

UNIVERSITÉ MONTPELLIER  
— SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC —

# THÈSE

pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER

École Doctorale : INFORMATION, STRUCTURES ET SYSTÈMES

Spécialité : MÉCANIQUE ET GÉNIE CIVIL

---

## Rhéologie des écoulements granulaires immergés dans un fluide visqueux

---

par

LHASSAN AMARSID

Soutenue publiquement le 25/11/2015 devant le jury composé de :

Etienne Guyon	Professeur émérite	ESPCI Paris	Président
Jean-Noël Roux	Chercheur	IFSTTAR	Rapporteur
Pascale Aussillous	Maître de Conférence HDR	IUSTI Marseille	Rapporteur
Vincent Richefeu	Maître de Conférence	3SR Grenoble	Examineur
Farhang Radjaï	Directeur de Recherche	CNRS	Directeur de thèse
Jean-Yves Delenne	Directeur de Recherche	INRA	Co-encadrant de thèse
Frédéric Perales	Ingénieur-Chercheur	IRSN	Co-encadrant de thèse
Yann Monerie	Professeur	LMGC Montpellier	Co-encadrant de thèse





# *Remerciements*

Tout d'abord, je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Farhang Radjaï, qui fut pour moi un directeur de thèse attentif, disponible malgré ses nombreuses charges. Ses compétences et sa clairvoyance m'ont beaucoup appris durant mes années de thèses. Ils ont été et resteront moteurs de mon travail.

Mes remerciements vont également à Jean-Yves Delenne, mon encadrant de thèse, pour son implication, notamment dans la partie numérique de cette thèse, ses conseils avisés, ainsi que pour sa disponibilité.

J'adresse toute ma gratitude à mes encadrants de thèse à Yann Monerie et Frederic Perales.

Je remercie vivement les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail. Je remercie Etienne Guyon qui a bien voulu présider le jury et accepter d'examiner mes travaux de thèse. J'éprouve un grand respect pour son travail, son parcours, ainsi que pour sa personne. Je remercie mes deux rapporteurs Pascale Aussillous et Jean-Noël Roux pour la rapidité avec laquelle ils ont lu mon manuscrit, malgré un emploi du temps sans doute très chargé. Je leur suis très reconnaissant pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux de recherche, ainsi que pour leurs remarques très constructives. Je remercie Vincent Richefeu d'avoir accepté le rôle d'examineur.

Je remercie mes collègues doctorants, les nouveaux ainsi que les anciens en espérant n'avoir oublié personne. Je pense notamment à Kajetan, David, Paul, Cécile, Lo, Mahmoud, Tarik, Fatima, Mouad, Abdel, Thanh Hai, Benjamin, Lionel, Eric, Maria, Aditi, Daniel, Ali, Gilles, Elham, capucine, Xavier, Chaoqun, Duc Han, Adrian, Riccardo, Li, Nicolas, Nawfel, Adil et bien sûr Patrick avec qui j'ai eu beaucoup de discussions.

Je remercie les membres de mon équipe PMMD, notamment Saeid, Emilien, Mathieu et Serge.

Je remercie aussi l'ensemble du personnel du laboratoire LMGC, je pense notamment à Robert, Katya, Reine, Chantal, Roxane, Caroline et bien sûr notre informaticien Yannick.



*à mes Parents, mes deux frères et ma soeur.*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Synthèse bibliographique</b>	<b>15</b>
Introduction . . . . .	16
1.1. Ecoulements granulaires secs . . . . .	16
1.1.1. Milieux granulaires . . . . .	16
1.1.2. Interactions de contact . . . . .	17
1.1.3. Paramètres sans dimension . . . . .	21
1.1.4. Etat quasi-statique . . . . .	23
1.1.5. Régime inertiel . . . . .	27
1.2. Milieux granulaires immergés . . . . .	29
1.2.1. Suspensions et milieux granulaires . . . . .	29
1.2.2. Forces hydrodynamiques . . . . .	29
1.2.3. Régimes d'écoulement fluid-grains . . . . .	31
1.2.4. Etalement et distance d'arrêt des écoulements . . . . .	34
1.2.5. Initiation des avalanches sous-marines . . . . .	37
1.3. Rhéologie des suspensions . . . . .	40
1.4. Ecoulements inertiels en présence d'un fluide visqueux . . . . .	44
Conclusion . . . . .	46

<b>2 Méthodologie</b>	<b>47</b>
Introduction	48
2.1. Choix d'un modèle physique	48
2.1.1. Démarche de modélisation	48
2.1.2. Méthodes numériques	49
2.1.2.1. Modélisation de la phase granulaire	50
2.1.2.2. Modélisation du fluide	51
2.1.2.3. Couplages fluide-grains	55
2.1.3. Configuration spatiale et paramètres généraux	58
2.1.3.1. Forme et distribution granulométrique	58
2.1.3.2. Modélisation des contacts et simulations granulaires	58
2.1.3.3. Configuration géométrique	59
2.2. La méthode Lattice Boltzmann	59
2.2.1. Premiers modèles Lattice Gaz Automata	60
2.2.2. Discrétisation de l'équation de Boltzmann sur réseau	62
2.2.2.1. Principe général	62
2.2.2.2. Résolution du processus de Collision	65
2.2.2.3. Algorithme et stabilité	68
2.2.3. Traitement des conditions aux limites	69
2.2.3.1. Condition aux limites périodiques	69
2.2.3.2. Condition de Bounce-Back	70
2.2.3.3. Condition de Bounce-Forward	71
2.2.3.4. Conditions aux limites de Dirichlet (Pressure Boundary Condition)	72
2.2.3.5. Conditions aux limites de Neumann (Flux Boundary Condition)	73
2.2.3.6. Conditions aux limites ouvertes	73
2.2.4. Comparaison entre les approches SRT et MRT pour différentes conditions aux limites	75
2.2.4.1. Cas test de Poiseuille	76
2.2.4.2. Application des conditions aux limites et comparaison	77
2.3. Couplage LBM/DEM	78
2.3.1. Modélisation de la phase granulaire	79
2.3.1.1. Principe de l'algorithme	79

2.3.1.2.	Discrétisation et implémentation dans le code calcul . . . . .	81
2.3.1.3.	Conditions de stabilité numérique . . . . .	82
2.3.2.	Interaction grain-fluide . . . . .	83
2.3.2.1.	Effet de la particule sur le fluide . . . . .	83
2.3.2.2.	Effet du fluide sur la particule . . . . .	85
2.3.2.3.	Schéma de couplage LBM/DEM . . . . .	85
2.3.3.	Tests de validation . . . . .	86
2.3.3.1.	Diffusion de la quantité de mouvement . . . . .	86
2.3.3.2.	Stabilité des champs de pression . . . . .	87
2.3.3.3.	Mouvement d'une particule non-soumise à la gravité dans un écoulement plan . . . . .	88
Conclusion	. . . . .	91
<b>3</b>	<b>Rhéologie des écoulements granulaires immergés</b>	<b>95</b>
3.1.	Introduction . . . . .	96
3.2.	Le système simulé . . . . .	96
3.3.	Paramètres de contrôle . . . . .	98
3.4.	Le régime visqueux . . . . .	99
3.4.1.	Domaine paramétrique . . . . .	99
3.4.2.	Frottement interne et compacité des écoulements . . . . .	102
3.4.3.	Les viscosités effectives . . . . .	105
3.5.	Le régime visco-inertiel . . . . .	108
3.5.1.	Domaine paramétrique . . . . .	108
3.5.2.	Unification de la rhéologie . . . . .	109
3.5.3.	Relation contrainte-compacité . . . . .	115
3.5.4.	Relation entre frottement interne et compacité . . . . .	117
3.6.	Suspension à l'échelle des grains . . . . .	119
3.6.1.	Connectivité des particules . . . . .	120
3.6.2.	Anisotropies de l'écoulement . . . . .	123
3.6.3.	Relation entre anisotropies et frottement interne . . . . .	126
3.7.	Conclusions . . . . .	129
<b>4</b>	<b>Fragmentation et écoulement des agrégats dans un fluide</b>	<b>131</b>

---

Introduction . . . . .	132
4.1. Effet du fluide interstitiel sur l'écoulement de sablier . . . . .	133
4.1.1. Effets de voûte et "jamming" . . . . .	133
4.1.2. Le système simulé . . . . .	135
4.1.3. Evolution des pressions hydrodynamiques . . . . .	135
4.1.4. Débit d'écoulement . . . . .	140
4.2. Fragmentation et écoulement des grains cohésifs immergés . . . . .	143
4.2.1. Relocalisation-Surfragmentation . . . . .	143
4.2.2. Modélisation numérique . . . . .	144
4.2.3. Exemples de simulations . . . . .	147
4.2.3.1. Fragmentation sous l'effet d'un gradient de pression . . . . .	147
4.2.3.2. Fragmentation sous l'effet d'une surpression localisée . . . . .	148
4.2.4. Effet du ballonnement . . . . .	148
Conclusions . . . . .	150
<b>5 Conclusions générales</b>	<b>153</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>161</b>



# Introduction

Dans les réacteurs à eau sous pression, le combustible nucléaire se présente sous la forme de pastilles cylindriques (environ 1 cm de diamètre et 0.95 mm d'épaisseur) empilées dans des tubes de gainage minces et élancés (environ 0.95 cm de diamètre, 500  $\mu\text{m}$  d'épaisseur et 4 m de hauteur).

A l'état "vierge", avant leur mise en réacteur, ces pastilles peuvent être considérées comme des céramiques poreuses constituées d'une phase continue d'oxyde d'uranium<sup>1</sup>. Leur empilement se présente sous la forme de colonnes de gros fragments cylindriques (figure 1a). Dès les premiers temps de séjour en réacteur, une fragmentation apparaît sous l'action de différentes sollicitations telles que des gradients thermiques et mécaniques, des réactions chimiques, l'irradiation, des effets des gaz de fissions. L'empilement des pastilles, initialement régulier, se transforme alors progressivement en un milieu divisé de structure complexe tant du point de vue de la géométrie des fragments que de leur assemblage dans les gaines (figure 1b).

Deux cas hypothétiques de situations accidentelles sont considérés : l'accident par injection de réactivité ou RIA (Reactivity Initiated Accident) et l'accident par perte de réfrigérant primaire (APRP) ou LOCA (Loss of Coolant Accident). Dans les deux cas, l'échauffement rapide du combustible et son gonflement, dû à la dilatation thermique et aux gaz de fission, peuvent entraîner une déformation importante de la gaine sous l'effet de la pression exercés par les fragments sur les parois. Dans les situations les plus défavorables, cette déformation peut être à l'origine de la relocalisation des fragments et de la formation de brèches dans les gaines. Le combustible se retrouve alors en interaction avec le fluide caloporteur les grains radioactifs peuvent être éjectés en dehors du confinement assuré par les gaines (figure 1c, 1d, 1e et 1f).

Que ce soit en fonctionnement normal ou lors de situations accidentelles, la connaissance du comportement de ce milieu divisé et de son évolution dans le temps sous l'action des sollicitations imposées au système est essentielle aux analyses de sûreté. Son origine est intrinsèquement dépendant de la «mésosstructure» au niveau de laquelle sont constitués les assemblages désordonnés de fragments et où apparaissent les mécanismes élémentaires de déformation et de transmission des forces à travers le réseau des grains en contact. La caractérisation de cette mésosstructure nécessite non seulement l'étude détaillée de l'état du milieu en terme de géométrie des grains, distribution de tailles, organisation spatiale, interactions entre grains, mais aussi la prise en compte de ruptures potentielles pour différentes microstructures internes et distributions de contraintes.

En situation accidentelle, l'interaction du milieu divisé avec le fluide caloporteur nécessite la prise en compte d'interactions fluide-grains complexes. Cette problématique relève de la physique des suspensions très denses. L'étude expérimentale directe de ces problèmes est complexe notamment à cause de la difficulté à accéder à des informations importantes à l'échelle de la microstructure telles que, par exemple, la pression et les vitesses d'écoulement dans les pores ou la compacité et la connectivité du milieu granulaire. Cette étude est rendue d'autant plus difficile que les conditions de manipulation du combustible radioactif nécessite des précautions drastiques. La simulation numérique à l'aide d'éléments discrets qui bénéficie de l'augmentation

---

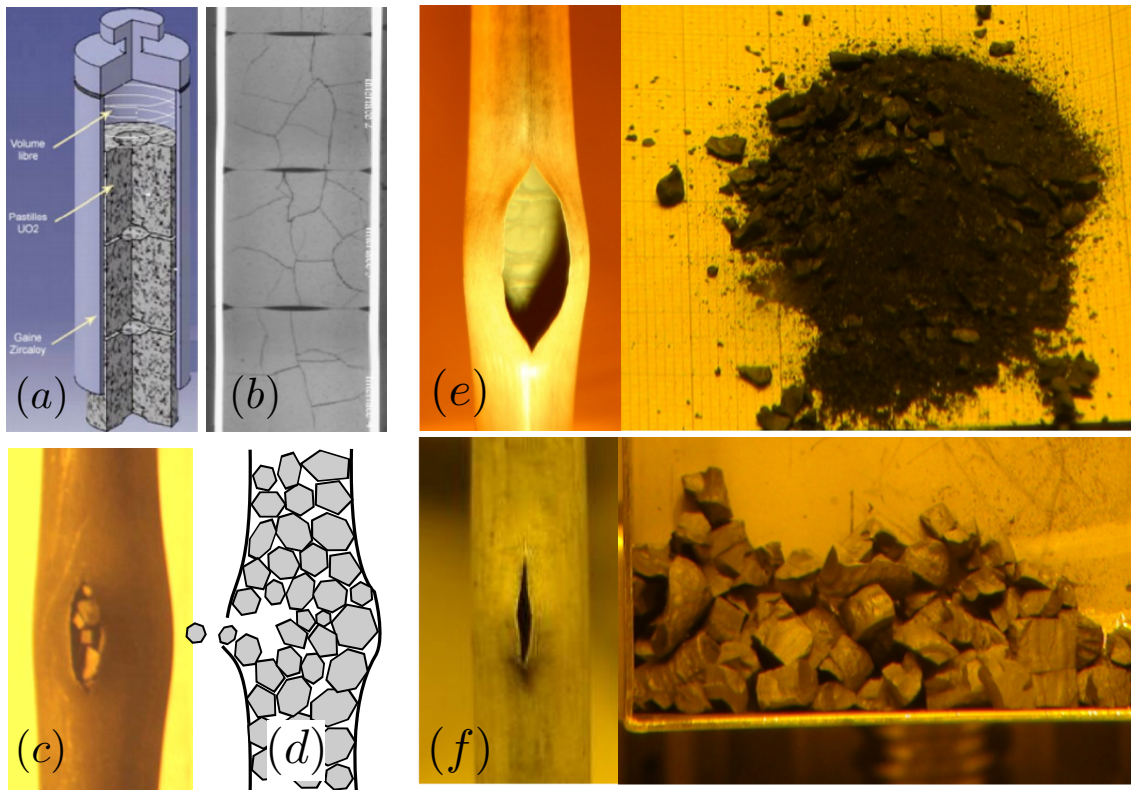
1. ou d'oxyde mixte d'uranium et de plutonium

rapide de la puissance des moyens de calculs informatique et d'un effort de recherche soutenu ces 20 dernières années, apparaît comme une voie intéressante (et peu onéreuse) d'investigation. Plus récemment, l'apparition de modèles efficaces couplant la mécanique des milieux divisés à celle des fluides ouvre la possibilité d'études réalistes et permet d'accéder à des informations à l'échelle subparticulaire importantes pour la mise en œuvre de modèles. Il est ainsi envisageable dans un même cadre, la simulation des phénomènes de fragmentation du combustible et d'écoulement de fragments afin d'obtenir une meilleure caractérisation du processus d'éjection et de relocalisation à l'échelle des fragments.

L'objectif de ce travail de thèse est la modélisation numérique des mélanges fluide-grains et leur application au processus de fragmentation et de relocalisation des particules en présence d'un fluide (gaz de fission ou fluide caloporteur). Ces études sont basées sur les méthodes LBM (Lattice Boltzmann Method) pour la phase fluide et MD (Molecular Dynamics) pour la phase granulaire. Par ailleurs, un modèle de cohésion permettra de modéliser la fissuration et la fragmentation des agrégats sous l'effet des contraintes appliquées et de la pression du fluide.

La rhéologie des écoulements visco-inertiels denses de grains dans un fluide sous cisaillement constitue le cœur de cette thèse. Nos analyses ont permis d'obtenir une description très détaillée de ces écoulements en fonction des paramètres tels que le taux de cisaillement, la pression de confinement et la viscosité du fluide. Nous montrons que les régimes inertiels et visqueux peuvent être décrits dans un cadre unifié. Enfin, nous analyserons la microstructure en termes de la connectivité et des anisotropies du réseau des contacts et des forces pour ces régimes. Ces études seront présentées dans le chapitre 3.

Une étude numérique a ensuite été menée afin de mieux comprendre l'écoulement des particules immergés dans à travers une orifice en géométrie de sablier. Cette géométrie permet d'effectuer une analyse détaillée et quantitative de l'influence du fluide sur la loi de Beverloo en vue de l'appliquer à l'éjection des particules dans le problème de combustible nucléaire lors d'une rupture de gaine. Nous présenterons également des études sur la fragmentation des agrégats cohésifs immergés sous l'effet d'une surpression locale et leur éjection sous l'action d'un gradient de pression. Ces études sont présentées dans le chapitre 4.



**FIGURE 1:** *Combustible nucléaire et gainage . (a) Pastilles du combustible à l'état vierge empilées dans la gaine [1]; (b) Fragmentation du combustible en fonctionnement normal [137]; (c) Situation accidentelle avec rupture de la gaine [137]; (d) Relocalisation et éjection des fragments à travers la brèche du gainage; Test en laboratoire d'une situation accidentelle type APRP [171]; (e) Combustible fortement irradié (f) Combustible moins irradié.*

# Synthèse bibliographique

## Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>1.1. Ecoulements granulaires secs</b> . . . . .	<b>16</b>
1.1.1. Milieux granulaires . . . . .	16
1.1.2. Interactions de contact . . . . .	17
1.1.3. Paramètres sans dimension . . . . .	21
1.1.4. Etat quasi-statique . . . . .	23
1.1.5. Régime inertiel . . . . .	27
<b>1.2. Milieux granulaires immergés</b> . . . . .	<b>29</b>
1.2.1. Suspensions et milieux granulaires . . . . .	29
1.2.2. Forces hydrodynamiques . . . . .	29
1.2.3. Régimes d'écoulement fluid-grains . . . . .	31
1.2.4. Etalement et distance d'arrêt des écoulements . . . . .	34
1.2.5. Initiation des avalanches sous-marines . . . . .	37
<b>1.3. Rhéologie des suspensions</b> . . . . .	<b>40</b>
<b>1.4. Ecoulements inertiels en présence d'un fluide visqueux</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>46</b>

---

## Introduction

Dans ce premier chapitre, nous présentons une synthèse des éléments de base de la rhéologie des milieux granulaires secs et immergés qui constituent le contexte général scientifique de nos études. Les écoulements granulaires ont fait l'objet de nombreuses études expérimentales et numériques dans différentes disciplines telles que la technologie des poudres, la mécanique des sols et la géologie. Les approches les plus traditionnelles pour la modélisation des milieux granulaires sont fondées sur la mécanique des milieux continus. Depuis quelques années, grâce à des techniques expérimentales nouvelles (imagerie, automatisation des rhéomètres, etc) et aux méthodes numériques discrètes, des avancées importantes ont été réalisées dans la compréhension des écoulements à l'échelle des grains et de leurs interactions.

