comparaison de l’énergie globale pour

TABLE 3.1 – Propriétés volumiques du matériau étudié (en haut) et calibration des raideurs cohésives suivant le critère (3.23) pour une perte de raideur tolérée de 0.01% ($R = 99\%$) et 0.15% ($R = 85\%$) (en bas).

Propriétés volumiques		$E^M = 10^3 \text{MPa}$	$\nu^M = 0.3$
Propriétés cohésives		$C_N (\text{MPa/mm})$	$C_T (\text{MPa/mm})$
$R = 99\%$	Delaunay	1.62×10^7	6.80×10^6
	structuré	7.96×10^6	3.35×10^6
$R = 85\%$	Delaunay	9.25×10^5	3.9×10^5
	structuré	4.56×10^5	1.92×10^5

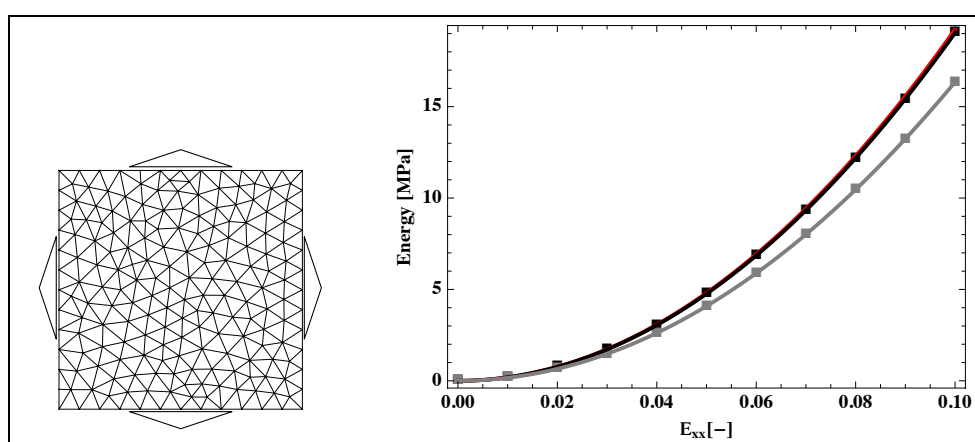


FIGURE 3.5 – Évolution de l'énergie élastique macroscopique en fonction de la déformation macroscopique pour un maillage Delaunay. En rouge, le résultat obtenu pour un milieu volumique sans zones cohésives. En noir (resp. gris) les résultats obtenus pour le cas d'un milieu volumique avec des zones cohésives insérées partout pour une perte de raideur tolérée de 0.01% (resp. 0.15%) et dont les raideurs cohésives sont calibrées suivant le critère (3.23). Le résultat numérique est tracé en courbe continue et le modèle prédit par l'estimation HS (3.5) est tracé en courbe discontinue.

Données matériaux et cohésives : cf. TABLE 3.1.

Données numériques : taille de maillage moyenne $L_{\text{mesh}} = 0.02$ (m) ; éléments finis linéaires.

le cas d'une discrétisation en mailles "carrées-triangles", supposée conserver l'isotropie du maillage, au modèle analytique. On obtient les mêmes résultats que le cas précédent concernant la pertinence des critères pour la calibration de la raideur cohésive. On remarque aussi que l'énergie macroscopique obtenue analytiquement (courbes noire et grise continues) n'est plus une borne inférieure mais seulement une estimation convenable du comportement effectif vu que la propriété d'isotropie de la distribution des interfaces cohésives n'est pas vérifiée pour ce type de maillage. Cependant, on peut affirmer que, même si le maillage CTQ ne peut pas être considéré en toute rigueur comme un maillage isotrope,

le calcul numérique montre que la perte de raideur est bien contrôlée pour les deux types de maillage une fois que les raideurs cohésives calibrées à l'aide des critères obtenus dans cette étude. La FIGURE 3.7 met en comparaison les résultats obtenus numériquement pour les deux types de maillages, isotrope et anisotrope, pour la même densité des zones cohésives Z . Le résultat obtenu confirme que le critère obtenu (3.23) est plus rigoureux pour les cas d'un maillage isotrope que le cas d'un maillage structuré : la souplesse induite par le maillage structuré (courbes discontinues) est plus grande que le cas d'un maillage de type Delaunay (courbes continues). Cette différence est d'autant plus visible que la valeur de R devient petite.

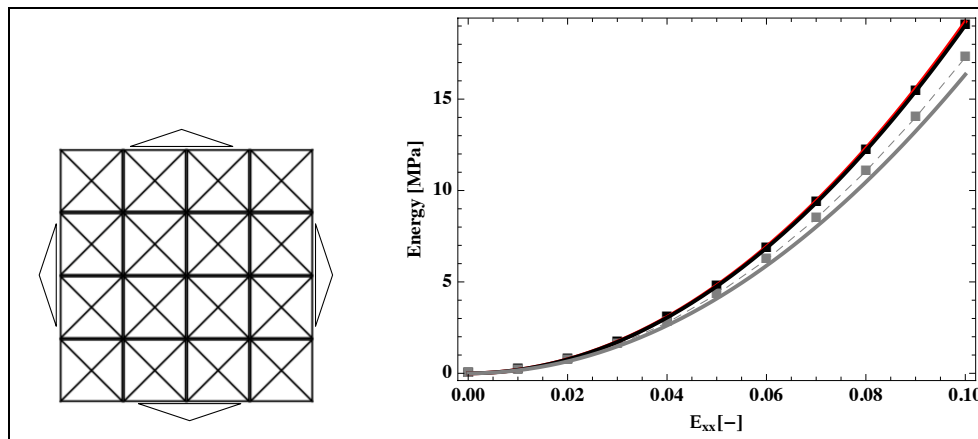


FIGURE 3.6 – Évolution de l'énergie élastique macroscopique en fonction de la déformation macroscopique pour un maillage structuré. En rouge, le résultat obtenu pour un milieu volumique sans zones cohésives. En noir (resp. gris) les résultats obtenus pour le cas d'un milieu volumique avec des zones cohésives insérées partout pour une perte de raideur tolérée de 0.01% (resp. 0.15%) et dont les raideurs cohésives sont calibrées suivant le critère (3.23) avec $\gamma = 2(\sqrt{2} + 1)$. Le résultat numérique est tracé en courbe continue et le modèle prédit par l'estimation HS (3.5) est tracé en courbe discontinue.

Données matériaux et cohésives : cf. TABLE 3.1.

Données numériques : taille de maillage $L_{\text{mesh}} = 0.05$ (m) ; éléments finis linéaires.

5 Bilan du chapitre

L'estimation du comportement effectif du composite MIC élastique est analytiquement obtenu à l'aide du schéma HS après le passage à la limite au niveau de l'épaisseur fictive e (Eq. 3.5). Les principaux résultats de cette partie sont :

- Pour le cas d'une discrétisation EFCV plane isotrope, la condition d'une microstructure isotrope est vérifiée et l'estimation HS obtenue (Eq. 3.5) est une borne inférieure rigoureuse pour les modules élastiques effectifs du MIC. Pour les autres types de discrétisation, la microstructure n'est pas rigoureusement isotrope (discrétisation 2D ou 3D

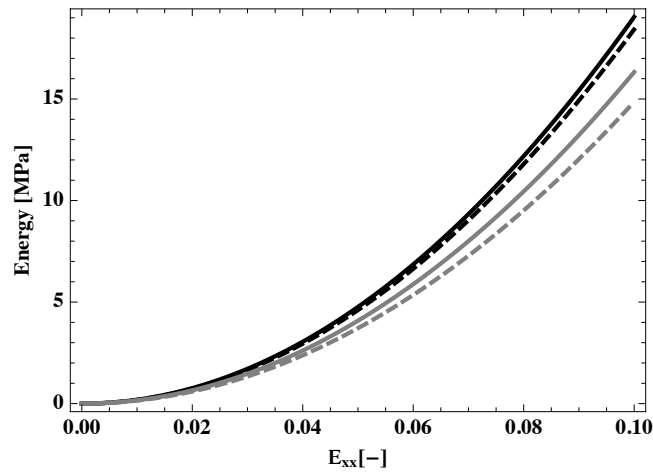


FIGURE 3.7 – Validité du critère micromécanique obtenu pour différents types de maillage : maillage Delaunay (resp. structuré) en courbe continue (resp. discontinue) pour $R = 99\%$ en noir et $R = 85\%$ en gris.

Données numériques : densité de maillage $Z \simeq 190 \text{ m}^{-1}$; éléments finis linéaires.

structurée), ou la microstructure est isotrope mais la forme géométrique des inclusions n'est pas identiquement celle des interfaces cohésives (discrétisation 3D isotrope). Pour ces configurations, les modules obtenus (Eq. 3.5) ne sont plus en toute rigueur une borne inférieure, néanmoins, ils peuvent être considérés comme une estimation convenable des propriétés effectives. Ce point est validé numériquement dans ce chapitre.

- L'estimation des modules apparents permet d'avoir une idée sur la perte de raideur pour les modules de compressibilité et de cisaillement (Eq. 3.12) et pour le module de Young et le coefficient de Poisson (Eq. 3.14). Cette estimation dépend des propriétés du matériau, des raideurs cohésives initiales et de la densité de maillage.
- En fixant a priori la perte de raideur tolérée par l'utilisateur R , une analyse inverse conduit à un critère pratique pour la calibration de la raideur cohésive normale, C_N , et tangentielle, C_T (Eq. 3.23). Ce critère est donné en fonction du paramètre densité de maillage Z , qui dépend de la taille de maillage (L_{mesh}) et de la morphologie de la discrétisation (γ). Ce dernier paramètre est calculé d'une façon déterministe pour les maillages plans structurés et d'une façon stochastique pour les maillages de type Delaunay. Le critère obtenu est ensuite re-écrit pour le cas des discrétisations planes en fonction de la taille de maillage et des paramètres du matériau (Eqs. 3.26 et 3.25) étendant ainsi les critères (semi-) empiriques obtenus dans la littérature.

Les résultats obtenus sont validés numériquement à l'aide de la plateforme Xper. La pertinence de l'estimation HS ainsi que la précision des critères établis sont illustrées pour les deux types de maillage.

Chapitre 4

Rupture fragile

*O*n s'intéresse dans ce chapitre à l'estimation du comportement effectif du composite MIC fragile, i.e. matrice élastique linéaire avec des MZCs non linéaires, en s'inspirant de la méthode variationnelle de [Ponte Castañeda, 1991] et de l'extension de l'estimation HS. Dans un premier temps, la formulation du problème non linéaire à résoudre est présentée. Des relations explicites entre les propriétés effectives et les paramètres locaux de la loi cohésive sont ainsi obtenues. Ensuite, le modèle micromécanique est appliqué pour différentes formes de lois cohésives. Dans une dernière partie, une analyse inverse des relations locales-globales permet d'obtenir des critères pratiques pour la calibration des paramètres cohésifs endommageables (contrainte maximale et énergie de fissuration). Le résultat obtenu est validé numériquement avec la plateforme Xper.

Sommaire

1	Homogénéisation : formulation du problème non linéaire	57
2	Lien entre les paramètres cohésifs locaux et les paramètres globaux	59
3	Forme locale des lois cohésives pour la rupture fragile	61
3.1	Modèle cohésif bilinéaire mixte (BL)	63
3.2	Modèle cohésif mixte de type Monerie-Perales (MP)	66
3.3	Modèle cohésif mixte général (MZCG)	67
4	Critère sur la ténacité cohésive	70
5	Validation numérique	71
6	Bilan du chapitre	72

1 Homogénéisation : formulation du problème non linéaire

Dans l'optique d'étudier le comportement effectif des matériaux quasi-fragiles, la matrice est supposée garder son comportement élastique linéaire alors que les zones cohésives ont un comportement adoucissant décrit par la loi non linéaire suivante :

$$\mathbf{R} = \mathcal{S}^{\text{coh}}(u_{\text{eff}}) \mathbf{K} \cdot [\mathbf{u}] \quad \text{avec} \quad 0 \leq \mathcal{S}^{\text{coh}}(u_{\text{eff}}) \leq 1, \forall \delta_a \leq u_{\text{eff}} \leq \delta_c \quad (4.1)$$

Le comportement effectif du milieu cohésif-volumique est obtenu par une technique d'homogénéisation non linéaire. Le principe de l'approche [Ponte Castañeda, 1991; Ponte Castañeda et Willis, 1995] est étendu dans cette étude au cas d'un potentiel non linéaire surfacique. L'idée consiste à remplacer le composite cohésif-volumique non linéaire par un *composite linéaire de comparaison* (CLC) ayant la même microstructure et dont le comportement non linéaire du potentiel surfacique est "optimalement" linéarisé. Le schéma d'homogénéisation linéaire HS est ensuite utilisé pour estimer le comportement homogène du CLC. La condition d'optimalité se base sur la description de la phase non linéaire par son module sécant évalué au second moment du saut de déplacement effectif. Cette approche est équivalente à la méthode sécante modifiée [Suquet, 1995; Ponte Castañeda et Suquet, 1998]. L'application de l'approche variationnelle de Pedro Ponte Castañeda (PPC) au cas d'un potentiel surfacique est développée en détails dans l'ANNEXE B.

La raideur cohésive sécante est alors évaluée au second moment du saut de déplacement effectif $\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}}$:

$$\mathbf{R} = \mathcal{S}^{\text{coh}} \left(\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}} \right) \mathbf{K} \cdot [\mathbf{u}]. \quad (4.2)$$

On cherche dans ce chapitre à appréhender le comportement effectif du CLC, noté $\mathbb{C}_0^{\text{hom}}$. En considérant des trajets de chargement monotones et radiaux dans l'espace des déformations macroscopiques, la contrainte macroscopique Σ est reliée à la déformation macroscopique \mathbf{E} imposée par la loi effective : $\Sigma = \mathbb{C}_0^{\text{hom}}(\mathbf{E}) : \mathbf{E}$. Le comportement effectif, $\mathbb{C}_0^{\text{hom}}$, est obtenu en utilisant la borne inférieure de l'estimation HS introduite dans la partie linéaire élastique, i.e. :

$$\mathbb{C}_0^{\text{hom}} = \mathbb{C}^{\text{hom}}(\mathbb{C}^{\text{M}}, \mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{coh}}) \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{coh}} = \mathbb{C}^{\text{coh}} \left(\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}} \right) \quad (4.3)$$

où \mathbb{C}^{coh} est donné par (2.14) et la moyenne quadratique $\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}$ est calculée en utilisant le résultat général sur les composites linéaires [Kreher, 1990; Maalej et al., 2007] :

$$\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}} = \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial (\mathbf{E} : \mathbb{C}_0^{\text{hom}} : \mathbf{E})}{\partial \beta C_{\text{N}}} + \frac{C_{\text{T}}}{C_{\text{N}}} \frac{\partial (\mathbf{E} : \mathbb{C}_0^{\text{hom}} : \mathbf{E})}{\partial \beta C_{\text{T}}} \right), \quad (4.4)$$

où l'expression du tenseur effectif du CLC est :

$$\begin{aligned} k_0^{\text{hom}} &= \frac{\xi_k}{1 + \xi_k} k^{\text{M}}, \quad \text{avec} \quad \xi_k = \frac{\beta C_{\text{N}}}{Z k^{\text{M}}} \\ \mu_0^{\text{hom}} &= \frac{\xi_\mu}{1 + \xi_\mu} \mu^{\text{M}}, \quad \text{avec} \quad \xi_\mu = \frac{15}{4(1 + 3C_{\text{N}}/C_{\text{T}})} \frac{\beta C_{\text{N}}}{Z \mu^{\text{M}}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

avec $\beta = \mathcal{S}^{\text{coh}} \left(\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}} \right)$ le paramètre d'endommagement surfacique.

Les étapes de l'homogénéisation non linéaire peuvent être résumées dans le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Entrée : } \mathbf{E} \\ \text{étape 1 : second moment du saut de déplacement : } \sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}} = \sqrt{\frac{1}{Z} D [\mathbf{E} : \mathbb{C}_0^{\text{hom}} : \mathbf{E}]} \\ \text{étape 2 : évaluation du tenseur cohésif sécant : } \mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{coh}} = e \times \underbrace{\mathcal{S}^{\text{coh}} \left(\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}} \right)}_{\beta} \times (C_{\text{N}} \mathbb{E}_l + C_{\text{T}} \mathbb{K}_l) \\ \text{Sortie : } \boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}_0^{\text{hom}} : \mathbf{E}, \quad \text{par le schéma HS} \end{array} \right. \quad (4.6)$$

où l'opérateur de dérivation D est défini par : $D[\bullet] = \frac{\partial \bullet}{\partial \beta C_{\text{N}}} + \frac{C_{\text{T}}}{C_{\text{N}}} \frac{\partial \bullet}{\partial \beta C_{\text{T}}}$.

Une fois les dérivées de l'énergie macroscopique $\mathbf{E} : \mathbb{C}_0^{\text{hom}} : \mathbf{E}$ par rapport à βC_{N} et βC_{T} calculées, on calibre les raideurs cohésives C_{N} et C_{T} au moyen du critère (3.23) dans l'optique de réduire la perte d'élasticité. Le schéma de résolution (4.6) conduit à l'équation scalaire non linéaire satisfaite en terme du paramètre d'endommagement β :

$$\boxed{\beta = \mathcal{S}^{\text{coh}} \left(\frac{3}{Z} \frac{1 - R}{1 + (\beta - 1) R} \sqrt{\mathbf{E}_{\text{m}}^2 + \frac{1 - 2\nu^{\text{M}}}{2 + 2\nu^{\text{M}}} \mathbf{E}_{\text{eq}}^2} \right)}. \quad (4.7)$$

Notons à ce stade que si $R = 1$, le paramètre d'endommagement vaut $\beta = \mathcal{S}^{\text{coh}} = 1$. En l'absence d'une perte de raideur apparente tolérée, l'endommagement n'évolue jamais et le matériau reste toujours sain indépendamment du chargement imposé (la réponse est toujours élastique). Pour le modèle proposé, cette situation n'est pas en question : le paramètre perte de raideur tolérée R ne doit pas atteindre la valeur $R = 1$, sinon l'expression de la raideur cohésive initiale C_{N} est non bornée (voir (3.23)). Ainsi une fois la perte de raideur $R < 1$ fixée, l'évolution de l'endommagement est assurée et elle est mesurée en fonction de la partie hydrostatique et déviatorique du chargement imposé. D'autre part, on peut constater que si le matériau est incompressible, $\nu^{\text{M}} \rightarrow 0.5$, l'évolution de l'endommagement dépend seulement de la partie hydrostatique des déformations macroscopiques \mathbf{E}_{m} .

2 Lien entre les paramètres cohésifs locaux et les paramètres globaux

A l'instar des propriétés effectives cohésives u_{eff} et R_{eff} , on introduit la notion de déformation et contrainte macroscopiques effectives E_{eff} et Σ_{eff} respectivement :

$$E_{\text{eff}} = \sqrt{E_m^2 + \frac{\mu^M}{3k^M} E_{\text{eq}}^2} = \sqrt{\frac{\mathbf{E} : \mathbb{C}^M : \mathbf{E}}{9k^M}} \quad (4.8)$$

où E_m (resp. E_{eq}) est la déformation macroscopique hydrostatique (resp. équivalente) et :

$$\Sigma_{\text{eff}} = \sqrt{\Sigma_m^2 + \frac{k^M}{3\mu^M} \Sigma_{\text{eq}}^2} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\Sigma} : (\mathbb{C}^M)^{-1} : \boldsymbol{\Sigma}}{\mu^M}} \quad (4.9)$$

où Σ_m (resp. Σ_{eq}) est la contrainte macroscopique hydrostatique (resp. équivalente). La déformation (resp. contrainte) effective E_{eff} (resp. Σ_{eff}) est une norme associant au tenseur de déformation (resp. contrainte) \mathbf{E} (resp. $\boldsymbol{\Sigma}$) une quantité scalaire combinant l'influence de la partie hydrostatique et de la partie déviatorique due au cisaillement. S'il n'y a pas de cisaillement ($E_{\text{eq}} = \Sigma_{\text{eq}} = 0$), alors la quantité E_{eff} (resp. Σ_{eff}) coïncide avec la partie hydrostatique E_m (resp. Σ_m).

Indépendamment de la forme de la loi cohésive retenue, l'équation (4.7) permet d'établir des relations directes entre les paramètres cohésifs locaux et les paramètres globaux. Ainsi l'amorçage global de l'endommagement, i.e. $\beta = 1$, est atteint pour la valeur de la déformation effective, E_{eff}^a , suivante :

$$E_{\text{eff}}^a = \frac{Z\delta_a}{3(1-R)}. \quad (4.10)$$

La rupture totale, i.e. $\beta = 0$, est atteinte pour la déformation effective E_{eff}^c :

$$E_{\text{eff}}^c = \frac{Z\delta_c}{3}. \quad (4.11)$$

Ces relations définissent des surfaces seuil d'amorçage et de rupture globale de type elliptiques dépendant du coefficient de Poisson (FIGURE 4.1). Pour un chargement purement hydrostatique, $E_m = 0$, le seuil de l'endommagement (resp. de rupture) est atteint pour $E_{\text{eq}} \simeq 1.4E_{\text{eff}}^c$ (resp. $E_{\text{eq}} \simeq 1.7E_{\text{eff}}^c$) pour $\nu^M = 0.1$ et $E_{\text{eq}} \simeq 2.1E_{\text{eff}}^c$ (resp. $E_{\text{eq}} \simeq 2.6E_{\text{eff}}^c$) pour $\nu^M = 0.3$. Le contraste entre la déformation effective globale à la rupture et à l'initiation est alors lié au contraste entre les ouvertures locales :

$$\frac{E_{\text{eff}}^c}{E_{\text{eff}}^a} = (1-R) \times \frac{\delta_c}{\delta_a}. \quad (4.12)$$

L'effet du ratio local δ_c/δ_a sur le ratio global $E_{\text{eff}}^c/E_{\text{eff}}^a$ est illustré dans FIGURE 4.2. D'après l'équation (4.12), le modèle proposé n'a alors de sens physique que si la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{\delta_c}{\delta_a} \geq \frac{1}{1-R}, \quad (4.13)$$

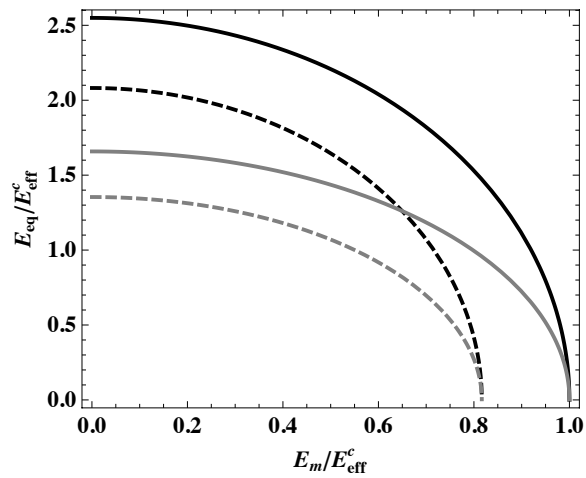


FIGURE 4.1 – Effet du coefficient de Poisson sur les surfaces ultimes globales : initiation de l'endommagement (discontinue) et rupture totale (continue) pour une perte de raideur élastique fixée à 95%.

Propriétés matériau : $E^M = 10^3$ (GPa), $\nu^M = 0.3$ (resp. 0.1) en noir (resp. en gris)

Propriétés cohésives : les raideurs cohésives sont calibrées suivant le critère (3.23) et $\delta_c/\delta_a = 30$

sinon il prévoit une rupture globale atteinte avant l'amorçage, i.e. $E_{\text{eff}}^c \leq E_{\text{eff}}^a$. Si, par exemple, on tolère une perte de raideur de 5% ($R = 95\%$), le ratio δ_c/δ_a doit être supérieur à 20.

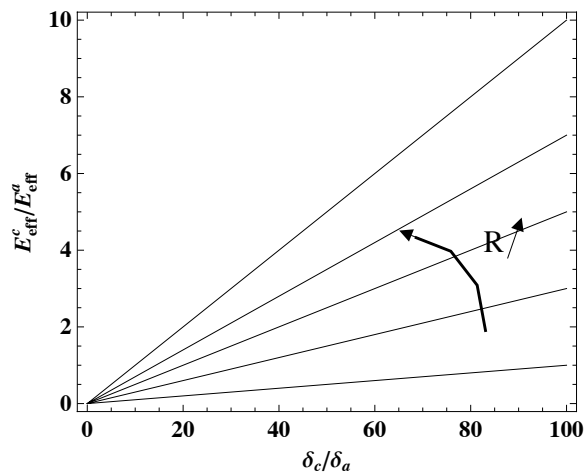


FIGURE 4.2 – Ratio entre la déformation macroscopique à la rupture et à l'amorçage en fonction du ratio entre le saut déplacement à la rupture et à l'amorçage.

Propriétés matériau : cf. légende de (4.1)

3 Forme locale des lois cohésives pour la rupture fragile

Dans l'optique d'étudier le comportement effectif des matériaux fragiles, les modèles de zones cohésives sont régis par une loi élasto-fragile à 3 paramètres et dont la fonction d'endommagement dépend du saut de déplacement effectif u_{eff} .

L'évolution de l'endommagement en mode mixte est alors modélisée par une approche cohésive couplant le mode normal et tangentiel, i.e. $R_N = R_N(u_N, \mathbf{u}_T)$ et $R_T = R_T(u_N, \mathbf{u}_T)$. Cette loi est définie à travers 3 paramètres indépendants : les raideurs cohésives : C_N et C_T , la contrainte cohésive maximale \hat{R}_{eff} , et l'énergie de fissuration G_c (FIGURE 4.3).

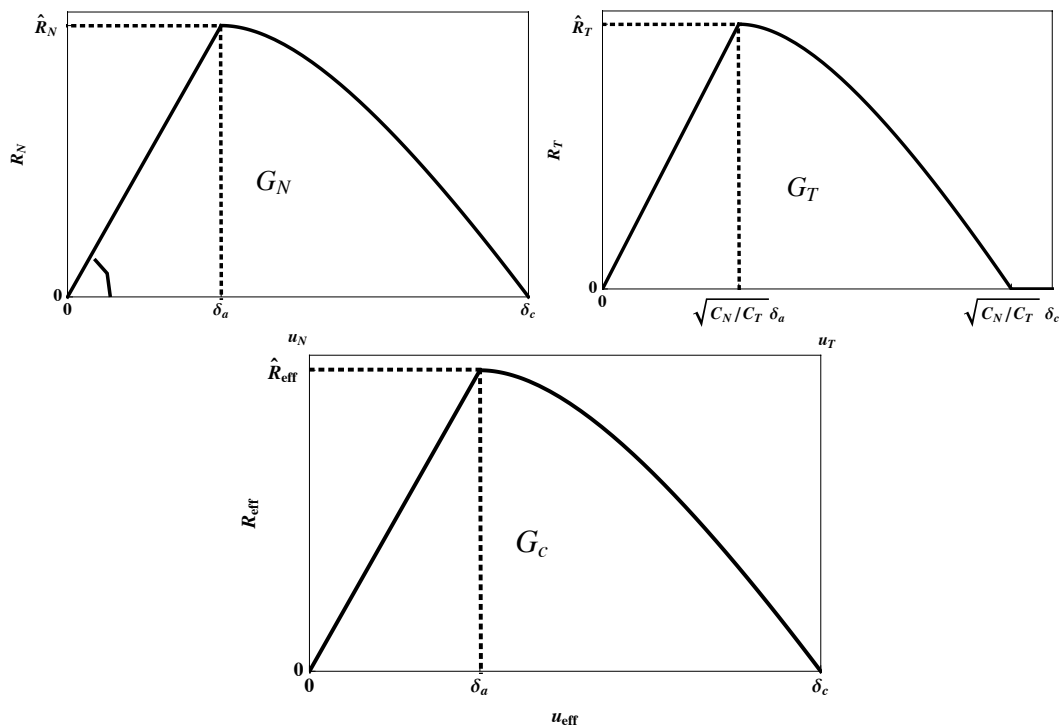


FIGURE 4.3 – Illustration de la loi cohésive pour un mode purement normal ($\mathbf{u}_T = 0$) en haut à gauche, un mode purement tangentiel ($u_N = 0$) en haut à droite et un mode mixte en bas. La loi cohésive élasto-endommageable se décompose en deux parties : une partie croissante élastique commune à toutes les lois quelque soit la forme de la loi cohésive (courbe continue) et une partie adoucissante décroissante qui dépend du type du MZC (courbe en pointillés). Le MZC est ainsi défini par 3 paramètres : la raideur cohésive (la pente de la partie élastique), la contrainte cohésive maximale (peak de la loi cohésive) et l'énergie de fissuration (l'aire sous la loi locale).