Le comportement des milieux granulaires immergés ou mélangés à un fluide, qui nous intéresse plus particulièrement dans ce mémoire, soulève encore de nombreux problèmes aussi bien au niveau expérimental que de la modélisation numérique. Le fluide peut influencer la dynamique des grains par sa viscosité, sa faible compressibilité ou par son inertie. Bien que les suspensions de grains constituent un domaine de recherche classique, le régime dense reste encore mal compris à l'échelle des grains où les contacts persistants et les collisions jouent un rôle aussi important que les forces hydrodynamiques. Les modèles théoriques et les expériences en laboratoire étant essentiellement développés dans les deux limites dominées respectivement par les forces hydrodynamiques (suspensions dilués) et par les forces de contact (milieux granulaires secs), un enjeu majeur de la recherche actuelle sur les mélanges fluides-grains est de comprendre l'effet des grains et de leurs contacts frottants sur la microstructure des suspensions et, inversement, l'effet des forces hydrodynamiques sur la texture granulaire.

Dans la suite de ce chapitre, nous décrirons brièvement quelques concepts de base et les études récentes des milieux granulaires immergés dans un fluide. Les aspects numériques sont présentés en détail dans le chapitre 2.

### 1.1. Ecoulements granulaires secs

#### 1.1.1. Milieux granulaires

Les milieux divisés ou granulaires constituent une forme courante de la matière solide dans la nature et dans de nombreux secteurs industriels. Le caractère discret, composé des particules solides interagissant par contact unilatéral, leur confère des propriétés mécaniques particulières, entre celles du solide et du liquide. S'il s'agit d'un solide, c'est un solide amorphe comme les verres et s'il s'agit d'un liquide, c'est un liquide à caractère non-newtonien. La taille des grains est suffisamment grande ou les contraintes extérieures ou cohésives entre grains sont assez grandes pour que l'agitation thermique soit négligeable. Par ailleurs, le caractère dissipatif des interactions de contacts, lié aux déformations visco-plastiques ou au frottement, ne permet pas de les traiter comme un système à l'équilibre thermodynamique. Un assemblage de grains

peut se trouver dans divers états mésoscopiques et la configuration des grains ne correspond pas au minimum d'une fonction énergie. C'est sous cet angle que les physiciens s'intéressent aux milieux granulaires.

Le comportement mécanique des milieux granulaires a intéressé depuis longtemps les bâtisseurs. Les sols granulaires ont des propriétés de résistance qui dépendent non seulement de la forme et de la taille des grains mais aussi de leurs déformations et de l'historique des contraintes subies. Un défi théorique important est la prise en compte de la texture des milieux granulaires qui encode ces déformations dans un modèle général. Un tel modèle doit permettre de prédire l'évolution des variables internes telles que la connectivité et l'anisotropie du réseau des contacts ainsi que la réponse mécanique à des chemins de déformation complexes. Ces déformations sont de deux types : 1) les déformations élastiques souvent localisées au niveau des contacts et 2) les déformations irréversibles (plastiques) liées aux réarrangements des grains. Le comportement plastique peut être décrit par des états de référence (tel que l'état dit critique) et par des transitoires entre ces états. Les états de référence sont des états qui ne dépendent pas de l'état initial. En d'autres termes, un état de référence constitue une configuration qui ne reflète que la nature du milieu (formes et tailles des grains et leurs interactions).

Nous nous sommes plus particulièrement intéressés ici par les écoulements stationnaires. L'état critique, tel qu'il est défini en mécanique des sols, est un état bien défini (reproductible) et indépendant de l'état initial. Un milieu granulaire sous cisaillement simple, peut rester dans un état critique de déformation continue. Nous allons donc considérer d'abord les déformations quasi-statiques et plus particulièrement l'état critique. Ensuite, nous allons brièvement décrire les écoulements inertiels et certains travaux récents qui ont permis d'obtenir une description cohérente de leur rhéologie.

### 1.1.2. Interactions de contact

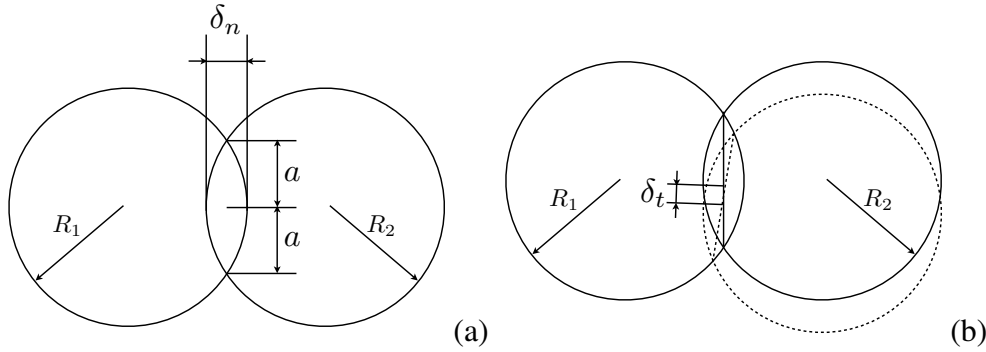
Les interactions entre particules peuvent être décrites en terme de forces élastiques, frictionnelles et cohésives, et par la dissipation d'énergie due au comportement plastique ou visqueux au contact.

Le problème de contact le plus classique est le contact de Hertz [111, 135, 2] pour deux sphères lisses de même matériau. La déflexion élastique  $\delta_n$  au contact (figure 1.1(a)) est reliée à la force normale  $f_n$  par une loi non-linéaire :

$$f_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{E}{1 - \nu_p^2} R^{1/2} \delta_n^{3/2} \quad (1.1)$$

où  $R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$  est le rayon réduit des deux sphères de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , et  $E$  et  $\nu_p$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson. Le caractère non-linéaire de la loi de Hertz est une conséquence de la courbure de l'interface. La relation 1.1 peut également être mise sous la forme :

$$f_n = k_n \delta_n \quad (1.2)$$



**FIGURE 1.1:** Géométrie de contact entre deux particules. Représentation de la déflexion normale (a) et tangentielle (b).

où  $k_n$  est la raideur de contact qui dépend de la déflexion :

$$k_n = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{\sqrt{d}}{3} \delta_n^{1/2} \quad (1.3)$$

Notons que la loi de Herz obtenue analytiquement suppose que la déformation au contact est petite ( $< 0.1$ ). L'ordre de grandeur de cette déformation est donné par  $\delta_n/a$ , où  $a \simeq \sqrt{2\delta_n R}$  est le rayon de la zone de contact ; voir figure 1.1(a).

Le frottement est une propriété générique des objets solides [29]. Sous sa forme la plus simple et classique, elle est régie par la loi de frottement sec de Coulomb. D'après cette loi, la force de frottement s'oppose au déplacement relatif entre deux corps au contact, elle est proportionnelle à la force normale et indépendante de l'aire de contact :

$$f_t = -\mu_s f_n \operatorname{sgn}(\mathbf{v}_t) \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{v}_t$  est la vitesse de glissement et  $\mu_s$  est le coefficient de frottement. Le coefficient de frottement est plus grand dans l'état statique que pendant le glissement. La loi de Coulomb est une conséquence de la déformation plastique des aspérités dans la zone de contact [29]. La valeur du coefficient de frottement est donc liée à la fois au seuil plastique et à la distribution de ces aspérités.

La force de frottement au glissement (1.4) correspond à la force seuil atteinte pendant le glissement. La loi de Coulomb n'informe en rien sur la valeur de cette force sans déplacement relatif. Dans ce cas, la force de frottement joue le rôle de fermeture pour équilibrer les autres forces agissant sur les deux corps. En d'autres termes, la force de frottement au repos est une simple force de réaction. Mais, cette *mobilisation* du frottement implique une déflexion élastique tangentielle  $\delta_t$  entre les deux corps dans la zone de contact ; figure 1.1(b). On peut décrire simplement cette dépendance par une loi élastique :

$$f_t = k_t \delta_t \quad (1.5)$$

où

$$k_t \simeq \alpha k_n \quad \text{avec} \quad \alpha = 2 \frac{1 - \nu_p}{2 - \nu_p} \quad (1.6)$$

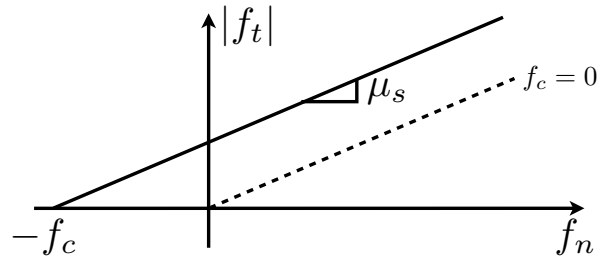


où le glissement se déclenche lorsque cette force atteint sa valeur limite  $\mu f_n$  en valeur absolue [2].

Les contacts secs présentent généralement un caractère non-cohésif et ne peuvent donc pas résister à un effort de traction. Des forces d'adhésion peuvent être introduites, soit sous forme de forces de surface pour les particules de très petites tailles, soit par la présence d'un liant solide (ponts solides) ou liquide (ponts liquides). En présence des forces d'adhésion, la force de frottement de Coulomb croît avec la surface de contact. L'approximation la plus simple consiste à ajouter la force d'adhésion maximale  $f_c$  à la force normale  $f_n$  [165, 167] :

$$f_t = \mu_s(f_n + f_c) \operatorname{sgn}(\mathbf{v}_t) \quad (1.7)$$

La valeur maximale de  $f_n$  en traction étant  $-f_c$ , la somme  $f_n + f_c$  est définie positive et le signe de  $f_t$  est toujours fourni par celui de la vitesse relative  $\mathbf{v}_t$ . Il est clair que cette écriture constitue une simple extrapolation linéaire de la loi de Coulomb (figure 1.2) et que la force de frottement est en fait contrôlée par l'aire réelle de contact.



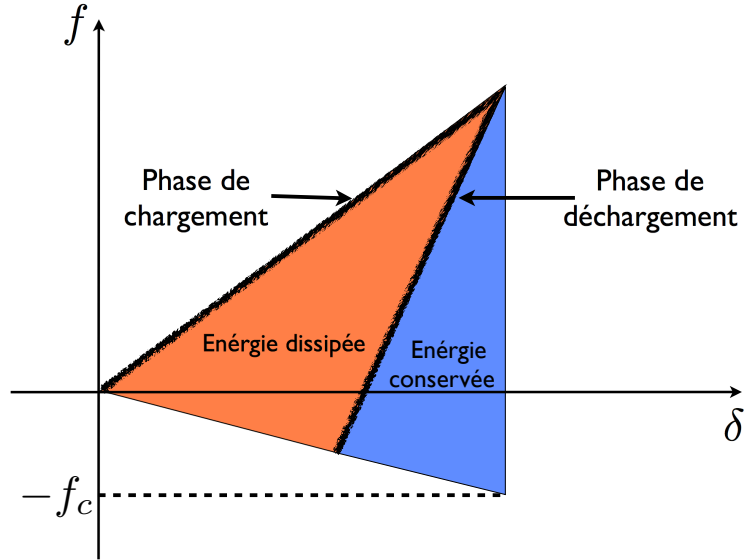
**FIGURE 1.2:** Relation entre les forces tangentielle et normale en présence d'une force d'adhésion ( $f_c \neq 0$ ) et en l'absence de cette dernière ( $f_c = 0$ ).

Le caractère dissipatif des milieux granulaires résulte du frottement ou de la rupture des contacts cohésifs (lorsqu'il y a cohésion) mais aussi des collisions inélastiques entre particules. La dissipation se traduit par le fait que l'énergie élastique emmagasinée dans les particules (zones de contact) lors des collisions n'est pas complètement restituée après la séparation [84, 133, 158]. On définit ainsi un coefficient de restitution [149] normale  $e_n$  par le rapport des vitesses relatives après  $v_n^+$  et avant  $v_n^-$  une collision :

$$e_n = -\frac{v_n^+}{v_n^-} \quad (1.8)$$

Le signe négatif indique que la direction de la vitesse change, de telle sorte que  $e_n$  est toujours positif avec une valeur qui varie entre 0, pour une collision parfaitement inélastique, et 1 pour une collision élastique. Lorsque  $e_n = 0$ , les deux particules restent en contact après la collision.

Le coefficient de restitution normale peut être lié au comportement visqueux, plastique à la cohésion. La plasticité du contact peut être prise en compte en distinguant la raideur en chargement (phase de contraction) et la raideur en déchargement (phase d'extension) qui doit



**FIGURE 1.3:** Représentation schématique de la dissipation d'énergie à partir de la force en fonction de la déflexion, avec la raideur de la phase de chargement différente de celle de la phase de déchargement.

être élevée (voir figure 1.3) pour la dissipation plastique en terme de force et pour la trajectoire dans l'espace des phases pendant la collision (figure 1.4).

La viscosité du matériau peut être prise en compte aussi par un amortissement visqueux au contact :

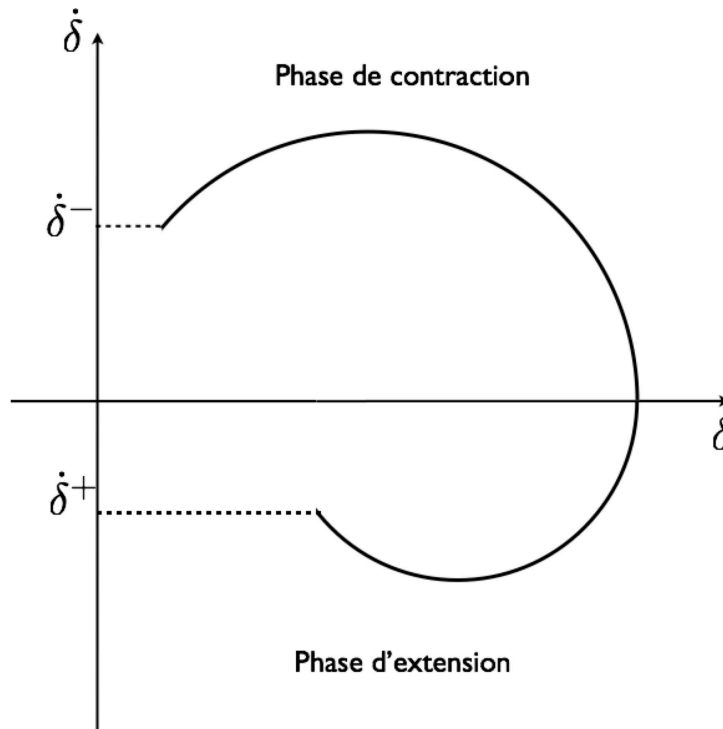
$$f_n = k_n \delta_n - \gamma_n \dot{\delta}_n \quad (1.9)$$

où  $\gamma_n$  est la viscosité effective au contact. Avec la loi de Hertz, qui implique une dépendance de  $k_n$  par rapport à la force normale  $f_n$ , on peut montrer que le coefficient de restitution normale dépend de la vitesse de collision [34, 90]. Enfin, l'adhésion au contact entraîne un coefficient de restitution  $< 1$  en raison de la perte de cohésion. On peut montrer qu'il existe une vitesse critique en-dessous de laquelle le coefficient de restitution est strictement zéro [34]. Au-delà, le coefficient de restitution augmente avec la vitesse de collision et tend asymptotiquement vers 1.

Même si le frottement pendant un glissement entre deux particules dissipe de l'énergie, les trois facteurs énumérés plus haut pour la force normale peuvent conduire également à une dissipation d'énergie par les forces tangentielles dans un contact non-glissants. Pour cela, on définit un coefficient de restitution tangentielle :

$$e_t = \frac{v_t^+}{v_t^-} \quad (1.10)$$

A la différence de  $e_n$ ,  $e_t$  peut prendre à la fois des valeurs positives et négatives dans l'intervalle  $[-1, +1]$ . La valeur 1 correspond à une collision dans laquelle la composante tangentielle de la vitesse relative ne change pas pendant la collision. La valeur  $e_t = -1$  correspond à un rebondissement tangentiel. Une autre source de dissipation possible est la résistance au roulement ou



**FIGURE 1.4:** Représentation schématique de la vitesse relative en fonction de la déflexion du modèle de dissipation d'énergie avec une raideur en phase de chargement différente de celle de la phase déchargement

au pivotement entre deux particules [192, 64, 63]. En règle générale les moments associés sont nettement plus faibles que les forces de frottement lors du glissement. Mais cette dissipation existe et peut jouer un rôle sachant que lors d'un cisaillement lent d'un matériau granulaire, la majorité des contacts sont en roulement.

### 1.1.3. Paramètres sans dimension

Le comportement mécanique des matériaux granulaires a fait l'objet d'études expérimentales particulièrement en mécanique des sols [45, 146, 221, 222], en géologie [182, 191] et technologie des poudres [18, 155, 175]. En mécanique des sols, on s'intéresse aux petites déformations que peut subir un sol sous l'effet de son propre poids ou par les contraintes exercées par un ouvrage. On distingue les sols grossiers, qui se caractérisent souvent par des particules non-cohésives et des sols fins qui contiennent des particules fines avec des interactions colloïdales [146]. En géologie, les matériaux granulaires apparaissent généralement sous forme de roches fragmentées pour lesquelles on s'intéresse à leur cycle de transport et de dépôt. En technologie des poudres, les matériaux granulaires interviennent dans des procédés divers qui mettent en jeu des grandes déformations du matériau ou de l'écoulement des particules.

Dans la limite des faibles taux de cisaillement, le matériaux granulaire présente une compacité  $\phi$  (le rapport du volume occupé par les particules sur le volume total) élevée et un caractère "solide" décrit par un comportement élastoplastique. Pour des taux de cisaillement élevés, le matériaux granulaire présente une compacité faible et un caractère "fluide" avec des propriétés non-newtoniennes [106]. Pendant longtemps, les liens entre ces deux groupes de propriété (solide et fluide) sont restés obscurs. Par ailleurs, les études réalisées dans différentes géométries d'écoulement (silos, cisaillement simple, plan incliné, ...) étaient difficiles à comparer.

Des études expérimentales et numériques ont permis de montrer que ces comportements peuvent être classifiés avec deux paramètres sans dimension [4, 9, 52, 74]. Le premier paramètre est le rapport entre le module élastique  $E$  des particules et la pression de confinement  $p$  :

$$\kappa = \frac{E}{p} \quad (1.11)$$

Ce paramètre caractérise la rigidité relative du système granulaire. Ainsi, un système granulaire composé de particules de faible module de Young se comporte comme un matériau très rigide lorsqu'il est soumis à une faible pression de confinement [3, 105].