Le modèle cohésif proposé a l'avantage de vérifier la condition de raccord \mathcal{C}^1 (2.11), cependant, sa limite majeure est que l'énergie de rupture est la même pour tous les modes de fissuration, i.e. $G_N = G_T = G_c$. Cela définit alors un modèle de zone cohésive

dont l'énergie critique ne dépend pas du mode d'ouverture. Notons que le modèle de [Camacho et Ortiz, 1996], basé sur une formulation potentielle, conduit à ce même résultat concernant la non dépendance de l'énergie de rupture au mode de fissuration. Néanmoins, des études expérimentales montrent qu'à cause des effets microstructuraux, l'énergie de rupture est fortement liée au mode de l'ouverture. Pour remédier à ce problème, souvent la condition de raccord du potentiel surfacique est relaxée en modifiant l'expression du déplacement effectif u_{eff} (e.g. [Snozzi et Molinari, 2006]). Dans ce travail, on propose d'exprimer la fonction d'adoucissement en fonction de u_{eff} et, ainsi, on tolère que l'énergie cohésive G est indépendante du mode de fissuration.

La combinaison de l'exigence de raccord \mathcal{C}^1 (2.11) et de la relation entre la raideur cohésive normale et tangentielle C_N/C_T (3.16) impose que les surfaces ultimes d'amorçage et de rupture du MZC dépendent du coefficient de Poisson ν^M comme l'illustre la FIGURE 4.4 : il est plus difficile de rompre (et d'initier la fissure) en mode tangentiel qu'en mode normal d'autant que le matériau est incompressible.

Suivant la forme de la fonction d'endommagement \mathcal{S}^{coh} , l'équation (4.7) peut être résolue analytiquement ou numériquement par une méthode de type point fixe par exemple. L'application du modèle macroscopique obtenu pour différentes formes de la loi cohésive est présentée dans la section suivante.

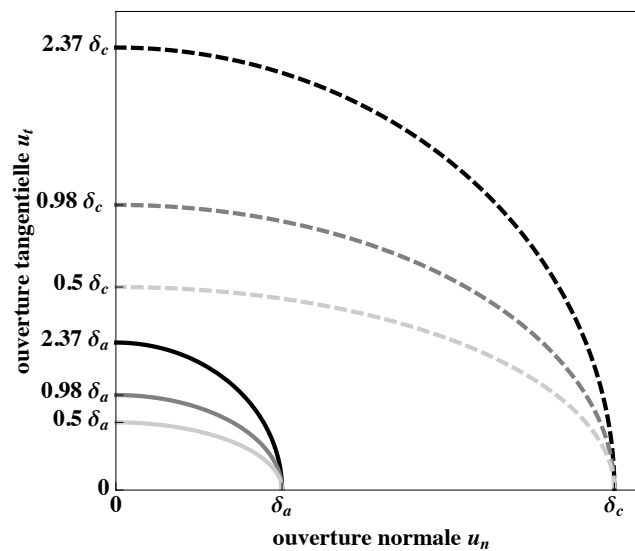


FIGURE 4.4 – Effet du coefficient de Poisson sur les surfaces seuil d'endommagement (courbe continue) et à la rupture totale (courbe discontinue) : noir $\nu^M = 0.3$, gris foncé $\nu^M = 0.14$, gris clair $\nu^M = 0$.

3.1 Modèle cohésif bilinéaire mixte (BL)

Commençons d'abord par étudier le cas d'un modèle de zone cohésive bilinéaire (cf. FIGURE 4.5)) pour lequel la solution de (4.7) s'obtient analytiquement. La fonction d'endommagement associée à ce modèle est :

$$\mathcal{S}^{\text{coh}}(u_{\text{eff}}) = \mathcal{F}_{\text{BL}}(u_{\text{eff}}, \delta_a, \delta_c) \quad (4.14)$$

où la fonction \mathcal{F}_{BL} décrit un adoucissement linéaire d'une quantité donnée lorsque la variable x varie entre a et b :

$$\mathcal{F}_{\text{BL}}(x, a, b) = \mathcal{D}_{[0,a]}(x) + \mathcal{D}_{[a,b]}(x) \frac{a}{a-b} \left(1 - \frac{b}{x}\right), \quad (4.15)$$

avec $\mathcal{D}_{[a,b]}(x)$ est la fonction porte égale à 1 si $x \in [a, b]$ et à 0 sinon.

La résolution analytique du problème non linéaire (4.7) conduit alors à l'expression suivante pour l'évolution de la variable d'endommagement β en fonction de la déformation macroscopique imposée (FIGURE 4.6) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } 0 \leq u_{\text{eff}} \leq \delta_a : \beta = 1 \\ \text{si } \delta_a \leq u_{\text{eff}} \leq \delta_c : \beta = \frac{(1-R)(1-2\nu^M) \left(\frac{Z\delta_c}{E_{\text{eff}}} - 3\right) \hat{R}_{\text{eff}}}{\left(3 + R(2\nu^M - 1) \left(\frac{Z\delta_c}{E_{\text{eff}}} - 3\right)\right) \hat{R}_{\text{eff}} + E^M R Z \delta_c \sqrt{\frac{3 - \nu^M}{1 + 3\nu^M}}} \end{array} \right. \quad (4.16)$$

En injectant la variable d'endommagement β (4.16) dans les modules de compressibilité et de cisaillement dans (4.5), et tenant compte de l'égalité $k_0^{\text{hom}}/k^M = \mu_0^{\text{hom}}/\mu^M$ (3.17), on obtient l'expression finale du tenseur d'élasticité non linéaire $\mathbb{C}_0^{\text{hom}}$:

$$\mathbb{C}_0^{\text{hom}} = \mathcal{S}^{\text{glo}}(E_{\text{eff}}) R C^M, \quad (4.17)$$

où \mathcal{S}^{glo} est la fonction d'endommagement global donnée par :

$$\mathcal{S}^{\text{glo}}(E_{\text{eff}}) = \mathcal{F}_{\text{BL}}(E_{\text{eff}}, E_{\text{eff}}^a, E_{\text{eff}}^c) = \frac{E_{\text{eff}}^a}{E_{\text{eff}}^c - E_{\text{eff}}^a} \left(1 - \frac{E_{\text{eff}}^c}{E_{\text{eff}}}\right). \quad (4.18)$$

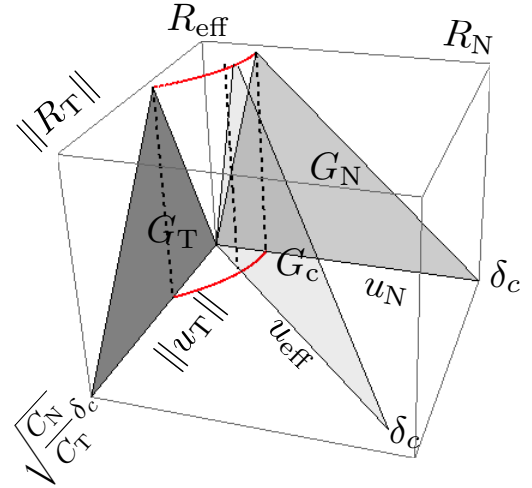


FIGURE 4.5 – Loi cohésive bilinéaire

Il en découle l'expression du potentiel élastique macroscopique associé à ce modèle :

$$\begin{aligned}
 \Psi(\mathbf{E}) &= \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}_0^{\text{hom}} : \mathbf{E} \\
 &= \frac{9}{2} \frac{E_{\text{eff}}^a}{E_{\text{eff}}^c - E_{\text{eff}}^a} R k^M \left(1 - \frac{E_{\text{eff}}^c}{E_{\text{eff}}} \right) E_{\text{eff}}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{E_{\text{eff}}^a}{E_{\text{eff}}^c - E_{\text{eff}}^a} R \left(1 - \frac{3E_{\text{eff}}^c}{\left(9E_m^2 + 3\frac{\mu^M}{k^M} E_{\text{eq}}^2 \right)^{0.5}} \right) (9k^M E_m^2 + 3\mu^M E_{\text{eq}}^2).
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

TABLE 4.1 – Paramètres du matériau, cohésifs et numériques.

Matériau	MZC	Maillage
$E^M = 10^9$ Pa	$\delta_a = 10^{-4}$ (m)	$L_{\text{mesh}} = 0.1$ (m)
$\nu^M = 0.3$	$\delta_c = 510^{-3}$ (m)	$\gamma = 2(\sqrt{2} + 1)$

La fonction d'endommagement global \mathcal{S}^{glo} permet de mesurer la perte de raideur induite par l'endommagement issu du modèle HS, i.e. $\mathcal{S}^{\text{glo}} = k_0^{\text{hom}} / (Rk^M) = \mu^{\text{hom}} / (R\mu^M)$. Notons à ce stade que la forme de la fonction d'endommagement globale \mathcal{S}^{glo} (4.18) ressemble à celle de la fonction d'endommagement locale \mathcal{S}^{coh} (4.14) avec comme variable la déformation effective E_{eff} au lieu du saut de déplacement effectif u_{eff} . Ainsi l'extension non linéaire de l'estimation HS au cas d'une matrice élastique avec des zones cohésives bilinéaires¹ conduit à un comportement macroscopique aussi bilinéaire².

Le modèle micromécanique proposé conduit à l'expression suivante de l'énergie macroscopique élastique \mathcal{U}_y (aire sous la partie élastique de la courbe globale, cf. FIGURE 4.7) :

$$\mathcal{U}_y = \frac{3}{2R} \frac{2\nu^M - 1}{E^M} \widehat{R}_{\text{eff}}. \tag{4.20}$$

et à l'énergie macroscopique à rupture \mathcal{U}_{cr} (aire sous la courbe globale, cf. FIGURE 4.7) :

$$\mathcal{U}_{cr} = \frac{1}{2} \widehat{R}_{\text{eff}} Z \delta_c. \tag{4.21}$$

L'énergie \mathcal{U}_y dépend des paramètres matériaux ainsi que de la contrainte cohésive maximale : un modèle cohésif avec une contrainte cohésive importante conduira ainsi à une énergie élastique plus grande. L'énergie totale à rupture \mathcal{U}_{cr} dépend quant à elle de la ténacité de la loi cohésive ainsi que de la densité de maillage : cette énergie est d'autant plus importante que le modèle a une ténacité cohésive importante. D'autre part, on peut constater que si l'on raffine le maillage, i.e. $L_{\text{mesh}} \rightarrow 0$ ($Z \rightarrow \infty$), l'ouverture critique δ_c , ou d'une façon équivalente l'énergie cohésive G_c , doit être linéairement liée à la taille de maillage L_{mesh} afin de garder une valeur bornée de l'énergie \mathcal{U}_{cr} .

1. bilinéarité en terme de $R_{\text{eff}} - u_{\text{eff}}$
2. bilinéarité en terme de $\Sigma_{\text{eff}} - E_{\text{eff}}$

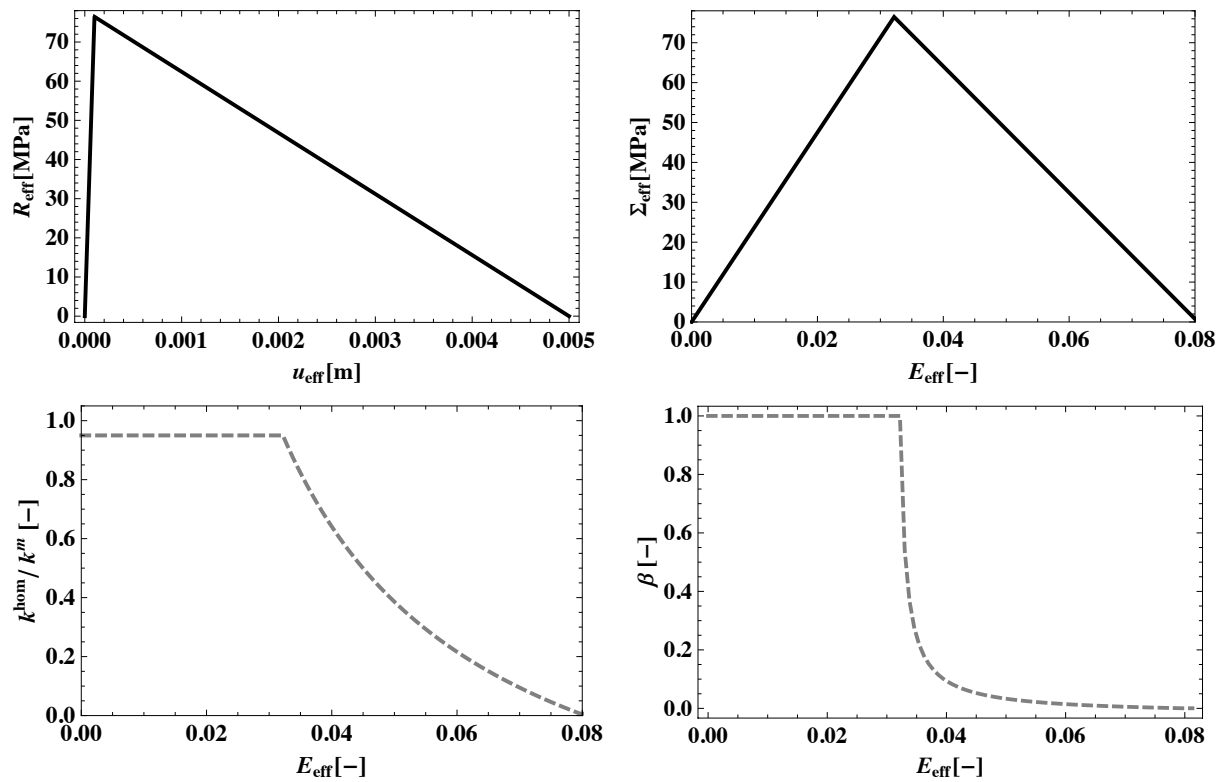


FIGURE 4.6 – Évolution de la réponse macroscopique issue du modèle HS pour le cas d'une loi cohésive bilinéaire : loi cohésive $R_{\text{eff}} - u_{\text{eff}}$ (en haut à gauche) ; loi macroscopique effective dérivée $\Sigma_{\text{eff}} - E_{\text{eff}}$ (en haut à droite) ; évolution du coefficient de compressibilité k^{hom} (resp. paramètre d'endommagement β) en fonction du chargement appliqué E_{eff} (en bas à gauche) (resp. en bas à droite).

Paramètres matériaux et cohésifs : cf TABLE 4.1

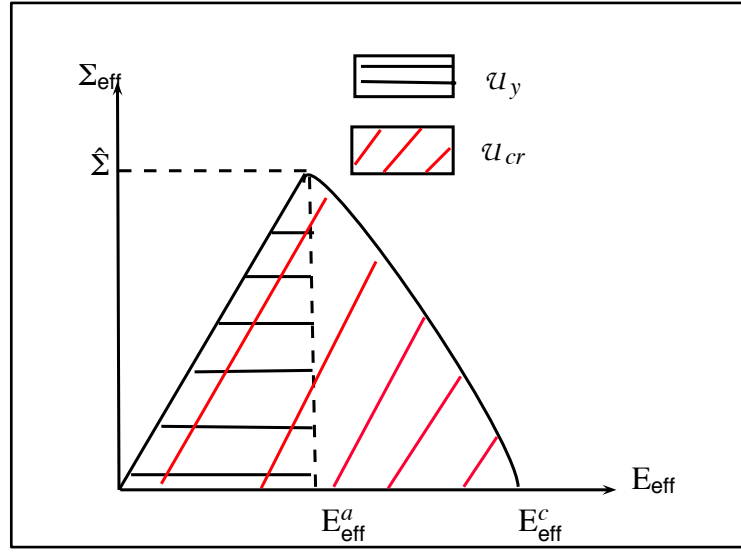


FIGURE 4.7 – Illustration de la loi globale $\Sigma_{\text{eff}} - E_{\text{eff}}$ et des différentes notations effectives.

3.2 Modèle cohésif mixte de type Monerie-Perales (MP)

On s'intéresse maintenant au cas d'une loi cohésive avec une partie adoucissante non linéaire (FIGURE 4.8). La fonction d'endommagement est :

$$\mathcal{S}^{\text{coh}}(u_{\text{eff}}) = \mathcal{F}_{\text{MP}}(u_{\text{eff}}, \delta_a, \delta_c) \quad (4.22)$$

où la fonction \mathcal{F}_{MP} décrit un adoucissement non linéaire de type [Perales et al., 2010] :

$$\mathcal{F}_{\text{MP}}(x, a, b) = \mathcal{D}_{[0,a]}(x) + \mathcal{D}_{[a,b]}(x) \left(1 - \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2 \right) \frac{a}{x}. \quad (4.23)$$

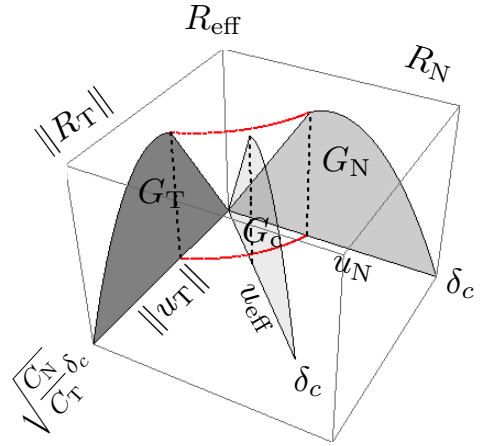


FIGURE 4.8 – Loi cohésive MP

La résolution du problème non linéaire (4.7) est obtenue numériquement (e.g. schéma de point fixe). La réponse macroscopique effective obtenue $\Sigma_{\text{eff}} - E_{\text{eff}}$ ainsi que l'évolution du paramètre d'endommagement β et du coefficient de compressibilité k^{hom} en fonction du chargement imposé E_{eff} sont illustrés sur la FIGURE 4.9.

Pour la loi cohésive BL, la microstructure (matrice et MZCs) a un comportement bilinéaire et la réponse globale associée est aussi bilinéaire, i.e. $\mathcal{S}^{\text{coh}}(u_{\text{eff}}) = \mathcal{F}_{\text{BL}}(u_{\text{eff}}, \delta_a, \delta_c)$ et $\mathcal{S}^{\text{glo}}(E_{\text{eff}}) = \mathcal{F}_{\text{BL}}(E_{\text{eff}}, E_{\text{eff}}^a, E_{\text{eff}}^c)$ (courbe noire sur la FIGURE 4.10), Contrairement à ce cas,

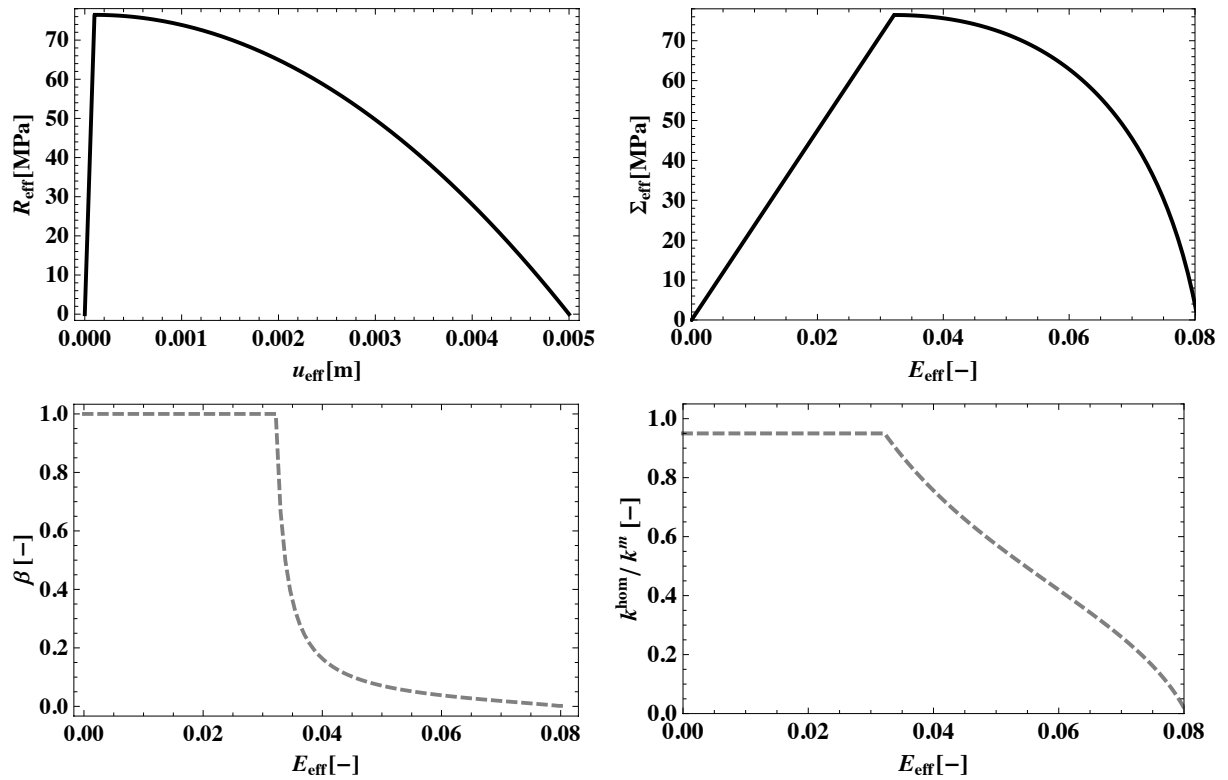


FIGURE 4.9 – Évolution de la réponse macroscopique issue du modèle HS pour le cas d'une loi cohésive de type MP3 : loi cohésive mixte $R_{\text{eff}} - u_{\text{eff}}$ (en haut à gauche); loi macroscopique effective dérivée $\Sigma_{\text{eff}} - E_{\text{eff}}$ (en haut à droite); évolution coefficient de compressibilité k^{hom} (resp. paramètre d'endommagement β) en fonction du chargement appliqué E_{eff} (en bas à gauche) (resp. en bas à droite).

Paramètres matériaux et cohésifs : cf TABLE 4.1

la réponse globale résultante d'une matrice élastique avec des MZCs de type MP (adoucissement non linéaire) n'est pas forcément de type MP, i.e. $\mathcal{S}^{\text{coh}}(u_{\text{eff}}) = \mathcal{F}_{\text{MP}}(u_{\text{eff}}, \delta_a, \delta_c)$ mais $\mathcal{S}^{\text{glo}}(E_{\text{eff}}) \neq \mathcal{F}_{\text{MP}}(E_{\text{eff}}, E_{\text{eff}}^a, E_{\text{eff}}^c)$ (courbe grise sur la FIGURE 4.10).

3.3 Modèle cohésif mixte général (MZCG)

Afin de faire varier le degré de la non-linéarité de la partie adoucissante de la loi cohésive, on propose une formulation générale pour la fonction d'endommagement \mathcal{S}^{coh} sous la forme d'une loi puissance avec un paramètre de non-linéarité q . Cette forme permet de retrouver le cas d'une loi bilinéaire ($q = 1$) ainsi que de traiter le cas d'un adoucissement convexe ($q > 1$) et concave ($q < 1$) :

$$\mathcal{S}^{\text{coh}}(u_{\text{eff}}) = \mathcal{F}_{\text{G}}(u_{\text{eff}}, \delta_a, \delta_c, q) \quad (4.24)$$

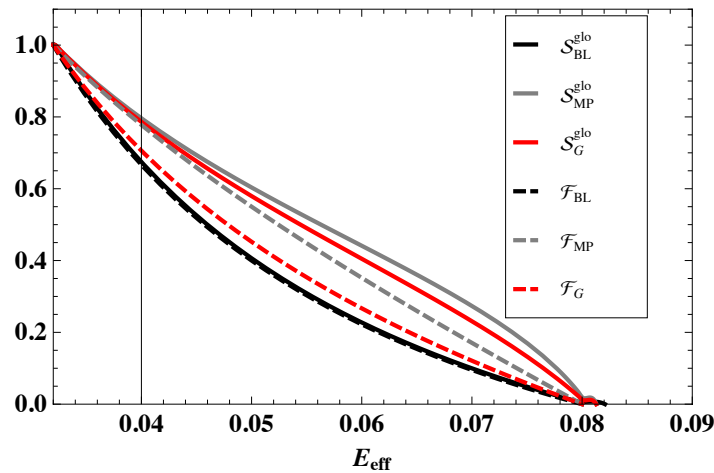


FIGURE 4.10 – Évolution de la fonction d'adoucissement global obtenu par le schéma HS pour différentes lois cohésives : BL (noir), MP (gris), MZCG (rouge). Paramètres matériaux et cohésifs : cf TABLE 4.1

où la fonction \mathcal{F}_G décrit un adoucissement non linéaire de degré q :

$$\mathcal{F}_G(x, a, b, q) = \mathcal{D}_{[0,a]}(x) + \mathcal{D}_{[a,b]}(x) \frac{a}{b^q - a^q} \left(\left(\frac{b}{x} \right)^q - 1 \right) x^{q-1}, \quad x \in [a, b]. \quad (4.25)$$

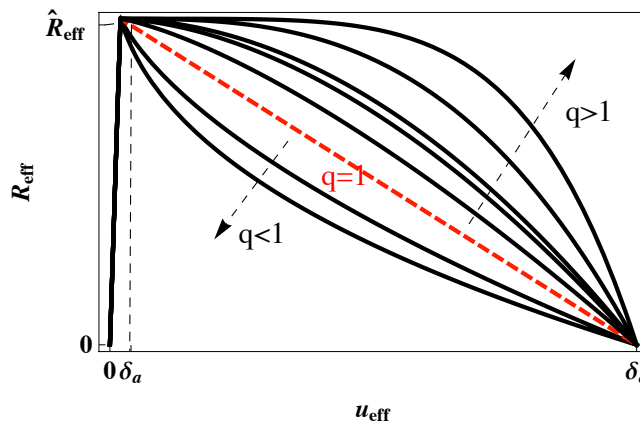


FIGURE 4.11 – Loi cohésive mixte générale

La réponse globale pour cette loi est aussi obtenue numériquement. La concavité (ou convexité) de la partie adoucissante de la loi globale suit celle de la loi cohésive. La réponse effective tend vers le mode ductile lorsque le paramètre de non linéarité q tend vers l'infini (FIGURE 4.12).