Le deuxième paramètre sans dimension est défini à partir du rapport des forces inertielles induites par le cisaillement et des forces statiques dues à la pression de confinement [52, 74]. Pour un taux de cisaillement  $\dot{\epsilon}$ , l'ordre de grandeur de la quantité de mouvement échangée entre les particules est  $m\dot{\epsilon}d$ , où  $m$  et  $d$  sont respectivement la masse et le diamètre moyen. Les échanges de quantité de mouvement ont lieu sur un temps typique de  $\sim 1/\dot{\epsilon}$ . La force impulsionnelle moyenne définie comme la quantité de mouvement échangée par unité de temps est donnée par :

$$F_i = m\dot{\epsilon}^2 d \quad (1.12)$$

Ainsi, on définit un nombre *inertiel* à partir du rapport de  $F_i$  et de la force statique  $F_s = p d^{D-1}$  :

$$I = \sqrt{\frac{F_i}{F_s}} = \dot{\epsilon} \sqrt{\frac{m}{p d^{D-2}}} \quad (1.13)$$

En terme de temps caractéristiques, le premier est le temps de cisaillement ou temps inertiel  $t_i = \dot{\epsilon}^{-1}$ . C'est le temps caractéristique imposé globalement au système et qu'on peut qualifier de temps de déséquilibre puisque le cisaillement perturbe en permanence l'assemblage des particules. L'autre temps est le temps de retour à l'équilibre que l'on peut assimiler à un déplacement accéléré sur une faible distance de l'ordre d'un interstice entre particules sous l'effet de la pression de confinement imposée. L'ordre de grandeur de la force moyenne subie par une particule étant  $p d^{D-1}$ , on peut évaluer ce temps  $t_s$  de retour à l'équilibre en considérant le temps de déplacement d'une particule sur une distance égale à sa propre taille  $d$  (qui est supérieur au gap entre les particules voisins, mais  $d$  a l'avantage de correspondre à une longueur interne bien définie) en intégrant l'équation de la dynamique :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = p d^{D-1} \quad (1.14)$$

ce qui donne

$$t_s \simeq \sqrt{\frac{m}{pd}} \simeq d \sqrt{\frac{\rho_s}{p}} \quad (1.15)$$

où  $\rho_s$  est la densité de la particule et où nous avons utilisé la relation  $m \simeq \rho_s d^D$ . Le nombre  $I$  est ainsi le rapport donné par :

$$I = \frac{t_s}{t_i} = \dot{\epsilon} d \sqrt{\frac{\rho_s}{p}} \quad (1.16)$$

en 3D.

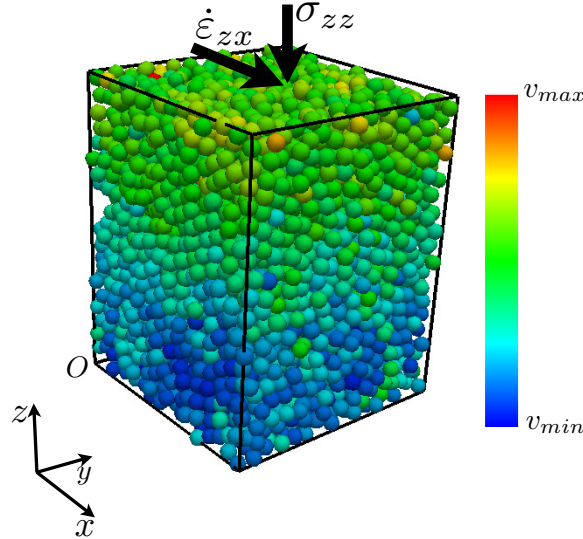
L'état quasi-statique correspond aux faibles valeurs de  $I$ . Les effets inertiels augmentent avec  $I$  et dominent le comportement aux grandes valeurs de  $I$ .

#### 1.1.4. Etat quasi-statique

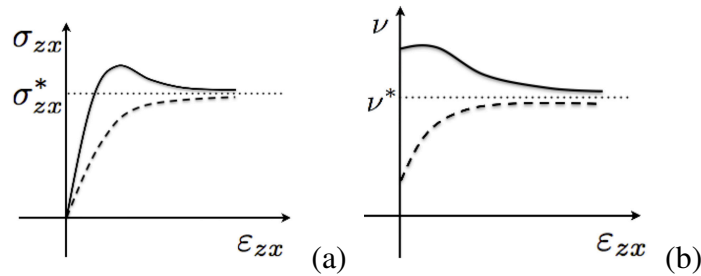
Pour étudier le comportement mécanique aux faibles valeurs de  $I$ , on soumet un échantillon granulaire soit à une compaction lente pour l'étude de la compressibilité du matériau, soit à un cisaillement lent pour l'étude de la résistance au cisaillement. Dans ce dernier cas, l'échantillon est confiné par une contrainte extérieure [92]. Indépendamment des conditions aux limites, la réponse mécanique est analysée à l'aide des invariants des tenseurs de déformation  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  et de contrainte  $\sigma_{\alpha\beta}$ . Pour fixer les idées, considérons le cisaillement d'un matériau granulaire dans la direction  $x$  par l'application d'un taux de cisaillement  $\dot{\epsilon}_{zx}$  avec une contrainte de confinement  $\sigma_{zz}$  appliquée dans la direction  $z$  (figure 1.5). Pour simplifier l'analyse, les déformations d'allongement suivant les directions  $x$  et  $y$  sont considérées nulles :  $\dot{\epsilon}_{yy} = \dot{\epsilon}_{xx} = 0$  et la boîte est fixe en  $O$  (cisaillement plan). Dans ces conditions, le système peut être analysé dans le plan  $xz$ . Sous l'effet du cisaillement  $\dot{\epsilon}_{zx}$ , la contrainte  $\sigma_{zx}$  et le volume  $V$  de l'échantillon évoluent avec la déformation de cisaillement cumulée  $\varepsilon_{zx} = \int_0^t \dot{\epsilon}_{zx} dt$ ; figure 1.6.

Pour une rigidité relative  $\kappa$  élevée, une faible partie de la déformation est élastique. Les modules d'élasticité peuvent être mesurés à partir du début de la courbe de variation de  $V$  et de  $\sigma_{zx}$  en fonction de  $\varepsilon_{zx}$ . D'après la loi de Hertz, la raideur  $k_n$  au contact dépend de la force normale (section 1.1.2.). A l'échelle macroscopique, cet effet se traduit par un module élastique  $E$  qui, pour un système assez dense, doit augmenter avec la pression moyenne comme  $p^{1/3}$  (où  $p$  est la pression de confinement). Pour la plupart de matériaux, le domaine élastique correspond à de très faibles déformations. L'évolution du réseau de contacts avec la pression de confinement conduit à une évolution des modules d'élasticité qui diffèrent de la loi en  $p^{1/3}$  [2].

Au-delà de la limite élastique, la déformation devient irréversible et s'accompagne de réarrangements importants des particules. Les glissements les uns par rapport aux autres entraînent une dissipation d'énergie par frottement. Les simulations par la méthode en éléments discrets ou Discrete Element Method (DEM) montrent que le frottement n'est mobilisé qu'au niveau d'une faible fraction des contacts (inférieure à 10%), portant des forces normales très faibles [170]. Durant cette déformation plastique, la microstructure évolue et devient de plus en plus anisotrope. Par conséquent, la résistance au cisaillement augmente. Si le matériau est initialement



**FIGURE 1.5:** Essai de cisaillement plan dans une cellule bi-périodique avec une pression de confinement  $\sigma_{zz}$  et un taux de cisaillement  $\dot{\varepsilon}_{zx}$ . La périodicité est dans les directions  $x$  et  $y$ . La couleur des particules correspond à l'amplitude du module de leurs vitesses.



**FIGURE 1.6:** Comportement d'un milieu granulaire dense (ligne continue) et lâche (traits). Variation (a) de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{zx}$  et (b) de la compacité  $\nu$  en fonction de la déformation de cisaillement cumulée  $\varepsilon_{zx}$ .

lâche, avec une compacité  $\phi_0$  inférieure à une compacité critique  $\phi^*$ ,  $\sigma_{zx}$  tend asymptotiquement vers une valeur constante  $\sigma_{zx}^*$ . Si le matériau est dense avec  $\phi_0 > \phi^*$ , alors  $\sigma_{zx}$  passe par un pic avant de diminuer vers la même valeur stationnaire  $\sigma_{zx}^*$  que dans le cas lâche. Par ailleurs, dans le cas dense, la compacité  $\phi$  diminue et tend vers  $\phi^*$  tandis que dans le cas lâche, elle augmente pour tendre également vers  $\phi^*$ .

Les valeurs stationnaires  $\sigma_{zx}^*$  et  $\phi^*$  dépendent de la contrainte de confinement  $\sigma_{zz}$ . Les expériences montrent que cette dépendance peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\sigma_{zx}^* = \sigma_{zz} \tan \varphi^* \quad (1.17)$$

$$\phi^* = \phi^*(\sigma_{zz}^r) + C \ln(\sigma_{zz}/\sigma_{zz}^r) \quad (1.18)$$

où  $\sigma_{zz}^r$  est une contrainte de référence,  $C$  représente la compressibilité du matériau et  $\varphi^*$  est l'angle de *frottement interne* du matériau. Une propriété essentielle des milieux granulaires est

le fait que  $\varphi^*$  est à la fois indépendant de la compacité initiale  $\phi_0$  et de la contrainte de confinement  $\sigma_{zz}$ , et constitue ainsi une propriété du matériau. La relation linéaire entre la contrainte de cisaillement et la contrainte de confinement signifie simplement que l'échelle des contraintes internes est imposée par la contrainte de confinement appliquée. Ceci reflète le fait que la loi de frottement ne comporte aucune échelle de contrainte particulière. Lorsque le matériau comporte une échelle de contrainte interne due à la cohésion des contacts, elle peut être directement prise en compte sous la forme d'un paramètre de cohésion macroscopique  $c$  :

$$\sigma_{zx}^* = \sigma_{zz} \tan \varphi^* + c \quad (1.19)$$

Ce paramètre décrit une résistance au cisaillement qui est indépendante de la contrainte de confinement.

Les éléments décrits brièvement plus haut constituent les principaux ingrédients de la *théorie des états critiques* [218]. L'état quasi-statique stationnaire avec son angle de frottement interne  $\varphi$  est souvent appelé *état critique*. Cet état est indépendant de l'état initial, est atteint lorsque le matériau est cisailé suffisamment longtemps pour lui faire "perdre la mémoire" de l'état initial. Pour de nombreux matériaux granulaires à particules peu déformables, l'influence de l'élasticité des particules sur la compacité est négligeable devant celle des réarrangements de telle sorte que la dépendance logarithmique de  $\phi^*$  par rapport à la contrainte de confinement peut être négligée et, en pratique, l'état critique peut être également caractérisé par sa compacité  $\phi^*$ . Les expériences et simulations numériques donnent  $\phi^* \simeq 0.58$  pour un assemblage des particules sphériques de même taille [12, 74]. Cette valeur est bien inférieure à celle d'un assemblage RCP avec  $\phi \simeq 0.64$ .

Par rapport à l'état critique, on distingue deux transitoires : 1) le durcissement (hardening) qui correspond à la montée de  $\sigma_{zx}$  avec la déformation, 2) l'adoucissement (softening) qui correspond à la réduction de  $\sigma_{zx}$  après un pic de contrainte. En normalisant les contraintes par la contrainte de confinement, on peut décrire ces transitoires par l'évolution de  $\tan \varphi = \sigma_{zx}/\sigma_{zz}$ . L'angle  $\varphi$  caractérise l'angle de frottement interne pour un état donné du matériau. Pour un matériau préparé par compression isotrope, elle a une valeur initialement nulle. Sa valeur au pic  $\varphi^+$  (pour  $\phi_0 > \phi^*$ ) augmente avec  $\phi_0$ . Comme  $\phi_0$  ne peut pas dépasser la valeur RCP de la compacité, l'angle  $\varphi^+$  pour  $\phi_0 = \phi^{RCP}$  peut être considéré comme une grandeur matérielle (caractérisant le matériau).

La relation (1.19) écrite dans la configuration de cisaillement est une loi de frottement pour les contraintes exercées sur le plan  $xy$  (perpendiculaire à l'axe  $z$ ). Par rapport à ce plan,  $\sigma_{zz}$  est la contrainte normale et  $\sigma_{zx}$  est la contrainte tangente suivant la direction  $x$  de l'écoulement. Etant donné que l'état critique est un état sans mémoire dont les propriétés reflètent les caractéristiques des particules, la même relation doit se vérifier sur tous les plans orientés dans différentes directions d'espace  $\mathbf{n}$  :

$$\sigma_t^*(\mathbf{n}) = \tan \varphi^* \sigma_n(\mathbf{n}) + c \quad (1.20)$$

où  $\sigma_t^*$  et  $\sigma_n$  sont respectivement la contrainte tangente et la contrainte normale sur le plan  $\mathbf{n}$  dans l'état critique. Cette relation exprime le *critère de Coulomb*. Elle peut être reformulée

en terme des invariants du tenseur de contrainte dans le plan  $xz$ . Nous considérons différentes orientations  $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$  dans ce plan. Nous avons [169] :

$$\sigma_n(\theta) = p + q \cos 2(\theta - \theta_\sigma) \quad (1.21)$$

$$\sigma_t(\theta) = q \sin 2(\theta - \theta_\sigma) \quad (1.22)$$

où  $p = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$  est la pression moyenne dans le plan  $xz$  et  $q = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$  est le déviateur.  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  sont les valeurs propres du tenseur de contrainte dans le plan  $xz$  et  $\theta_\sigma$  est la direction principale majeure. En utilisant le cercle de Mohr, on peut montrer que  $\sin \varphi^* = q/p$  et  $\theta_\sigma = \pi/2 - \varphi/2$  dans la configuration de cisaillement simple où le plan de cisaillement (en fait, sa normale) est orienté à  $\theta = \pi/2$ .

De la même manière que la contrainte de cisaillement est proportionnelle à la contrainte de confinement, la déformation d'allongement  $\dot{\epsilon}_{zz}$  suivant  $z$  dans l'état quasi-statique est induite par la déformation de cisaillement  $\dot{\epsilon}_{zx}$  et donc la grandeur utile est leur rapport :

$$\tan \psi = -\frac{\dot{\epsilon}_{zz}}{\dot{\epsilon}_{zx}} \quad (1.23)$$

où  $\psi$  est l'angle de *dilatance de Reynolds*. Rappelons que dans les milieux granulaires, il est commun de compter positivement les contraintes compressives et les contractions. Une expansion suivant  $z$  est donc négative et le signe négatif dans la définition de  $\psi$  permet de caractériser une dilatation par un angle positif. Un angle négatif correspond à une contraction ou "dilatance négative". L'angle de dilatance peut être exprimé d'une manière générale en terme des invariants du tenseur des taux de déformation, ce qui permet la généralisation à d'autres géométries. En 2D ou pour les déformations planes, on obtient [169] :

$$\sin \psi = -\frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_q} \quad (1.24)$$

où  $\dot{\epsilon}_p$  est le taux de déformation volumétrique et  $\dot{\epsilon}_q$  est le taux de cisaillement. L'angle  $\psi$  a une valeur positive dans un matériau granulaire initialement dense et tend avec le cisaillement vers zéro dans l'état critique. Il a une valeur négative dans un matériau lâche, mais tend également vers zéro dans l'état critique.

De la même manière que l'angle de frottement interne caractérise la surface de charge dans un milieu granulaire, l'angle de dilatance définit la règle d'écoulement, c'est à dire la direction de la déformation plastique. Le comportement plastique des matériaux granulaires est dit associé si ces deux angles sont égaux :  $\varphi = q/p = \psi = -\dot{\epsilon}_p/\dot{\epsilon}_q$ . Or, si cette égalité est vérifiée à tout instant de l'évolution d'un matériau granulaire, alors la puissance dissipée par les déformations  $p\dot{\epsilon}_p + q\dot{\epsilon}_q$  est nulle ! En supposant que la puissance est positive (énergie dissipée), on obtient  $\varphi > \psi$ , ce qui est observé.

Le modèle de Mohr-Coulomb, en tant que modèle macroscopique, s'applique à un milieu homogène. Mais très souvent l'orientation du plan de glissement est assimilée à une bande de localisation des déformations. En effet, lorsque l'on soumet un échantillon granulaire au



cisaillement (souvent dans la géométrie triaxiale), le cisaillement se concentre dans une bande de faible largeur (une dizaine de diamètres) de telle sorte que, après une faible déformation, le matériau semble se scinder en deux blocs rigides qui glissent l'un par rapport à l'autre [16, 65, 89, 206]. Pour la même raison, le matériau ne se dilate que dans la zone de localisation et donc les déformations mesurées à l'échelle macroscopique ne sont plus objectives. Ce phénomène de localisation est associé à l'instabilité du matériau au pic de contrainte, c'est à dire dans le cas des matériaux initialement denses et donc avec une dilatance positive. Dans certaines géométries, cette bande est incompatible avec les conditions aux limites (parois rigides) et ne peut donc pas persister sans réflexions multiples sur les parois. Ainsi, différentes parties du matériau se dilatent de façon différentielle et l'état critique ne peut être atteint dans la totalité de l'échantillon que tardivement.

### 1.1.5. Régime inertiel

Le terme "quasi-statique", employé pour décrire les déformations lentes, n'est pas un concept intuitif dans le cas des milieux granulaires. En effet, les mouvements des particules sont erratiques et présentent des micro-instabilités [46] qui peuvent contribuer à la résistance au cisaillement avec un caractère Coulombien puisque l'énergie dissipée lors de ces événements instables et rapides est proportionnelle à la pression de confinement. Lorsque le nombre inertiel  $I$  augmente, la fréquence et l'amplitude des événements instables augmente et les effets inertiels commencent à dominer, ce qui conduit à l'augmentation de la résistance au cisaillement.

Plusieurs études expérimentales et numériques ont permis de décrire cette dépendance du coefficient de frottement interne  $\mu^*$  par rapport à  $I$  dans un écoulement stationnaire. Ce phénomène est connu sous le nom de "la rhéologie de  $\mu(I)$ " (voir figure 1.7) [51, 52, 74].  $\mu^*$  augmente progressivement à partir de sa valeur quasi-statique. La limite quasi-statique correspond à  $I < 10^{-3}$  sans que cette valeur puisse être associée à une vraie transition de phase entre un régime quasi-statique et un régime dynamique. Pour des valeurs de  $I$  inférieures à  $10^{-1}$ , la dépendance est approximativement linéaire :

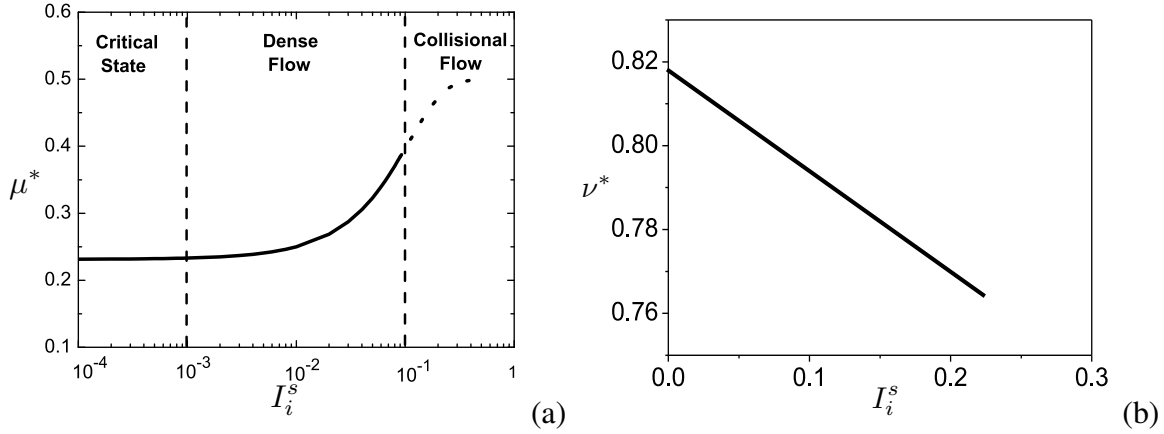
$$\mu^*(I) = \mu_0^* + k_\mu I \quad (1.25)$$

Pour des valeurs plus élevées de  $I$  ( $\simeq 0.3$ ),  $\mu^*$  tend vers une valeur constante qui correspond au régime purement collisionnel. La valeur du paramètre  $k_\mu$  est  $\simeq 1$  pour les disques faiblement polydisperses.

Un autre effet inertiel est la diminution de la compacité  $\phi$  avec  $I$  du fait de l'agitation croissante des particules. Cette dépendance est nonlinéaire mais peut être approximée par une relation linéaire :

$$\phi^*(I) = \phi_0^* - k_\phi I \quad (1.26)$$

La valeur du paramètre  $k_\phi$  est  $\simeq 0,3$  pour les disques faiblement polydisperses. La diminution de  $\phi^*$  lorsque  $I$  augmente peut être considérée comme une "dilatance dynamique" induite par les collisions contrairement à la "dilatance géométrique" de Reynolds qui résulte des encombrements stériques.



**FIGURE 1.7:** *Rhéologie du frottement interne en fonction de  $I$  (a) [52]. Rhéologie de la compacité en fonction de  $I$  (b) [51].*

Dans la configuration de cisaillement simple et pour un volume imposé, les relations phénoménologiques (1.25 et 1.26) et la définition du nombre  $I$  (équation 3.6) permettent d'exprimer les contraintes sous la forme suivante :

$$\sigma_{zz} = \frac{m}{d^{D-2}} \frac{k_\phi^2}{(\phi_0^* - \phi^*)^2} \dot{\varepsilon}_{zx}^2 \quad (1.27)$$

$$\sigma_{zx} = \mu_0^* \sigma_{zz} + \frac{m}{d^{D-2}} \frac{k_\phi k_\mu}{(\phi_0^* - \phi^*)} \dot{\varepsilon}_{zx}^2 \quad (1.28)$$

Ces relations expriment la proportionnalité des contraintes avec le carré du taux de cisaillement comme prédite par Bagnold par un argument simple : la contrainte est proportionnelle à la quantité de mouvement moyenne échangée entre particules et à la fréquence des collisions, et ces deux facteurs sont proportionnels au taux de cisaillement. De la même manière, la relation (1.28) peut être mise sous la forme :

$$\sigma_{zx} = \phi_0^* \sigma_{zz} + k_\mu \left( \frac{m}{d^{D-2}} \sigma_{zz} \right)^{1/2} \dot{\varepsilon}_{zx} \quad (1.29)$$

C'est une relation intéressante qui montre que la contribution de l'inertie à la résistance au cisaillement peut être décrite comme un comportement visqueux avec une viscosité dépendant de la pression de confinement. Les relations (1.25) et (1.26) s'appliquent à un volume homogène d'un matériau granulaire. Mais, en prenant en compte les conditions aux limites, il est possible de les utiliser pour prédire les contraintes et les champs de vitesse dans n'importe quelle géométrie.

## 1.2. Milieux granulaires immergés

### 1.2.1. Suspensions et milieux granulaires

Les milieux granulaires immergés dans un fluide, qui nous intéressent dans ces études, se retrouvent dans de nombreux phénomènes naturels tels que l'érosion et transport de sédiments, les avalanches sous-marines, le glissement de terrain, la dynamique des dunes... [53, 91, 96, 100, 102, 127, 138], ainsi que dans divers procédés et matériaux industriels (peinture, ciment, béton, lits fluidisés, granulation, malaxage...)[173]. La compréhension des lois qui régissent ces mélanges est très complexe de part sa nature biphasique, mettant en jeu une phase fluide (continue) et une phase particulaire (discrète), où les interactions particule-particule et les interactions fluide-particule contribuent au comportement du mélange.

On peut distinguer deux points de vue différents sur la modélisation de ces mélanges. Dans le point de vue granulaire, le comportement d'un milieu granulaire dense est influencé par le fluide. Dans le point de vue mécanique des fluides, la rhéologie de la suspension est modifiée en fonction de la concentration des particules [128, 186]. Par exemple, la viscosité effective du mélange augmente avec la concentration des particules. Les modèles développés dans ce domaine sont problématiques lorsque la concentration s'approche de la compacité critique. Dans cette limite, le principe même de la rhéométrie à volume constant pose problème en raison de la dilatance de Reynolds [172, 30]. Les modèles théoriques et expérimentales en laboratoire étant essentiellement développés dans les deux limites dominées respectivement par les forces hydrodynamiques et par les forces de contact, un enjeu majeur dans la recherche actuelle sur les mélanges fluides-particules est de comprendre l'effet des particules et de leurs collisions sur la micro-structure des suspensions et, inversement, l'effet des forces hydrodynamiques sur l'assemblage. Le fluide peut agir de différentes façons sur un milieu granulaire. Après un bref rappel des forces en jeu, nous allons brièvement décrire des exemples où le fluide peut agir par sa pression, sa viscosité ou sa faible compressibilité. Nous traitons ensuite, des études récentes sur l'écoulement des mélanges fluide-grains.

### 1.2.2. Forces hydrodynamiques

Les forces exercées par un fluide sur une particule sont soit de nature visqueuse soit de nature inertielle (inertie du fluide). Pour une particule de taille  $d$  et de densité  $\rho_s$  dans un fluide de viscosité  $\eta_f$ , le nombre de Reynolds particulaire  $\mathcal{R}$  permet de distinguer ces deux types de force :

$$\mathcal{R} = \frac{\rho_s d u}{\eta_f} \quad (1.30)$$

où  $u = u^s - u^f$  est la vitesse de la particule par rapport au fluide. Il est aussi nécessaire de distinguer les cas où le fluide n'est pas perturbé par la présence de la particule (effets du premier ordre) des effets liés à la perturbation du fluide. Enfin, devons aussi considérer le champ de vitesses du fluide (au repos, cisailé, ...).

La force de Stokes (force de traînée  $F_d$  sur une particule sphérique dans le régime visqueux  $\mathcal{R} \ll 1$ ) est l'intégrale de la force  $d\mathbf{F}_d = (3\eta_f/d)\mathbf{u}$  sur la surface de la particule. Pour une sphère de diamètre  $d$ , elle est donnée par :

$$\mathbf{F}_d = -3\pi d\eta_f \mathbf{u}\mathbf{n} \quad (1.31)$$

où  $\mathbf{n}$  est la direction de la vitesse ( $\mathbf{u} = u \mathbf{n}$ ). Dans un fluide en cisaillement, il faut prendre en compte la variation de la vitesse du fluide autour de la particule, ce qui conduit à une correction, appelée force de Faxén :

$$\mathbf{F}_f = \frac{\pi}{8} d^3 \eta_f \Delta \mathbf{u}^f \quad (1.32)$$

Il apparaît aussi une force de portance en raison du gradient de vitesse du fluide qui induit une rotation de la particule et donc une asymétrie du champ de pression. Pour un écoulement de taux de déformation  $\dot{\gamma}$ , cette force est donnée par

$$F_s = \alpha_s d^2 \sqrt{\rho_f \eta_f \dot{\gamma}} u^s \quad (1.33)$$

Pour une sphère,  $\alpha_s \simeq 1,61$ . D'une manière générale, la rotation de la particule dans un écoulement homogène implique, par l'asymétrie du champ de vitesse, une force de portance, appelée force Magnus, donnée par :

$$\mathbf{F}_m = \frac{\pi}{8} C_m d^3 \rho_f \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \quad (1.34)$$

Dans le régime inertiel  $\mathcal{R} \gg 1$ , la force de traînée résulte de l'asymétrie de la pression sur la particule. Elle est donnée par :

$$\mathbf{F}_d = -\frac{\pi}{8} C_\infty d^2 \rho_f u^2 \mathbf{n} \quad (1.35)$$

où  $C_\infty \simeq 0,47$  pour les sphères. Il faut remarquer que cette expression est exacte si le mouvement de la particule est uniforme. Lorsque la particule s'accélère, il faut prendre en compte également la force qui résulte de l'accélération du fluide avec la particule et qui conduit à une force de "masse ajoutée" [33] :

$$\mathbf{F}_a \simeq \frac{\pi}{12} d^3 \rho_f \frac{d\mathbf{u}}{dt} \mathbf{n} \quad (1.36)$$

Lorsque le fluide est accéléré ou est soumis à la gravité  $\mathbf{g}$ , la particule subit une force d'Archimède :

$$\mathbf{F}_{Archi} \simeq \frac{\pi}{6} d^3 \rho_f \left\{ \frac{d\mathbf{u}^f}{dt} - \mathbf{g} \right\} \quad (1.37)$$

Enfin, il existe un effet lié au retard entre le changement de vitesse de la particule et la variation de la force qui en résulte. Cet effet conduit à une force, appelée force de Basset.

Le fluide influence également les interactions entre les particules. En particulier, la collision entre particules s'accompagne d'une surpression fluide entre les particules, ce qui entraîne une force de lubrification répulsive dans la limite  $\delta \ll d$  donnée par :

$$F_{lub} = -\frac{3\pi}{8} d^2 \eta_f \frac{\dot{h}}{h} \quad (1.38)$$

Cette force diverge lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Cette expression théorique implique que deux particules sphériques infiniment lisses ne peuvent jamais se toucher dans un fluide ! Mais la rugosité des surfaces des particules modifie cette conclusion et permet aux particules de se toucher.

### 1.2.3. Régimes d'écoulement fluid-grains

Nous avons vu que les régimes d'écoulement des milieux granulaires secs font intervenir un temps de cisaillement  $t^i = \dot{\epsilon}^{-1}$  et un temps de relaxation  $t^{is}$  liés à l'inertie des particules et à la pression de confinement, respectivement. Le point de départ pour appréhender l'influence du fluide sur le comportement des écoulements granulaires est la compréhension de la manière dont le fluide influence ces temps [37, 48]. On considère par la suite que le cisaillement du mélange est suffisamment homogène pour que les temps de cisaillement de l'assemblage granulaire et du fluide coïncident en un seul temps de cisaillement  $t^i$ .

L'ordre de grandeur de ce temps de relaxation peut être obtenu en considérant le déplacement d'une particule sur une distance égale à son diamètre sous l'effet de la force statique  $F_s = pd^2$  mais aussi la force de traînée  $F_d$  exercée par le fluide. L'équation de la dynamique s'écrit alors :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_s - F_d = pd^2 - F_d \quad (1.39)$$

L'ordre de grandeur de la force de traînée dépend des paramètres du fluide. On distingue deux régimes :

1. Le *régime visqueux* pour lequel la force de traînée est donnée par la force de Stokes :

$$F_d \simeq \eta_f u d \quad (1.40)$$

En introduisant cette force dans l'équation (1.39), et pour un déplacement  $\Delta x = d$ , on obtient

$$t^v \simeq \frac{\eta_f}{p} \quad (1.41)$$

2. Le *régime inertiel* tel que la force de traînée est dominée par l'inertie du fluide :

$$F_d \simeq C_d \rho_f u^2 d^2 \quad (1.42)$$

où  $C_d$  est le coefficient de traînée. A partir de l'équation (1.39) on obtient

$$t^{if} \simeq \frac{d}{\sqrt{p/(C_d \rho_f)}} \quad (1.43)$$

Le temps inertiel des particules  $t^{is} = t^s$  avait déjà été introduit par l'équation (1.15). Nous avons donc trois temps caractéristiques en fonction des propriétés des particules et du fluide et de la pression de confinement :

1. le temps inertiel des particules  $t^{is}$

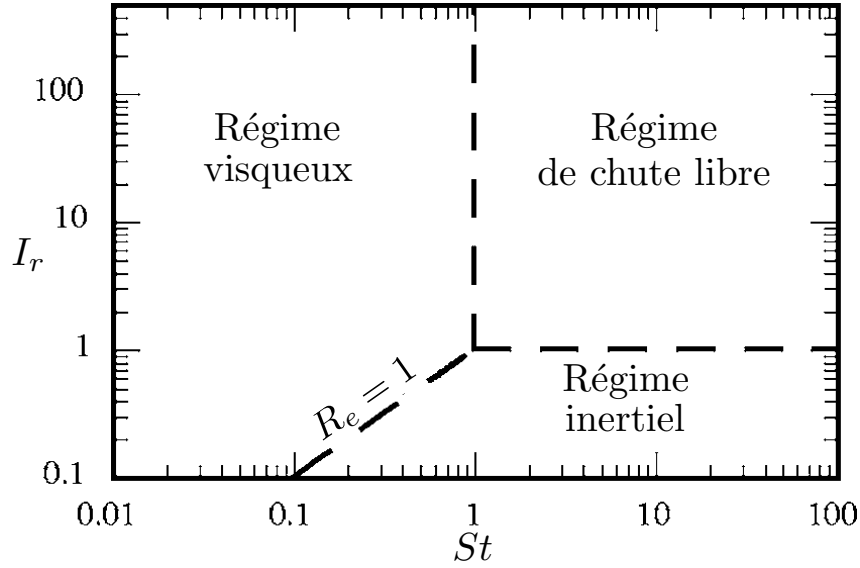


FIGURE 1.8: Diagramme des régimes d'écoulement d'une suspension granulaire [48].

2. le temps inertiel du fluide  $t^{if}$
3. le temps visqueux  $t^v$

A partir de ces temps, il est possible de définir deux nombres sans dimension en comparant  $t^{is}$  à  $t^{if}$  et  $t^v$  :

$$St = \frac{t^{is}}{t^v} = \frac{d\sqrt{p\rho_s}}{\eta_f} \quad (1.44)$$

$$r = \left(\frac{t^{is}}{t^{if}}\right)^2 = \frac{\rho_s}{C_d\rho_f} \quad (1.45)$$

Le premier nombre  $St$  est le nombre de Stokes et le deuxième représente le rapport des densités. Dans la limite où les forces statiques dues à la pression de confinement sont plus importantes que la force de traînée, la vitesse moyenne de relaxation d'une particule est donnée par  $u \simeq \sqrt{p/\rho_s}$ , et donc le rapport entre  $St$  et  $r$  est égal au nombre de Reynolds  $\mathcal{R}$  :

$$\mathcal{R} = \frac{St}{r} = \frac{C_d\rho_f d}{\eta_f} \sqrt{\frac{p}{\rho_s}} = \frac{C_d\rho_f du}{\eta_f} \quad (1.46)$$

Comme on peut voir sur la figure 1.8, on distingue trois régimes dans l'espace défini par ces deux paramètres :

1. Pour  $St > 1$  et  $r > 1$ , les forces dominantes sont celles des contacts et donc le temps de relaxation est donné par  $t^{is}$ . Le nombre sans dimension qui contrôle ici les contraintes

et la compacité est donc le nombre inertiel des particules :

$$I = \frac{t^i}{t^{is}} = \dot{\epsilon} d \sqrt{\frac{\rho_s}{p}} \quad (1.47)$$

C'est le régime des écoulements secs.

2. Pour  $St < 1$  et  $r > St$ , la force dominante est la force visqueuse et donc le temps de relaxation est donné par  $t^v$ . Le nombre sans dimension qui contrôle le comportement est donc le "nombre visqueux" défini par :

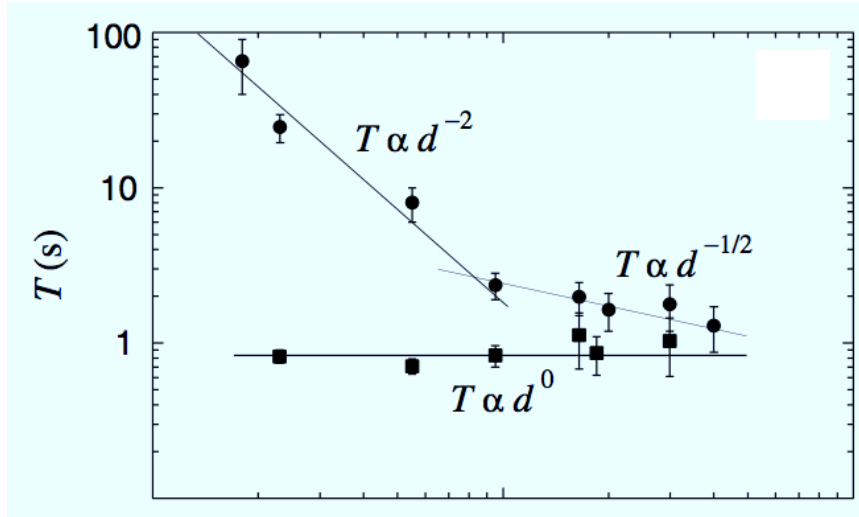
$$I_v = \frac{t^i}{t^v} = \frac{\dot{\epsilon} \eta_f}{p} \quad (1.48)$$

C'est le régime des suspensions denses.

3. Pour  $r < 1$  et  $St > r$ , la force dominante est la force inertielle du fluide et donc le temps de relaxation est contrôlé par  $t^{if}$ . Le nombre sans dimension qui caractérise le comportement dans ce régime est le nombre inertiel du fluide défini par :

$$I_f = \frac{t^i}{t^{if}} = \dot{\epsilon} d \sqrt{\frac{C_d \rho_f}{p}} \quad (1.49)$$

Enfin on notera que les isovalues du nombre de Reynolds dans cet espace sont des droites de différentes pentes passant par l'origine. La droite qui sépare le régime d'inertie du fluide du régime visqueux est donc de pente égale à  $\mathcal{R} = 1$ .



**FIGURE 1.9:** La durée des avalanches  $T_s$  en fonction de la taille des particules  $d$  dans l'air (carrés pleins) et dans l'eau (cercles pleins) d'après Courrech du Pont et al [48].

Ces trois régimes ont été mis en évidence expérimentalement par Courrech du Pont et al. [48]. L'étude a porté sur l'évaluation de la durée d'avalanches impliquant des particules de différentes tailles et des fluides de différentes viscosités. La figure 1.9 montre l'évolution de ces

durées en fonction de la taille des particules  $d$  pour de l'air et de l'eau. La dépendance en  $d$  traduit bien les trois régimes d'interaction fluide-particules. Par ailleurs, Cassar et al. [37] ont étudié les écoulements immergés stationnaires de particules sur un plan incliné en fonction de deux paramètres : l'épaisseur du lit des particules et l'angle d'inclinaison. Les résultats expérimentaux montrent clairement que le paramètre de contrôle dans le régime visqueux est bien le nombre  $I_v$ . En d'autres termes, le coefficient de frottement effectif  $\mu^*$  et la compacité  $\phi^*$  sont des fonctions de  $I_v$  comme dans le cas sec (le régime est appelé ici "inertiel des particules") et ces deux grandeurs s'expriment en fonction de  $I$ . Pour décrire ces écoulements stationnaires immergés, il suffira alors de remplacer  $I$  dans les équations par  $I_v$ . Les auteurs montrent ainsi que ces lois permettent de prédire correctement le profil des vitesses, la dépendance par rapport à l'angle d'inclinaison ainsi que la pression du fluide dans les pores.