Pour ce cas on peut aussi remarquer que la fonction d'endommagement global suit une loi de type puissance mais avec un coefficient qui n'est pas le même que pour la loi cohésive

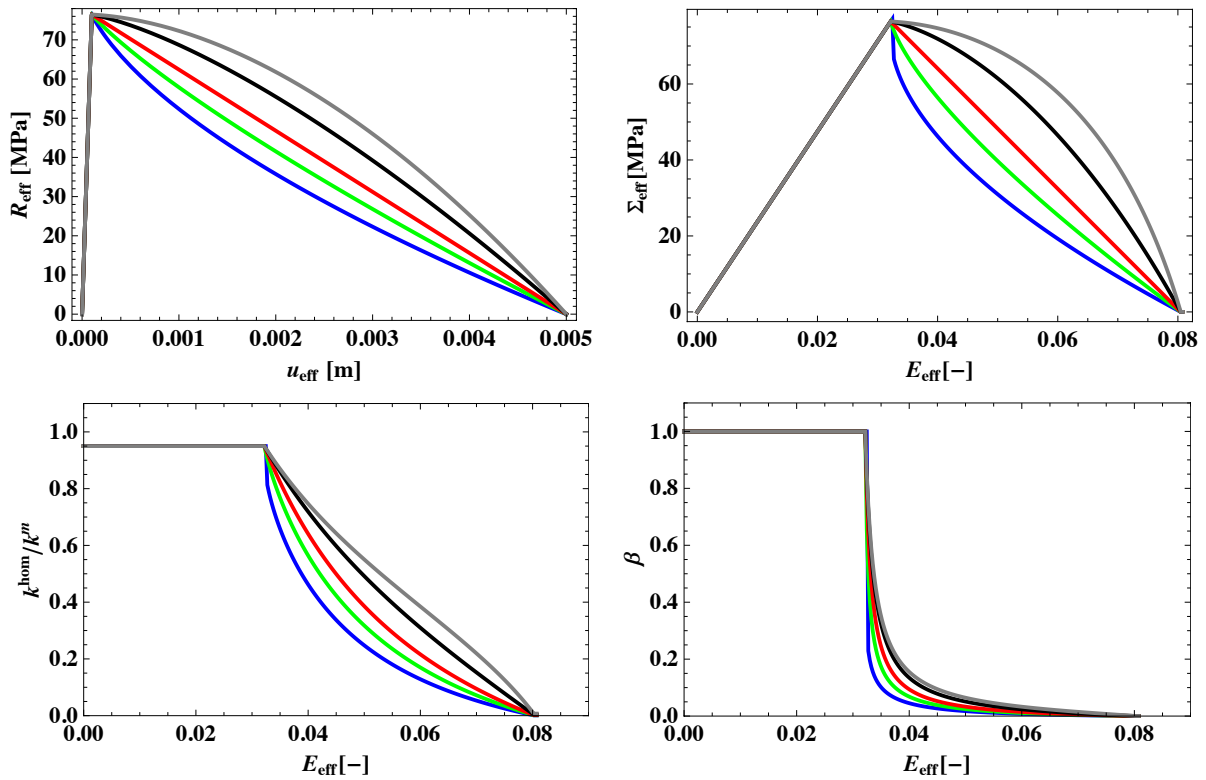


FIGURE 4.12 – Évolution de la réponse macroscopique issue du modèle HS pour le cas d’une loi cohésive mixte générale : loi macroscopique effective dérivée $\Sigma_{\text{eff}} - E_{\text{eff}}$ (en haut à droite); évolution du coefficient de compressibilité k^{hom} (resp. paramètre d’endommagement β) en fonction du chargement appliqué E_{eff} (en bas à gauche) (resp. en bas à droite).

Degré de non linéarité : bleu : $q=0.6$, vert : $q=0.8$, rouge : $q=1$, noir : $q=1.4$, gris : $q=1.8$

Paramètres matériaux et cohésifs : cf TABLE 4.1

locale, i.e. $\mathcal{S}^{\text{coh}}(u_{\text{eff}}) = \mathcal{F}_G(u_{\text{eff}}, \delta_a, \delta_c, q)$ et $\mathcal{S}^{\text{glo}}(E_{\text{eff}}) = \mathcal{F}_G(E_{\text{eff}}, E_{\text{eff}}^a, E_{\text{eff}}^c, q')$ avec $q \neq q'$ (courbe grise dans la FIGURE 4.10).

L’effet de la forme du MZC sur l’énergie globale du composite MIC est étudié en considérant le cas de 4 types de lois cohésives : loi BL, loi MP, loi générale G avec $q = 0.5$ et loi générale G avec $q = 2$. En traçant l’évolution du ratio entre les énergies globale-locale : \mathcal{U}_{cr}/G_c pour différentes tailles de maillage (FIGURE 4.13), on remarque que la forme de la loi cohésive n’influence pas ce ratio. Autrement dit, l’énergie de fissuration globale \mathcal{U}_{cr} reste linéairement proportionnelle à l’énergie de fissuration cohésive G_c et la pente entre les deux est égale à γ . Ainsi on obtient :

$$\mathcal{U}_{cr} \simeq ZG_c, \quad \text{pour tout type de loi cohésive.} \quad (4.26)$$

Rappelons à ce stade que ce résultat est attendu pour le cas unidimensionnel avec un pré-facteur L_{mesh} au lieu de Z .

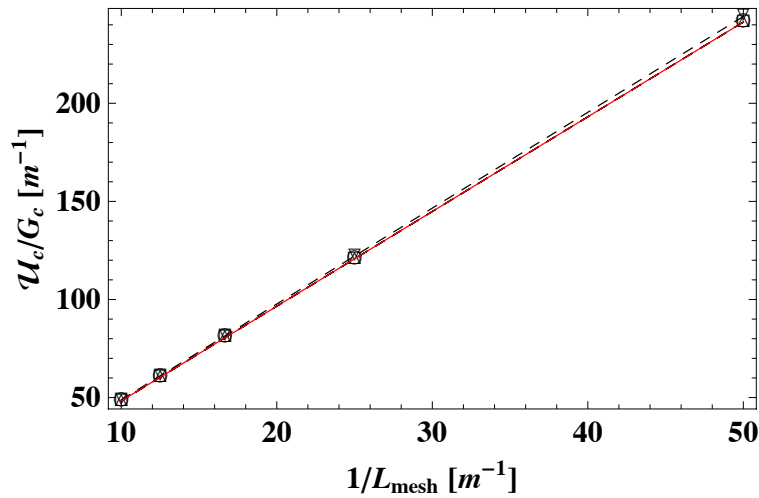


FIGURE 4.13 – Évolution de l'énergie de fissuration effective en fonction du maillage. Les différents types de lois cohésives sont tracés en symboles ouverts (MZCBL, MZCMP, MZCG ($q = 2$) et MZCG ($q = 0.5$)), et l'équation $y = \gamma x$ est tracée en courbe rouge continue.

Paramètres matériaux et cohésifs : cf TABLE 4.1

L'analogie entre le comportement local et la réponse globale est récapitulée dans le tableau TABLE 4.2 :

TABLE 4.2 – Analogie entre la loi locale cohésive et la loi macroscopique issue du modèle micromécanique.

	Loi locale $R_{\text{eff}} - u_{\text{eff}}$	Loi globale $\Sigma_{\text{eff}} - E_{\text{eff}}$
Variable	u_{eff}	E_{eff}
Amorçage et rupture	$\frac{u_{\text{eff}}(u_{\text{N}} = 0)}{u_{\text{eff}}(\mathbf{u}_{\text{T}} = 0)} = \sqrt{\frac{C_{\text{N}}}{C_{\text{T}}}}$	$\frac{E_{\text{eff}}(E_{\text{m}} = 0)}{E_{\text{eff}}(E_{\text{eq}} = 0)} = \sqrt{\frac{3k^{\text{M}}}{\mu^{\text{M}}}}$
Énergie de rupture	$G_{\text{N}} = G_{\text{T}} = G_c$	$\mathcal{U}_{\text{cr}}(E_{\text{eq}} = 0) = \mathcal{U}_{\text{cr}}(E_{\text{m}} = 0) = \mathcal{U}_{\text{cr}}$

4 Critère sur la ténacité cohésive

Les relations locales-globales issues du comportement macroscopique endommageable permettent d'établir des critères pour la calibration des autres paramètres de la loi cohésive, à savoir la contrainte maximale \hat{R}_{eff} et la ténacité G_c en fonction des paramètres matériaux et des données du maillage (taille et type). L'inversion des relations globales-locales

obtenues permet de relier la contrainte \widehat{R}_{eff} et la ténacité G_c aux différentes propriétés macroscopiques de fissuration. D'autre part, on peut avoir la réponse macroscopique du matériau étudié à l'aide des essais expérimentaux. Par suite on peut calculer sa contrainte effective maximale $\widehat{\Sigma}_{\text{eff}}^{\text{exp}}$ et son énergie dissipée à la rupture totale $\mathcal{U}_{cr}^{\text{exp}}$ (FIGURE 4.14). En identifiant ces deux quantités à celles obtenues par notre modèle, i.e. $\widehat{\Sigma}_{\text{eff}} = \widehat{\Sigma}_{\text{eff}}^{\text{exp}}$ et $\mathcal{U}_{cr} = \mathcal{U}_{cr}^{\text{exp}}$ on obtient deux relations explicites pour la calibration de la contrainte cohésive maximale :

$$\boxed{\widehat{R}_{\text{eff}} = \widehat{\Sigma}_{\text{eff}}^{\text{exp}}} \quad (4.27)$$

et de l'énergie cohésive :

$$\boxed{G_c = \frac{L_{\text{mesh}}}{\gamma} \mathcal{U}_{cr}^{\text{exp}}} \quad (4.28)$$

Ces relations peuvent être aussi exprimées en fonction des ouvertures à l'amorçage et à la rupture :

$$\delta_a = 3 \frac{1-R}{R} \frac{L_{\text{mesh}}}{\gamma} \frac{1-2\nu^M}{E^M} \widehat{\Sigma}_{\text{eff}}^{\text{exp}} \quad \text{et} \quad \delta_c = 2 \frac{L_{\text{mesh}}}{\gamma} \frac{\mathcal{U}_{cr}^{\text{exp}}}{\widehat{\Sigma}_{\text{eff}}^{\text{exp}}} \quad (4.29)$$

L'ensemble des relations (3.26), (4.27) et (4.28) définit alors des critères d'usage pratiques pour la calibration des paramètres de la loi cohésive. Même si ces critères exhibent une dépendance de la loi locale au maillage (à l'exception de la contrainte cohésive maximale \widehat{R}_{eff}), une telle calibration conduit à un comportement macroscopique qui est indépendant de la taille de maille. Ce point est validé numériquement dans la section suivante.

Ainsi, la loi élasto-endommageable macroscopique issue de notre modèle après la calibration des paramètres cohésifs suivant (3.26), (4.27) et (4.28) $\Sigma = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \mathbf{E}$ avec :

$$\begin{cases} \text{élasticité :} & \mathbb{C}^{\text{hom}} = R\mathbb{C}^M \\ \text{endommagement :} & \mathbb{C}^{\text{hom}} = \frac{\widehat{\Sigma}_{\text{eff}}^{\text{exp}} (2\nu^M - 1)}{2RE^M \mathcal{U}_{cr}^{\text{exp}} + 3(2\nu^M - 1) [\widehat{\Sigma}_{\text{eff}}^{\text{exp}}]^2} \times \left(3\widehat{\Sigma}_{\text{eff}}^{\text{exp}} - 2 \frac{\mathcal{U}_{cr}^{\text{exp}}}{E_{\text{eff}}} \right) R\mathbb{C}^M \end{cases} \quad (4.30)$$

Pour les autres types de lois cohésives, l'expression de l'énergie élastique globale est aussi obtenue analytiquement et le critère (4.27) est valable en toute rigueur. L'expression de l'énergie globale à rupture n'est pas obtenue analytiquement : un schéma numérique pour résoudre (4.7) est nécessaire. Cependant, la FIGURE (4.13) montre que le ratio des énergies de fissuration globale-locale \mathcal{U}_{cr}/G_c reste linéairement proportionnel à la densité de maillage Z , i.e. $\mathcal{U}_{cr} = ZG_c$ indépendamment de la forme de la loi cohésive. Ainsi le critère (4.28) peut être applicable pour tout type de MZC.

5 Validation numérique

L'objectif de cette partie numérique est d'illustrer la non-dépendance de la réponse macroscopique à la taille de maillage. Une cellule carrée maillée en CTQ avec des zones

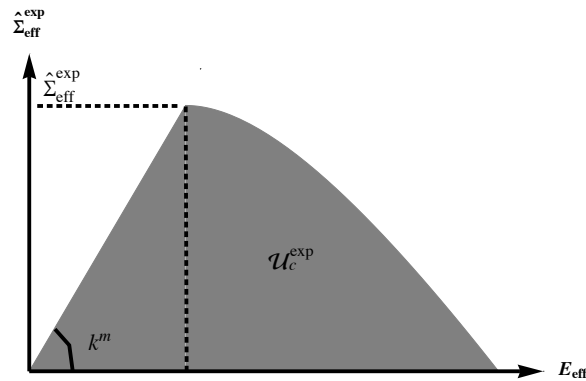


FIGURE 4.14 – Illustration de la courbe expérimentale de la réponse globale d'un matériau fragile.

cohésives intrinsèques est soumise à un chargement de type traction 2D. Les paramètres cohésifs sont calibrés suivant la méthodologie présentée dans la section précédente pour deux tailles de maillage $L_{\text{mesh}} = 1/20(\text{m})$ et $1/30(\text{m})$ en utilisant la plateforme éléments finis cohésifs-volumiques X-per. Les éléments volumiques ont un comportement linéaire élastique et le modèle cohésif est régi par une loi de type bilinéaire dont les 3 paramètres (raideur, contrainte maximale et énergie) sont calibrés suivant la méthodologie proposée dans cette thèse : (3.26), (4.27) et (4.28).

La non-dépendance de la réponse macroscopique au maillage est illustrée sur la FIGURE 4.15 : le ratio entre les ouvertures critiques δ_c , et donc, pour les énergies locales de fissuration pour les deux tailles de maillage est de l'ordre de 66% alors que le ratio entre les déformations macroscopiques critiques E_{eff}^c est voisin de 1. Ainsi **les propriétés de fissuration macroscopiques deviennent insensibles à la taille de maillage** dès lors que :

i– le calcul EF converge

ii– la loi cohésive est adéquatement calibrée en fonction du maillage.

TABLE 4.3 – Calibration des paramètres de la loi cohésive bilinéaire suivant les critères (3.23) et (4.27) pour deux tailles de maillages différentes (Propriétés volumiques : $E^M = 10^9(\text{Pa})$ et $\nu^M = 0.3$).

Propriétés cohésives	$C_N(\text{Pa}/\text{mm})$	$C_T(\text{Pa}/\text{mm})$	$\widehat{R}_{\text{eff}}(\text{Pa}/\text{m})$	$G_c(\text{Pa}\cdot\text{m})$
$L_{\text{mesh}} = 0.05(\text{m})$	1.5×10^{12}	$6.4. \times 10^{12}$	3000	0.001
$L_{\text{mesh}} = 0.03(\text{m})$	2.25×10^{12}	9.6×10^{11}	3000	0.0006

6 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, l'approche variationnelle de [Ponte Castañeda, 1991], équivalente à la méthode sécante modifiée [Suquet, 1995; Ponte Castañeda et Suquet, 1998] est appliquée

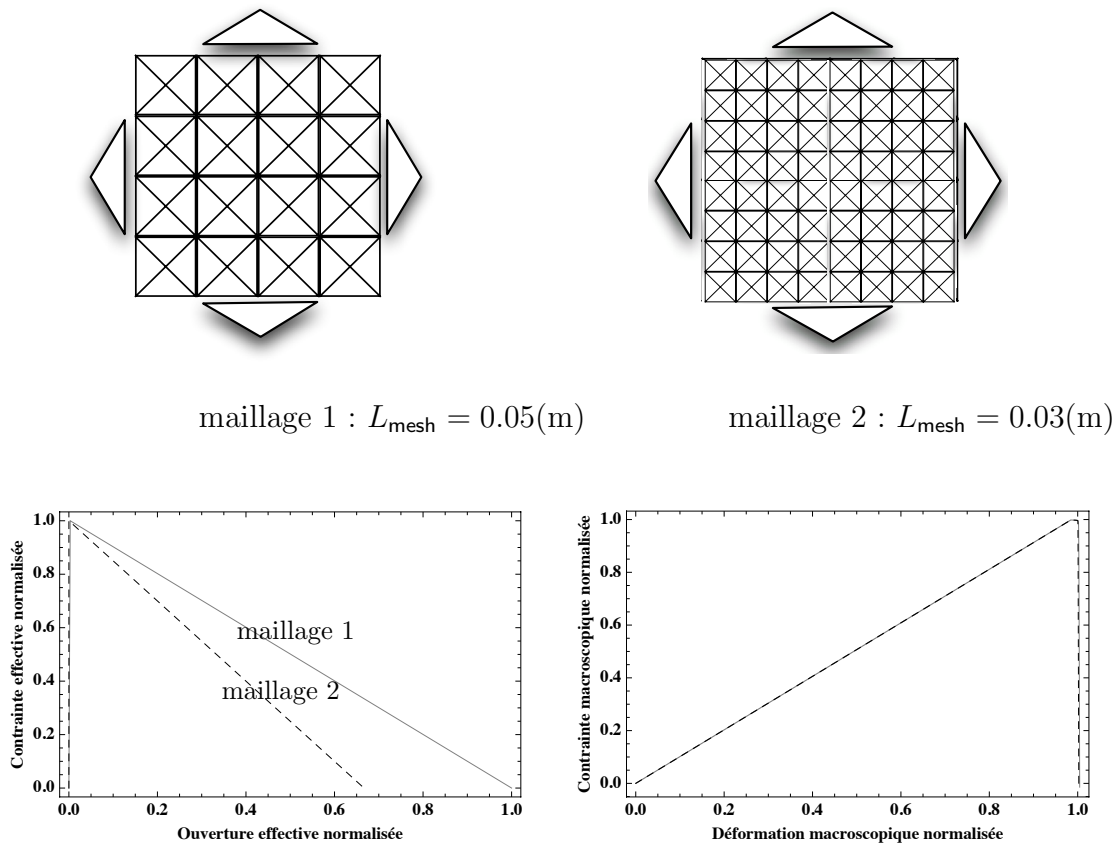


FIGURE 4.15 – Convergence de la réponse contrainte-déformation macroscopique. En haut, illustration des deux maillages et le chargement appliqué. En bas, la loi locale calibrée pour deux tailles de maillage différentes (à gauche) et la réponse globale indépendante du maillage (à droite).

Données matériaux et cohésives : cf. TABLE 4.3

Données numériques : tailles de maillage cf. TABLE 4.3 ; éléments finis linéaires.

pour appréhender le comportement effectif du MIC quasi-fragile (matrice linéaire élastique avec des MZCs fragiles). Les principaux résultats issus de ce modèle d'endommagement sont :

- La possibilité de relier d'une façon explicite la déformation effective macroscopique à l'amorçage E_{eff}^a (resp. à la rupture E_{eff}^c) à l'ouverture cohésive à l'amorçage δ_a (resp. à la

rupture δ_c) en fonction de la densité de maillage (Eqs. 4.10) et de la densité de maillage et du coefficient associé à la perte de raideur tolérée R (Eq. 4.11). Ces relations ne dépendent pas de la forme de la loi cohésive.

- L'application du modèle obtenu à différents types de lois cohésives montre l'influence de la forme de la loi cohésive sur la réponse globale du composite. Cependant, on constate que le ratio entre les énergies de rupture globale et cohésive \mathcal{U}_{cr}/G_c reste toujours linéairement proportionnel à la densité de maillage quel que soit le type de la loi cohésive $\mathcal{U}_{cr} \simeq ZG_c$.
- L'inversion des relations obtenues entre les propriétés effectives et les paramètres cohésifs conduit à des critères pour la calibration des paramètres cohésifs endommageables. Pour le cas simple d'une loi cohésive bilinéaire, deux *critères pratiques* permettent de calibrer la contrainte cohésive maximale \widehat{R}_{eff} et l'énergie de fissuration locale G_c en fonction de la contrainte effective maximale du matériau $\widehat{\Sigma}_{\text{eff}}$ et de son énergie globale de fissuration \mathcal{U}_{cr} (Eqs. 4.27 et 4.28). Ces critères peuvent être aussi appliqués pour tout type de loi cohésive.

Les critères obtenus ont l'avantage de dériver un comportement effectif qui ne dépend pas de la taille de maillage. Dans l'optique d'une simulation EFCV avec de MZCs à 3 paramètres (comportements fragiles), la calibration de la loi cohésive suivant l'ensemble des critères (4.27) permet d'éviter le problème de la dépendance au maillage des propriétés de fissuration globales. Ce point est mis en évidence numériquement avec la plateforme Xper.

Chapitre 5

Rupture ductile

*L*e modèle micromécanique obtenu est étendu dans ce chapitre au cas d'un comportement ductile. On cherche à estimer le comportement global d'une matrice plastique avec une distribution de zones cohésives non linéaires. Le comportement non linéaire de la matrice est décrit dans le cadre de la "théorie de déformation" avec une loi de type puissance (plasticité de Hencky). L'approche variationnelle [[Ponte Castañeda, 1991](#)] est utilisée pour dériver le comportement effectif.

Les intérêts du modèle micromécanique ductile obtenu sont :
i) la possibilité de relier d'une façon explicite les paramètres locaux à la réponse effective, ii) sa capacité de quantifier l'effet du taux de triaxialité sur le comportement global.

Sommaire

1	Théorie de la déformation	77
2	Homogénéisation : formulation du problème non linéaire	78
3	Application 1 : écoulement nul, plasticité parfaite	79
3.1	Matrice plastique avec des MZCs élastiques	79
3.2	Matrice plastique avec des MZCs "plastiques"	81
3.3	Matrice plastique avec des MZCs adoucissants	84
4	Critères pour le MZC ductile (cas de la plasticité parfaite) . . .	88
5	Application 2 : écoulement non nul	90
6	Discussion	91
7	Bilan du chapitre	92

1 Théorie de la déformation

L'objectif de ce chapitre est d'étendre la démarche proposée dans cette thèse à la rupture ductile. Afin de tenir compte de la ductilité, la matrice est supposée avoir un comportement non linéaire décrit dans le cadre de la *théorie de la déformation* de la plasticité, dite aussi la plasticité de Hencky. Le principe est de garder une loi constitutive de type (2.1) avec une énergie ω qui, cette fois-ci, n'est pas quadratique en $\boldsymbol{\varepsilon}$ mais supposée tenir compte d'une forme générale de la non linéarité de la réponse du matériau. Cependant, on suppose toujours que l'énergie ω est convexe en $\boldsymbol{\varepsilon}$, ce qui garantit que son énergie complémentaire, v , est définie d'une façon unique par la transformée de Legendre $v = \omega^*$. Ainsi la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ dérivent de ces deux énergies suivant les équations d'état :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\sigma}}.$$

Cette théorie est équivalente à la théorie incrémentale rigoureuse pour le cas d'un chargement monotone et radial. Son utilisation pour le cas d'un matériau hétérogène nécessite que le champ de contrainte (ou de déformation) soit monotone et radial en tout point du volume élémentaire représentatif pour garder l'équivalence avec l'approche incrémentale.

On s'intéresse dans la suite à une loi de comportement associant directement la déformation à la contrainte à travers un potentiel de type puissance (FIGURE 5.1). On reprend le potentiel en contraintes de type puissance proposé par [Vincent et al., 2010] et basé sur l'analyse de [Mucke et Bernhardt, 2003]. En se limitant à une plasticité isotrope, le potentiel de contrainte de la matrice s'écrit sous la forme :

$$v(\boldsymbol{\sigma}) = v_{\text{ela}}(\boldsymbol{\sigma}) + v_{\text{pla}}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (5.1)$$

avec

$$v_{\text{ela}}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2k^M} \sigma_m^2 + \frac{1}{6\mu^M} \sigma_{\text{eq}}^2, \quad (5.2)$$

et

$$v_{\text{pla}}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_0^2}{6\mu^M} \times \mathcal{H}(\sigma_{\text{eq}} - \sigma_0) \times \left[\frac{2}{n+1} \left(\left(\frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma_0} \right)^{n+1} - 1 \right) - \left(\left(\frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sigma_0} \right)^2 - 1 \right) \right] \quad (5.3)$$

où σ_0 est la limite d'élasticité, n est un paramètre d'écrouissage ($n = 1$: cas élastique, $n \rightarrow \infty$ plasticité parfaite) et \mathcal{H} est la fonction de Heaviside. Le potentiel en déformation associé est obtenu par inversion de (5.3) :

$$\omega(\boldsymbol{\varepsilon}) = \omega_{\text{ela}}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \omega_{\text{pla}}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (5.4)$$

avec

$$\omega_{\text{ela}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{9}{2} k^M \varepsilon_m^2 + \frac{3}{2} \mu^M \varepsilon_{\text{eq}}^2, \quad (5.5)$$

et

$$\omega_{\text{pla}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma_0 \varepsilon_0 \times \mathcal{H}(\varepsilon_{\text{eq}} - \varepsilon_0) \times \left[\frac{1}{p+1} \left(\frac{\varepsilon_{\text{eq}}}{\varepsilon_0} \right)^{p+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_{\text{eq}}}{\varepsilon_0} \right)^2 + \frac{p-1}{p+1} \frac{\sigma_0 \varepsilon_0}{2} \right] \quad (5.6)$$

où ε_0 est une déformation de référence et p est le paramètre d'écrouissage ($p = 1/n$). La loi constitutive dérivant de (5.6) est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \omega(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \left[\mathbb{C}_{\text{ela}}^{\text{M}} + \mathbb{C}_{\text{pla}}^{\text{M}} \right] : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.7)$$

avec $\mathbb{C}_{\text{ela}}^{\text{M}} = \mathbb{C}^{\text{M}} = 3k^{\text{M}}\mathbb{J} + 2\mu^{\text{M}}\mathbb{K}$ et :

$$\mathbb{C}_{\text{pla}}^{\text{M}}(\varepsilon_{\text{eq}}) = 2\mu^{\text{M}} \times \mathcal{H}(\varepsilon_{\text{eq}} - \varepsilon_0) \times \left(\left(\frac{\varepsilon_{\text{eq}}}{\varepsilon_0} \right)^{p-1} - 1 \right) \mathbb{K}. \quad (5.8)$$

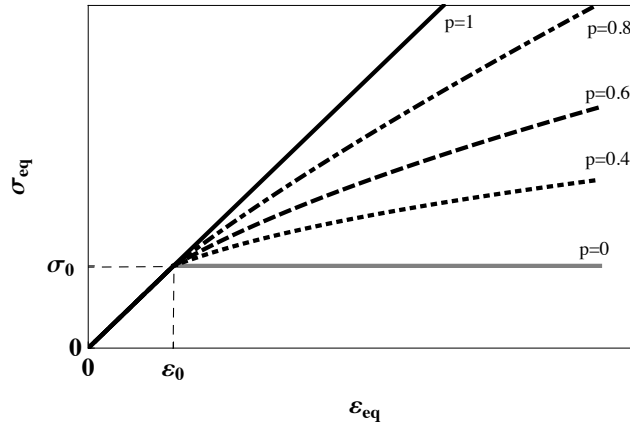


FIGURE 5.1 – Matrice à loi de type puissance

2 Homogénéisation : formulation du problème non linéaire

En considérant toujours des chemins de chargements appliqués radiaux et monotones, la formulation du problème non linéaire pour le cas ductile se base sur l'introduction d'un CLC ayant la même géométrie que le problème de base et dont le comportement des deux phases non linéaires est "optimalement" linéarisé par des tenseurs d'élasticité sécants. Pour la matrice, le tenseur sécant doit être évalué au second moment de la déformation équivalente $\sqrt{\langle \varepsilon_{\text{eq}}^2 \rangle_{\Omega}}$. Pour les zones cohésives, il est évalué au second moment du saut de déplacement effectif, $\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}}$. Le module d'élasticité homogène du CLC, $\mathbb{C}_0^{\text{hom}}$, est estimé par la borne inférieure du schéma HS :

$$\mathbb{C}_0^{\text{hom}} = \mathbb{C}^{\text{hom}}(\mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{M}}; \mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{coh}}), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{M}} = \mathbb{C}_{\text{ela}}^{\text{M}} + \mathbb{C}_{\text{pla}}^{\text{M}} \left(\sqrt{\langle \varepsilon_{\text{eq}}^2 \rangle_{\Omega}} \right), \\ \mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{coh}} = \mathbb{C}^{\text{coh}} \left(\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}} \right). \end{cases} \quad (5.9)$$

où $\mathbb{C}_{\text{pla}}^{\text{M}}$ est donné par (5.8), \mathbb{C}^{coh} par (2.14), et \mathbb{C}^{hom} par (3.8). Le comportement du composite est, de surcroît, macroscopiquement isotrope. Ainsi, le tenseur homogène $\mathbb{C}_0^{\text{hom}}$ est supposé être isotrope, i.e. :

$$\mathbb{C}_0^{\text{hom}} = 3k_0^{\text{hom}}\mathbb{J} + 2\mu_0^{\text{hom}}\mathbb{K}. \quad (5.10)$$

Les étapes de résolution de ce problème sont résumées dans le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Entrée : } \mathbf{E} \\ \text{étape 1} \\ \text{second moment de la déformation équivalente} \quad \langle \varepsilon_{\text{eq}}^2 \rangle_{\Omega} = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{1}{3(1-eZ)} \frac{\partial}{\partial \mu_0^{\text{M}}} (\mathbf{E} : \mathbb{C}_0^{\text{hom}} : \mathbf{E}) \\ \text{second moment du saut de déplacement} \quad \langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}} = \frac{1}{Z} D [\mathbf{E} : \mathbb{C}_0^{\text{hom}} : \mathbf{E}] \\ \text{étape 2} \\ \text{évaluation du tenseur sécant de la matrice} \quad \mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{M}} = \mathbb{C}_{\text{ela}}^{\text{M}} + \mathbb{C}_{\text{pla}}^{\text{M}} \left(\sqrt{\langle \varepsilon_{\text{eq}}^2 \rangle_{\Omega}} \right) \\ \text{évaluation du tenseur cohésif sécant} \quad \mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{coh}} = e \times \underbrace{\mathcal{S}^{\text{coh}} \left(\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}} \right)}_{\beta} \times (C_{\text{N}}\mathbb{E}_l + C_{\text{T}}\mathbb{K}_l) \\ \text{Sortie : } \Sigma = \mathbb{C}_0^{\text{hom}} : \mathbf{E}, \quad \text{par (3.8)} \end{array} \right. \quad (5.11)$$

où l'on rappelle que l'opérateur de dérivation D est donné par : $D[\bullet] = \frac{\partial \bullet}{\partial C_{\text{N}}^0} + \frac{C_{\text{T}}}{C_{\text{N}}} \frac{\partial \bullet}{\partial C_{\text{T}}^0}$.

Le processus d'homogénéisation (5.11) définit un système de deux équations scalaires non linéaires en terme des raideurs cohésives sécantes C_{N}^0 et C_{T}^0 (ou d'une façon équivalente le paramètre d'endommagement β) et du coefficient de cisaillement sécant μ_0^{M} . La résolution de ce problème pour le cas particulier de la plasticité parfaite $p = 0$ est obtenue analytiquement et sera détaillée dans la suite.

3 Application 1 : écoulement nul, plasticité parfaite

3.1 Matrice plastique avec des MZCs élastiques

On s'intéresse au cas d'un écoulement nul $p = 0$, correspondant à une matrice à plasticité parfaite (FIGURE 5.1). Le tenseur sécant de la matrice est évalué au second moment de la déformation équivalente $\sqrt{\langle \varepsilon_{\text{eq}}^2 \rangle_{\Omega}}$, i.e. :

$$\mu_0^{\text{M}} = \frac{\sigma_0}{3\sqrt{\langle \varepsilon_{\text{eq}}^2 \rangle_{\Omega}}}. \quad (5.12)$$

Le module d'élasticité homogène du CLC, $\mathbb{C}_0^{\text{hom}}$, est ensuite estimé par le schéma linéaire HS :

$$\mathbb{C}_0^{\text{hom}} = \mathbb{C}^{\text{hom}} (\mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{M}}; \mathbb{C}^{\text{coh}}) \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{M}} = 3k^{\text{M}}\mathbb{J} + 2\mu_0^{\text{M}}\mathbb{K}. \quad (5.13)$$

soit en utilisant (3.8) :

$$\begin{aligned} k_0^{\text{hom}} &= \frac{\xi_k}{1 + \xi_k} k^{\text{M}}, & \text{avec } \xi_k &= \frac{C_{\text{N}}}{Z k^{\text{M}}} \\ \mu_0^{\text{hom}} &= \frac{\xi_\mu}{1 + \xi_\mu} \mu_0^{\text{M}}, & \text{avec } \xi_\mu &= \frac{15}{4(1 + 3\chi)} \frac{C_{\text{N}}}{Z \mu_0^{\text{M}}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

avec $\chi = C_{\text{N}}/C_{\text{T}}$. L'énergie globale du CLC est alors :

$$\Psi_0(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}_0^{\text{hom}} : \mathbf{E} = \frac{9}{2} k_0^{\text{hom}} E_{\text{m}}^2 + \frac{3}{2} \mu_0^{\text{hom}} E_{\text{eq}}^2. \quad (5.15)$$

La première étape du schéma de résolution (5.11) consiste à calculer le second moment de déformation $\sqrt{\langle \varepsilon_{\text{eq}}^2 \rangle_\Omega}$ en dérivant l'énergie effective Ψ_0 par rapport à μ_0^{M} [Kreher, 1990] :

$$\langle \varepsilon_{\text{eq}}^2 \rangle_\Omega = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{1}{3(1 - eZ)} \frac{\partial (\mathbf{E} : \mathbb{C}_0^{\text{hom}} : \mathbf{E})}{\partial \mu_0^{\text{M}}}. \quad (5.16)$$

En tenant compte des expressions (5.14) dans la dérivation (5.16) et après le passage à la limite $e \rightarrow 0$, on a :

$$\sqrt{\langle \varepsilon_{\text{eq}}^2 \rangle_\Omega} = \frac{\mu_0^{\text{hom}}}{\mu_0^{\text{M}}} E_{\text{eq}}. \quad (5.17)$$

En combinant cette relation avec (5.12), on obtient l'expression du coefficient de cisaillement effectif sans avoir besoin d'explicitier le coefficient de cisaillement sécant du composite linéaire de comparaison μ_0^{M} :

$$\mu_0^{\text{hom}} = \frac{\sigma_0}{3E_{\text{eq}}}. \quad (5.18)$$

Le modèle micromécanique proposé prédit, pour le cas d'une matrice à plasticité parfaite avec des MZCs élastiques, un coefficient de cisaillement effectif non linéaire, μ_0^{hom} , qui est régi par une loi de type puissance à écrouissage nul. La loi de comportement effective est alors :

$$\Sigma = (3k_0^{\text{hom}} \mathbb{J} + 2\mu_0^{\text{hom}} \mathbb{K}) : \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad k_0^{\text{hom}} = \frac{\xi_k}{1 + \xi_k} k^{\text{M}} \quad \text{et} \quad \mu_0^{\text{hom}} = \frac{\sigma_0}{3E_{\text{eq}}}. \quad (5.19)$$

Le modèle (5.19) permet de retrouver le comportement plastique de la matrice en faisant tendre la densité de zones cohésives vers zéro (i.e. le composite MIC contient seulement une matrice à plasticité parfaite). Ainsi lorsque $Z \rightarrow 0$, les coefficients d'élasticité effectifs valent $k_0^{\text{hom}} = k^{\text{M}}$ (équation (5.14)) et $\mu_0^{\text{hom}} = \sigma_0/(3E_{\text{eq}})$. Considérons maintenant les deux cas limites d'inclusions cohésives rigides et de fissures percolantes. Le premier cas correspond à une raideur cohésive C_{N} qui tend vers l'infini. Il conduit au comportement effectif de la matrice plastique : $k_0^{\text{hom}} = k^{\text{M}}$ et $\mu_0^{\text{hom}} = \sigma_0/(3E_{\text{eq}})$. Pour le deuxième cas, la raideur cohésive tend vers 0 et on obtient un comportement effectif sans tenue apparente en compressibilité $k_0^{\text{hom}} = 0$ et $\mu_0^{\text{hom}} = \sigma_0/(3E_{\text{eq}})$.

En tenant compte enfin du critère (3.23) pour la calibration des raideurs cohésives initiales, la loi macroscopique (5.19) devient :

$$\Sigma = (3k_0^{\text{hom}}\mathbb{J} + 2\mu_0^{\text{hom}}\mathbb{K}) : \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad k_0^{\text{hom}} = Rk^{\text{M}} \quad \text{et} \quad \mu_0^{\text{hom}} = \frac{\sigma_0}{3E_{\text{eq}}}. \quad (5.20)$$

La continuité du coefficient de cisaillement effectif lors du passage du comportement élastique ($\mu^{\text{hom}} = R\mu^{\text{M}}$, équation (3.17)) au comportement plastique ($\mu_0^{\text{hom}} = \sigma_0/(3E_{\text{eq}})$, équation (5.18)) permet de dériver la déformation macroscopique équivalente associée au début de l'écoulement plastique du composite MIC, à savoir :

$$E_{\text{eq}}^0 = \frac{\sigma_0}{3R\mu^{\text{M}}} \quad (5.21)$$

et la contrainte macroscopique équivalente lorsque la matrice a plastifié est :

$$\Sigma_{\text{eq}}^0 = \sigma_0. \quad (5.22)$$

3.2 Matrice plastique avec des MZCs "plastiques"

On suppose maintenant que la matrice suit la loi (5.12) et que le modèle de zones cohésives suit une loi de type trapézoïdale.

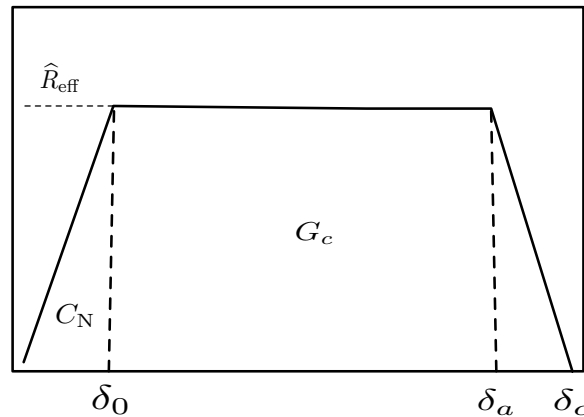


FIGURE 5.2 – Illustration de la loi cohésive mixte de type trapézoïdale $R_{\text{eff}} - u_{\text{eff}}$.

Pour la matrice, le comportement est décrit avec le module sécant (5.12). Pour les MZCs, les raideurs cohésives sécantes sont évaluées pour le second moment du saut de déplacement effectif : $C_{\text{N}}^0 = \mathcal{S}^{\text{coh}} \left(\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}} \right) C_{\text{N}}$ et $C_{\text{T}}^0 = \mathcal{S}^{\text{coh}} \left(\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}} \right) C_{\text{T}}$. Dans l'optique d'avoir des zones cohésives avec un comportement de type plasticité parfaite, i.e. la contrainte cohésive atteint son maximum $R_{\text{eff}} = \widehat{R}_{\text{eff}}$ et y reste, on pose $\mathcal{S}^{\text{coh}}(x) = \widehat{R}_{\text{eff}} / (C_{\text{N}} \times x)$. Ainsi on a :

$$C_{\text{N}}^0 = \frac{\widehat{R}_{\text{eff}}}{\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}}} \quad \text{et} \quad C_{\text{T}}^0 = \frac{1}{\chi} \frac{\widehat{R}_{\text{eff}}}{\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}}}. \quad (5.23)$$

Le second moment du saut de déplacement effectif est obtenu en dérivant l'énergie globale Ψ_0 par rapport à la raideur cohésive sécante [Maalej et al., 2007] :

$$\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}} = \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial (\mathbf{E} : \mathbb{C}_0^{\text{hom}} : \mathbf{E})}{\partial C_N^0} + \frac{C_T}{C_N} \frac{\partial (\mathbf{E} : \mathbb{C}_0^{\text{hom}} : \mathbf{E})}{\partial C_T^0} \right). \quad (5.24)$$

Le module d'élasticité homogène du composite linéaire de comparaison, $\mathbb{C}_0^{\text{hom}}$, est ensuite estimé par le schéma linéaire HS :

$$\mathbb{C}_0^{\text{hom}} = \mathbb{C}^{\text{hom}} (\mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{M}}; \mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{coh}}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{M}} = 3k^{\text{M}}\mathbb{J} + 2\mu_0^{\text{M}}\mathbb{K}, \\ \mathbb{C}_{\text{sct}}^{\text{coh}} = \mathbb{C}^{\text{coh}} \left(\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}} \right). \end{cases} \quad (5.25)$$

En faisant l'hypothèse que le rapport C_N^0/C_T^0 est constant, i.e. $C_N^0/C_T^0 = C_N/C_T = \chi$, et en tenant compte de l'expression des coefficients apparents (3.8), on a :

$$\begin{aligned} k_0^{\text{hom}} &= \frac{\xi_k}{1 + \xi_k} k^{\text{M}}, \quad \text{avec} \quad \xi_k = \frac{C_N^0}{Z k^{\text{M}}} \\ \mu_0^{\text{hom}} &= \frac{\xi_\mu}{1 + \xi_\mu} \mu_0^{\text{M}}, \quad \text{avec} \quad \xi_\mu = \frac{15}{4(1 + 3\chi)} \frac{C_N^0}{Z \mu_0^{\text{M}}} \end{aligned} \quad (5.26)$$

La combinaison des équations (5.26), (5.12) et (5.23) définit un système couplé de deux équations scalaires non linéaires dont les inconnues sont le coefficient de cisaillement sécant μ_0^{M} et la raideur cohésive sécante C_N^0 (ou d'une façon équivalente le paramètre d'endommagement $\beta = \mathcal{S}^{\text{coh}} \left(\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}} \right)$). Ce problème peut se résoudre en deux étapes distinctes sans avoir besoin d'explicitier l'expression du paramètre sécant μ_0^{M} . En effet, la dérivation de (5.26) par rapport à μ_0^{M} et la prise en compte de (5.12) conduit à l'expression finale du coefficient de cisaillement effectif :

$$\mu_0^{\text{hom}} = \frac{\sigma_0}{3E_{\text{eq}}}. \quad (5.27)$$

Ainsi, l'énergie globale Ψ_0 devient :

$$\Psi_0 = \frac{9}{2} k_0^{\text{hom}} E_{\text{m}}^2 + \frac{\sigma_0}{2} E_{\text{eq}}, \quad (5.28)$$

et sa dérivation suivant l'opérateur D conduit à l'expression du second moment du saut de déplacement effectif, qui ne dépend que de la partie hydrostatique du chargement :

$$\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}} = \frac{2}{Z} \frac{\partial}{\partial C_N^0} \left(\frac{9}{2} k_0^{\text{hom}} E_{\text{m}}^2 \right) = \frac{3E_{\text{m}}}{Z(1 + \xi_k)}. \quad (5.29)$$

En vérifiant la loi de comportement non linéaire (5.23) et tenant compte de (5.26), on obtient :

$$\xi_k = \left(3 \frac{k^{\text{M}}}{\widehat{R}_{\text{eff}}} E_{\text{m}} - 1 \right)^{-1}. \quad (5.30)$$

Par définition du paramètre $\xi_k = C_N^0 / (Zk^M)$, on obtient :

$$C_N^0 = \beta \times C_N = Zk^M \times \left(3 \frac{k^M}{\widehat{R}_{\text{eff}}} E_m - 1 \right)^{-1}. \quad (5.31)$$

et l'évolution du paramètre d'endommagement surfacique β en fonction du chargement imposé est :

$$\beta = \frac{Zk^M}{C_N} \times \left(3 \frac{k^M}{\widehat{R}_{\text{eff}}} E_m - 1 \right)^{-1}. \quad (5.32)$$

En injectant (5.30) dans (5.26), l'expression finale du coefficient de compressibilité est :

$$k_0^{\text{hom}} = \frac{\widehat{R}_{\text{eff}}}{3E_m}. \quad (5.33)$$

Le modèle obtenu montre que l'endommagement des MZCs n'évolue qu'en mode hydrostatique (équation (5.32)) et que le cisaillement ne joue que sur la plasticité apparente du composite MIC (5.27). Cela définit alors un modèle micromécanique découplé associant l'endommagement à la partie hydrostatique et la plasticité à la partie déviatorique.

La réponse globale du composite MIC contenant une matrice plastique et des zones cohésives à écoulement nul est :

$$\Sigma = (3k_0^{\text{hom}} \mathbb{J} + 2\mu_0^{\text{hom}} \mathbb{K}) : \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad k^{\text{hom}} = \frac{\widehat{R}_{\text{eff}}}{3E_m} \quad \text{et} \quad \mu^{\text{hom}} = \frac{\sigma_0}{3E_{\text{eq}}}. \quad (5.34)$$

soit en terme des contraintes globales :

$$\Sigma_m = 3k_0^{\text{hom}} E_m = \widehat{R}_{\text{eff}} \quad \text{et} \quad \Sigma_{\text{eq}} = 3\mu_0^{\text{hom}} E_{\text{eq}} = \sigma_0 \quad (5.35)$$

En introduisant le taux de triaxialité en déformation macroscopique $T = E_m / E_{\text{eq}}$, la contrainte globale effective Σ_{eff} couplant la contribution hydrostatique et déviatorique du comportement est :

$$\Sigma_{\text{eff}} = \sqrt{\Sigma_m^2 + \frac{k_0^{\text{hom}}}{3\mu_0^{\text{hom}}} \Sigma_{\text{eq}}^2} = \sigma_0 \times \sqrt{\eta^2 + \frac{\eta}{3T}}. \quad (5.36)$$

où l'on a noté $\eta = \widehat{R}_{\text{eff}} / \sigma_0$ le contraste des contraintes maximales entre les deux phases. L'équation (5.36) illustre l'effet du taux de triaxialité T pour les comportements ductiles. Ainsi à taux de triaxialité fixé (chemin de chargement monotones et radiaux), la contrainte effective Σ_{eff} est constante indépendamment du chargement appliqué et est égale à sa valeur maximale $\widehat{\Sigma}_{\text{eff}}$. Le lien entre la contrainte effective maximale et la contrainte effective cohésive maximale est :

$$\frac{\widehat{\Sigma}_{\text{eff}}}{\sigma_0} = \sqrt{\eta^2 + \frac{\eta}{3T}}. \quad (5.37)$$

Le modèle micromécanique prévoit alors une réponse globale de type plasticité parfaite pour les différents modes de chargement : hydrostatique, déviatorique, et mixte.

Considérons le cas des chargements limites hydrostatique et déviatorique. Lorsque le chargement est purement hydrostatique, i.e $E_m = 0$ et $T \rightarrow \infty$, la contrainte macroscopique effective maximale s'identifie à la contrainte effective cohésive maximale : $\widehat{\Sigma}_{\text{eff}} = \widehat{R}_{\text{eff}}$ et on retrouve la relation obtenue pour la rupture fragile. Si le chargement est purement déviatorique, i.e $E_m = 0$ et $T = 0$, le modèle prévoit un coefficient de compressibilité apparent rigide $k_0^{\text{hom}} \rightarrow \infty$, et le coefficient de Poisson qui en dérive est $\nu_0^{\text{hom}} \rightarrow 1/2$. Le composite MIC se comporte alors comme un milieu parfaitement plastique incompressible. Ces deux résultats sont dus à l'aspect découplé du modèle associant la plasticité seulement à la partie déviatorique et l'endommagement à la partie hydrostatique. En effet, en absence de toute contribution déviatorique, la plasticité n'évolue pas et le composite se comporte comme une matrice élastique avec des MZCs (rupture fragile). De la même façon, en absence de la partie hydrostatique, l'endommagement n'évolue pas et puisque la matrice a un comportement parfaitement plastique de type Von Mises, il en sera de même pour le composite MIC.

La FIGURE 5.3 illustre l'effet du contraste η sur la réponse globale $\widehat{\Sigma}_{\text{eff}}$. Il est clair que lorsque le ratio η augmente, la contrainte effective maximale que peut supporter le composite croît aussi. Pour des MZCs à contrainte maximale nulle $\widehat{R}_{\text{eff}} = 0$, i.e. $\eta = 0$, la contrainte effective maximale est aussi nulle. On constate aussi qu'à triaxialité forte ($T > 1$), le cas d'un contraste identique $\eta = 1$, i.e. $\widehat{R}_{\text{eff}} = \widehat{\Sigma}_{\text{eff}}$, prévoit une contrainte effective maximale égale à la limite d'élasticité de la matrice $\widehat{\Sigma}_{\text{eff}} = \sigma_0$ (courbe noire).

D'autre part, l'effet du taux de triaxialité T sur la contrainte effective maximale $\widehat{\Sigma}_{\text{eff}}$ est illustré sur la FIGURE (5.4) : la contrainte effective maximale que peut supporter le matériau, $\widehat{\Sigma}_{\text{eff}}$, est moins importante d'autant que la triaxialité devient grande. De plus, on constate que la relation entre $\widehat{\Sigma}_{\text{eff}}$ et η devient asymptotiquement linéaire pour $T \rightarrow \infty$. Pour ce cas, la relation entre la contrainte effective maximale et la contrainte cohésive maximale se réduit à : $\widehat{\Sigma}_{\text{eff}} = \widehat{R}_{\text{eff}}$ (courbe discontinue correspondant à l'équation $y = x$).

3.3 Matrice plastique avec des MZCs adoucissants

Pour décrire le comportement adoucissant du matériau, la matrice est toujours plastique (loi (5.12)) alors que les MZCs peuvent être décrits par une loi cohésive adoucissante. La fonction d'adoucissement \mathcal{S}^{coh} est prise sous la forme :

$$\mathcal{S}^{\text{coh}}(x) = \frac{\widehat{R}_{\text{eff}}}{C_N} \frac{1}{\delta_c - \delta_a} \left(\frac{\delta_c}{x} - 1 \right).$$

Les raideurs cohésives sécantes sont alors de la forme :

$$C_N^0 = \frac{\widehat{R}_{\text{eff}}}{C_N} \frac{1}{\delta_c - \delta_a} \left(\frac{\delta_c}{\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}}} - 1 \right) C_N \quad \text{et} \quad C_T^0 = \frac{\widehat{R}_{\text{eff}}}{C_N} \frac{1}{\delta_c - \delta_a} \left(\frac{\delta_c}{\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}}} - 1 \right) C_T. \quad (5.38)$$

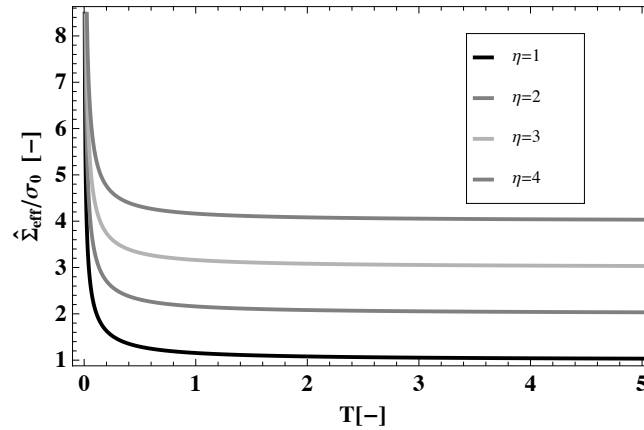


FIGURE 5.3 – Contrainte effective globale en fonction du taux de triaxialité en déformation. Illustration de l'effet du contraste contrainte cohésive-volumique η .

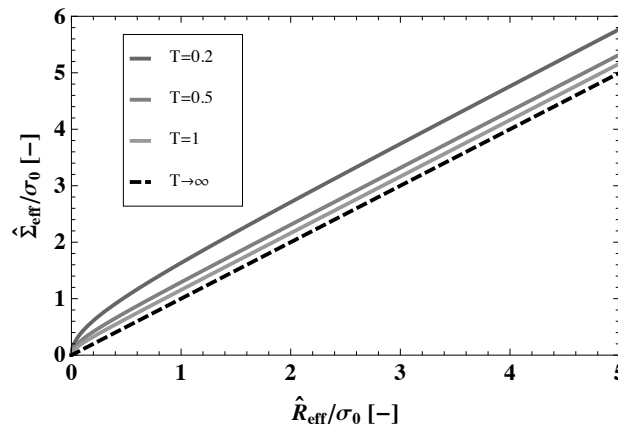


FIGURE 5.4 – Lien entre la contrainte effective globale maximale et la contrainte effective cohésive maximale. Illustration de l'effet du taux de triaxialité sur la réponse globale.

La combinaison des équations (5.26), (5.12) et (5.38) définit un système couplé de deux équations scalaires non linéaires dont les inconnues sont le coefficient de cisaillement sécant μ_0^M et la raideur cohésive sécante C_N^0 (ou d'une façon équivalente le paramètre d'endommagement $\beta = \mathcal{S}^{\text{coh}} \left(\sqrt{\langle u_{\text{eff}}^2 \rangle_{\mathcal{I}}} \right)$). De la même façon que dans la section précédente, on peut résoudre ce problème en deux étapes distinctes sans avoir besoin d'explicitier l'expression du paramètre sécant μ_0^M . En reprenant la même démarche on trouve que le coefficient de cisaillement apparent est :

$$\mu_0^{\text{hom}} = \frac{\sigma_0}{3E_{\text{eq}}}, \quad (5.39)$$

alors que le coefficient de compressibilité apparent est :

$$k_0^{\text{hom}} = \frac{k^{\text{M}}}{1 + (\delta_c - \delta_a) \frac{Zk^{\text{M}}}{\widehat{R}_{\text{eff}}}} \left(\frac{Z\delta_c}{3E_m} - 1 \right). \quad (5.40)$$

En identifiant la relation (5.40) à (5.33) (i.e. la continuité du coefficient de compressibilité global lors du passage du comportement plastique au comportement adoucissant), on obtient l'expression de la déformation globale hydrostatique à l'amorçage de l'endommagement :

$$E_m^a = \frac{\widehat{R}_{\text{eff}}}{3k^{\text{M}}} \left(1 + \frac{k^{\text{M}}}{\widehat{R}_{\text{eff}}} Z\delta_a \right) \quad (5.41)$$

D'autre part, la rupture totale est atteinte pour $k_0^{\text{hom}} = 0$ dans (5.40), ce qui conduit à la déformation globale hydrostatique à la rupture :

$$E_m^c = \frac{Z\delta_c}{3}. \quad (5.42)$$

La déformation globale à l'amorçage E_m^a (resp. à la rupture E_m^c) est proportionnelle au saut de déplacement à l'amorçage δ_a (resp. à la rupture δ_c) ainsi qu'à la densité de maillage Z . Un MZC résistant localement (augmentation de δ_a et δ_c) conduit à un modèle macroscopique résistant (augmentation de E_m^a et E_m^c).

Pour un taux de triaxialité T fixé, la contrainte effective globale Σ_{eff} est évaluée en fonction de la déformation équivalente imposée E_{eq} . La réponse globale se décompose en 4 parties :

- i) une partie élastique correspondant au comportement effectif d'une matrice élastique avec des MZCs élastiques (FIGURE (5.5) ME+ZCE),
- ii) une évolution croissante non linéaire correspondant à une matrice à plasticité parfaite avec des MZCs toujours élastiques (FIGURE (5.5) MP+ZCE),
- ii) une réponse globale avec une contrainte effective constante et qui correspond au cas où les deux lois locales ont un comportement de type plasticité parfaite (FIGURE (5.5) MP+ZCP)
- iv) et finalement une réponse décroissante non linéaire correspondant à une matrice plastique avec des zones cohésives adoucissantes (FIGURE (5.5) MP+ZCA).

L'effet du taux de triaxialité en déformation sur la réponse globale est illustré sur la FIGURE 5.6. Plus le taux de triaxialité devient important, moins le comportement effectif du composite est tenace : diminution de la contrainte effective maximale et de l'énergie de fissuration globale (aire sous la courbe globale). Lorsque le taux de triaxialité est trop élevé, le comportement global tend vers un comportement fragile et la contrainte effective maximale tend vers la contrainte cohésive maximale (ligne en discontinue).

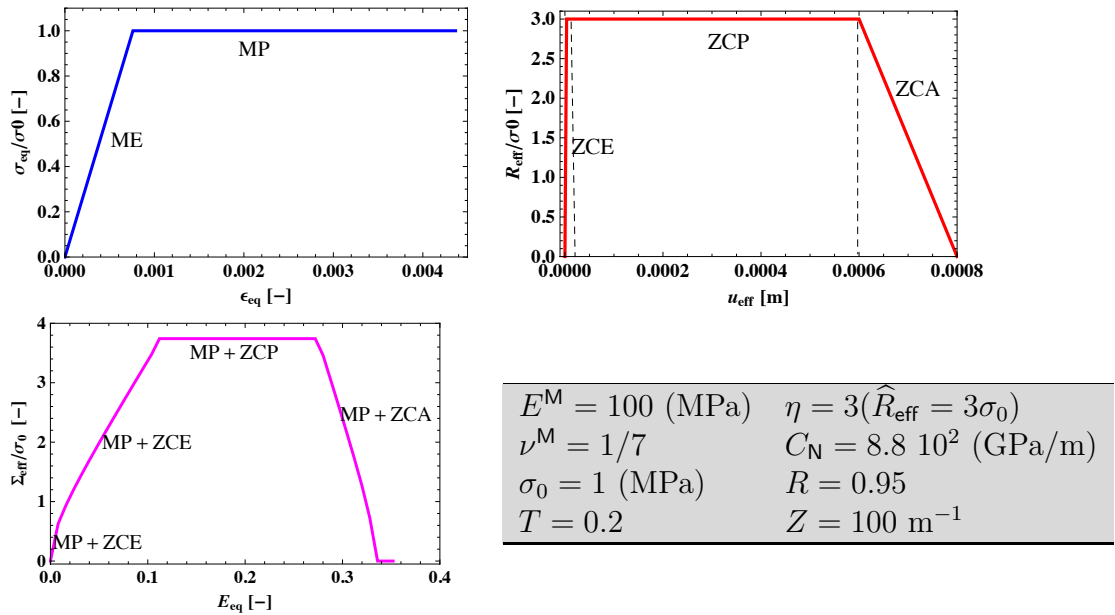


FIGURE 5.5 – Comportement effectif vs comportements locaux. La loi de comportement parfaitement plastique de la matrice (en haut à gauche), la loi cohésive mixte de type trapézoïdale (en haut à droite) et loi globale obtenue par homogénéisation non linéaire (en bas à gauche). On note ME (resp. ZCE) la partie élastique de la matrice (resp. des zones cohésives), MP (resp. ZCP) la partie plastique de la matrice (resp. des zones cohésives) et ZCA la partie adoucissante des zones cohésives. Les différentes propriétés matériau et cohésives sont rappelées dans le tableau en bas à droite.