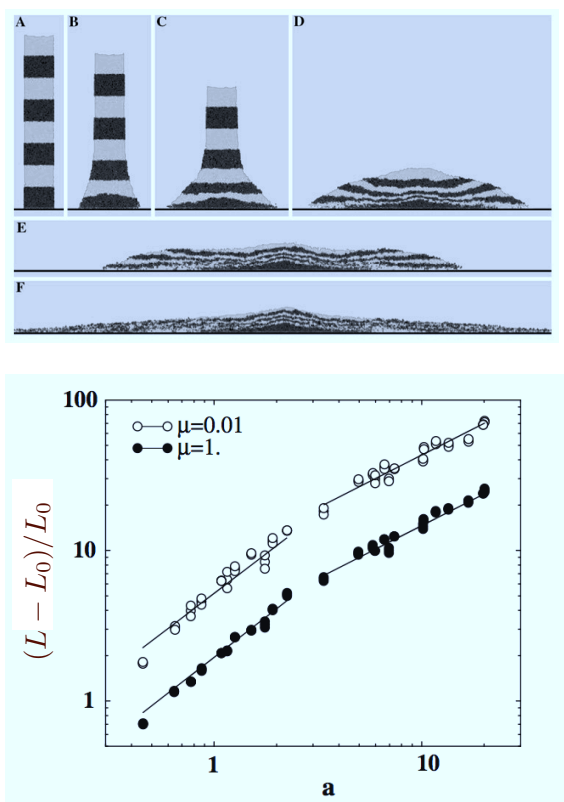
#### 1.2.4. Etalement et distance d'arrêt des écoulements

L'influence du fluide sur les phénomènes transitoires tels que les avalanches sous-marines est délicate à modéliser [82, 96]. En effet, la compacité [101] et la pression de confinement sur la phase granulaire évoluent au cours de l'avalanche et le régime d'écoulement peut aussi changer au cours du temps. La composition du milieu peut également subir des évolutions importantes par exemple à cause d'une ségrégation de taille [154] ou la migration des particules sous l'effet des gradients de cisaillement. De la même façon, les contributions relatives des forces (forces visqueuses, forces de masse ajoutée, force de Magnus, forces de lubrification, ...) peuvent évoluer au cours de l'avalanche.

Un cas a récemment fait l'objet de plusieurs études expérimentales et numériques, l'effondrement d'une colonne de particules sous l'action de son propre poids [14, 119, 121, 130, 131, 183, 194]. Ce problème a été en partie motivé par des observations géologiques des dépôts laissés par des grandes avalanches de débris aériennes ou sous-marines, suite à la rupture de roches. Par analogie avec la rupture d'un barrage, ce type de configuration est souvent qualifié de "dam-break". La question centrale est de déterminer la longueur d'arrêt ou de "run-out"  $L$  de l'avalanche et sa durée en fonction de la géométrie initiale des roches. Les données géologiques indiquent que  $L$  augmente comme  $V^{1/3}$ , où  $V$  est le volume mobilisé des débris, et le rapport  $L/H_0$ , où  $H_0$  est la différence d'altitude entre le haut de la configuration de départ et les dépôts, augmente linéairement avec  $V$ . Le rapport  $L/H_0$  peut être assimilé à un angle dont la valeur indique la mobilité de l'avalanche. La valeur de ce rapport est extrêmement faible (de l'ordre de  $6^\circ$ ) par rapport à l'angle de repos, ce qui traduit une grande mobilité.

Cette grande distance de run-out a fait l'objet de diverses interprétations. L'avantage de la géométrie colonnaire est d'éliminer les aléas topographiques et de permettre ainsi d'analyser quantitativement l'influence de la hauteur initiale  $H_0$  de la colonne et de sa largeur  $L_0$ . Dans le cas de particules secs, les études récentes ont montré que la distance normalisée  $(L - L_0)/L_0$  se met à l'échelle avec le rapport d'aspect initial  $H_0/L_0$ , comme on peut le voir sur la figure 1.10. On observe deux régimes : 1) une dépendance linéaire dans le régime des faibles rapports d'aspect ( $< 3$ ) et 2) une dépendance en loi de puissance dans le régime des grands rapports



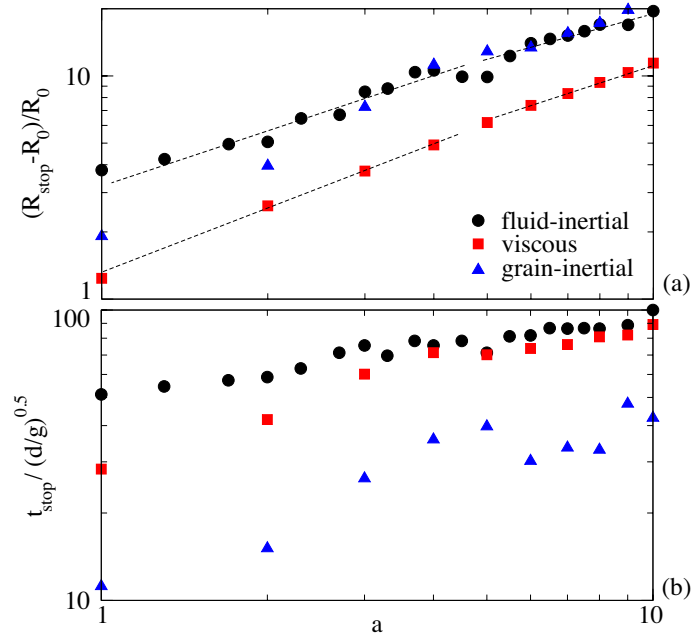


**FIGURE 1.10:** L'étalement d'une colonne de particules secs sous l'effet de son propre poids simulé par la méthode Contact Dynamics. (a) évolution du profil, (b) distance d'arrêt normalisée en fonction du rapport d'aspect initial  $a$  pour deux valeurs du coefficient de frottement entre particules ; d'après Staron et Hinch (2007) [184].

d'aspects ( $> 3$ ).

L'influence du fluide sur les distances de run-out a été essentiellement étudiée dans des observations géologiques. Les avalanches sous-marines se distinguent par leur capacité à mettre en jeu des quantités considérables de sédiments s'écoulant sur des angles relativement faibles et s'étalant sur des distances pouvant atteindre plusieurs centaines des kilomètres [127]. Les mécanismes de déclenchement sont variés. Ces dernières peuvent être d'origine humaine (exploitation des hydrocarbures, dragage ou remblaiement des fonds marins, ...) ou d'origine naturelle (activités volcanique, séismes, rupture des massifs initialement mal consolidés, ...). Les risques majeurs sont entre autre la génération des tsunamis [190], le sectionnement des câbles téléphoniques ou encore la destruction d'infrastructures au large (pipelines de pétrole ou gaz) ou sur les côtes.

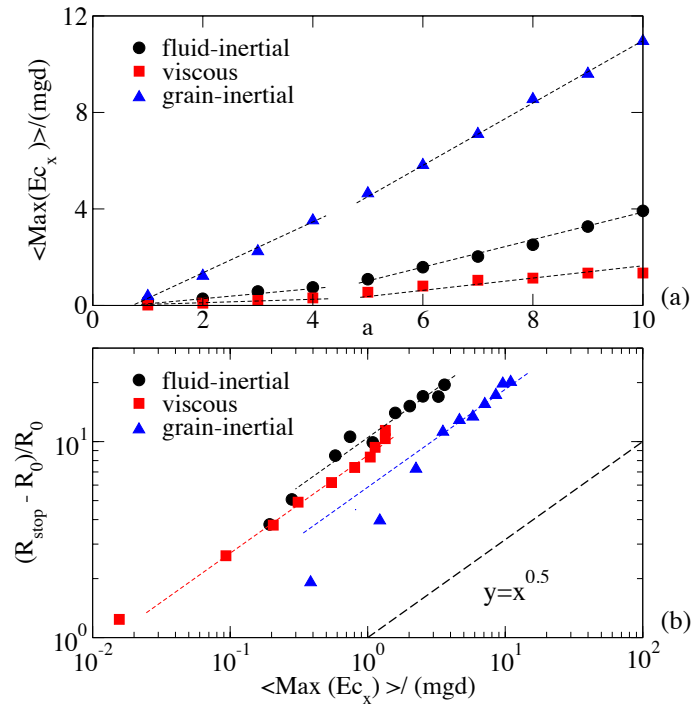
Une étude numérique des longueurs d'arrêt a été récemment réalisée par Topin et al. [199] dans le cadre d'une plateforme numérique couplant la méthode Contact Dynamics avec une approche par volumes finis pour le fluide et "domaine fictif" avec multiplicateurs distribués de



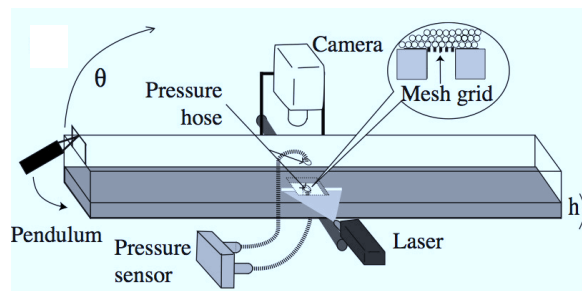
**FIGURE 1.11:** La distance d'arrêt (a) et la durée d'étalement (b) d'une colonne de particules immergée dans un fluide dans trois régimes dominés respectivement par l'inertie des particules (sec), l'inertie du fluide et la viscosité du fluide ; d'après Topin et al. [199].

Lagrange [215] pour leur couplage [214, 198]. Les auteurs ont étudié la distance d'arrêt d'une colonne de rapport d'aspect  $a$  variable et dans les trois régimes d'interaction fluide-particules discutés dans la section 1.2.3. La distance d'arrêt dépend de la compacité initiale. C'est pourquoi la compacité initiale dans toutes les simulations a été fixée à 0,8 (2D). Cette étude montre que la distance d'arrêt est une loi de puissance en fonction de  $a$ , comme dans le cas sec, mais l'effet du fluide est *a priori* non trivial. Par exemple, pour la même valeur de  $a$ , la distance d'arrêt a pratiquement la même valeur dans le cas sec que dans le régime inertiel du fluide, comme on peut le voir sur la figure 1.11, mais les durées d'étalement sont différentes !

Ce comportement est expliqué en considérant séparément l'influence du fluide pendant la phase d'effondrement sur l'énergie dissipée et la distance d'arrêt en fonction de l'énergie disponible à la fin de cette phase (voir figure 1.12). Les deux séries de courbes font apparaître un schéma logique de l'influence du fluide. L'énergie disponible à la fin de la phase d'effondrement pour chaque valeur de  $a$  est plus faible dans le régime visqueux que dans le régime inertiel où la force de traînée est plus faible. Par ailleurs, la distance d'arrêt pour une valeur donnée de l'énergie disponible à la fin de la phase d'effondrement est plus grande dans le régime visqueux que dans le régime inertiel de fluide en raison d'une lubrification plus importante des contacts. Il est aussi remarquable que, pour  $a > 3$ , la distance d'arrêt augmente dans tous les régimes comme la racine carrée de l'énergie, ce qui est compatible avec une force de traînée effective proportionnelle à la vitesse.



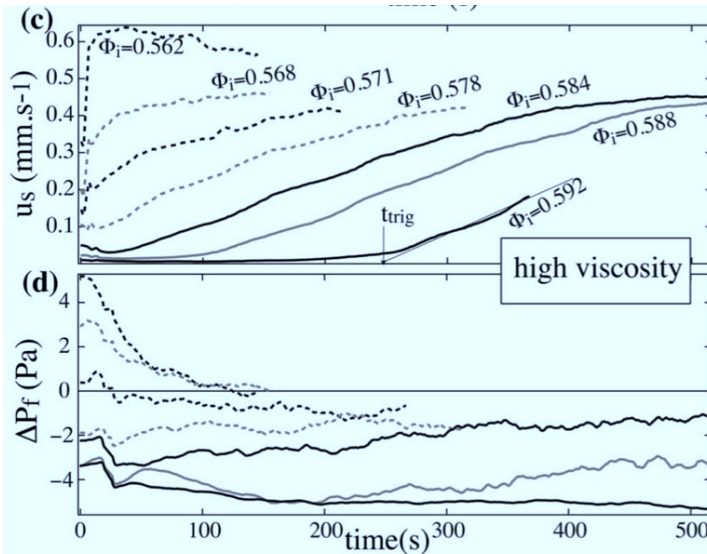
**FIGURE 1.12:** L'énergie cinétique de l'empilement  $\max(E_c)$  normalisée à la fin de la phase d'effondrement en fonction du rapport d'aspect  $a$  (a), et la distance d'arrêt en fonction de l'énergie cinétique de l'empilement  $\max(E_c)$  normalisée à la fin de la phase d'effondrement pour les trois régimes d'écoulement, d'après Topin et al. [199].



**FIGURE 1.13:** Schéma du dispositif expérimental de Pailha et al. pour l'étude du déclenchement des avalanches sous-marines [161].

### 1.2.5. Initiation des avalanches sous-marines

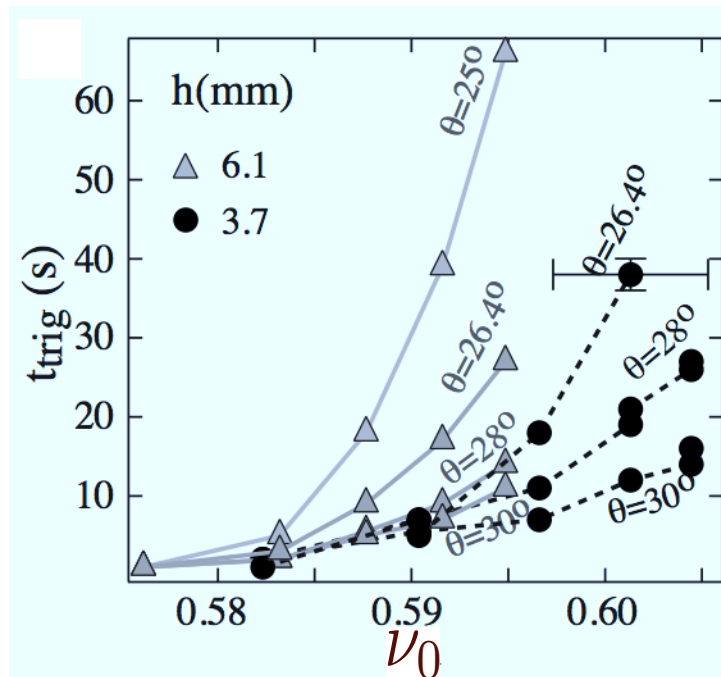
L'initiation des instabilités gravitaires a fait l'objet de nombreuses études en géophysique. Pour ces événements destructeurs, l'eau joue souvent un rôle prépondérant. Elle peut tout d'abord jouer un rôle déstabilisant quand elle coule à travers le réseau poreux formé par le sol. L'écoulement engendre des contraintes supplémentaires qui peuvent déstabiliser le sol. La pénétration de la pluie dans le sol peut aussi déstabiliser une pente en modifiant la structure du



**FIGURE 1.14:** La vitesse moyenne  $u_s$  des particules à la surface de la couche granulaire et la surpression  $\Delta p_f$  du fluide au fond de la couche en fonction du temps pour différentes valeurs de la compacité initiale après l'inclinaison du dispositif expérimental à un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale ; d'après Pailha et al. (2008) [161].

sol par l'érosion interne [23] des particules fines (phénomène de suffusion). Un autre rôle moins trivial mais lourd de conséquences intervient lorsque le sol se déforme. La déformation du sol s'effectue avec un changement de volume, ce qui induit un écoulement du fluide qui génère des contraintes supplémentaires sur le sol. Ce couplage entre déformation du sol et mouvement du fluide permet d'expliquer une grande variété de glissements de terrains [100, 134, 145]. Certains glissements sont très rapides, très mobiles et dévastateurs, tandis que d'autres sont lents et ne se propagent qu'à de faibles distances. La différence vient de l'état initial du sol qui peut être plus ou moins compact, donnant ainsi lieu à une dilatance positive ou négative du sol lors du démarrage. Ce mécanisme a été mis en évidence avec succès sur une expérience de grande taille réalisée à l'USGS [103]. Un sol consolidé et incliné à un angle supérieur à son angle de repos est stabilisé par l'eau et subit un fluage très lent avant de rompre tandis qu'un sol lâche cède subitement dès qu'il est incliné au-dessus de son angle de repos.

Plus récemment, les effets de la compacité initiale ont été étudiés quantitativement en laboratoire par Pailha et al. [161] à l'aide d'un dispositif expérimental représenté sur la figure 1.13 pour différents angles d'inclinaison et différentes viscosités du fluide saturant. L'évolution de la vitesse des particules mesurée à la surface libre révèle deux régimes : 1) régime lâche, caractérisé par la rupture immédiate et rapide de la pente, 2) régime dense, caractérisé par une phase de fluage lent avant la rupture (voir figure 1.14). Les surpressions mesurées au fond de la couche mettent en évidence une surpression positive dans le régime lâche et une surpression négative dans le régime dense. La compacité qui sépare ces deux régimes est  $\simeq 0,59$ . La durée du fluage augmente avec la compacité initiale et diminue avec l'angle d'inclinaison (figure 1.15). La sur-

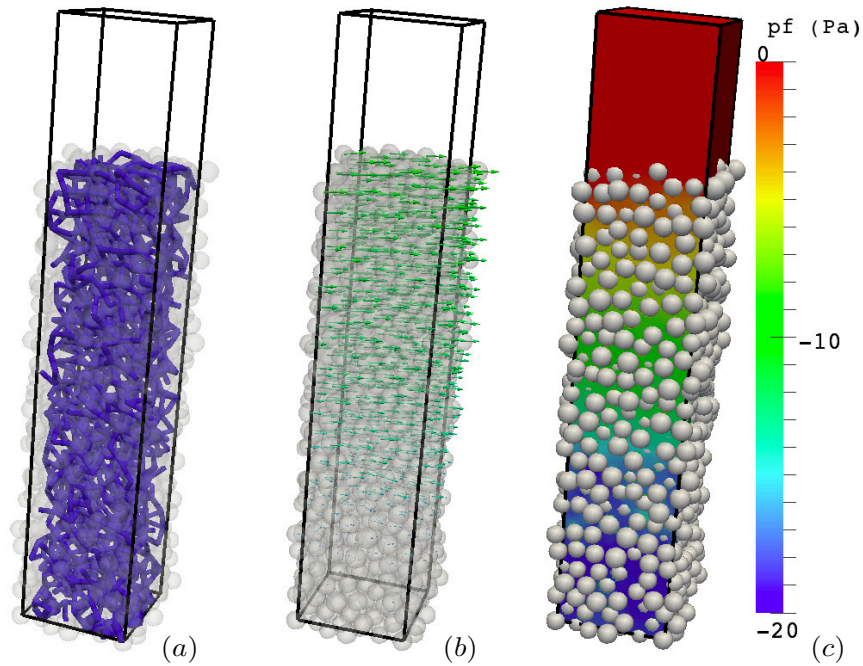


**FIGURE 1.15:** La durée de la phase de fluage avant la rupture de pente en fonction de la compacité initiale d'une couche immergée de particules pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison ; d'après Pailha et al. (2008) [161].

pression négative est une conséquence de la dilatation de la couche qui implique la succion du liquide par les pores et donc exerce une surpression sur les particules. Cette contrainte entraîne une augmentation des forces normales entre particules, d'où l'effet stabilisant du liquide lorsque le milieu est suffisamment dense pour se dilater sous l'effet d'une déformation de cisaillement.