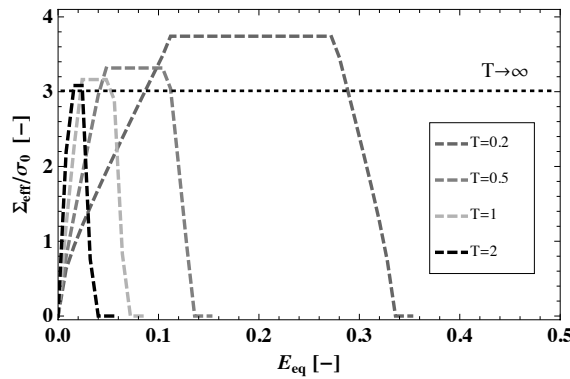


FIGURE 5.6 – Réponse élasto-plasto-endommageable effective issue du modèle micromécanique proposé pour le cas d’une matrice à écoulement nul. Les différents paramètres sont donnés dans la TABLE 5.1.

4 Critères pour le MZC ductile (cas de la plasticité parfaite)

Si l'on suppose disposer des paramètres effectifs du matériaux (par expérience par exemple), l'inversion des relations (5.37) , (5.41) et (5.42) issues du modèle plasto-endommageable obtenu permet d'établir un ensemble de critères pour la calibration d'une loi cohésive de type trapézoïdale. Ces critères sont donnés en fonction du taux de triaxialité, des paramètres matériaux et des caractéristiques du maillage. L'inversion de (5.37) conduit à la calibration de la contrainte cohésive maximale :

$$\frac{\widehat{R}_{\text{eff}}}{\sigma_0} = \sqrt{\frac{1}{36T^2} + \left(\frac{\widehat{\Sigma}_{\text{eff}}}{\sigma_0}\right)^2} - \frac{1}{6T} \quad (5.43)$$

Contrairement au cas d'un comportement fragile (4.27), la dernière relation met en évidence l'influence du taux de triaxialité T pour les comportements ductiles. Si le chargement tend vers le mode hydrostatique ($T \rightarrow \infty$), on retrouve le résultat obtenu pour la rupture fragile $\widehat{R}_{\text{eff}} = \widehat{\Sigma}_{\text{eff}}$.

D'autre part, le saut de déplacement effectif au début de l'endommagement δ_a peut être lié à la déformation macroscopique hydrostatique à l'amorçage des fissures E_m^a en inversant (5.41) :

$$\delta_a = \left[\left(\frac{1 - 2\nu^M}{2} \frac{\sigma_0}{E^M} \right) \left(\frac{1}{T} - \sqrt{\frac{1}{T} + 36 \left(\frac{\widehat{\Sigma}_{\text{eff}}}{\sigma_0} \right)^2} \right) + 3E_m^a \right] \frac{L_{\text{mesh}}}{\gamma} \quad (5.44)$$

Le saut de déplacement δ_a est d'autant plus grand que la déformation macroscopique à l'amorçage des fissures E_m^a devient importante. Finalement, le saut de déplacement critique δ_c peut être lié à la déformation macroscopique hydrostatique à la rupture E_m^c en inversant (5.42) :

$$\delta_c = 3E_m^c \frac{L_{\text{mesh}}}{\gamma} \quad (5.45)$$

Contrairement à la contrainte cohésive \widehat{R}_{eff} qui ne dépend pas de la taille de maillage, les ouvertures δ_a et δ_c sont linéairement liées à L_{mesh} . Quand la densité des interfaces cohésives est grande ($L_{\text{mesh}} \rightarrow 0$), ces ouvertures tendent vers 0 alors que la valeur de la contrainte cohésive maximale reste constante. D'autre part, l'ouverture à l'amorçage et la contrainte cohésive maximale exhibent une dépendance au taux du triaxialité en $1/T$ (FIGURE 5.7) : la contrainte cohésive croît non linéairement lorsque T augmente et tend asymptotiquement vers la valeur de \widehat{R}_{eff} obtenu pour le modèle fragile.

Ces relations permettent alors de relier l'énergie cohésive, G_c , aux paramètres matériau, aux caractéristiques du maillage ainsi qu'au taux du triaxialité suivant la relation :

$$G_c = \frac{1}{2} \widehat{R}_{\text{eff}} (\delta_a - \delta_0 + \delta_c) \quad \text{avec} \quad \delta_0 = \frac{\widehat{R}_{\text{eff}}}{C_N} \quad (5.46)$$

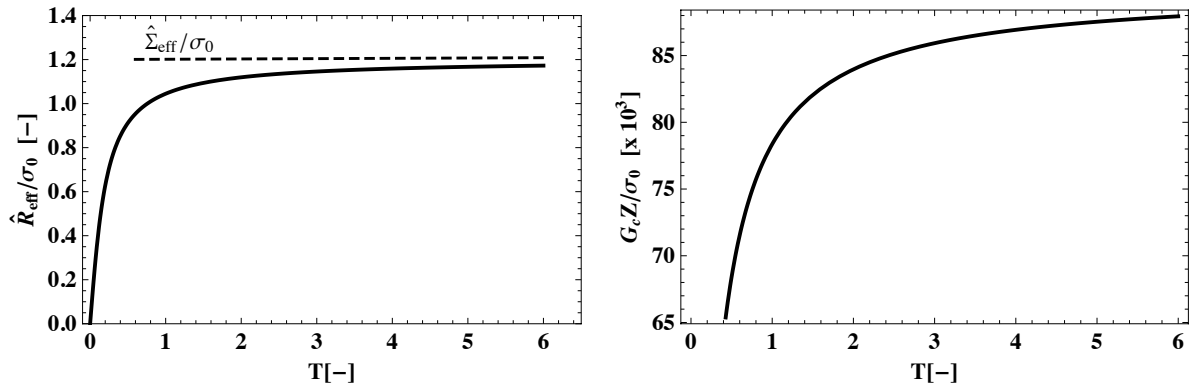


FIGURE 5.7 – Illustration de l’effet du taux de triaxialité imposé, T , sur la contrainte cohésive maximale, \hat{R}_{eff} (à gauche), et l’énergie cohésive critique, G_c (à droite).

Paramètres matériau : $E^M = 10^3$ MPa, $\nu^M = 0.3$, $\hat{\Sigma}_{\text{eff}} = 1.2\sigma_0$, $\sigma_0 = 1$ MPa, $E_{\text{eq}}^c = 2E_{\text{eq}}^a$, $E_{\text{eq}}^a = 10\%$

Paramètres cohésifs : $C_N = 7.810^2$ GPa/m

Paramètres numériques : $Z = 100$ m $^{-1}$, $R = 95\%$

L’ensemble des relations (3.23), (5.43), (5.44) et (5.45) définit des critères pratiques pour la calibration des paramètres cohésifs d’une loi à 4 paramètres (e.g. loi de type ”trapèze”). Ces critères sont donnés en fonction des données matériaux ainsi que des caractéristiques du maillage. Lorsque la taille de maillage tend vers 0, les ouvertures et l’énergie cohésives tendent vers 0 mais la contrainte cohésive reste constante (FIGURE 5.8).

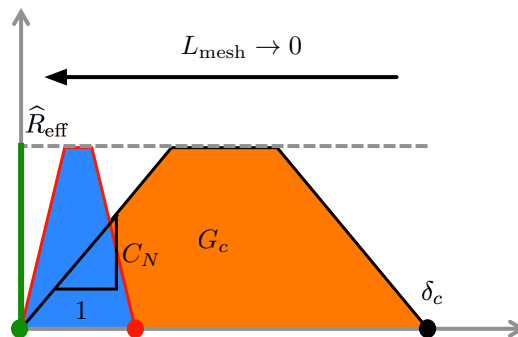


FIGURE 5.8 – Illustration de la calibration du MZC en fonction de la taille de maillage.

5 Application 2 : écoulement non nul

En dehors des solutions analytiques, des solutions numériques peuvent être obtenues pour un comportement volumique quelconque et des modèles de zones cohésives arbitraires. Pour l'illustrer, on garde ici des MZCs trapézoïdales et une matrice à écoulement non nul. La réponse macroscopique issue du modèle proposé est évaluée numériquement en calibrant les raideurs cohésives suivant le critère (3.23). L'influence des différents paramètres du modèle est illustrée sur la FIGURE 5.9 et la FIGURE 5.10 pour le cas $p = 0.5$ et une comparaison entre la plasticité parfaite et le cas d'un écoulement non nul est illustrée sur la FIGURE 5.11. Les résultats suivants sont obtenus :

- Un écoulement non nul au niveau de la matrice conduit à une réponse globale à écoulement non nul aussi.
- La réponse globale dépend fortement du taux de triaxialité imposé : l'augmentation du taux de triaxialité rend la réponse effective moins résistante, i.e. une diminution de la contrainte effective maximale et de l'énergie globale de rupture (FIGURE 5.9 à gauche et FIGURE 5.10)
- Plus le contraste entre la contrainte maximale cohésive et volumique η augmente plus la ténacité du milieu effectif augmente (FIGURE 5.9 à droite)

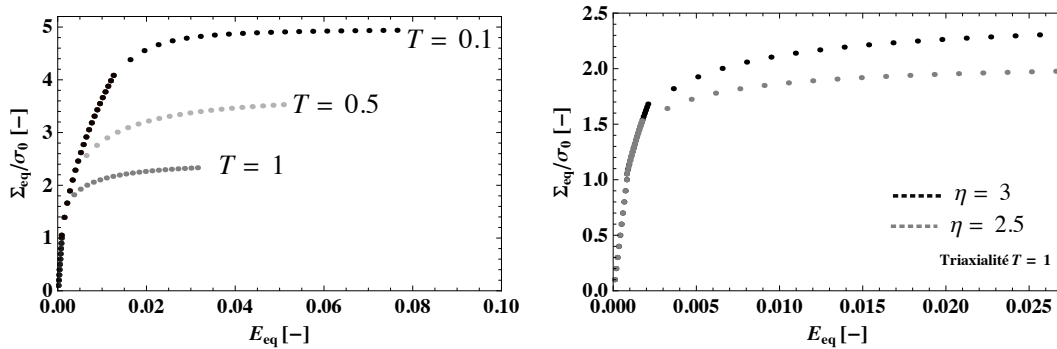


FIGURE 5.9 – Effet du taux de triaxialité imposé (à gauche) et du coefficient $\tau = \widehat{R}_{\text{eff}}/\sigma_0$ (à droite) sur la réponse élasto-plastique globale pour le cas d'une matrice à écoulement non nul ($p = 0.5$). Les différents paramètres sont donnés dans la TABLE 5.1.

TABLE 5.1 – Différentes propriétés matériau, cohésives et numériques

Paramètres volumiques			
$E^M = 100$ (MPa)	$\nu^M = 1/7$	$\sigma_0 = 1$ (MPa)	
Paramètres cohésifs			
$C_N = C_T = 880$ (GPa/m)	$\widehat{R}_{\text{eff}} = 3\sigma_0(\eta = 3)$	$\delta_a = 0.001$ m	$\delta_c = 0.002$ m
Paramètres numériques			
$R = 0.95$	$Z = 100$ m ⁻¹		

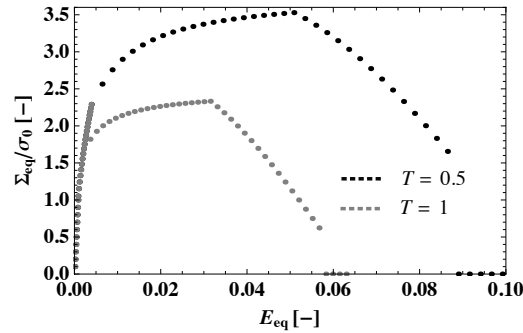


FIGURE 5.10 – Réponse élasto-plasto-endommageable effective issue du modèle micromécanique proposé pour le cas d’une matrice à écrouissage non nul ($p = 0.5$). Les différents paramètres sont donnés dans la TABLE 5.1.

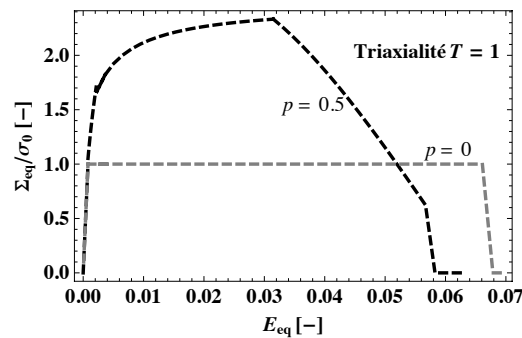


FIGURE 5.11 – Effet du degré d’écrouissage p de la matrice sur la réponse élasto-plasto-endommageable effective issue du modèle micromécanique proposé. Les différents paramètres sont donnés dans la TABLE 5.1.

6 Discussion

L’extension du modèle micromécanique proposé dans cette thèse à la rupture ductile permet de bien illustrer l’effet du taux de triaxialité imposé sur la réponse globale du matériau considéré ainsi que sur la détermination des paramètres cohésifs. Contrairement au cas de la rupture fragile (CHAPITRE 4), la calibration de ces paramètres pour le cas ductile exhibe une forte dépendance à la valeur du taux de triaxialité imposé (FIGURE 5.7). Cette dépendance confirme les résultats numériques et expérimentaux obtenus antérieurement dans la littérature sur la dépendance des paramètres de la loi cohésive à la triaxialité (e.g. [Sigmund et Brocks, 1999]).

L’approche adoptée dans cette thèse pour la rupture ductile est basée sur la théorie de la déformation. Cette théorie suppose que les trajets de chargement restent monotones et radiaux en tout point du milieu du composite. Ce point n’est pas pris en compte par le modèle proposé. En effet, même si le matériau étudié est homogène, les mécanismes non linéaires de la plasticité et de la rupture conduisent à des hétérogénéités microstructurales et les trajets de chargements locaux ne sont plus radiaux et monotones même s’ils le

sont macroscopiquement. D'autre part, la localisation de l'endommagement dans une zone donnée va conduire à la décharge d'autres zones cohésives. Le chargement local pour ces zones déchargées n'est plus monotone. Ces deux points constituent une limitation forte du modèle proposé.

7 Bilan du chapitre

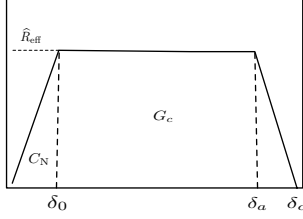
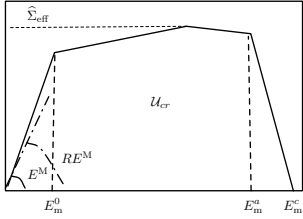
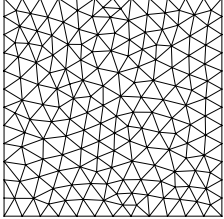
Le modèle micromécanique proposée dans cette thèse est étendu au cas d'un comportement élasto-plastique endommageable. L'avantage de ce modèle est sa capacité à :

- i. relier d'une façon explicite les paramètres locaux à la réponse effective,
- ii. exhiber l'effet du taux de triaxialité sur la réponse globale,

L'inversion des relations obtenues entre les propriétés globales du matériau et celles locales conduit à un ensemble de critères pour la calibration d'une loi cohésive de type trapézoïdale.

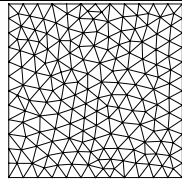
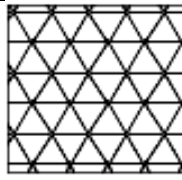
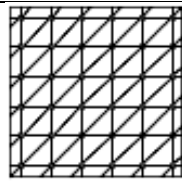
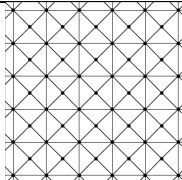
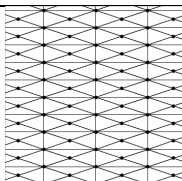
Fiches pratiques

Fiche 1 : Synthèse des critères ingénieurs pour la calibration des lois cohésives

Données		
<p>Loi cohésive</p> 	<p>Comportement global</p> 	<p>Maillage</p> 
Comportement élastique		
<p>Raideur cohésive normale : $\frac{C_N L_{\text{mesh}}}{E^M} = \gamma \frac{R}{1-R} \frac{1}{3(1-2\nu^M)}$</p> <p>Raideur cohésive tangentielle : $C_T = 2 \frac{1-2\nu^M}{1+3\nu^M} C_N$</p>		
Rupture quasi-fragile		
<p>Contrainte cohésive maximale : $\hat{R}_{\text{eff}} = \hat{\Sigma}_{\text{eff}}$</p> <p>Énergie de fissuration locale : $G_c = \frac{L_{\text{mesh}}}{\gamma} \mathcal{U}_{\text{cr}}^{\text{exp}}$</p>		
Rupture Ductile		
<p>Contrainte cohésive maximale : $\frac{\hat{R}_{\text{eff}}}{\sigma_0} = \sqrt{\frac{1}{36T^2} + \left(\frac{\hat{\Sigma}_{\text{eff}}}{\sigma_0}\right)^2} - \frac{1}{6T}$</p> <p>Ouverture à l'amorçage : $\delta_a = \left[\left(\frac{1-2\nu^M}{2} \frac{\sigma_0}{E^M}\right) \left(\frac{1}{T} - \sqrt{\frac{1}{T} + 36 \left(\frac{\hat{\Sigma}_{\text{eff}}}{\sigma_0}\right)^2}\right) + 3E_m^a \right] \frac{L_{\text{mesh}}}{\gamma}$</p> <p>Ouverture critique : $\delta_c = 3E_m^c \frac{L_{\text{mesh}}}{\gamma}$</p>		

Fiche 2 : Densité de maillage Z pour les différentes discrétisations éléments finis

$$Z = \frac{\gamma}{L_{\text{mesh}}}$$

	$\gamma = 3.64$	L_{mesh} : longueur du coté d'un triangle équilatéral telle que la discrétisation ID à N_t triangles est équivalente à N_t triangles équilatéraux de coté L_{mesh}
	$\gamma = 3.5$	L_{mesh} : longueur du coté du triangle équilatéral de la discrétisation
	$\gamma = 2 + \sqrt{2}$	L_{mesh} : longueur du plus grand coté du triangle isocèle
	$\gamma = 2(1 + \sqrt{2})$	L_{mesh} : longueur du plus grand coté du triangle isocèle
	$\gamma = 2\sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} + 1 + \frac{1}{s}$	L_{mesh} : longueur du plus petit coté du triangle isocèle

Conclusion et perspectives

Bilan du travail

Ce travail est une contribution à la compréhension de l'effet des paramètres cohésifs locaux sur la réponse macroscopique pour une simulation numérique de type éléments finis cohésifs-volumiques. Un modèle micromécanique d'endommagement est alors obtenu sur la base d'une approche cohésive intrinsèque et des techniques d'homogénéisation linéaire et non linéaire. Dans le cadre de cette étude, un composite équivalent "matrice-inclusions cohésives" est considéré comme une représentation adéquate d'une discrétisation cohésive-volumique avec des zones cohésives insérées entre tous les éléments : la matrice a le même comportement que les éléments volumiques de la discrétisation éléments finis et les inclusions ont un comportement adoucissant qui dérive de la loi surfacique associée aux zones cohésives. Leur distribution spatiales est la même que celle des interfaces cohésives. Dans le cas d'un maillage isotrope, les inclusions cohésives sont aléatoirement distribuées et orientées. Pour le cas élastique, l'estimation de Hashin Shtrikman est retenue pour appréhender le comportement effectif du composite volumique-cohésif. Pour les comportements non linéaires (rupture fragile et ductile), la méthode variationnelle de Ponte Castañeda est appliquée pour le cas d'un potentiel surfacique non linéaire. Un composite linéaire de comparaison ayant la même microstructure que le composite "matrice-inclusions cohésives" est introduit. L'application de l'estimation de Hashin Shtrikman à ce composite de comparaison permet d'estimer le comportement effectif pour les cas non linéaires.

Le modèle micromécanique obtenu est valable à tout taux de triaxialité et toute forme de loi cohésive. Il permet d'obtenir des relations directes entre les propriétés globales du matériau et les paramètres locaux ainsi que la densité de maillage. Ces relations permettent d'illustrer l'effet du coefficient de Poisson sur la réponse globale ainsi que l'influence de la triaxialité sur les comportements de type ductile. Une analyse inverse de ces relations conduit à un ensemble de critères pour la calibration des paramètres des lois cohésives.

Les principaux résultats de cette thèse sont :

- i. Une estimation de la perte de raideur induite par des modèles de zones cohésives intrinsèques est obtenue sur la base d'un schéma d'homogénéisation variationnelle. Cette perte est exprimée en fonction des raideurs cohésives, des modules élastiques du matériau ainsi que de la densité de maillage.

- ii. En fixant *a priori* la perte de raideur tolérée par l'utilisateur, un critère d'usage pour les raideurs cohésives normale et tangente est obtenu. Ce critère permet de limiter au mieux la perte de raideur artificielle des modèles de zones cohésives intrinsèques, et étend, notamment pour le cas des comportements élastiques, les résultats antérieurs partiels de la littérature [Espinosa et Zavattieri, 2003; Tomar et al., 2004] à des trajets de chargements quelconques. En particulier, un *critère rigoureux* est obtenu pour des modèles cohésifs intrinsèques pour le cas d'un maillage 2D isotrope et un *critère pratique* est obtenu pour les autres configurations (maillage 3D ou 2D structuré).
- iii. Au-delà du comportement élastique, le modèle micromécanique d'endommagement obtenu lie de manière explicite l'effet des paramètres cohésifs locaux sur la réponse globale. Ces relations permettent d'illustrer l'effet du coefficient de Poisson sur les comportements globaux fragile et ductile ainsi que l'effet du taux de triaxialité pour le cas des comportement ductiles.
- iv. Dans l'optique d'une simulation numérique par approche cohésive-volumique, il est possible de faire de l'identification inverse des paramètres cohésifs en associant ces résultats aux critères obtenus pour quantifier les raideurs utilisées dans les lois cohésives.
- *Rupture fragile* : la contrainte cohésive maximale peut être liée à la contrainte effective maximale du matériau et l'énergie cohésive de fissuration peut être liée à l'énergie de rupture totale attendue du matériau ainsi qu'à la densité de maillage.
 - *Rupture ductile* : une relation est obtenue entre la contrainte maximale cohésive et globale. Cette relation dépend des propriétés du matériau ainsi que de la valeur du taux de triaxialité appliqué. D'autre part, l'ouverture cohésive à l'amorçage (resp. la rupture) est liée à la déformation hydrostatique à l'initiation de l'endommagement (resp. à la rupture globale). Ces dernières relations dépendent : 1/ des paramètres élastiques du matériau, 2/ des propriétés de fissuration macroscopiques attendues, 3/ du taux de triaxialité et 4/ de la densité de maillage.

L'apport principal de cette identification inverse est la possibilité de décrire un comportement global indépendamment de la taille de maillage.

Les résultats obtenus dans cette thèse offrent des critères pratiques pour la calibration d'une loi cohésive intrinsèque (TABLE 5.2). Cette calibration permet d'éviter le problème lié à la perte de raideur artificielle ainsi que d'obtenir une réponse macroscopique indépendante du maillage (convergence matérielle).

Perspectives

Ce travail ouvre plusieurs perspectives concernant l'utilisation des modèles de zones cohésives dans les codes de calcul éléments finis pour la simulation des processus de fissuration. La difficulté majeure restante ouverte concerne la sensibilité locale des chemins de fissuration suivant la morphologie du maillage. Pour un usage de MZCs qui conduit à une

TABLE 5.2 – Récapitulatif de l'état de l'avancement concernant l'usage des MZCs

Aspects et difficultés	☺	☹	Travaux liés
D1. Instabilités	✓		[Monerie, 2000]
D2. Convergence spatiale		✓	
D2'. Convergence matérielle	✓		ce travail
D3. Maîtrise de la perte de raideur artificielle	✓		ce travail
D4. Calibration de la loi cohésive	✓		ce travail

réponse numérique indépendante du maillage, on propose dans la suite quelques perspectives applicatives dans l'optique d'avoir une convergence, que ce soit sur le plan des propriétés globales du matériau ou des chemins de fissuration. L'idée est de combiner les critères obtenus dans cette thèse avec des algorithmes permettant de surmonter le problème de la divergence spatiale de la fissuration. Deux types de techniques peuvent être retenues à ce stade :

- un algorithme respectant la propriété de l'isopérimétrie de type "pin-wheel tilling" [Papoulia et al., 2006],
- une méthode de type "érosion libre" [Pandolfi et Ortiz, 2012].

La deuxième technique semble plus prometteuse vu que la première conduit à une dégénérescence de la qualité des mailles éléments finis. Une procédure pour l'extension de la méthode "érosion libre des éléments" aux approches cohésives est en cours de développement dans le cadre d'un groupe de travail entre le laboratoire MIST et A. Pandolfi (Italie). Le principe de la démarche repose sur un critère énergétique de type Griffith. D'une façon générale, la procédure consiste à considérer une discrétisation éléments finis avec un ensemble d'éléments volumiques séparés par des interfaces cohésives dont la loi surfacique est calibrée suivant les résultats de cette thèse pour éviter l'influence du maillage et la perte de raideur artificielle. On applique un chargement sur le bord de la structure et on définit, pour chaque interface i , un ϵ -voisinage comme proposé dans [Pandolfi et Ortiz, 2012]. L'équilibre de l'ensemble éléments-interface permet de comparer le gain d'énergie élastique ΔE_e dans une interface et son énergie dissipée G_c^i :

$$\Delta F_i = \Delta E_e - G_c^i \Delta \mathcal{A}_i \geq 0 \quad (5.47)$$

où l'estimation de l'aire \mathcal{A}_i est basée sur la définition du ϵ -voisinage :

$$\mathcal{A}_i = \frac{V_i}{2\epsilon}$$

avec V_i le volume de tous les éléments se trouvant dans le nouveau voisinage mais pas dans le voisinage contenant les interfaces déjà érodées. Si le test est vérifié, i.e. $\Delta F_i \geq 0$, l'interface est érodée. Sinon elle est gardée et l'on incrémente le chargement puis on réitère le bilan énergétique précédent.

Illustration pour le cas 1D. L'énergie élastique pour le cas d'un élément fini 1D avec une zone cohésive insérée est :

$$E_i = \underbrace{\frac{1}{2}k(u_d - u)^2}_{E_i^e} + \underbrace{\frac{1}{2}\beta(u)C_N u^2}_{E_i^c}$$

alors que l'énergie cohésive G_c^i :

$$G_c^i = G_c - \underbrace{\int_0^{u_a} R(u) du}_{E_i^c + E_i^d}$$

avec G_c l'énergie cohésive de fissuration totale ($u = \delta_c$), l'intégrale mesure l'énergie cohésive à l'ouverture actuelle ($u = u_a$) et G_c^i l'énergie résiduelle dans l'interface cohésive.

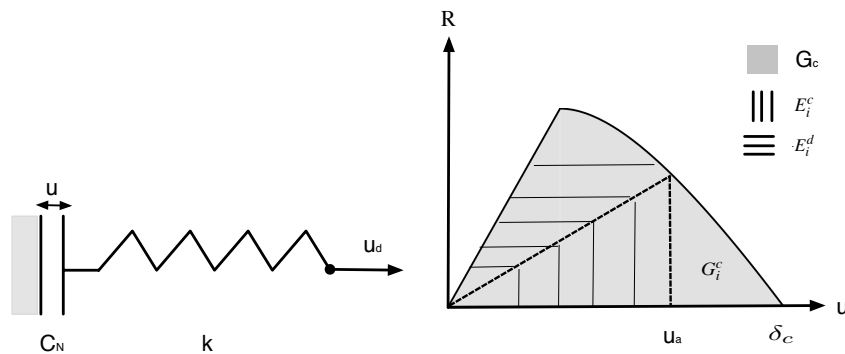


FIGURE 5.12 – Illustration de la démarche pour le cas d'un élément fini 1D avec une zone cohésive insérée. A gauche, un élément volumique 1D de raideur k avec un élément cohésif de raideur C_N et de loi $R = R(u)$. A droite, illustration du bilan énergétique.

Notons aussi qu'une autre perspective consiste à utiliser l'approche "érosion libre" jusqu'à la détection des chemins de fissuration et d'insérer ensuite des zones cohésives calibrées suivant les critères micromécaniques de cette étude.

Annexe A

Quelques rappels sur les tenseurs du quatrième ordre

1 Isotropie

Un tenseur du quatrième ordre symétrique (possédant les symétries majeures et mineures), \mathbb{A} , est dit être isotrope s'il est invariant par à toute rotation par $SO(3)$. Il s'écrit comme combinaison linéaire suivant les deux tenseurs :

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3} \mathbf{i} \otimes \mathbf{i}, \quad \mathbb{I} = \mathbb{J} + \mathbb{K}. \quad (\text{A.1})$$

Les tenseurs \mathbb{J} et \mathbb{K} ont les propriétés d'un projecteur (idempotent avec multiplication nulle), i.e. :

$$\mathbb{J} : \mathbb{J} = \mathbb{J}, \quad \mathbb{K} : \mathbb{K} = \mathbb{K}, \quad \text{et} \quad \mathbb{J} : \mathbb{K} = \mathbb{K} : \mathbb{J} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Ils permettent d'extraire la partie hydrostatique et déviatorique. Ainsi pour un tenseur d'ordre deux \mathbf{a} , on a :

$$\mathbb{J} : \mathbf{a} = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{a}) \mathbf{i} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_{\text{dev}} = \mathbb{K} : \mathbf{a}. \quad (\text{A.3})$$

La décomposition de \mathbb{A} est alors de la forme :

$$\mathbb{A} = A_1 \mathbb{J} + A_2 \mathbb{K}, \quad (\text{A.4})$$

avec

$$A_1 = \frac{\mathbb{J} :: \mathbb{A}}{\mathbb{J} :: \mathbb{J}} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{\mathbb{K} :: \mathbb{A}}{\mathbb{K} :: \mathbb{K}} \quad (\text{A.5})$$

avec :

$$\mathbb{J} :: \mathbb{J} = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{K} :: \mathbb{K} = 5. \quad (\text{A.6})$$

Les opérations usuelles sur les tenseurs d'ordre quatre se résument alors à :

$$\begin{aligned} \mathbb{A} + \mathbb{B} &= (A_1 \mathbb{J} + A_2 \mathbb{K}) + (B_1 \mathbb{J} + B_2 \mathbb{K}) = (A_1 + B_1) \mathbb{J} + (A_2 + B_2) \mathbb{K}, \\ \mathbb{A} : \mathbb{B} &= (A_1 \mathbb{J} + A_2 \mathbb{K}) : (B_1 \mathbb{J} + B_2 \mathbb{K}) = (A_1 B_1) \mathbb{J} + (A_2 B_2) \mathbb{K}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Le tenseur \mathbb{A} est inversible si et seulement si $A_1 \neq 0$ et $A_2 \neq 0$ et son inverse est :

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{A_1} \mathbb{J} + \frac{1}{A_2} \mathbb{K}. \quad (\text{A.8})$$

On montre que la moyenne sur toutes les orientations de l'espace d'un tenseur du quatrième ordre symétrique \mathbb{D} se réduit à la projection sur la base d'isotropie [Gatt et al., 2005] :

$$\langle \mathbb{D} \rangle_{\circ} = \frac{\mathbb{J} :: \mathbb{D}}{\mathbb{J} :: \mathbb{J}} \mathbb{J} + \frac{\mathbb{K} :: \mathbb{D}}{\mathbb{K} :: \mathbb{K}} \mathbb{K}, \quad (\text{A.9})$$

où $\langle \bullet \rangle_{\circ}$ est la moyenne sur toutes les orientations de l'espace. En notation matricielle, le tenseur \mathbb{A} s'écrit :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{A_1}{3} + \frac{2A_2}{3} & \frac{A_1}{3} - \frac{A_2}{3} & \frac{A_1}{3} - \frac{A_2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_1}{3} - \frac{A_2}{3} & \frac{A_1}{3} + \frac{2A_2}{3} & \frac{A_1}{3} - \frac{A_2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_1}{3} - \frac{A_2}{3} & \frac{A_1}{3} - \frac{A_2}{3} & \frac{A_1}{3} + \frac{2A_2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Élasticité. Lorsque la réponse mécanique d'un matériau est invariante par rapport à toute rotation, le tenseur d'élasticité \mathbb{C} est isotrope et dépend de deux modules : le module de compressibilité k et le module de cisaillement μ : $\mathbb{C} = 3k\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{K}$. La définie-positivité de \mathbb{C} impose que k et μ sont positifs. Ces modules peuvent être liés à d'autres modules usuels dans la littérature, tels que le module de Lamé $\lambda = k - \frac{2}{3}\mu$, le module de Young E et le coefficient de Poisson ν :

$$\frac{1}{3k} = \frac{1-2\nu}{E} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\mu} = \frac{1+\nu}{E}. \quad (\text{A.11})$$

2 Isotropie transverse

Soit \mathbf{n} un vecteur unitaire. Un tenseur du quatrième ordre \mathbb{A} est isotrope transverse par rapport à \mathbf{n} s'il est invariant par rapport à toute rotation autour de cet axe. Le plan (\mathbf{s}, \mathbf{t}) orthogonal au vecteur \mathbf{n} est dit plan transverse. Le tenseur \mathbb{A} s'exprime alors comme une combinaison linéaire suivant les éléments de la base d'isotropie transverse :

$$\mathbf{i}_{\Gamma} = \mathbf{i} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad \mathbf{j}_{\Gamma} = \mathbf{n} \otimes_s \mathbf{t} \quad \mathbf{j}_s = \mathbf{n} \otimes_s \mathbf{s} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbb{E}_l = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad \mathbb{J}_t = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{\Gamma} \otimes \mathbf{i}_{\Gamma} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbb{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i}_{\Gamma} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbb{K}_l = 2(\mathbf{j}_s \otimes \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_t \otimes \mathbf{j}_t) \quad \mathbb{K}_e = \frac{1}{6}(2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{i}_{\Gamma}) \otimes (2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{i}_{\Gamma}) \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbb{K}_t = \mathbb{K} - \mathbb{K}_e - \mathbb{K}_l. \quad (\text{A.16})$$

Les quatre tenseurs \mathbb{E}_l , \mathbb{J}_t , \mathbb{K}_t et \mathbb{K}_l sont des projecteurs alors que \mathbb{F} et ${}^T\mathbb{F}$ possèdent seulement la propriété de la symétrie. Le produit tensoriel entre ces éléments peut être résumé dans le tableau de [Walpole, 1981] (l'exposant T désigne la transposée) :

	\mathbb{E}_l	\mathbb{J}	\mathbb{F}	${}^T\mathbb{F}$	\mathbb{K}_l	\mathbb{K}_t
\mathbb{E}_l	\mathbb{E}_l	\mathbb{O}	\mathbb{O}	${}^T\mathbb{F}$	\mathbb{O}	\mathbb{O}
\mathbb{J}	\mathbb{O}	\mathbb{J}	\mathbb{F}	\mathbb{O}	\mathbb{O}	\mathbb{O}
\mathbb{F}	\mathbb{F}	\mathbb{O}	\mathbb{O}	\mathbb{J}_t	\mathbb{O}	\mathbb{O}
${}^T\mathbb{F}$	\mathbb{O}	${}^T\mathbb{F}$	\mathbb{E}_l	\mathbb{O}	\mathbb{O}	\mathbb{O}
\mathbb{K}_l	\mathbb{O}	\mathbb{O}	\mathbb{O}	\mathbb{O}	\mathbb{K}_l	\mathbb{O}
\mathbb{K}_t	\mathbb{O}	\mathbb{O}	\mathbb{O}	\mathbb{O}	\mathbb{O}	\mathbb{K}_t

On a alors :

$$\mathbb{A} = A_1\mathbb{E}_l + A_2\mathbb{J}_t + A_3\mathbb{F} + A_4{}^T\mathbb{F} + A_5\mathbb{K}_t + A_6\mathbb{K}_l, \quad (\text{A.17})$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\mathbb{A} :: \mathbb{E}_l}{\mathbb{E}_l :: \mathbb{E}_l} & A_2 &= \frac{\mathbb{A} :: \mathbb{J}_t}{\mathbb{J}_t :: \mathbb{J}_t} & A_3 &= \frac{\mathbb{A} :: \mathbb{F}}{\mathbb{F} :: \mathbb{F}} \\ A_4 &= \frac{\mathbb{A} :: {}^T\mathbb{F}}{{}^T\mathbb{F} :: {}^T\mathbb{F}} & A_5 &= \frac{\mathbb{A} :: \mathbb{K}_l}{\mathbb{K}_l :: \mathbb{K}_l} & A_6 &= \frac{\mathbb{A} :: \mathbb{K}_t}{\mathbb{K}_t :: \mathbb{K}_t}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Si le tenseur est symétrique, on a $A_3 = A_4$. Les opérations algébriques usuelles se réduisent alors à :

$$\begin{aligned} \mathbb{A} + \mathbb{B} &= (A_1 + B_1)\mathbb{E}_l + (A_2 + B_2)\mathbb{J}_t + (A_3 + B_3)(\mathbb{F} + {}^T\mathbb{F}) + (A_5 + B_5)\mathbb{K}_t + (A_6 + B_6)\mathbb{K}_l, \\ \mathbb{C} : \mathbb{B} &= (A_1B_1 + A_3B_3)\mathbb{E}_l + (A_2B_2 + A_3B_3)\mathbb{J}_t + (A_1B_3 + A_3B_2)\mathbb{F} + (A_3B_1 + A_2B_3){}^T\mathbb{F} \\ &\quad + A_5A_5\mathbb{K}_t + A_6B_6\mathbb{K}_l. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

L'inverse de \mathbb{C} est :

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{A_1}{\Delta}\mathbb{E}_l + \frac{A_2}{\Delta}\mathbb{J}_t + \frac{-A_3}{\Delta}(\mathbb{F} + {}^T\mathbb{F}) + \frac{1}{A_5}\mathbb{K}_t + \frac{1}{A_6}\mathbb{K}_l \quad (\text{A.20})$$

avec $\Delta = A_1A_2 - A_3^2$. Ainsi \mathbb{A} est inversible ssi $\Delta \neq 0$.

Finalement, notons qu'en notation matricielle, le tenseur \mathbb{A} devient :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{A_2}{2} + \frac{A_6}{2} & \frac{A_2}{2} - \frac{A_6}{2} & \frac{A_3}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_2}{2} - \frac{A_6}{2} & \frac{A_2}{2} + \frac{A_6}{2} & \frac{A_3}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_3}{\sqrt{2}} & \frac{A_3}{\sqrt{2}} & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_6 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Élasticité. Le tenseur élastique d'un matériau isotrope transverse est défini par cinq modules. Sa décomposition spectrale est : $\mathbb{C} = n\mathbb{E}_l + 2k_p\mathbb{J} + 2\mu_p\mathbb{K}_t + 2\mu_n\mathbb{K}_l + l(\mathbb{F} + {}^T\mathbb{F})$. Dans cette expression, k_p (resp. μ_p) est le module de compressibilité (resp. cisaillement) du plan transverse, μ_n est le coefficient de cisaillement longitudinal, n et l sont définis en fonction du module de Young longitudinal E_n et du coefficient de Poisson transverse ν_p comme suivant :

$$\nu_p = \frac{1}{2k_p} \quad \text{et} \quad E_n = n - \frac{l^2}{k_p}. \quad (\text{A.22})$$

Annexe B

Estimation HS pour le composite MIC

Dans cette annexe, les différentes étapes du schéma HS pour le calcul du tenseur d'élasticité \mathbb{C}^{hom} associé au MIC élastique sont exposées en détail. On rappelle que le composite MIC contient une matrice élastique (fraction volumique $1 - f$) dont la loi de comportement est donnée par (2.4), ainsi qu'une collection d'inclusions isotropes transverses (fraction volumique f). Les inclusions cohésives ont un semi-grand axe a , qui varie entre A^- et A^+ , et leur rapport d'aspect $w \ll 1$ reste invariant. L'orientation des inclusions est donnée par leur axe de symétrie dirigé suivant le vecteur \mathbf{n} (vecteur normal à une sphère unitaire S de \mathbb{R}^3 et de mesure 4π). Cette collection d'inclusions est décomposée en N familles. Chaque famille r ($1 \leq r \leq N$) est définie par une densité $\phi(a, \mathbf{n})$ d'inclusions telle que $\phi(a, \mathbf{n})dadS$ est le nombre d'inclusions dans la famille r avec un rayon inclus dans $(a, a + da)$ et de normale \mathbf{n} . La fraction volumique f des inclusions est donnée par :

$$f = \sum_{r=2}^N c_r = \int_S \int_{A^-}^{A^+} \phi(a, \mathbf{n}) \frac{4\pi}{3} a^3 w dadS. \quad (\text{B.1})$$

La formulation générale de l'estimation HS [Willis, 1977] est utilisée pour l'estimation du tenseur \mathbb{C}^{HS} :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\text{HS}}(\mathbb{C}^0) = & \\ & \left[(1 - f)\mathbb{C}^{\text{M}} : (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^{\text{M}} - \mathbb{C}^0))^{-1} + \sum_{r=2}^N c_r \mathbb{C}_r^{\text{coh}} : (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_r^{\text{coh}} - \mathbb{C}^0))^{-1} \right] \\ & : \left[(1 - f) (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^{\text{M}} - \mathbb{C}^0))^{-1} + \sum_{r=2}^N c_r (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_r^{\text{coh}} - \mathbb{C}^0))^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où \mathbb{C}^0 (resp. $\mathbb{C}_r^{\text{coh}}$) est le tenseur du quatrième ordre du milieu de référence (resp. de la famille r des inclusions) et \mathbb{P} est le tenseur de polarisation de Hill qui définit l'état de contraintes que le milieu de référence applique sur une inclusion avec des déformations

homogènes. Le tenseur \mathbb{P} dépend du rapport d'aspect des inclusions w , de leur orientations \mathbf{n} et du tenseur d'élasticité du milieu de référence \mathbb{C}^0 . Suivant [Willis, 1977], le milieu de référence est un matériau telle que les lois constitutives (2.4) et (2.21) sont remplacées par $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{\text{coh}} = \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{coh}} + \boldsymbol{\tau}^{\text{coh}}$ où les polarisations $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{\tau}^{\text{coh}}$ sont données par : $\boldsymbol{\tau} = (\mathbb{C} - \mathbb{C}^0) : \boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\tau}^{\text{coh}} = (\mathbb{C}^{\text{coh}} - \mathbb{C}^0) : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{coh}}$.

En utilisant le tenseur d'influence de Hill $\mathbb{C}^* = \mathbb{P}^{-1} - \mathbb{C}^0$ et en introduisant le tenseur du quatrième ordre $\mathbb{V}_1 = (\mathbb{C}^* + \mathbb{C}^{\text{M}})^{-1}$ et $\mathbb{V}_r = (\mathbb{C}^* + \mathbb{C}_r^{\text{coh}})^{-1}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^{\text{M}} - \mathbb{C}^0) &= \mathbb{I} + (\mathbb{C}^* + \mathbb{C}^0)^{-1} : (\mathbb{C}^{\text{M}} - \mathbb{C}^0) \\ &= (\mathbb{C}^* + \mathbb{C}^0)^{-1} : (\mathbb{C}^* + \mathbb{C}^{\text{M}}) \\ &= (\mathbb{C}^* + \mathbb{C}^0)^{-1} : \mathbb{V}_1^{-1} \end{aligned}$$

les mêmes relations sont obtenues pour :

$$\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_r^{\text{coh}} - \mathbb{C}^0) = (\mathbb{C}^* + \mathbb{C}^0)^{-1} : \mathbb{V}_r^{-1}.$$

En combinant ces deux dernières relations et en simplifiant par $(\mathbb{C}^* + \mathbb{C}^0)$, l'équation (B.2) se réduit à :

$$\mathbb{C}^{\text{HS}}(\mathbb{C}^0) = \left[(1-f)\mathbb{C}^{\text{M}} : \mathbb{V}_1 + \sum_{r=2}^N c_r \mathbb{C}_r^{\text{coh}} : \mathbb{V}_r \right] : \left[(1-f)\mathbb{V}_1 + \sum_{r=2}^N c_r \mathbb{V}_r \right]^{-1} \quad (\text{B.3})$$

En introduisant le tenseur $\mathbb{T}_r = (\mathbb{C}^* + \mathbb{C}_r)^{-1} : (\mathbb{C}^* + \mathbb{C}^{\text{M}})$ et en remarquant que pour toute famille r le tenseur $\mathbb{C}_r = \mathbb{C}^{\text{coh}}$ ne dépend que de la normale \mathbf{n} et pas du rayon a , on a :

$$\mathbb{T}_r = \mathbb{T}_r(w, \mathbf{n}) = (\mathbb{C}^*(w, \mathbf{n}) + \mathbb{C}^{\text{coh}}(\mathbf{n}))^{-1} : (\mathbb{C}^*(w, \mathbf{n}) + \mathbb{C}^{\text{M}}), \quad (\text{B.4})$$

ainsi, le tenseur de HS (B.2) est obtenu en fonction de la densité $\phi(a, \mathbf{n})$:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\text{HS}}(\mathbb{C}^0) &= \left[(1-f)\mathbb{C}^{\text{M}} \int_S \int_{A^-}^{A^+} \phi(a, \mathbf{n}) \frac{4\pi}{3} a^3 w \mathbb{C}^{\text{coh}} : \mathbb{T}(w, \mathbf{n}) da dS \right] : \\ &\quad \left[(1-f)\mathbb{I} + \int_S \int_{A^-}^{A^+} \phi(a, \mathbf{n}) \frac{4\pi}{3} a^3 w \mathbb{T}(w, \mathbf{n}) da dS \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Puisque w est le même pour toutes les inclusions, l'intégration de l'équation précédente suivant le rayon a conduit à :

$$\mathbb{C}^{\text{HS}}(\mathbb{C}^0) = \left[(1-f)\mathbb{C}^{\text{M}} + w \int_S \psi(\mathbf{n}) \mathbb{C}^{\text{coh}} : \mathbb{T}(w, \mathbf{n}) dS \right] : \left[(1-f)\mathbb{I} + w \int_S \psi(\mathbf{n}) \mathbb{T}(w, \mathbf{n}) dS \right]^{-1}, \quad (\text{B.6})$$

où la fonction $\psi(\mathbf{n}) = \int_{A^-}^{A^+} \frac{4}{3} \pi a^3 \phi(a, \mathbf{n}) da$ contient l'information liée à l'orientation des interfaces du maillage. Pour le cas d'une distribution équiprobables des inclusions cohésives

(distribution et orientation aléatoires des interfaces cohésives), la fonction $\psi(\mathbf{n})$ se réduit à $f/(4\pi w)$ et l'estimation (B.6) devient avec $f = eZ$:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\text{HS}}(\mathbb{C}^0) &= \left[\frac{f}{4\pi} \int_S \mathbb{C}^{\text{coh}} : \mathbb{T}(w, \mathbf{n}) ds + (1-f)\mathbb{C}^{\text{M}} \right] : \left[\frac{f}{4\pi} \int_S \mathbb{T}(w, \mathbf{n}) ds + (1-f)\mathbb{I} \right]^{-1} \\ &= \left[eZ \langle \mathbb{C}^{\text{coh}} : \mathbb{T} \rangle_{\circ} + (1-eZ)\mathbb{C}^{\text{M}} \right] : \left[eZ \langle \mathbb{T} \rangle_{\circ} + (1-eZ)\mathbb{I} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

avec $\langle \cdot \rangle_{\circ}$ désigne la moyenne sur toutes les orientations de l'espace (voir ANNEXE A). Le tenseur homogène effectif du MIC est obtenu après le passage à la limite au niveau de l'épaisseur fictive : $\mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{e \rightarrow 0} \mathbb{C}^{\text{HS}}(\mathbb{C}^0)$. Puisque l'on s'intéresse dans cette étude à la borne inférieure de HS, i.e. $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}^{\text{coh}}$, le tenseur \mathbb{T} se réduit alors à :

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathbb{C}^{\text{coh}}) = \mathbb{I} + \mathbb{P}(\mathbb{C}^{\text{coh}}) : (\mathbb{C}^{\text{M}} - \mathbb{C}^{\text{coh}}). \quad (\text{B.8})$$

L'expression analytique du tenseur homogène \mathbb{C}^{hom} est obtenu en exprimant les différentes quantités tensorielles dans la base des tenseurs isotopes transverses (ANNEXE A). Ainsi la projection du tenseur d'élasticité de la matrice \mathbb{C}^{M} sur cette base donne :

$$\mathbb{C}^{\text{M}} = \left[k^{\text{M}} + \frac{4\mu^{\text{M}}}{3} \right] \mathbb{E}_l + \left[\sqrt{2} \left(k^{\text{M}} - \frac{2\mu^{\text{M}}}{3} \right) \right] (\mathbb{F} + {}^{\text{T}}\mathbb{F}) + \left[2k^{\text{M}} + \frac{2\mu^{\text{M}}}{3} \right] \mathbb{J}_t + 2\mu^{\text{M}}(\mathbb{K}_t + \mathbb{K}_l). \quad (\text{B.9})$$

D'autre part, le tenseur d'élasticité des inclusions sera réécrit sous la forme :

$$\mathbb{C}^{\text{coh}} = e (C_{\text{N}}\mathbb{E}_l + C_{\text{A}}\mathbb{J}_t + C_{\text{B}}(\mathbb{F} + {}^{\text{T}}\mathbb{F}) + C_{\text{C}}\mathbb{K}_t + C_{\text{T}}\mathbb{K}_l), \quad (\text{B.10})$$

où les coefficients C_{A} , C_{B} , C_{C} sont introduits sans sens physique pour pouvoir inverser les tenseurs intervenant dans l'expression de l'estimation HS. Pour le calcul du tenseur de Hill \mathbb{P} , différents travaux ont été proposés dans la littérature. Le cas d'une inclusion noyée dans un milieu isotrope a été abordé en premier par [Mura, 1991]. Le cas des milieux anisotropes (considéré dans cette étude) s'avère plus compliqué. Toutefois, quelques résultats ont été obtenus récemment par [Federico et al., 2004; Suvorov et Dvorak, 2002; Masson, 2008; Sevostianov et al., 2005] et permettent d'avoir une écriture intégrale des différents éléments du tenseur de polarisation \mathbb{P} . Ces résultats restent intéressants pour des applications numériques mais sans fournir l'expression analytique finale du tenseur \mathbb{P} . Dans notre étude, la démarche proposée par [Sevostianov et al., 2005] est retenue pour obtenir une expression analytique de \mathbb{P} et donc de \mathbb{C}^{hom} . Le tenseur de Hill pour des inclusions isotropes transverses oblates (rayon a) prise comme milieu de référence est alors :

$$\mathbb{P}(e, \mathbf{n}) = \frac{1}{C_{\text{N}}} e \mathbb{E}_l + \frac{3\pi}{4\sqrt{2}aC_{\text{N}}} (\mathbb{F} + {}^{\text{T}}\mathbb{F}) - \frac{\pi}{aC_{\text{T}}} (\mathbb{J}_t + \mathbb{K}_t) + \frac{1}{C_{\text{T}}e} \mathbb{K}_t + \frac{C_{\text{A}} + 2C_{\text{C}}}{4aC_{\text{T}}^2} \pi \mathbb{K}_l. \quad (\text{B.11})$$

La combinaison des équations (2.4), (B.10) et (B.11) dans (B.8) conduit à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{T} = & \left[\frac{9e\pi + 12R}{12aC_N e} k^M + \left(\frac{4}{3C_N e} - \frac{\pi}{2aC_N} \right) \mu^M \right] \mathbb{E}_l \\
& + \left[-\frac{3C_A e \pi}{4a\sqrt{2}C_N} + \frac{18e\pi + 24a}{12\sqrt{2}aC_N e} k^M + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3C_N e} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}aC_N} \right) \mu^M \right] (\mathbb{F} + {}^T\mathbb{F}) \\
& + \left[1 + \frac{C_A e \pi}{aC_T} + \frac{-24C_N \pi + 9C_T \pi}{12aC_N C_T} k^M + \left(-\frac{\pi}{2aC_N} - \frac{2\pi}{3aC_T} \right) \mu^M \right] \mathbb{J}_t \\
& + \left[\frac{C_C e \pi + aC_T}{aC_T} - \frac{2\pi\mu^M}{aC_T} \right] \mathbb{K}_t \\
& + \left[1 - \frac{C_A e \pi + 2C_C e \pi + 4aC_T}{4aC_T} + \frac{(C_A e \pi + 2C_C e \pi + 4aC_T)\mu^M}{2aC_T^2 e} \right] \mathbb{K}_l.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

La borne inférieure de l'estimation HS (3.5) demande le calcul de la quantité $\mathbb{C}^{\text{coh}} : \mathbb{T}$ qui peut être obtenue en utilisant les formules (2.21), (B.12) et les opérations élémentaires introduites dans (A.19) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^{\text{coh}} : \mathbb{T} = & \left[k^M + \frac{4\mu^M}{3} + \frac{3k^M - 2\mu^M}{4a} \pi e \right] \mathbb{E}_l \\
& + \sqrt{2} \left[k^M - \frac{2\mu^M}{3} + \frac{3k^M + \mu^M}{4a} \pi e \right] \mathbb{F} \\
& + \left[\frac{C_A(-24k + 16\mu^M)}{12\sqrt{2}aC_T} \pi e + \frac{C_A(9C_T k^M + 12C_T \mu^M)}{12\sqrt{2}aC_N C_T} \pi e \right] {}^T\mathbb{F} \\
& + \left[\frac{C_A \pi (3k^M - 2\mu^M)}{4aC_N} e - \frac{C_A(6k^M \pi - 3aC_T + 2\pi\mu^M)}{3aC_T} e \right] \mathbb{J}_t \\
& + \left[\left(C_C - \frac{2C_C \pi \mu^M}{aC_T} \right) e \right] \mathbb{K}_t + \left[2\mu^M + \frac{(C_A + 2C_C)\mu^M}{2aC_T} \pi e \right] \mathbb{K}_l \\
& + o(e)
\end{aligned} \tag{B.13}$$

En moyennant sur toutes les orientations et en inversant suivant l'équation (A.20), on peut expliciter l'expression :

$$\mathbb{C}^{\text{HS-}} = \left[eZ \langle \mathbb{C}^{\text{coh}} : \mathbb{T} \rangle_{\circ} + (1 - eZ) \mathbb{C}^M \right] : \left[eZ \langle \mathbb{T} \rangle_{\circ} + (1 - eZ) \mathbb{I} \right]^{-1},$$