Cet effet de rétroaction négative peut être quantifié en considérant l'équilibre de la couche et la loi de Darcy. Mais le critère de rupture n'est pas évident dans la mesure où la surpression et la dilatance ne s'annulent pas au moment de la rupture de pente. En effet, pendant le fluage la compacité diminue et il apparaît donc le fluage continue probablement jusqu'à ce que la compacité atteigne sa valeur critique  $\phi^*$ .

Cette expérience de Pailha et al. [161] a été modélisée numériquement par Mutabaruka et al. [153] en utilisant un couplage Lattice Boltzmann Method/Discret Element Method, dans une configuration 3D (figure 1.16). Les auteurs ont trouvé un comportement similaire avec un critère de déclenchement lié à l'évolution de l'anisotropie de la texture.



**FIGURE 1.16:** Réseau des chaînes de force (a), du champ des vitesses des particules (b) et des surpressions du fluide (c) pendant la phase de fluage pour un échantillon initialement dense. Source [152]

### 1.3. Rhéologie des suspensions

Le paramètre de résistance dans les suspensions denses étudiées dans une géométrie à volume constant est la viscosité effective  $\eta_{eff}$  en fonction de la compacité  $\phi$  des particules. Pour les écoulements très dilués en particules, la viscosité effective est donnée par la relation d'Einstein [61, 62] :

$$\eta_{eff} = \eta_f \left(1 + \frac{5}{2}\phi\right) \quad (1.50)$$

Dans cette limite ( $\phi < 2\%$ ), les particules sont isolées les unes des autres, seul l'effet des particules sur le champ hydrodynamique intervient.

Brinkman [35] a complété la relation d'Einstein, en considérant l'influence de la présence d'autres particules à proximité et les collisions entre particules sur l'écoulement autour d'une particule :

$$\eta_{eff} = \eta_f (1 - \phi)^{-\frac{5}{2}} \quad (1.51)$$

Le développement de cette relation en série de Taylor fait apparaître des termes en loi de puissance, le terme en  $\phi^2$  traduit l'interaction entre un doublet de particules (formule de Batchelor),  $\phi^3$  entre des triplets de particules, etc.

Pour les suspensions concentrées, la viscosité effective  $\eta_{eff}$  diverge lorsque l'on s'approche

d'une compacité critique  $\phi_c$ . Les rhéomètres habituellement utilisés dans l'étude de ces suspensions sont basés sur le principe du cisaillement à volume contrôlé : on augmente la fraction volumique  $\phi$  en rajoutant les grains dans le mélange cisailé. Cette configuration ne permet pas d'établir exactement la valeur de  $\phi_c$ , les particules étant soit endommagées soit en régime dit de blocage ou de "jamming". La valeur de  $\phi_c$  est souvent supposée égale à la fraction volumique des empilements aléatoires les plus compacts (Random Close Packing).

La loi empirique généralement utilisée dans la littérature est celle établie par Krieger-Dougherty [117] :

$$\eta_{eff} = \eta_f \left(1 - \frac{\phi}{\phi_c}\right)^{-\frac{5}{2}\phi_c} \quad (1.52)$$

La Figure 1.18 montre l'évolution de la viscosité relative  $\eta_r = \eta_{eff}/\eta_f$  en fonction de la compacité réduite  $\phi/\phi_c$  ainsi que les différentes relations vues précédemment.

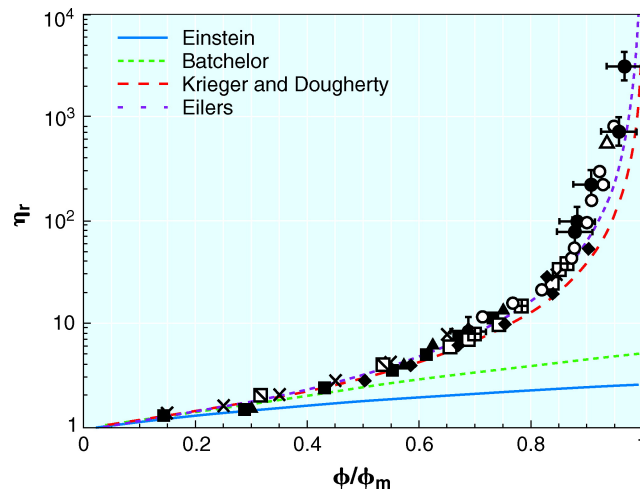


FIGURE 1.17: Viscosité relative  $\eta_r = \eta_{eff}/\eta_f$  en fonction de la compacité réduite  $\phi/\phi_{max}$  [186].

En s'inspirant des études sur les écoulements en milieux granulaires secs, des travaux issus de la thèse de Boyer [30] ont permis de réaliser un cisaillement à pression contrôlée imposé directement sur l'échantillon granulaire immergé dans un fluide (voir Figure 1.18). En comparaison avec le cisaillement à volume fixe, cette configuration présente l'avantage de permettre d'une part de s'approcher aussi près que l'on souhaite de la transition de jamming, et d'autre part d'établir une nouvelle vision des suspensions denses qui regroupe les deux descriptions granulaire et visqueuse. Ces travaux ont permis aussi de montrer clairement que la compacité maximale  $\phi_c$  pour laquelle la viscosité effective  $\eta_{eff}$  diverge correspond à la compacité critique  $\phi_c$  des milieux granulaires cisailés quasi-statiques.

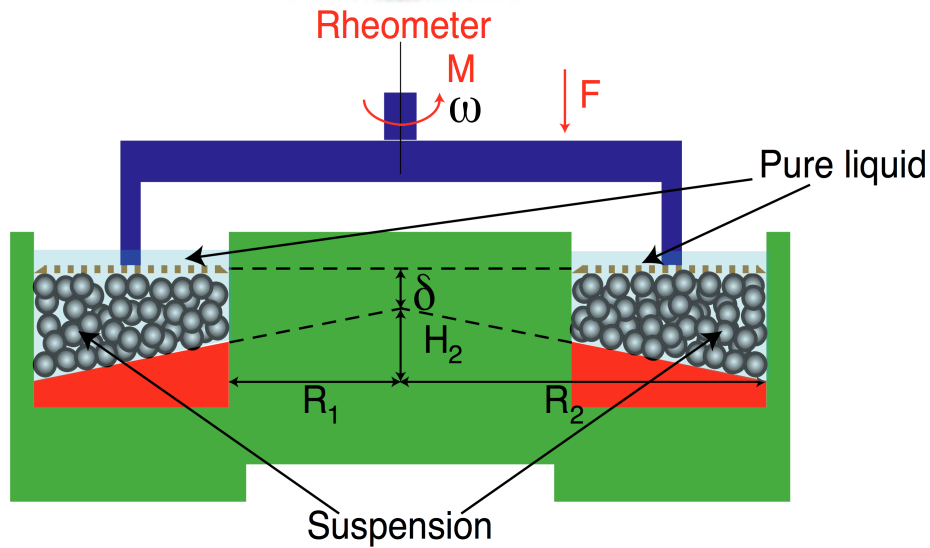


FIGURE 1.18: Schéma du rhéomètre à pression contrôlée (source [30])

Le nombre visqueux sans dimension  $I_v$  (voir section 1.2.3.) permet de caractériser le frottement interne et la compacité des particules du mélange, comme le nombre inertiel  $I$  :

$$I_v = \frac{\eta_f \dot{\gamma}}{\sigma_s} \quad (1.53)$$

Par analogie avec les écoulements secs, on peut décrire  $\phi$  et  $\mu$  à l'aide du nombre visqueux :

$$\tau_p = \mu(I_v) \sigma_p \quad \phi = \phi(I_v) \quad (1.54)$$

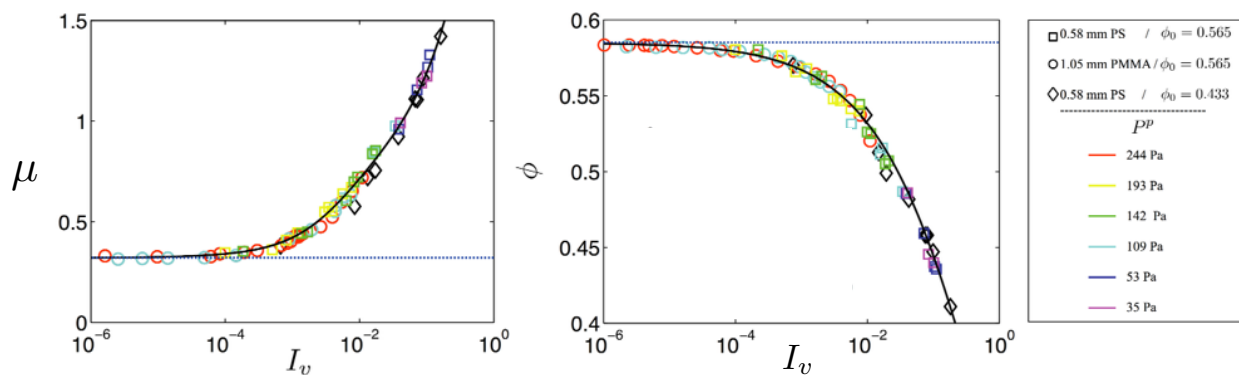


FIGURE 1.19: Frottement interne  $\mu$  et compacité  $\phi$  en fonction du nombre visqueux  $I_v$  (Source [30]).

La Figure 1.19 montre l'évolution de  $\mu$  et  $\phi$  en fonction du nombre visqueux  $I_v$  pour différents diamètres de particules et pour différentes pressions de confinement. On remarque alors

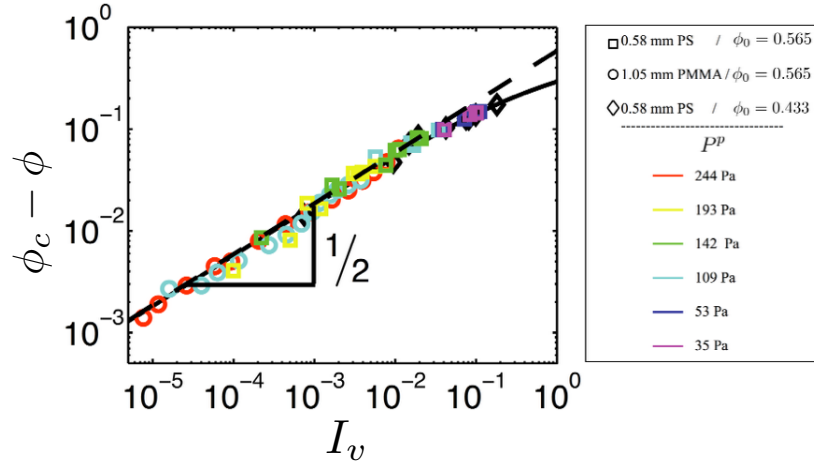


une bonne mise à l'échelle des données expérimentales en fonction de  $I_v$ . Les tendances sont les mêmes que celles vue précédemment pour le cas des milieux granulaires secs :

- La compacité  $\phi$  est une fonction décroissante de  $I_v$ . Pour des faibles valeurs de  $I_v$ , la compacité tend vers une valeur critique  $\phi_c$  qui correspond à la compacité des milieux granulaires cisailés. La Figure 1.20 montre que cette tendance est proportionnelle à  $I_v^{1/2}$ .  $\phi$  décroît lorsque  $I_v$  augmente. L'évolution est bien ajustée par [30] :

$$\phi(I_v) = \frac{\phi_c}{1 + aI_v^{1/2}} \quad (1.55)$$

où  $a \simeq 1$ .



**FIGURE 1.20:**  $(\phi_c - \phi)$  en fonction de  $I_v$ . La pente 1/2 traduit la proportionnalité entre  $\sqrt{I_v}$  et  $(\phi_c - \phi)$  lorsque la compacité  $\phi$  s'approche de  $\phi_c$  (Source [30])

- Le coefficient de friction  $\mu$  est une fonction croissante de  $I_v$ . Pour des valeurs faibles ( $I_v \ll 1$ ), la valeur de  $\mu$  approche une constante qui correspond à une valeur critique  $\mu_c$ , et pour les grandes valeurs de  $I_v$ ,  $\mu$  augmente rapidement. Une fonction permettant un bon ajustement des données est proposée sous la forme [30] :

$$\mu(I_v) = \mu_c + \frac{\mu_{max} - \mu_c}{1 + I_0/I_v} + I_v + \frac{5}{2}\phi_c I_v^{1/2} \quad (1.56)$$

Dans cette équation on distingue deux termes : la contribution des contacts particule-particule, et la contribution des effets fluides sur l'échantillon granulaire.

Dans le formalisme classique à fraction volumique imposée, c'est à dire à volume constant, pour une suspension soumise à un taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  et une pression de confinement  $\sigma_s$ , les deux lois constitutives sont données par les équations suivantes :

$$\tau_n = \eta_s(\phi)\dot{\gamma} \quad (1.57)$$

$$\sigma_s = \eta_n(\phi)\dot{\gamma} \quad (1.58)$$

où  $\eta_n(\phi)$  et  $\eta_t(\phi)$  sont les viscosités effectives normale et de cisaillement. Ces fonctions ne dépendent que de la compacité  $\phi$ . Or, dans le cisaillement à pression imposée, nous avons les équations suivantes :

$$\tau_p = \mu(I_v)\sigma_p \quad \phi = \phi(I_v) \quad I_v = \frac{\eta_f \dot{\gamma}}{\sigma_p} \quad (1.59)$$

En combinant les deux approches (cisaillement à volume imposé et à pression imposée), on peut ainsi déduire les viscosités effectives  $\eta_n$  et  $\eta_s$  :

$$\eta_t(\phi)/\eta_f = \frac{\mu[I_v(\phi)]}{I_v(\phi)} \quad \eta_n(\phi)/\eta_f = \frac{1}{I_v(\phi)} \quad (1.60)$$

et à partir de ces relations, on en déduit les expressions de  $\eta_n$  et  $\eta_t$  en fonction de  $\phi$  :

$$\eta_t(\phi)/\eta_f \simeq 1 + \frac{5}{2}\phi\left(1 - \frac{\phi}{\phi_c}\right)^{-1} + \mu^c(\phi)\left(\frac{\phi}{\phi_c - \phi}\right)^2 \quad (1.61)$$

$$\eta_n(\phi)/\eta_f = \left(\frac{\phi}{\phi_c - \phi}\right)^2 \quad (1.62)$$

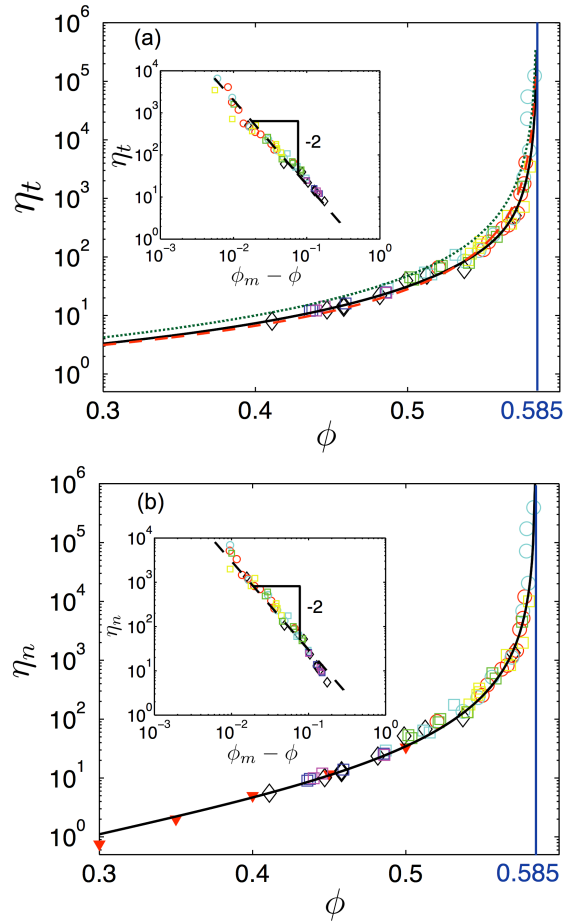
où

$$\mu^c(\phi) = \mu_c + (\mu_{max} - \mu_c)/[1 + I_0\phi^2(\phi_c - \phi)^{-2}] \quad (1.63)$$

La Figure 1.21 représente la viscosité effective de cisaillement  $\eta_t$  et la viscosité effective normale  $\eta_n$  en fonction de la fraction volumique  $\phi$ . Les divergences des deux viscosités sont clairement observées lorsque  $\phi$  s'approche de  $\phi_c = 0.585$  bien que le rapport  $\eta_s/\eta_n = \mu$  est fini. On voit aussi sur la figure que cette divergence est la même, proportionnelle à  $(\phi_c - \phi)^{-2}$ .