Finalement, en notant que l'on a :

$$\begin{cases} \mathbb{E}_l :: \mathbb{J} = \frac{1}{3}, & \mathbb{J}_t :: \mathbb{J} = \frac{2}{3}, \\ \mathbb{F} :: \mathbb{J} = {}^T\mathbb{F} :: \mathbb{J} = \frac{\sqrt{2}}{3}, & \mathbb{K}_t :: \mathbb{J} = \mathbb{K}_l :: \mathbb{J} = 0, \\ \mathbb{E}_l :: \mathbb{K} = \frac{2}{3}, & \mathbb{J}_t :: \mathbb{K} = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{F} :: \mathbb{K} = {}^T\mathbb{F} :: \mathbb{K} = \frac{-\sqrt{2}}{3}, & \mathbb{K}_t :: \mathbb{K} = \mathbb{K}_l :: \mathbb{K} = 2, \end{cases} \tag{B.14}$$

on obtient le développement de Taylor de $\mathbb{C}^{\text{HS-}}$ au voisinage de $e = 0$ au premier ordre :

$$\mathbb{C}^{\text{HS-}} = \left([3k^{\text{M}} - 2Zk^{\text{M}}e] \mathbb{J} + \left[2\mu^{\text{M}} - \frac{14}{15}Z\mu^{\text{M}}e \right] \mathbb{K} + o(e) \right) : \quad (\text{B.15})$$

$$\left(\left[\frac{C_{\text{N}}}{C_{\text{N}} + k^{\text{M}}Z} + g(e) \right] \mathbb{J} + \left[\frac{15C_{\text{N}}C_{\text{T}}}{15C_{\text{N}}C_{\text{T}} + 12C_{\text{N}}Z\mu^{\text{M}} + 4C_{\text{T}}Z\mu^{\text{M}} + h(e)} \right] \mathbb{K} + o(e) \right)$$

avec :

$$g(e) = \frac{2C_{\text{N}}^2 k^{\text{M}} \pi Z}{aC_{\text{T}}(C_{\text{N}} + Zk^{\text{M}})^2} e + \frac{-9k^{\text{M}}\pi + 2aC_{\text{N}}}{6a(C_{\text{N}} + Zk^{\text{M}})^2} C_{\text{N}} Z e$$

et

$$h(e) = \frac{15 (3C_{\text{T}}^2 \pi \mu^{\text{M}} + C_{\text{N}} (8aC_{\text{T}}^2 - 3(C_{\text{A}} + 2C_{\text{C}}) \pi \mu^{\text{M}} + 14C_{\text{T}} \pi \mu^{\text{M}}))}{a(4C_{\text{T}}Z\mu^{\text{M}} + 3C_{\text{N}}(5C_{\text{T}} + 4Z\mu^{\text{M}}))^2} C_{\text{N}} Z e.$$

Le passage à la limite $e \rightarrow 0$ conduit alors à :

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{e \rightarrow 0} \mathbb{C}^{\text{HS-}} = \frac{3C_{\text{N}}k^{\text{M}}}{C_{\text{N}} + k^{\text{M}}Z} \mathbb{J} + \frac{30C_{\text{N}}C_{\text{T}}\mu^{\text{M}}}{15C_{\text{N}}C_{\text{T}} + 12C_{\text{N}}Z\mu^{\text{M}} + 4C_{\text{T}}Z\mu^{\text{M}}} \mathbb{K}. \quad (\text{B.16})$$

L'approche PPC pour le cas d'un potentiel surfacique

Afin de comparer (notion du composite de *comparaison*) le potentiel surfacique non linéaire φ à un potentiel linéaire φ_0 , on introduit la *fonction erreur* définie par :

$$v(\mathbf{K}_0) = \sup_{[\mathbf{u}]} \left\{ \varphi([\mathbf{u}]) - \frac{1}{2}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{K}_0 \cdot [\mathbf{u}] \right\}, \quad (\text{B.17})$$

où

$$\varphi_0(\mathbf{K}_0; [\mathbf{u}]) = \frac{1}{2}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{K}_0 \cdot [\mathbf{u}] \quad (\text{B.18})$$

avec \mathbf{K}_0 est un tenseur du second ordre correspondant à la raideur du milieu linéaire de comparaison. La quantité v ne dépend plus du saut de déplacement local $[\mathbf{u}]$ et mesure l'écart maximal entre le potentiel d'origine non linéaire et le potentiel de comparaison linéaire (FIGURE B.1). L'expression (B.17) conduit à :

$$\varphi([\mathbf{u}]) \leq v(\mathbf{K}_0) + \varphi_0(\mathbf{K}_0; [\mathbf{u}]). \quad (\text{B.19})$$

Notons que cette inégalité est valable quel que soit le tenseur du second ordre \mathbf{K}_0 . Ainsi l'inégalité fondamentale suivante est obtenue :

$$\varphi([\mathbf{u}]) \leq \inf_{\mathbf{K}_0} \{v(\mathbf{K}_0) + \varphi_0(\mathbf{K}_0; [\mathbf{u}])\}. \quad (\text{B.20})$$

Puisque le tenseur \mathbf{K}_0 doit être défini positif pour que la fonction erreur v reste finie, on restreint la minimisation à l'espace des tenseurs de second ordre symétrique et défini positif (la notation $\mathbf{K}_0 > 0$ dans ce qui suivra), on a alors :

$$\varphi([\mathbf{u}]) \leq \inf_{\mathbf{K}_0 > 0} \{v(\mathbf{K}_0) + \varphi_0(\mathbf{K}_0; [\mathbf{u}])\} \quad (\text{B.21})$$

D'après [Ponte Castañeda, 1991; Idiart et Ponte Castañeda, 2007], on peut montrer que la dernière inégalité (B.21) est en fait une égalité si le potentiel non linéaire vérifie la condition dite de "concavité au carré" (square concavity condition). Dans notre cas, cette

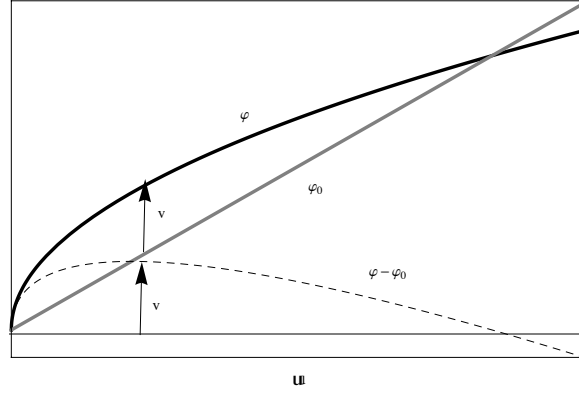


FIGURE B.1 – Illustration de la quantité v correspondant au maximum de l'écart entre le potentiel non linéaire φ et celui linéaire φ_0

condition revient à supposer qu'il existe une fonction concave g à valeurs réelles et ayant pour argument les tenseurs du second ordre symétriques \mathbf{u} telle que :

$$\varphi([\mathbf{u}]) = g\left(\frac{1}{2}[\mathbf{u}] \otimes [\mathbf{u}]\right). \quad (\text{B.22})$$

Si cette condition est vérifiée, on montre que :

$$\varphi([\mathbf{u}]) = \inf_{\mathbf{K}_0 > 0} \{v(\mathbf{K}_0) + \varphi^0(\mathbf{K}_0; [\mathbf{u}])\}. \quad (\text{B.23})$$

Puisque la fonction g est concave en \mathbf{u} , la fonction v est la transformée concave de Legendre-Fenchel de la fonction g qu'on notera g^* :

$$g^*(\mathbf{K}_0) = v(\mathbf{K}_0) = \inf_{\mathbf{u}} \{\mathbf{K}_0 : \mathbf{u} - g(\mathbf{u})\} \quad (\text{B.24})$$

d'où (par concavité de g) :

$$g(\mathbf{K}_0) = \inf_{\mathbf{K}_0 > 0} \{\mathbf{K}_0 : \mathbf{u} - g^*(\mathbf{u})\}. \quad (\text{B.25})$$

D'après la définition de g^* , on a :

$$g^*(\mathbf{K}_0) \leq \inf_{\mathbf{u} = \frac{1}{2}[\mathbf{u}] \otimes [\mathbf{u}]} \{\mathbf{K}_0 : \mathbf{u} - g(\mathbf{u})\} = \inf_{[\mathbf{u}]} \left\{ \frac{1}{2}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{K}_0 \cdot [\mathbf{u}] - \varphi([\mathbf{u}]) \right\}, \quad (\text{B.26})$$

d'où

$$g^*(\mathbf{K}_0) \leq -v(\mathbf{K}_0). \quad (\text{B.27})$$

Ainsi on obtient finalement :

$$\varphi([\mathbf{u}]) \geq \inf_{\mathbf{K}_0 > 0} \left\{ \frac{1}{2}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{K}_0 \cdot [\mathbf{u}] + v(\mathbf{K}_0) \right\}. \quad (\text{B.28})$$

La combinaison des inégalités (B.21) et (B.28) conduit alors à l'égalité (B.23).

La deuxième étape de la résolution du problème non linéaire consiste à établir des équations complémentaires sous la forme d'une condition d'optimalité pour le choix du tenseur de comparaison \mathbf{K}_0 . Pour se faire, on rappelle que l'énergie globale, Π , d'un milieu volumique, de mesure $|\Omega|$, contenant une collection de zones cohésives, de mesure $|\mathcal{I}|$, est :

$$\Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^M : \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_{\mathcal{I}} \varphi([\mathbf{u}]) dS. \quad (\text{B.29})$$

Parallèlement, l'énergie macroscopique du milieu homogène équivalent au milieu volumique-cohésif est :

$$\Psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} = \frac{1}{|\Omega|} \Pi(\mathbf{u}). \quad (\text{B.30})$$

L'insertion de (B.23) et (B.29) dans (B.30) conduit à :

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{E}) &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^M : \boldsymbol{\varepsilon} dV + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\mathcal{I}} \inf_{\mathbf{K}_0 > 0} \{v(\mathbf{K}_0) \varphi_0(\mathbf{K}_0; [\mathbf{u}])\} dS \\ &= \inf_{\mathbf{K}_0 > 0} \left\{ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^M : \boldsymbol{\varepsilon} dV + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\mathcal{I}} (v(\mathbf{K}_0) + \varphi_0(\mathbf{K}_0; [\mathbf{u}])) dS \right\} \\ &= \inf_{\mathbf{K}_0 > 0} \left\{ \underbrace{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^M : \boldsymbol{\varepsilon} dV + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\mathcal{I}} \frac{1}{2} [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{K}_0 \cdot [\mathbf{u}] dS}_{\text{énergie élastique macroscopique du CLC : } \Psi^0 = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}_0^{\text{hom}} : \mathbf{E}} + \frac{|\mathcal{I}|}{|\Omega|} v(\mathbf{K}_0) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

La condition d'optimalité pour le choix de \mathbf{K}_0 est ($f = |\mathcal{I}|/|\Omega|$)

$$\frac{\partial \Psi^0}{\partial \mathbf{K}_0} = -f \frac{\partial v}{\partial \mathbf{K}_0}. \quad (\text{B.32})$$

Puisque $-v$ est le dual de φ , on a :

$$\mathbf{K}_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial \Psi^0}{\partial \mathbf{K}_0} \right) \quad (\text{B.33})$$

La dérivation de Ψ_0 par rapport à \mathbf{K}_0 s'exprime en fonction de la moyenne de la racine carrée de u_N et \mathbf{u}_T en appliquant le lemme de Hill généralisé à des champs de déplacement présentant des discontinuités :

$$\begin{aligned} \langle u_N^2 \rangle_{\mathcal{I}} &= \frac{1}{2f} \frac{\partial \Psi_0}{\partial (\mathbf{K}_0 : \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})} \\ \langle \mathbf{u}_T \cdot \mathbf{u}_T \rangle_{\mathcal{I}} &= \frac{1}{2f} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{K}_0 : \mathbf{i}_T} \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

soit alors :

$$\mathbf{K}_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}} \left(\left\langle \frac{1}{2} [\mathbf{u}] \otimes [\mathbf{u}] \right\rangle_{\mathcal{I}} \right). \quad (\text{B.35})$$

Ainsi, le potentiel linéaire de comparaison optimal est donné par le tenseur \mathbf{K}_0 , qui peut être interprété comme le module sécant de la loi non linéaire évaluée au second moment du saut de déplacement effectif :

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \varphi}{\partial [\mathbf{u}]}([\mathbf{u}]) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{K}_0 \cdot [\mathbf{u}]. \quad (\text{B.36})$$

Le comportement macroscopique du milieu non linéaire est finalement obtenu en choisissant un schéma d'homogénéisation linéaire pour le calcul de l'énergie macroscopique Ψ^0 (e.g. HS ou AC).

Annexe C

Densité de maillage Z pour le cas 2D

1 Maillage structuré

Considérons le cas d'un domaine Ω (aire A) discrétisé régulièrement en N_t triangles iso-cèles de coté L_{mesh} [Perales et al., 2010]. On note L_{tot} la longueur totale des arêtes de la discrétisation, i.e. la longueur totale des interfaces cohésives (FIGURE C.1). Cette longueur totale L_{tot} est reliée aux nombres de triangles N_t et à la longueur de l'arête L_{mesh} par :

$$L_{\text{tot}} - 2(1 + \sqrt{2})\frac{N_t}{4}L_{\text{mesh}} \sim \sqrt{N_t} \quad (\text{C.1})$$

où $a \sim b$ désigne : a est de l'ordre de b .
La densité de maillage $Z = L_{\text{tot}}/A$ est :

$$Z - \frac{2(1 + \sqrt{2})}{L_{\text{mesh}}} \sim \frac{1}{\sqrt{N_t}}. \quad (\text{C.2})$$

Quand le maillage est raffiné, i.e. $N_t \rightarrow \infty$, on a :

$$Z \simeq \frac{2(1 + \sqrt{2})}{L_{\text{mesh}}}. \quad (\text{C.3})$$

2 Maillage de type Delaunay

On rappelle dans cette section quelques éléments concernant l'estimation de la densité de maillage pour une discrétisation de type Delaunay. Le développement de cette procédure est due en grande partie aux travaux de Y. Monerie et sera publié dans [Blal et Monerie, 2013]. Les différentes notations sont rappelées dans la TABLE C.1.

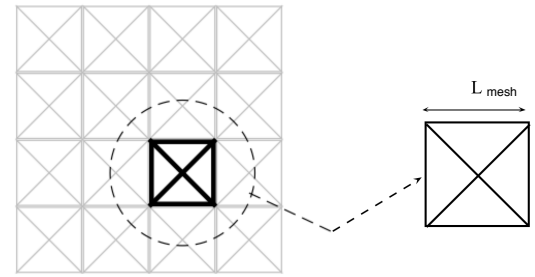


FIGURE C.1 – Maillage structuré CTQ.

TABLE C.1 – Notations

τ	densité du processus de génération des points
\mathcal{E}	indice d'efficacité d'une discrétisation donnée
l	arête d'une discrétisation considérée
$f_G(\tau, x)$	fonction de densité de probabilité (pdf) de x pour un graphe/triangulation G à densité τ ; on note, respectivement, sa moyenne $\mu_{x,G}(\tau)$ et sa variance $\sigma_{x,G}^2(\tau)$
$\mathcal{PDF}[\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), x]$	la fonction de probabilité de x suivant la loi normale à moyenne μ et variance σ^2
Z_G	la densité de maillage d'un graphe/triangulation G définie comme le ratio entre la longueur totale des arêtes et l'aire A du domaine considéré
PD	graphe de type Delaunay avec une distribution de Poisson des points
ID	graphe de type Delaunay isotrope

2.1 Fonction de densité de probabilité de l

2.1.1 Cas d'une discrétisation de type Poisson-Delaunay (PD).

On considère un ensemble de points P générés par un processus de Poisson avec une densité τ . La longueur d'une arête d'une triangulation de type Delaunay suit la densité de probabilité [Collins, 1968; Miles, 1970; Sibson, 1980] :

$$f_{\text{PD}}(\tau, l) = \frac{1}{3}\pi l \tau \left(\operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi} l \sqrt{\tau} \right) + l \sqrt{\tau} e^{-\frac{1}{4}\pi l^2 \tau} \right) \quad \text{pour } l \geq 0 \quad (\text{C.4})$$

où erfc est la fonction erreur complémentaire. La moyenne et la variance associées à cette loi sont respectivement :

$$\mu_{l,\text{PD}}(\tau) = \int_0^{+\infty} x f_{\text{PD}}(\tau, l) dx = \frac{32}{9\pi\sqrt{\tau}} \quad (\text{moyenne}) \quad (\text{C.5})$$

$$\sigma_{l,\text{PD}}^2(\tau) = \int_0^{+\infty} x^2 f_{\text{PD}}(\tau, l) dx - \mu_{\text{PD}}(\tau)^2 = \frac{405\pi - 32^2}{81\pi^2\tau} \quad (\text{variance}) \quad (\text{C.6})$$

La longueur l correspond à la distance entre deux points voisins de l'ensemble des points générés P .

2.1.2 Cas d'une discrétisation de type Delaunay-isotrope (ID)

La triangulation PD d'un domaine Ω suppose la génération d'un ensemble de points P avec un processus de Poisson. D'un point de vue numérique (discrétisation éléments finis), la suite des points P n'est pas fournie au début et on se contente seulement de l'ensemble des points sur le bord du domaine $\partial\Omega$. Cependant, on peut recouvrir le domaine Ω avec

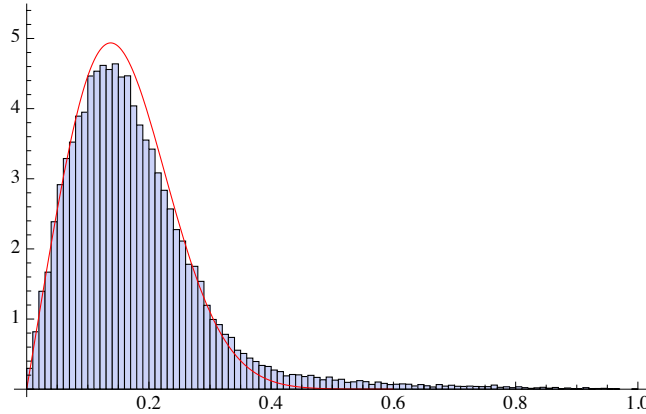


FIGURE C.2 – Longueur d’une arête pour un maillage Delaunay : simulations numériques vs fonction densité de probabilité (C.4)

une triangulation PD en utilisant l’algorithme de relaxation de George-Frey [George et Frey, 2000]. L’algorithme de George-Frey conduit après un certain nombre d’itérations à la triangulation PD.

Un autre schéma utilisé pour la génération des maillages Delaunay isotrope est l’algorithme de Lloyd [Lloyd, 1982] qui est le dual d’un pavage Voronoi centré. D’une façon générale, cet algorithme consiste à : i) générer un ensemble de points suivant un processus donné (e.g. Poisson), ii) construire le pavage de Voronoi associé à ces points, iii) calculer le centre de masse des zones de Voronoi et iv) considérer ces centres de masses comme les nouveaux points générateurs du pavage Voronoi. Le schéma est réitéré jusqu’à un certain critère d’arrêt. Le dernier pavage de Voronoi obtenu est dit pavage de Voronoi centré. On convient d’appeler ici son dual une triangulation de type Delaunay-isotrope ID. Suite à cette dualité, on a :

$$\mu_{ID}(\tau) = \mu_{PD}(\tau).$$

Dans l’optique d’évaluer la qualité topologique d’une discrétisation considérée, on introduit l’indice d’efficacité ($\mathcal{E} \in [0, 1]$) [George et Frey, 2000] défini par :

$$\mathcal{E} = e^{\langle \eta \rangle} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \eta = \bar{l} - 1 & \text{si } \bar{l} < 1 \\ \eta = 1/\bar{l} - 1 & \text{si } \bar{l} \geq 1 \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

où \bar{l} est la longueur adimensionnée d’une arête e_i ($\rho(\mathbf{x})$ est la taille d’un domaine considéré) :

$$\bar{l} = \int_{e_i} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} dl \quad (\text{C.8})$$

et $\langle \lambda \rangle$ est la moyenne d’une quantité $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{N_E}\}$ définie sur la suite des arêtes E :

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{N_E} \sum_{i=1}^{N_E} \lambda_i.$$

L'indice d'efficacité doit être le plus proche possible de $\mathcal{E} = 1$ afin d'avoir une bonne qualité géométrique du maillage éléments finis.

Puisque la moyenne de la longueur des arêtes est la même pour les deux triangulations PD et ID, la taille $\rho(x)$ est choisie être uniforme et égale à $\rho(\mathbf{x}) = \mu_{\text{PD}}(\tau)$, $\forall x \in \Omega$. La combinaison de (C.4) et (C.7) donne :

$$\mathcal{E}_{\text{PD}} \simeq 0.725 \quad (\text{C.9})$$

L'indice \mathcal{E} correspond à la variance de la longueur des arêtes pour une discrétisation PD et ID et peut être amélioré par l'algorithme de Llyod. Pour une discrétisation obtenue à l'itération k de l'algorithme de Llyod, on note $\mathcal{E}_{L(k)}$ (resp. $\sigma_{L(k)}^2$) son indice d'efficacité (resp. sa variance). La discrétisation de type Delaunay-Isotrope ID est obtenue à la limite $k \rightarrow +\infty$. Ainsi on a :

$$\mathcal{E}_{\text{ID}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_{L(k)} \simeq 0.920 \simeq 1.27\mathcal{E}_{\text{PD}} \quad (\text{C.10})$$

Le cas d'un maillage isotrope ID permet d'améliorer l'indice d'efficacité d'environ 30% par rapport au cas PD (FIGURE C.3). La variance de ce schéma est aussi amélioré comme l'illustre la FIGURE C.4.

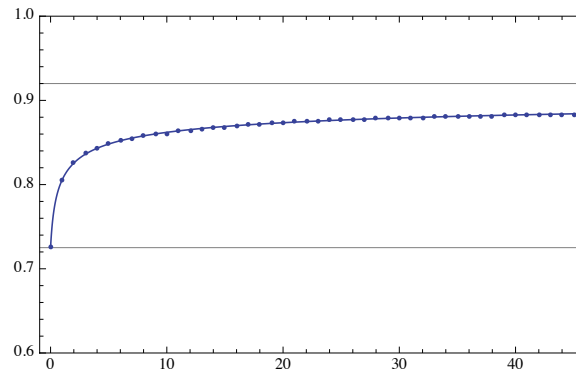


FIGURE C.3 – L'indice d'efficacité \mathcal{E} de l'algorithme de Llyod en fonction des itérations successives ($\tau = 300$). Borne inférieure : indice d'efficacité d'une discrétisation PD, Eq.(C.9). Borne supérieure : indice d'efficacité de l'algorithme de Llyod, Eq.(C.10). Points : indice d'efficacité de l'algorithme de Llyod obtenu numériquement en fonction des itérations. Courbe : interpolation non linéaire avec une fonction de type puissance.

Une relation semi-empirique est obtenue reliant la variance et l'indice d'efficacité pour l'algorithme de Llyod. En partant d'une triangulation PD avec une variance $\sigma_{L(k=0)}^2 = \sigma_{\text{PD}}^2$ et un indice d'efficacité $\mathcal{E}_{L(k=0)} = \mathcal{E}_{\text{PD}}$, et en remarquant que le cas d'une triangulation structurée avec des triangles équilatéraux conduit aux valeurs optimales $\mathcal{E}^+ = 1$ et $\sigma^2 = 0$, on obtient (FIGURE C.5) :

$$\frac{\sigma_{L(k)}^2}{\sigma_{\text{PD}}^2} \simeq \frac{1 - \bar{\mathcal{E}}_{L(k)}}{1 + 5\bar{\mathcal{E}}_{L(k)}} \quad (\text{C.11})$$

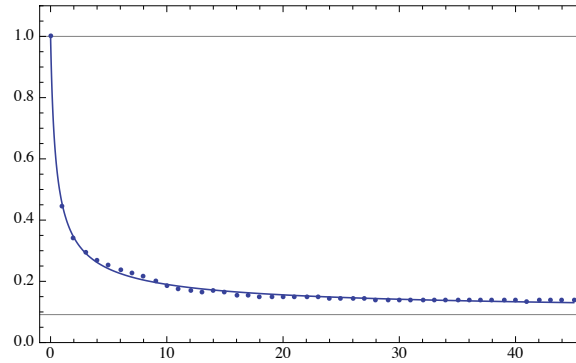


FIGURE C.4 – Variance de la longueur des arêtes par l’algorithme de Llyod (normée par $\sigma_{\text{PD}}^2(\tau)$) en fonction des itérations successives ($\tau = 300$). Borne inférieure : indice d’efficacité d’une discrétisation PD, Eq.(C.9). Borne supérieure : indice d’efficacité de l’algorithme de Llyod, Eq.(C.10). Points : indice d’efficacité de l’algorithme de Llyod obtenu numériquement en fonction des itérations. Courbe : interpolation non linéaire avec une fonction de type puissance.

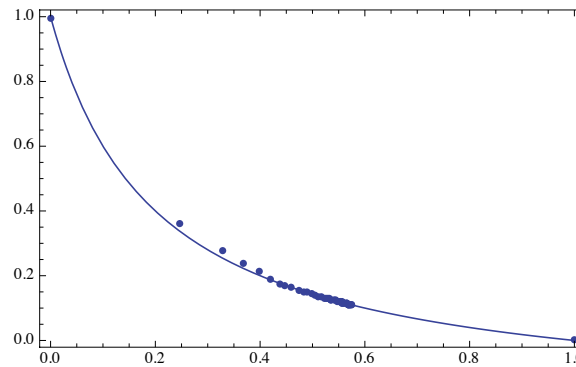


FIGURE C.5 – Variance de la longueur des arêtes pour l’algorithme de Llyod (normée par la variance obtenue pour la discrétisation PD $\sigma_{\text{PD}}^2(\tau)$) en fonction de l’indice d’efficacité réduit $\bar{\mathcal{E}}$. Points : résultats numériques ($\tau = 300$). Courbe : la relation (C.11).

où $\bar{\mathcal{E}} \in [0, 1]$ désigne l’indice d’efficacité réduit donné par :

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{PD}}}{\mathcal{E}^+ - \mathcal{E}_{\text{PD}}} = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{PD}}}{1 - \mathcal{E}_{\text{PD}}} \quad (\text{C.12})$$

Ainsi à la limite $k \rightarrow +\infty$, la variance de la longueur des arêtes d’une discrétisation ID est atteinte en combinant Eq.(C.10), Eq.(C.11) et Eq.(C.12)) :

$$\frac{\sigma_{\text{ID}}^2}{\sigma_{\text{PD}}^2} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_{L(k)}^2}{\sigma_{\text{PD}}^2} \simeq \frac{1 - \bar{\mathcal{E}}_{\text{ID}}}{1 + 5\bar{\mathcal{E}}_{\text{ID}}} = \frac{1 - \mathcal{E}_{\text{ID}}}{1 - 6\mathcal{E}_{\text{PD}} + 5\mathcal{E}_{\text{ID}}} \simeq \frac{1 - 1.27\mathcal{E}_{\text{PD}}}{1 + 0.35\mathcal{E}_{\text{PD}}} \quad (\text{C.13})$$

En tenant compte de (C.9), on obtient finalement :

$$\frac{\sigma_{\text{ID}}^2}{\sigma_{\text{PD}}^2} \simeq \frac{1}{15} \quad (\text{C.14})$$

La fonction densité de probabilité de la longueur l des arêtes des triangles de la discrétisation ID suit la loi normale :

$$f_{\text{ID}}(\tau, l) = \mathcal{PDF} [\mathcal{N}(\mu_{\text{ID}}(\tau), \sigma_{\text{ID}}^2(\tau)), l] \quad (\text{C.15})$$

avec :

$$\mu_{l,\text{ID}}(\tau) = \frac{32}{9\pi\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad \sigma_{l,\text{ID}}^2(\tau) \simeq \frac{1}{15} \frac{405\pi - 32^2}{81\pi^2\tau}$$

La longueur des arêtes issus de la discrétisation ID a la même moyenne que le cas d'une discrétisation PD, mais la variance est environ 15 fois plus petite.

FIGURE C.6 illustre la pertinence de la fonction obtenue (C.15) pour une discrétisation obtenue avec un mailleur éléments finis standard.

2.2 Densité de maillage Z

La densité de maillage Z est, comme précédemment définie, le rapport entre la somme des longueurs des arêtes $\sum_{i=1}^{N_E} l_i$ et l'aire A du domaine discrétisé :

$$Z = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{N_E} l_i$$

Pour des raisons pratiques de simulation, on constate que la longueur des arêtes l , pour les générateurs de maillage éléments finis, suit la loi normale (C.15) associée à une triangulation de type Delaunay-isotrope ID. Par le théorème central limite, la somme $\sum_{i=1}^{N_E} l_i$ suit une loi normale de moyenne $N_E \times \mu_{\text{ID}}(\tau)$ et de variance $N_E \times \sigma_{\text{ID}}^2(\tau)$ et la densité de maillage Z suit alors une loi normale de moyenne $(N_E/A) \times \mu_{\text{ID}}(\tau)$ et de variance $(N_E/A^2) \times \sigma_{\text{ID}}^2(\tau)$. En notant qu'on a $N_E = 3\tau A$, on peut montrer que la fonction de probabilité $f_{\text{ID}}(\tau, Z)$ de la densité de maillage est une loi normale de moyenne $\mu_{Z,\text{ID}}(\tau) = 3\tau \mu_{\text{ID}}(\tau)$ et de variance $\sigma_{Z,\text{ID}}^2(\tau) = (3\tau/A) \sigma_{\text{ID}}^2(\tau)$ (FIGURE C.7) :

$$f_{\text{ID}}(\tau, Z) = \mathcal{PDF} [\mathcal{N}(\mu_{Z,\text{ID}}(\tau), \sigma_{Z,\text{ID}}^2(\tau)), Z] \quad (\text{C.16})$$

où :

$$\mu_{Z,\text{ID}}(\tau) = \frac{32\sqrt{\tau}}{3\pi} \quad (\text{moyenne}) \quad \text{et} \quad \sigma_{Z,\text{ID}}^2(\tau) \simeq \frac{1}{15A} \frac{405\pi - 32^2}{27\pi^2} \quad (\text{variance})$$

Pour une discrétisation de type PD, l suit la loi (C.4). Quand le nombre des arêtes N_E est suffisamment grand, $\sum_{i=1}^{N_E} l_i$ suit une loi normale de moyenne et variance $N_E \times \mu_{\text{PD}}(\tau)$ et $N_E \times \sigma_{\text{PD}}^2(\tau)$ respectivement, suivant le théorème central limite. La densité de maillage

Z suit alors la même loi de probabilité que le cas ID mais avec une variance 15 fois plus grande :

$$f_{\text{PD}}(\tau, Z) = \mathcal{PDF} [\mathcal{N}(\mu_{Z,\text{PD}}(\tau), \sigma_{Z,\text{PD}}^2(\tau)), l] \quad (\text{C.17})$$

avec

$$\mu_{Z,\text{PD}}(\tau) = \mu_{Z,\text{ID}}(\tau) \text{ (moyenne)} \quad \text{et} \quad \sigma_{Z,\text{PD}}^2(\tau) = 15\sigma_{Z,\text{ID}}^2(\tau) \text{ (variance)}$$

La précision de ces estimations (C.16) et (C.17) est illustrée dans la FIGURE C.8 pour différentes discrétisations.

Pour le cas d'un maillage isotrope obtenu à partir d'une distribution statistique des points générés, on définit la taille de maillage L_{mesh} comme étant le coté d'un triangle équilatéral en remplaçant une discrétisation de type Delaunay à N_t triangles occupant un domaine Ω (aire A) par une discrétisation équivalente contenant un ensemble de N_t triangles équilatéraux occupant la même surface A . En exprimant la densité de maillage sous la forme standard $Z = \gamma/L_{\text{mesh}}$, on peut obtenir l'expression du paramètre γ lié à la morphologie d'un maillage de type Delaunay et une taille de maillage L_{mesh} :

$$Z = \frac{\gamma}{L_{\text{mesh}}} \quad \text{avec} \quad \gamma \simeq 3.64 \quad \text{et} \quad L_{\text{mesh}} = 2\sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}N_t}}. \quad (\text{C.18})$$

3 Résultats complémentaires pour d'autres maillages

L'estimation de la longueur totale des arêtes d'une triangulation avec N_P points régulièrement distribués sur une surface A peut être consulté dans [Watanabe, 2008]. En se servant de ces résultats, on présente ici une estimation de la densité Z pour différents types de maillages souvent utilisés en éléments finis.

Pour un maillage structuré et basé sur une distribution hexagonale (H) de points, la longueur totale des arêtes est :

$$\sum_{i=1}^{N_E} l_i = 3\sqrt{\frac{2\tau}{\sqrt{3}}}A, \quad (\text{C.19})$$

il en découle que la densité de maillage Z est estimée par :

$$Z_{\text{H}} = 3\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\sqrt{\tau} \quad (\text{C.20})$$

Pour un maillage structuré de type "Triangles-Quadrilateral" (TQ), la longueur totale des arêtes est

$$\sum_{i=1}^{N_E} l_i = (2 + \sqrt{2})\sqrt{\tau}A, \quad (\text{C.21})$$

et on a :

$$Z_{\text{TQ}} = (2 + \sqrt{2})\sqrt{\tau} \quad (\text{C.22})$$

Pour un maillage structuré de type "Cross-Triangle Quadrilateral" (CTQ), la densité de maillage est :

$$Z_{\text{CTQ}} = 2 \left(1 + \sqrt{2}\right) \sqrt{\tau} \quad (\text{C.23})$$

Plus généralement, le maillage (CTQ) peut être étendu au cas général non carré avec un rapport d'aspect $s \geq 1$ (le ratio entre les deux longueurs du rectangle). Pour ce cas la densité de maillage est approchée par :

$$Z_{\text{CTQ}_s} = \left(2\sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} + 1 + \frac{1}{s}\right) \sqrt{\tau} \quad (\text{C.24})$$

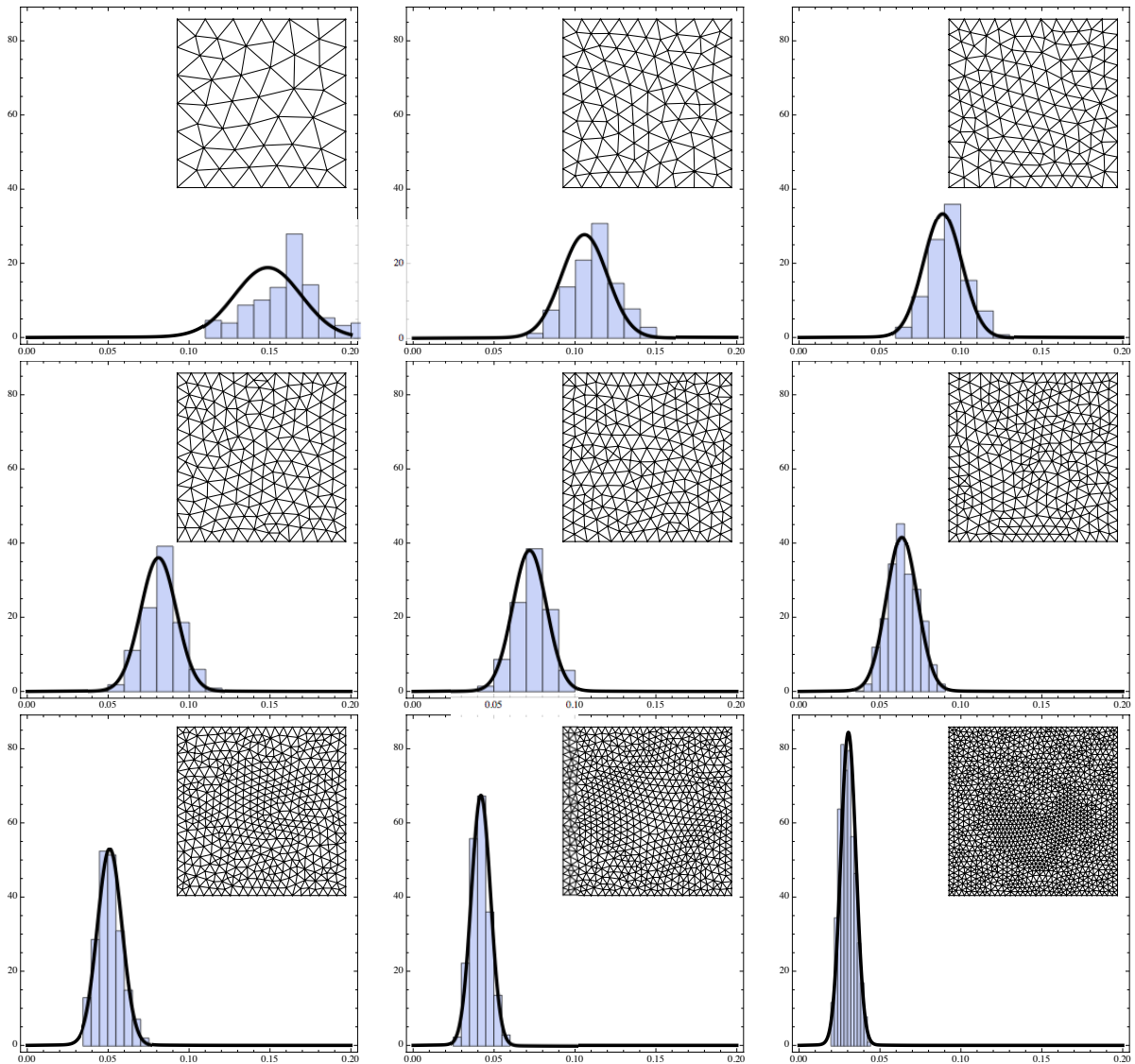


FIGURE C.6 – Fonction de probabilité de la longueur des arêtes obtenues par un maillage généré par Gmsh [Geuzaine et Remacle, 2009]. Plus le maillage est raffiné plus la valeur de τ augmente (maillage grossier $\tau = 58$, maillage raffiné $\tau = 1380$). Les courbes noires correspondent à la loi normale (C.15). L'indice d'efficacité pour le cas raffiné du maillage est environ $\mathcal{E} \simeq 0.90$.

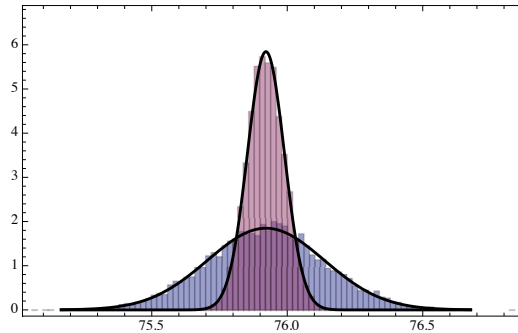


FIGURE C.7 – La densité de probabilité $f_{ID}(\tau, Z)$. Résultats numériques pour 1000 triangulations de type ID (histogrammes) ($\tau = 500$). L'estimation (C.16) est tracée en courbe. Le calcul concerne deux surfaces du domaine Ω : $A = 20mm^2$ (pdf centrée) $A = 2mm^2$ (pdf étalée)

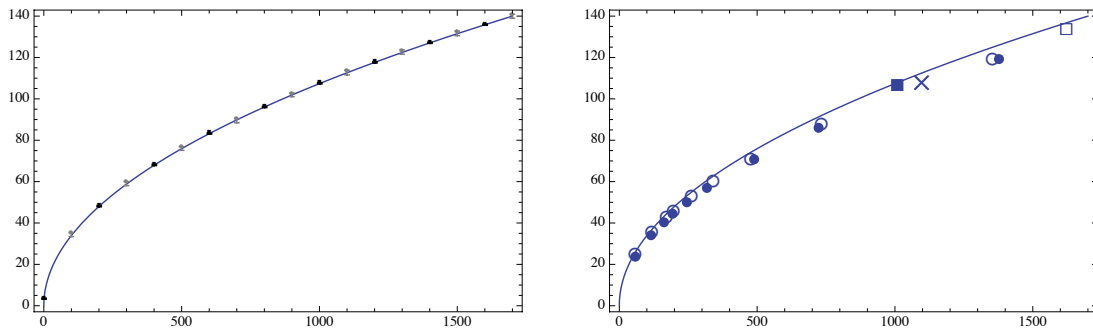


FIGURE C.8 – La densité de maillage Z vs la densité des points générés τ (courbe : $\mu_{Z,ID}(\tau) = \mu_{Z,PD}(\tau)$ donnée par (C.16), surface $A = 1mm^2$). A gauche : résultats numériques de Z avec 1000 maillages pour chaque valeur de τ ; points noirs avec des barres d'erreur, : maillage ID (variance (C.16)) ; Points gris avec des barres d'erreur : maillage PD (variance (C.17)). A droite : résultats obtenus avec Gmsh avec un maillage 'MeshAdapt' (points), un maillage 'Frontal' (cercles ouverts), Cast3M (croix), Triangle (carrés pleins), Abaqus (carrés ouverts).

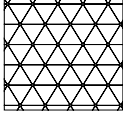
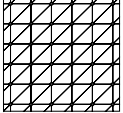
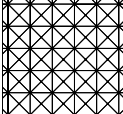
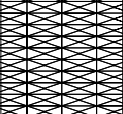
 $Z_H = 3\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\sqrt{\tau}$	 $Z_{TQ} = (2 + \sqrt{2})\sqrt{\tau}$
 $Z_{CTQ} = 2(1 + \sqrt{2})\sqrt{\tau}$	 $Z_{CTQ_s} = \left(2\sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} + 1 + \frac{1}{s}\right)\sqrt{\tau}$

FIGURE C.9 – Densité de maillage Z pour les différentes discrétisations utilisées dans les codes éléments finis.

Bibliographie

- Acary, V., Monerie, Y., 2006. Nonsmooth fracture dynamics using a cohesive zone approach. Rapport Technique RR-6032, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique. 7, 20, 29, 31, 35
- Andersson, T., Stigh, U., 2004. The stress–elongation relation for an adhesive layer loaded in peel using equilibrium of energetic forces. *International Journal of Solids and Structures* 41 (2), 413 – 434. 19
- Barenblatt, G. I., 1962. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fractures. *Advances In Applied Mechanics* 7, 55–129. 18, 45
- Belytschko, T., Black, T., 1999. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int J Numer Meth Eng* 45 (5), 601–620. 17
- Blal, N., Monerie, Y., 2013. Mesh density in planar triangular tessellations. *Graphical Models*, submitted. 115
- Bornert, M., Berthau, T., Gilormini, P. (Eds.), 2001. Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 - Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques. Hermès. 43
- Camacho, G., Ortiz, M., 1996. Computational modelling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures* 33, 2899–2938. 19, 62
- Chaboche, J. L., Feyel, F., Monerie, Y., 2001. Interface debonding models : a viscous regularization with a limited rate dependency. *International Journal of Solids and Structures* 38, 3127–3160. 20, 22
- Challamel, N., 2010. A variationally based nonlocal damage model to predict diffuse microcracking evolution. *International Journal of Mechanical Sciences* 52 (12), 1783 – 1800. 15
- Chandra, N., Li, H., Shet, C., Ghonem, H., 2002. Some issues in the application of cohesive zone models for metal–ceramic interfaces. *International Journal of Solids and Structures* 39, 2827–2855. 27
- Collins, R., 1968. A geometrical sum rule for two-dimensional fluid correlation functions. *Journal of Physics C1*, 1461–1471. 116

- Dugdale, D., 1960. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 8, 100–104. 18
- Espinosa, H., Zavattieri, P., 2003. A grain level model for the study of failure initiation and evolution in polycrystalline brittle materials. Part I : Theory and numerical implementation. *Mechanics of Materials* 35 (3-6), 333 – 364. 25, 46, 98
- Federico, S., Grillo, A., Herzog, W., 2004. A transversely isotropic composite with a statistical distribution of spheroidal inclusions : a geometrical approach to overall properties. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 52 (10), 2309 – 2327. 107
- Francfort, G., Bourdin, B., Marigo, J.-J., 2008. The variational approach to fracture. *Journal of Elasticity* 91 (1-3), 5–148. 15
- Gatt, J.-M., Monerie, Y., Laux, D., Baron, D., 2005. Elastic behavior of porous ceramics : application to nuclear fuel materials. *Journal of Nuclear Materials* 336 (2-3), 145 – 155. 42, 102
- George, P.-L., Frey, P., 2000. *Mesh generation*. Hermes. 117
- Geubelle, P., Baylor, J., 1998. Impact-induced delamination of laminated composites : a 2D simulation. *Composites Part B Engineering* 29(5), 589–602. 19
- Geuzaine, C., Remacle, J.-F., 2009. Gmsh : A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79 (11), 1309–1331. 123
- Griffith, A. A., 1920. The phenomenon of rupture and flow in solids. *Philosophical Transaction of the Royal Society (London)* A221, 163 – 198. 13
- Hashin, Z., Shtrikman, S., 1963. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11, 127–140. 5, 41
- Hill, R., 1965. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13, 213–222. 41
- Idiart, M., Ponte Castañeda, P., 2007. Variational linear comparison bounds for non linear composites with anisotropic phases. I. General results. *Proceedings of the Royal Society A* 463, 907–924. 111
- Irwin, G., 1957. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics* 79, 361–364. 13
- Irwin, G., 1960. *Fracture mechanics*. In : Goodier, J., Hoff, N. (Eds.), *Structural mechanics*. Pergamon, Elmsford. 13

- Jirašek, M., 2007. Non local damage mechanics. *Revue européenne de génie civil* 11, 993–1021. 15
- Kachanov, L., 1986. *Introduction to continuum damage mechanics*. Martinus Nijhoff, Dordrecht. 14
- Kreher, W., 1990. Residual stresses and stored elastic energy of composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 38, 115–128. 57, 80
- Kulkarni, M. G., Matouš, K., Geubelle, P. H., 2010. Coupled multi-scale cohesive modeling of failure in heterogeneous adhesives. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 84 (8), 916–946. 36
- Lasry, D., Belytschko, T., 1988. Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures* 24 (6), 581–597. 15
- Lemaître, J., Chaboche, J. L., 1978. Aspects phénoménologiques de la rupture par endommagement. *Journal de Mécanique appliquée* 2, 317–365. 14
- Li, S., Wang, G., 2004. On damage theory of a cohesive medium. *International Journal of Engineering Science* 42, 861–885. 45
- Lloyd, L., 1982. Least square quantization in pcm. *IEEE Trans. Inform. Theory* 28, 129–137. 24, 117
- Maalej, Y., Dormieux, L., Sanahuja, J., 2007. Comportement élastique non linéaire d'un milieu granulaire : approche micromécanique. *Comptes rendus Mécanique* 335, 461–466. 34, 57, 82
- Masson, R., 2008. New explicit expressions of the hill polarization tensor for general anisotropic elastic solids. *International Journal of Solids and Structures* 45, 757–769. 107
- Michel, J.-C., Suquet, P., Thébaud, F., 1994. Une modélisation du rôle des interfaces dans le comportement des composites à matrice métallique. *Revue Européenne des Eléments Finis* 4, 573–595. 36
- Miles, R. E., 1970. On the homogeneous planar poisson point process. *Mathematical Biosciences* 6, 85–127. 116
- Monerie, Y., 2000. *Fissuration des matériaux composites : rôle de l'interface fibre/matrice*. Thèse, Université d'Aix-Marseille 2. 19, 20, 99
- Monerie, Y., 2011. Modèles de zones cohésives pour la fissuration des matériaux hétérogènes. In : *MecaMat : Les composites-De l'élaboration du matériau aux performances des structures*. 20

- Mori, T., Tanaka, K., 1973. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica* 21 (5), 571 – 574. 41
- Moës, N., Belytschko, T., 2002. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics* 69 (7), 813 – 833. 19
- Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T., 1999. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int J Numer Meth Eng* 46(1), 131–150. 17
- Mucke, R., Bernhardt, O.-E., 2003. A constitutive model for anisotropic materials based on neuber's rule. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192, 4237 – 4255. 77
- Mura, T., 1991. *Micromechanics of defects in solids*. Kluwer Academic Publisher. 107
- Needleman, A., 1987. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics* 54, 525–32. 19
- Nguyen, Q., 1988. mechanical modelling of anelasticity. *Revue Phys. Appl.* 23, 325–330. 15
- Ortiz, M., Pandolfi, A., 1999. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 44, 1267–1282. 19
- Pandolfi, A., Ortiz, M., 2012. An eigeneration approach to brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Online First*, 1–21. 16, 99
- Papin, J., Balourdet, M., Lemoine, F., Lamare, J., Scmitz, F., 2000. French studies on high burn -up fuel transient behaviour under RIA conditions. *Nuclear safety* 37, 289–327. 4
- Papoulia, K. D., Vavasis, S. A., Ganguly, P., 2006. Spatial convergence of crack nucleation using a cohesive finite-element model on a pinwheel-based mesh. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 67, 1–16. 22, 99
- Perales, F., Bourgeois, S., Chrysochoos, A., Monerie, Y., 2008. Two field multibody method for periodic homogenization in fracture mechanics of nonlinear heterogeneous materials. *Engineering Fracture Mechanics* 75, 3378–3398. 48
- Perales, F., Dubois, F., Monerie, Y., Piar, B., Stainier, L., 2010. Multi-body nscd strategy as a multi-domain solver. Application to code coupling dedicated to the modeling of fracture of heterogeneous media. *European Journal of Computational Mechanics* 19, 389–417. 19, 48, 66, 115
- Ponte Castañeda, P., 1991. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39, 45–71. 5, 6, 55, 57, 72, 75, 111

- Ponte Castañeda, P., Suquet, P., 1998. Nonlinear composites. *Advances In Applied Mechanics* 34, 171–302. 57, 72
- Ponte Castañeda, P., Willis, J., 1995. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 43, 1919–1951. 41, 42, 57
- Rabczuk, T., 2012. Computational methods for fracture in brittle and quasi-brittle solids : State-of-the-art review and future perspectives. *ISRN Applied Mathematics* 2013, doi.org/10.1155/2013/849231. 18
- Radin, C., Sadun, L., 1996. The isoperimetric problem for pinwheel tilings. *Cummunica-tions in mathematical physics* 177, 255–263. 22
- Raous, M., 1999. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 177, 383–399. 19
- Rice, J., 1968. Plane strain deformation near a crack tip in a power hardening material. *J. Mech. Phys. Solids* 16, 1–12. 13
- Richefeu, V., Chrysochoos, A., Huon, V., Monerie, Y., 2012. Toward local identification of cohesive zone models using digital image correlation. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 34 (0), 38 – 51. 20, 27
- Sevostianov, I., Yilmaz, N., Kushch, V., Levin, V., 2005. Effective elastic properties of matrix composites with transversely-isotropic phases. *International journal of solids and structures* 42, 455–476. 107
- Sibson, R., 1980. The dirichlet tessellation as an aid in data analysis. *Scnd. J. Statist.* 7, 14–20. 116
- Siegmund, T., Brocks, W., 1999. Prediction of the work of separation and implications to modeling. *International Journal of Fracture* 99 (1-2), 97–116. 91
- Snozzi, L., Molinari, J.-F., 2006. A cohesive element model for mixed mode loading with frictional contact capability. *International journal for numerical methods in engineering* 93, 510–526. 62
- Song, J.-H., Wang, H., Belytschko, T., 2008. A comparative study on finite element methods for dynamic fracture. *Computational Mechanics* 42 (2), 239–250. 16, 17
- Song, S., Paulino, G., Buttlar, W., 2006. A bilinear cohesive zone model tailored for fracture of asphalt concrete considering viscoelastic bulk material. *Engineering Fracture mechanics* 73, 2829–2848. 23
- Suquet, P., 1995. Overall properties of nonlinear composites : Secant moduli theory and its link with Ponte Castaneda’s variational procedure. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences* 320, 563–571. 5, 57, 72

- Suvorov, A.-P., Dvorak, G.-J., 2002. Rate form of the eshelby and hill tensors. *International Journal of Solids and Structures* 39, 5659–5678. 107
- Tijssens, M., Sluys, L., van der Gissen, E., 2000. Numerical simulation of quasi-brittle fracture using damaging cohesive surfaces. *European Journal of Mechanics A/Solids* 19, 761–779. 22, 23
- Tomar, V., Zhai, J., Zhou, M., 2004. Bounds for element size in a variable stiffness cohesive finite element model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61, 1894–1920. 25, 27, 46, 98
- Turon, A., Dâvila, C., Camanho, P., Costa, J., 2007. An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models. *Engineering Fracture Mechanics* 4, 1665–1682. 23, 25, 46
- Tvergaard, V., Hutchinson, J., 1992. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic–plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40 (6), 1377–1397. 19, 26
- Vincent, P.-G., Bourgeois, S., Monerie, Y., 2010. Overall elastoplastic behavior of anisotropic metal-matrix composites reinforced by aligned inclusions. Application to hydrided and irradiated zircaloy-4 cladding tubes. *Mechanics of Materials* 42, 175–188. 77
- Walpole, L., 1981. Elastic behavior of composite materials : theoretical foundations. *Adv. Appl. Mech.* 21, 169–242. 103
- Watanabe, D., 2008. Evaluating the configuration and the travel efficiency on proximity graphs as transportation networks. *Forma* 23, 81–87. 121
- Wen, S., 2012. Identification expérimentale de modèles de zones cohésives à partir de techniques d'imagerie thermomécanique. Thèse, Université Montpellier 2. 21, 27
- Willis, J. R., 1977. Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 25, 185–202. 5, 41, 105, 106
- Xu, X. P., Needleman, A., 1994. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42, 1397–1434. 19
- Özdemir, I., Brekelmans, W., Geers, M., 2010. A thermo-mechanical cohesive zone model. *Computational Mechanics* 46 (5), 735–745. 19

Modélisation micromécanique et identification inverse de l'endommagement par approches cohésives

Résumé : Un modèle micromécanique est proposé pour une collection de zones cohésives insérées entre toutes les mailles d'une discrétisation de type éléments finis cohésifs-volumiques. Le principe de l'approche consiste à introduire un composite équivalent 'matrice-inclusions' comme une représentation de la discrétisation cohésive-volumique. Le modèle obtenu à l'aide de techniques d'homogénéisation (schéma de Hashin Shtrikman et approche de P. Ponte Castañeda) permet de décrire le comportement macroscopique élastique, fragile et ductile. Il est valable quel que soit le taux de triaxialité appliqué et la forme de la loi cohésive retenue, et permet de relier, d'une façon explicite, les propriétés macroscopiques du matériau aux différents paramètres cohésifs ainsi qu'à la densité de maillage.

Un premier résultat est l'établissement d'un critère pratique permettant de définir les raideurs cohésives au regard de la souplesse additionnelle inhérente à l'utilisation des modèles de zones cohésives intrinsèques. L'extension du modèle au cas de la rupture fragile et ductile, permet d'obtenir d'autres critères pratiques pour calibrer les autres paramètres cohésifs (contrainte cohésive maximale, ouverture critique, énergie de fissuration, ...). L'utilisation couplée des critères obtenus permet une calibration inverse des paramètres de la loi cohésive en fonction des propriétés macroscopiques du matériau et de la taille de maillage. De fait il est possible de prédire un comportement homogène global indépendamment de la taille du maillage.

Mots-clés : Micromécanique, Modèles de zones cohésives, Homogénéisation, Endommagement, Plasticité, Densité de maillage

Micromechanical modeling and inverse identification of damage using cohesive approaches

Abstract : In this study a micromechanical model is proposed for a collection of cohesive zone models embedded between two each elements of a standard cohesive-volumetric finite element method. An equivalent 'matrix-inclusions' composite is proposed as a representation of the cohesive-volumetric discretization. The overall behaviour is obtained using homogenization approaches (Hashin Shtrikman scheme and the P. Ponte Castañeda approach). The derived model deals with elastic, brittle and ductile materials. It is available whatever the triaxiality loading rate and the shape of the cohesive law, and leads to direct relationships between the overall material properties and the local cohesive parameters and the mesh density.

First, rigorous bounds on the normal and tangential cohesive stiffnesses are obtained leading to a suitable control of the inherent artificial elastic loss induced by intrinsic cohesive models. Second, theoretical criteria on damageable and ductile cohesive parameters are established (cohesive peak stress, critical separation, cohesive failure energy, ...). These criteria allow a practical calibration of the cohesive zone parameters as function of the overall material properties and the mesh length. The main interest of such calibration is its promising capacity to lead to a mesh-insensitive overall response in surface damage.

Keywords : Micromechanics, Cohesive zone models, Homogenization, Damage, Plasticity, Mesh density



LMGC – UMR5508 CNRS – Université Montpellier II
CC 048- Place Eugène Bataillon 34095 Montpellier cedex 05
Tel +33 4 67 14 35 04
fax +33 4 67143923

<http://www.lmgc.univ-montp2.fr>