## 1.4. Écoulements inertiels en présence d'un fluide visqueux

L'analyse proposée par Boyer et al. [30] a permis de montrer que le nombre visqueux rend bien compte de la rhéologie des écoulements immergés au même titre que le nombre inertiel rend compte des écoulements inertiels secs [30]. Mais les effets inertiels existent aussi dans les écoulements immergés et il est nécessaire d'introduire les deux nombres sans dimension dans l'analyse. Les régimes d'écoulement décrits par Courrech et al. [48] permettent de distinguer ces différents régimes, mais ne permettent pas de décrire la rhéologie dans un seul cadre. Trulsson et al. [200] ont réalisé des simulations des écoulements des particules en utilisant une approche simple qui consiste à appliquer la force de traînée visqueuse directement sur les particules [200]. Nous analyserons ces résultats dans le chapitre 3 lorsque nous présenterons nos résultats. Mais

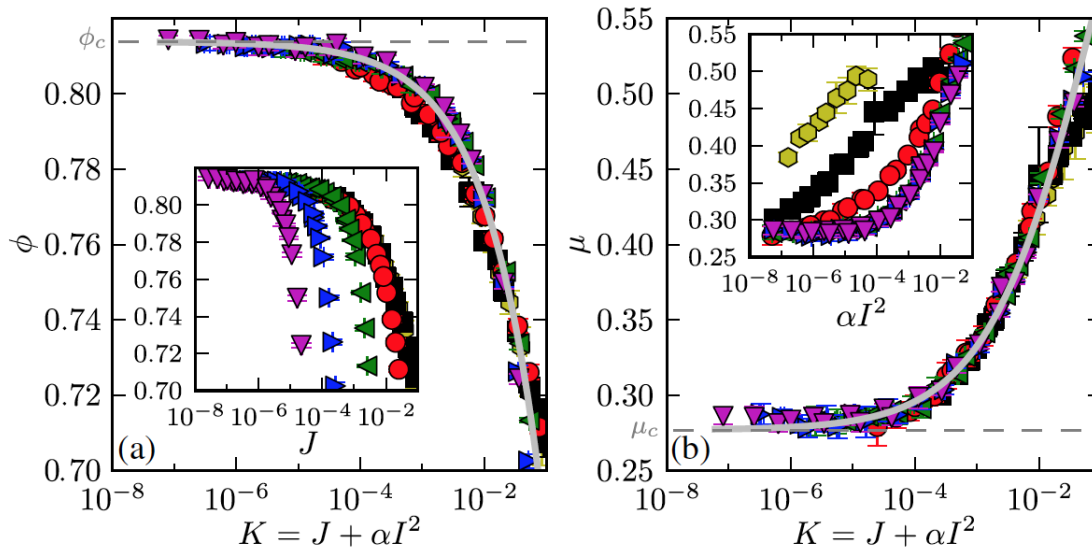


**FIGURE 1.21:** Viscosité effective de cisaillement  $\eta_t$  et normale  $\eta_n$  en fonction de  $\phi$  ainsi que la divergence des deux viscosités lorsque  $\phi$  s'approche de  $\phi_c$  [30].)

rappelons ici qu'un résultat central de ces simulations est de montrer qu'une moyenne pondérée de  $I^2$  et  $J \equiv I_v$  permet de mettre à l'échelle le coefficient de frottement interne et la compacité :

$$K = J + \alpha I^2 \quad (1.64)$$

où  $\alpha$  est un paramètre qui dépend des mécanismes de dissipation. La figure 1.22 montre cette mise à l'échelle. par ailleurs, les courbes sont bien ajustées par les formes utilisées pour les écoulements secs en remplaçant  $I$  par  $\sqrt{K}$ . Ce résultat montre qu'il est possible d'obtenir une unification des écoulements visco-inertiels.



**FIGURE 1.22:** Le coefficient de frottement et la compacité d'un écoulement en fonction du nombre sans dimension  $K = J + \alpha I^2$  avec  $\alpha \simeq 0.63$  [200].

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une description générale du contexte scientifique concernant la modélisation numérique des milieux granulaires immergés. Nous avons en particulier mis l'accent sur des avancées récentes dans ce domaine, ce qui permettra d'analyser nos résultats en les comparant soit avec les expériences pour une validation soit avec d'autres simulations pour une comparaison. Nous avons omis de cette revue bibliographique la description des modèles numériques. Cet aspect sera abordé dans le chapitre 2 avec une présentation détaillée de notre modèle numérique et des cas tests que nous avons réalisés pour sa vérification. De même, les aspects concernant la microstructure granulaire et les définitions des anisotropies seront décrits au chapitre 3 lorsque nous analyserons la texture de nos écoulements simulés. Enfin, la modélisation des ponts solides, utilisés pour la fragmentation sous l'effet des surpressions sera présentée dans le chapitre 4.

# Méthodologie

## Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>48</b>
<b>2.1. Choix d'un modèle physique</b> . . . . .	<b>48</b>
2.1.1. Démarche de modélisation . . . . .	48
2.1.2. Méthodes numériques . . . . .	49
2.1.3. Configuration spatiale et paramètres généraux . . . . .	58
<b>2.2. La méthode Lattice Boltzmann</b> . . . . .	<b>59</b>
2.2.1. Premiers modèles Lattice Gaz Automata . . . . .	60
2.2.2. Discrétisation de l'équation de Boltzmann sur réseau . . . . .	62
2.2.3. Traitement des conditions aux limites . . . . .	69
2.2.4. Comparaison entre les approches SRT et MRT pour différentes condi- tions aux limites . . . . .	75
<b>2.3. Couplage LBM/DEM</b> . . . . .	<b>78</b>
2.3.1. Modélisation de la phase granulaire . . . . .	79
2.3.2. Interaction grain-fluide . . . . .	83
2.3.3. Tests de validation . . . . .	86
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>91</b>

---

## Introduction

Dans ce chapitre méthodologique, on aborde la modélisation numérique des mélanges entre fluides et milieux granulaires. Ce domaine a pris un essor important ces dernières années et il serait illusoire de tenter un panorama complet de toutes les méthodes numériques adaptées à la simulation du fluide et des grains. On se limitera donc à évoquer l'ensemble du domaine et à présenter en détail des éléments algorithmiques importants pour notre étude. Enfin, ce chapitre sera l'occasion de proposer des adaptations et des développements nouveaux pour la mise en place de systèmes physiques réalistes à la base des études paramétriques réalisées pendant cette thèse.

Ce chapitre est structuré en trois sections. La première présente sans détail les principales méthodes numériques disponibles dans la littérature pour la modélisation du fluide et du milieu granulaire. Quelques considérations générales sont précisées sur la mise en oeuvre de systèmes physiques offrant une phénoménologie suffisamment riche pour l'analyse de comportements génériques transposables aux cas réels. Après un rappel historique sur la genèse de la méthode Lattice Boltzmann, choisie dans cette thèse pour la modélisation du fluide, la deuxième section détaille les aspects algorithmiques, le traitement des conditions aux limites et des cas tests permettant de s'assurer de la pertinence du modèle. La dernière section est dédiée au couplage entre le fluide et le milieu granulaire. La modélisation des milieux granulaires par une approche en éléments discrets (DEM) classique est rappelée et les équations permettant le couplage avec le modèle fluide sont présentées en détail. Enfin, plusieurs cas tests sont conduits pour illustrer le comportement du modèle complet dans le cas d'une interaction entre un grain et le domaine fluide.

## 2.1. Choix d'un modèle physique

### 2.1.1. Démarche de modélisation

La modélisation d'un problème mécanique impliquant différents phénomènes physiques et différentes échelles de description est complexe. Elle nécessite plusieurs étapes pour converger vers une solution qu'il est nécessaire de valider par comparaisons avec des résultats analytiques ou expérimentaux. La succession de ces étapes peut nécessiter des ajustements pour converger vers une méthodologie applicable de manière systématique au problème étudié. Par exemple, il faut trouver un compromis entre le degré de complexité du modèle et sa capacité à rendre compte d'une phénoménologie riche, souvent difficile à obtenir directement. Dans cette partie, sans vouloir être exhaustif, on énumère les différentes questions à se poser et auxquelles il est nécessaire répondre pour mettre au point un "bon modèle numérique".

Un des problèmes est de définir clairement les ingrédients du *modèle physique*. Il convient de faire des choix sur leur degré de complexité et de cerner les ordres de grandeurs et les domaines de validité. On pourra préciser, par exemple, la géométrie des particules de base, la

rhéologie du fluide interstitiel, les lois d'interaction entre particules et entre fluide et particules ainsi que l'état initial et les conditions aux limites. Les *paramètres physiques* de la simulation doivent être définis. Ce choix est souvent complexe notamment quand plusieurs phénomènes, impliquant des temps caractéristiques différents, sont pris en compte simultanément.

Le choix de *conditions aux limites* adaptées est particulièrement important. Dans le cas de l'étude de la rhéologie d'un mélange fluide-grain (voir chapitre 3) il faut limiter les effets de bords pour déterminer des grandeurs moyennes pertinentes. On peut noter également que les contraintes peuvent être transmises au système de différentes manières. On pourra par exemple faire des essais en appliquant un cisaillement directement à la phase granulaire ou par l'intermédiaire du cisaillement du fluide. Enfin, dans la simulation de situations pratiques telles que celles présentées au chapitre (4) des conditions aux limites spécifiques devront être mise en place. Dans ce cas, il est classique de les paramétrer de manière à les faire varier dans les études de sensibilité au même titre que les paramètres matériaux.

Il est ensuite nécessaire de maîtriser précisément les étapes de *préparation des échantillons*. Ceci est crucial dans le cas d'essais quasi-statiques qui dépendent fortement de la microstructure initiale. Toutefois, dans les problèmes où l'on s'intéresse à la rhéologie en régime stationnaire, ce qui sera le cas dans la suite de ce manuscrit, la mémoire de l'état initial disparaît au bout du régime transitoire. Il peut être utile dans ce cas, de déterminer le temps nécessaire pour atteindre le domaine stationnaire.

Le choix d'un *algorithme* de calcul et d'une plateforme logicielle appropriée est une étape cruciale qui peut dépendre fortement de la nature du système à simuler. On peut noter que dans notre cas, avec des simulations impliquant à la fois des algorithmes spécifiques au fluide et au milieu granulaire, les choix possibles sont peu nombreux. Les données issues des simulations numériques doivent être analysées pour s'assurer de leur cohérence d'ensemble et de la pertinence de l'information obtenue en rapport avec le problème étudié. Il peut s'avérer nécessaire d'effectuer plusieurs calculs pour obtenir les bons paramètres d'entrée, notamment lorsque les données expérimentales sont insuffisantes pour fixer l'ensemble des paramètres physiques.

Après avoir obtenu un choix convenable de paramètres, il est possible de faire une interprétation physique des résultats numériques en les comparant à des données expérimentales ou issues de modèles théoriques. A ce niveau, si le modèle s'avère suffisamment riche, il doit permettre de retrouver les principaux traits du processus réel. Dans le cas contraire, il sera nécessaire d'enrichir la modélisation en prenant en compte de nouveaux ingrédients tels qu'une forme de particule plus complexe, des conditions aux limites plus adaptées ou une description plus fines des lois d'interactions.

### 2.1.2. Méthodes numériques

La problématique générale de cette thèse nécessite la mise en œuvre de modèles traduisant à la fois le comportement du milieu granulaire et celui d'un fluide environnant. Celle-ci associe deux domaines scientifiques vastes et rarement traités dans un même contexte. Les choix pos-

sibles pour la simulation du milieu granulaire et du fluide sont nombreux et peuvent conduire à un nombre important d'associations (ou de couplages). Dans cette section, on présente un panorama rapide de ces méthodes numériques et on précise les choix retenus.

### 2.1.2.1. Modélisation de la phase granulaire

Il existe plusieurs approches pour traiter le comportement d'un milieu granulaire. On peut les regrouper en deux catégories principales : les approches basées sur une description continue des phénomènes et les approches discrètes qui traitent les particules comme des corps indépendants le plus souvent indéformables.

**Approche continue** Les approches basées sur une description continue du milieu granulaire sont très souvent utilisées notamment en ingénierie (par exemple pour la modélisation des instabilités dans les sols ou la rhéologie des poudres dans les procédés). Le comportement est décrit à partir de lois constitutives et d'équations de bilan mises sous la forme de problèmes aux dérivées partielles. L'avantage majeur de ces approches est leur capacité à intégrer des conditions aux limites complexes et à simuler les problèmes à "grande échelle". Par contre leur limitation majeure est d'être incapable de fournir des informations sur le lien entre la physique des phénomènes à l'échelle des particules et le comportement à l'échelle macroscopique.

Il existe de très nombreuses méthodes permettant de simuler le comportement continu et en faire l'énumération dépasse largement le cadre de cette thèse. On peut citer tout de même la famille des Méthode en Eléments Finis (MEF) qui est très largement utilisée pour étudier des problèmes de mécanique des structures et des solides et qui a fait l'objet de nombreuses adaptations pour prendre en compte le comportement granulaire notamment dans le cadre de modèles poro-elasto-plastiques. Le principe consiste à minimiser l'erreur introduite en remplaçant le problème continu par un problème discrétisé en s'appuyant sur une formulation variationnelle des lois de la mécanique. Ce type de méthodes permet de considérer des conditions aux limites complexes, fortement non-linéaires, dans des configurations géométriques variées [110, 181]. Mais ces approches ont des difficultés à rendre compte des grandes déformations qui nécessitent de mettre en oeuvre des processus de remaillage souvent très coûteux en temps de calcul. Des alternatives plus récentes au succès grandissant telles que Material Point Method (MPM) permettent de pallier cette difficulté [189, 15]. MPM combine une description Lagrangienne de points matériels (représentant le milieu granulaire) associée à un domaine Eulérien maillé sous-jacent au niveau duquel sont calculées les lois de comportement. L'algorithme consiste à itérer sur ces deux étapes, le transferts des informations étant réalisé par interpolation des variables, des points matériels au maillage et du maillage aux points matériels.

**Approche discrète** Contrairement aux méthodes continues, les méthodes discrètes traitent les particules comme des objets solides indépendants. Ces objets sont caractérisés par leur géométrie et peuvent interagir à travers des lois de contact, de frottement et de cohésion. La résolution



du problème mécanique consiste à décrire toutes les trajectoires des particules. Parmi les approches les plus générales et les plus classiques, on peut citer la Méthode des Elements Discrets (DEM) “classique” et la méthode de Dynamique des Contacts (CD). La méthode CD initialement développée dans les années 90 par Moreau et Jean à Montpellier [149, 108, 168] est une méthode particulièrement élégante du point de vue numérique. Elle considère que les particules sont parfaitement rigides, les forces de contact étant décrites par des lois non-régulières impliquant les vitesses relatives  $\dot{\delta}$  [149]. Une conséquence directe est que le système reste très stable, car non soumis à la transmission d’ondes élastiques souvent difficiles à dissiper. Par ailleurs, la dynamique se résume à la description des vitesses discontinues liées au caractère non-dérivable des relations qui décrivent les lois de contact et de frottement. Le détail des déformations dans les contacts n’est donc pas considéré, ce qui permet en général d’utiliser des pas de temps plus grands que dans l’approche DEM.<sup>1</sup>

Malgré les intérêts de cette approche, sa mise en œuvre reste souvent relativement complexe d’un point de vue algorithmique. Dans cette thèse, nous avons choisi d’utiliser la méthode DEM qui reste la méthode en éléments discrets la plus utilisée aujourd’hui et qui a l’avantage d’être très simple à programmer. Cette méthode est une extension des approches lagrangiennes à “N-corps” introduites dans les années 60 en dynamique des fluides [6, 7] et en astrophysique [213]. Elle a été appliquée à de nombreux domaines [49] et a l’avantage d’être très flexible, notamment quand il s’agit d’introduire des interactions complexes entre particules comme des lois de cohésion telles qu’introduites au chapitre 4. Contrairement à la méthode CD les forces entre particules sont traitées par des fonctions régulières de la déflexion au contact. Bien que cette description présente souvent des avantages, dans de nombreux problèmes elle nécessite malheureusement d’introduire un terme dissipatif dont le sens physique est parfois difficile à justifier.

### 2.1.2.2. Modélisation du fluide

Comme dans le cas de la modélisation de la phase granulaire, il existe des approches discrètes dédiées à la simulation des fluides. Par exemple, les méthodes basées sur la dynamique moléculaire, permettent de retrouver le comportement du fluide à partir de l’échelle des atomes et sont incontournables pour comprendre les effets des interactions entre les molécules sur la rhéologie à l’échelle macroscopique.

Leur coût en terme de calcul reste extrêmement important, ce qui les rend difficilement utilisables dans le cadre de notre étude.

Des alternatives telles que la méthode Smooth Particulate Hydrodynamics (SPH) ont été développées pour palier cette difficulté. Elles consistent à décrire le comportement d’un ensemble de molécules fictives de tailles bien supérieures à celle des atomes. Au niveau de chaque molé-

---

1. Ce point est à modérer du fait que l’effort numérique est plus grand dans la méthode CD que dans la méthode DEM. Par contre on peut noter que le fait que le pas de temps de la méthode CD soit plus proche de celui de la méthode Lattice Boltzmann peut être un avantage. Ceci peut permettre de limiter les problèmes de synchronisation des méthodes granulaires et fluide [153].

cule, les variables macroscopiques associées au fluide sont obtenues par l'intégration radiale des informations portées par les molécules voisines. Ce type d'approche, bien que souvent utilisé dans la littérature [132, 163, 210, 193, 147], présente un certain nombre défauts : une précision relativement limitée due à la présence d'un bruit numérique généré par l'intégration sur un nombre fini (et souvent faible) de voisins, la difficulté à prendre en compte certaines conditions aux limites et à atteindre des nombres de Reynolds importants.

Il existe deux grands cadres théoriques pour la modélisation continue de la dynamique des fluides : les modèles basés sur les équations de Navier-Stokes et ceux basés sur l'équation de Boltzmann.

**Equations de Navier-Stokes** Les approches les plus classiques reposent sur les équations de Navier-Stokes. Les grandeurs physiques macroscopiques comme la masse volumique  $\rho$ , la vitesse  $\mathbf{V}$  et la pression  $P$  varient de façon continue en temps et en espace. Dans le cas d'un fluide incompressible, cette équation se met sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho} = \mathbf{F}_b \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où

- $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  est le champ des vitesses du fluide,
- $\rho$  est la densité du fluide,
- $P(\mathbf{r}, t)$  est le champ des pressions,
- $\mathbf{F}_b$  est une force volumique,
- $\nu$  est la viscosité cinématique.

Les équations de Navier-Stokes peuvent être résolues de nombreuses manières. Bien qu'il y ait quelques rares situations où il existe une solution analytique ou semi-analytique, il est souvent nécessaire de discrétiser l'espace en utilisant un maillage structurés ou non<sup>2</sup>. Dans les maillages non-structurés, l'espace est subdivisé en cellules élémentaires (en 2D triangles, quadrangles...) qui peuvent être de formes géométriques variées avec une distribution arbitraire des points de maillage. Des algorithmes de génération de maillage ont été largement optimisés ces dernières années et permettent d'obtenir des maillages adaptés aux formes complexes de façon automatisée mais restent très couteux en temps de calcul [140]. Les maillages structurés sont en général plus optimaux en termes de stabilité, de coût de calcul et de consommation en mémoire. Ils ont néanmoins l'inconvénient de ne pas permettre une description fine des interfaces.

Si les méthodes de type Eléments Finis sont principalement utilisées pour la description continue des solides, dans le cas des fluides, les méthodes des Différences Finies ou Volumes

2. On peut noter qu'il existe aussi des approches hybrides [40].

Finis sont également très populaires. Toutefois la méthode des Différences Finis qui consiste à discrétiser le système en temps et en espace au niveau des points de maillage à partir d'un développement de Taylor, peut s'avérer très instable dans le cas de problèmes impliquant des discontinuités au niveau desquelles apparaissent de forts gradients.

La méthode des Volumes Finis permet de pallier en parti ce problème. Elle est basée sur une approximation intégrale ou une formulation forte des Equations aux Dérivées Partielles. Dans ce cas, on considère une partition de l'espace en volumes finis élémentaires au niveau desquels les valeurs moyennes des variables sont calculées ainsi que le flux à travers chaque face des éléments. L'intérêt de cette approche est que la masse, la quantité de mouvement et l'énergie sont conservés par les équations, permettant d'aborder des systèmes à géométrie complexe avec des discontinuités [207, 8].

**Equation de Boltzmann** L'équation de Boltzmann permet une description du fluide à partir d'une échelle mésoscopique au niveau de laquelle on définit la densité de probabilité<sup>3</sup>  $f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, t)$  de trouver une particule de fluide de masse  $m$  à une position  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$  avec une vitesse  $\mathbf{v}$ . Le comportement du fluide est alors régi par :

$$\left( \frac{\delta}{\delta t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\delta}{\delta \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m} \cdot \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}} \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \Omega_{coll} \quad (2.2)$$

où le premier membre décrit l'advection ou le mouvement libre des particules fluide alors que le second membre décrit les variations de  $f$  dues aux collisions entre particules.

Dans cette équation, le terme de droite appelé "opérateur de collision" et permet de décrire les interactions entre les particules de fluides<sup>4</sup>. Expliciter ce terme de collision  $\Omega_{coll}$  peut être très difficile car il doit prendre en compte toutes les possibilités d'interactions [187] (binaires, ternaires. . .). Toutefois du fait de la dissipation qu'elles engendrent, les collisions ont pour effet de faire tendre le système vers l'équilibre, on peut faire l'approximation :

$$\Omega_{BGK} = -\frac{1}{\tau}(f - f^0) \quad (2.3)$$

où  $\tau$  est un temps de relaxation et  $f^0$  est la fonction d'équilibre de Maxwell qui décrit la distribution des particules en l'absence de fluctuations :

$$f^0 = A \exp \left( -\frac{1}{kT} (1/2m \|\mathbf{v}\|^2 + \varphi(\mathbf{r})) \right) \quad (2.4)$$

avec  $A$  une constante de normalisation,  $T$  la température,  $k$  la constante de Boltzmann et  $\varphi(\mathbf{r})$  l'énergie potentielle dont dérive la force.

3. Ces densités sont généralement appelées fonction de distributions ou fonctions de répartition

4. On peut noter qu'en l'absence de ce terme, les particules sont tout simplement transportées et soumises à l'action de la force externe  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ .

Cette approximation a été introduite par Bhatnagar, Gross et Krook [19] et est connue sous le nom d'opérateur de collision BGK<sup>5</sup>. Il est ensuite possible d'obtenir les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie interne :

$$\int_{\Gamma} \Omega d^3v = 0 \quad (2.5)$$

$$\int_{\Gamma} \Omega \mathbf{v} d^3v = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \Omega \|\mathbf{v}\|^2 d^3v = 0 \quad (2.7)$$

où  $\Gamma$  est l'espace mathématique des vitesses des particules. Ces trois intégrales peuvent être condensées sous la forme :

$$\int_{\Gamma} \Omega \psi_i d^3v = 0 \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (2.8)$$

où les quantités  $\psi_0 = 1$ ,  $\psi_1 = v_x$ ,  $\psi_2 = v_y$ ,  $\psi_3 = v_z$ ,  $\psi_4 = \|\mathbf{v}\|^2$  sont les invariants de l'opérateur de collision. Les champs de densité  $\rho$  et de vitesse  $\mathbf{u}$  sont calculés par intégration :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int_{\Gamma} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v, \quad (2.9)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Gamma} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d^3v. \quad (2.10)$$

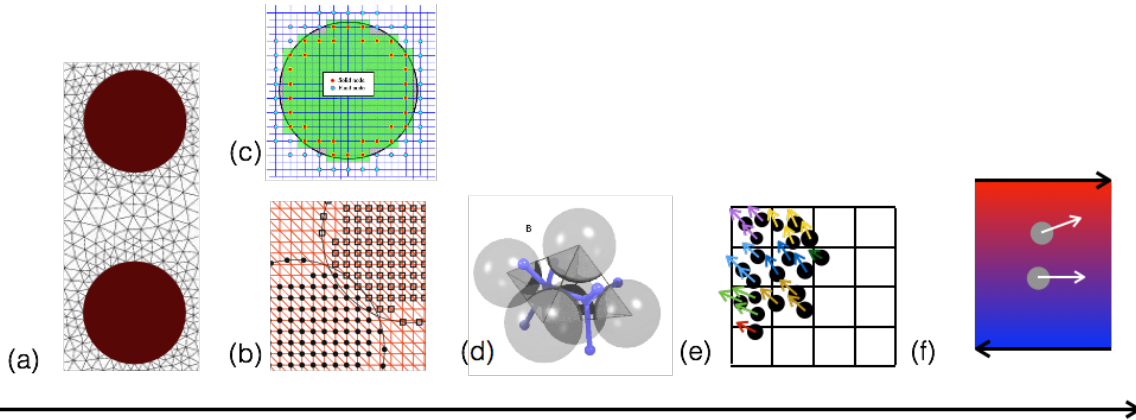
On utilisera ce formalisme associé à un modèle de collision plus riche appelé Multi-Relaxation Time (MRT) dans lequel on considère simultanément plusieurs temps de relaxation de manière à décrire plus finement l'opérateur de collision. C'est cette dernière approche, qui présente l'avantage d'être très stable numériquement, qui a été utilisée dans cette thèse. On peut noter que la méthode MRT a aussi l'avantage majeur de pouvoir être facilement étendue au cas de fluides fortement turbulents, à une prise en compte plus rigoureuse de la compressibilité et permet de prendre en compte également la température. Elle sera présentée en détail, ainsi que sa discrétisation sur réseau, dans la suite.

Cette description mésoscopique du fluide est beaucoup plus économique en temps de calcul que les méthodes atomistiques mais est aussi plus riche que la discrétisation directe des équations de Navier-Stokes. Enfin, sans entrer dans les détails techniques, la méthode LB présente un certain nombre de propriétés qui facilitent son utilisation :

- Dans les équations de Navier-Stokes, le terme de transport  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  est à la fois non-local et non-linéaire, ce qui nécessite des temps de calcul long pour assurer la stabilité dans le cas des écoulements complexes. Au contraire, avec la méthode LB, l'équation de streaming est obtenue sans approximation et se calcule directement puisqu'elle est déterminée le long des lignes de courant.

---

5. Du fait de la simplicité de cette formulation, l'opérateur BGK a très largement contribué au succès des approches basées sur la résolution de l'équation de Boltzmann.



**FIGURE 2.1:** Différents modèles de couplages fluide-grain en fonction de la précision de discrétisation du domaine fluide : (a) DNS avec maillage adaptatif et remaillage [140] (b) DNS avec domaines fictifs [216] (c) Lattice Boltzmann [67] (d) Réseau de pores [42] (e) Méthode Darcy Local [144] (f) Dynamique Stokesienne [26, 31, 97].

- Comme on pourra le voir par la suite, les conditions aux limites s'expriment en terme de relations locales élémentaires.
- La pression est calculée localement comme combinaison des termes d'équilibre de la densité de probabilité. De même, le tenseur de contrainte s'obtient à partir des termes d'équilibre. Dans les deux cas, seul le pas de temps en cours est utilisé. Une conséquence est que la pression est obtenue à partir du champ d'écoulement sans avoir à résoudre un problème de Poisson qui est en général coûteux en temps de calcul.
- Le formalisme de Boltzmann offre un cadre conceptuel très flexible pour l'ajout de phénomènes complexes tels que les changements de phase ou la rhéologie de fluides non-newtoniens [86].

### 2.1.2.3. Couplages fluide-grains

Il existe plusieurs méthodes pour le couplage d'un fluide et d'une collection de particules. Ces méthodes décrivent avec différents degrés de détail les phases fluide et granulaire. Dans cette partie, on se limite aux méthodes qui considèrent les particules comme des grains individuels. On peut classer les méthodes en fonction de la précision apportée à la discrétisation du domaine fluide comme on peut voir sur la figure 2.1 du plus grossier vers le plus raffiné :

**Dynamique Stokesienne** Ce type d'approche, qui a connu de nombreux développements [26, 31, 97] consiste à prendre en compte les interactions hydrodynamiques sous la forme d'une loi dépendant des vitesses relatives. De cette façon, on peut modéliser les effets du fluide au niveau des contacts entre les particules et ne considérer que les interactions de lubrifications normales et tangentielles. Des conditions aux limites de type champ moyen peuvent aussi être prise en

compte en considérant une force de trainée appliquée au centre des particules (figures 2.1f). Si l'on ne considère que des interactions à courte portée et entre paires de particules, ce type de simulation reste peu consommateur en temps de calcul mais reste limité dans la mesure où le comportement du fluide dans les pores n'est pas décrit.

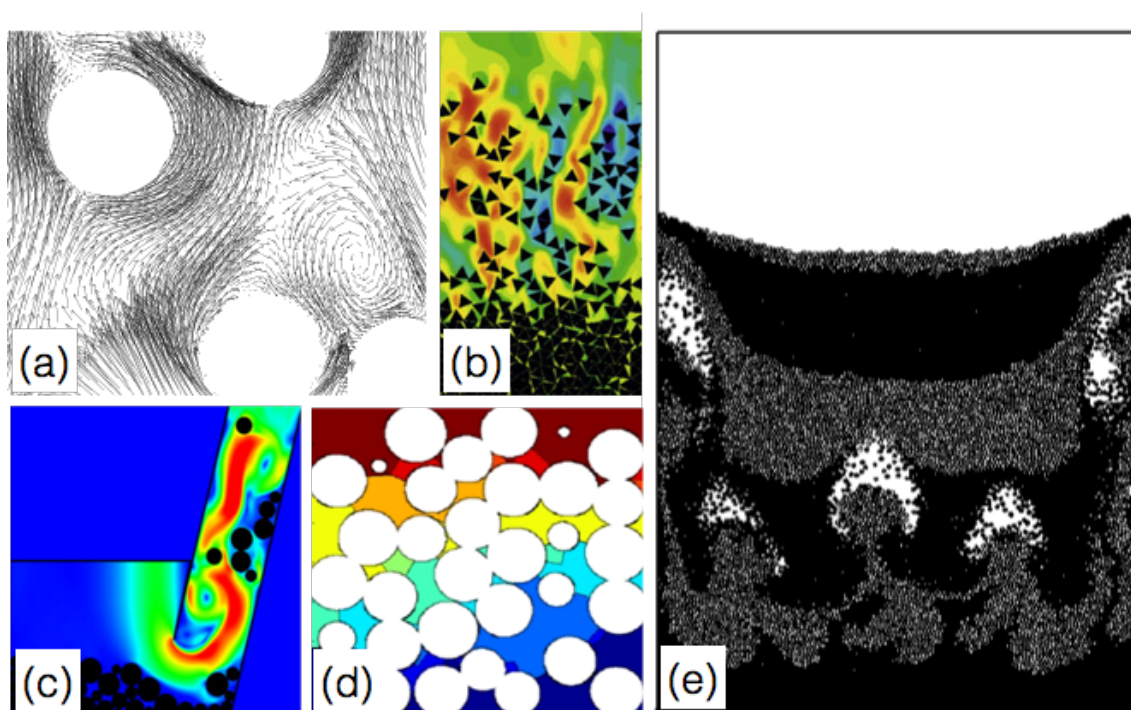
**Méthode mésoscopique** Cette méthode parfois appelée CFD-DEM utilise une description eulérienne du fluide définie à une échelle mésoscopique [201, 144]. Dans ce cas, la porosité locale est calculée sur des domaines incluant un nombre de particules suffisant (figures 2.1e et 2.2e). A partir de la loi de Darcy, il est possible de déterminer la force de trainée à appliquer sur les particules en fonction du débit du fluide. Bien que relativement efficace en terme de temps de calcul, le problème majeur de cette modélisation est que la viscosité du fluide n'intervient qu'à travers la loi de Darcy et que cette méthode ne s'applique que difficilement aux milieux hétérogènes en compacité.

**Méthode micro-pores** Les approches "micro-pores" considèrent l'espace poral entre les grains comme un réseau de canaux connectés. Plusieurs modèles de ce type ont permis de préciser la perte de charge ou la perméabilité en fonction de la microstructure du réseau de pores [36, 195] (modèles de Saffman [176], de Carman-Kozeny [202]. . .). Ce type de modèle est cependant resté longtemps dédié à des assemblages granulaire fixes souvent ordonnés. Le couplage entre Elements Discrets et un modèle de Darcy pour le réseau de pores a été abordé en configuration bidimensionnelle par différents auteurs [81, 24]. Plus récemment, Catalano et al. [60, 39, 38] ont proposé un modèle basé sur un couplage hydromécanique entre la méthode DEM et un modèle d'écoulement visqueux à l'échelle des pores avec une formulation de type volumes finis (figures 2.1d et 2.2d).

**Méthode LB-DEM** La Méthode Lattice Boltzmann associée à la DEM modélise le fluide à une échelle subparticulaire [27, 223, 67, 95, 98, 136]. Cette approche est encore peu utilisée en dehors des travaux théoriques, mais trouve un intérêt particulier aujourd'hui du fait de l'augmentation des moyens de calcul. Comme elle consiste à simuler le comportement complet du fluide et de ses interactions avec les particules, elle a un intérêt majeur pour les analyses physiques fines à l'échelle locale. Un de ses avantages est d'être relativement simple à programmer, notamment quand il s'agit de paralléliser le code, et reste efficace en terme de consommation en mémoire et en temps de calcul. C'est cette approche qui a été choisie dans cette thèse et qui sera présentée en détail dans ce chapitre.

**Méthodes DNS avec Domaines Fictifs ou avec remaillage** La méthode Direct Numerical Simulation (DNS) consiste à résoudre directement les équations de Navier-Stokes dans le domaine fluide. Deux stratégies de prise en compte des interfaces grains-fluides sont généralement utilisées :





**FIGURE 2.2:** Exemples de simulations à partir de différents modèles de couplages fluide-grains : (a) DNS Remaillage [140] (b) DNS Domaines Fictifs [216] (c) LBM [67] (d) Réseau de pores [42] (e) Méthode mésoscopique [144].

- Le maillage adaptatif. Cette technique consiste à remailler le domaine fluide de façon non structurée pour s'adapter à la géométrie (figure 2.2(a)) et au mouvement des particules (le maillage suit les particules de manière lagrangienne) [140, 141, 126, 93, 94]. Cette méthode est généralement utilisée pour modéliser des suspensions lâches, limitant les contacts et pour lesquelles le mouvement des particules ne génère pas de trop grandes déformations du maillage adaptatif. En effet, pour les suspensions denses les interstices entre les grains sont très petites et imposent un maillage très fin au niveau des contacts entraînant des temps de calcul prohibitifs. Par ailleurs, on notera que ce problème est d'autant plus gênant que les écoulements sont rapides.
- Les domaines fictifs : Cette méthode a été développée pour pallier le coût du temps de calcul de remaillage. Elle consiste à utiliser un maillage structuré fixe couvrant tout le domaine fluide et se superposant à l'espace occupé par les particules. Dans les calculs, les vitesses des particules sont affectées aux nœuds du maillage qui recouvre celles-ci, généralement appelées nœuds solides. Le couplage entre les particules et le fluide consiste à calculer les échanges des quantités de mouvement à l'interface entre les nœuds fluide et solide<sup>6</sup> [216, 164, 225, 224, 78, 72].

6. On verra par la suite que le couplage LBM/DEM est traité de manière similaire et utilise un maillage fixe (bien que dans ce cas la résolution des équations de Navier-Stokes se fasse par l'intermédiaire du formalisme de Boltzmann).

Dans cette thèse, on souhaite mettre en place des simulations aussi réalistes que possibles afin de pouvoir comparer nos résultats avec des expériences déjà réalisées sur les suspensions denses de particules et avec des méthodes de Dynamique Stokésienne utilisées par certains auteurs pour simuler les écoulements des mélanges [200]. Pour cette raison, on a choisi de modéliser le fluide à une échelle subparticulaire.

### 2.1.3. Configuration spatiale et paramètres généraux

Dans cette section, on précise quelques éléments sur le choix de la configuration géométrique et sur les paramètres et précaution communs à l'ensemble des simulations présentées dans ce mémoire.

#### 2.1.3.1. Forme et distribution granulométrique

Les approches en éléments discrets permettent de gérer différentes formes de particules. On distingue deux façons principales de contrôler la forme : en créant des clusters de particules "collées" [139, 177] ou en discrétisant le contour d'une particule [11, 167]. Dans notre cas, bien que les développements présentés par la suite restent valables en présence de formes complexes, le choix a été fait de se limiter à des disques en 2D afin de simuler un grand nombre de particules possible.

Dans ces conditions, la donnée du diamètre des particules est suffisante pour caractériser leur géométrie. Comme le fluide est discrétisé sur une grille régulière à pas fixe et qu'il est nécessaire d'avoir un nombre suffisant de mailles dans le diamètre des particules, le nombre de mailles dépendra de la taille de la plus petite particule. On pourrait utiliser des systèmes monodisperses pour limiter les temps de calcul. Malheureusement en 2D ces systèmes présentent l'inconvénient majeur de développer spontanément un ordre à longue portée. Une légère polydispersité sera donc nécessaire pour créer un désordre métrique suffisant et limiter les effets d'organisation locale en zones cristallisées.

Dans nos études, nous utilisons une densité de probabilité des rayons  $P(R)$  définie sur un intervalle  $[R_{min}, R_{max}]$  suivant une distribution uniforme par fraction volumique, c'est à dire de telle sorte que  $\pi R^2 P(R) = constante$  en 2D. Cette densité de probabilité est donnée par  $P(R) = 2 \frac{R_{min} R_{max}}{R_{max} - R_{min}} \frac{1}{R^2}$ . La distribution cumulée des volumes  $f(R)$  ou courbe granulométrie est donc une droite d'équation  $f(R) = 2\pi R_{min} R_{max} \frac{R - R_{min}}{R_{max} - R_{min}}$ . Cette distribution favorise une bonne connectivité des particules [32, 191, 211].

#### 2.1.3.2. Modélisation des contacts et simulations granulaires

La modélisation du contact et du frottement est essentielle aux simulations granulaires. Comme décrit dans le chapitre 1, différents modèles de contact existent [116, 57, 111]. Les



modèles les plus simples ne considèrent que l'élasticité des particules et lient la déflexion au contact à la force appliquée. Par exemple, il est classique d'utiliser un ressort dont la force de rappel dépend de la déflexion au contact. C'est ce modèle qui sera utilisés par la suite et qui consiste essentiellement à assurer la non-interpénétration des particules. Pour cela la rigidité des particules sera choisie suffisamment grande et la pression de confinement faible pour que les particules puissent être considérées comme indéformables.

### 2.1.3.3. Configuration géométrique

Le choix d'une modélisation 1D, 2D ou 3D a des répercussions profondes à la fois sur la façon dont on modélise les phénomènes physiques mais aussi sur les algorithmes et le temps de calcul CPU. Il est classique d'utiliser dans les problèmes d'écoulement de rivières des modèles 1D basés sur les équations de Saint-Venant. De même, dans le cas de l'évaluation des risques d'inondations des configurations 2D horizontales sont couramment utilisées [79]. Dans les deux cas, en tout point du domaine les grandeurs physiques considérées sont des moyennes sur la hauteur du fluide. Ce type de modélisation, bien que particulièrement efficace en terme de temps de calcul ne permet pas de prendre en compte les couplages avec un milieu granulaire puisque seule la hauteur du fluide est considérée dans le modèle.

Les configurations 3D sont a priori plus réalistes mais particulièrement consommatrices en temps de calcul. A titre d'exemple, avec des grains maillés par dix nœuds dans le diamètre et un échantillon cubique contenant environ 10 grains dans la longueur, il faut déjà un million de nœuds dans le maillage ! Les simulations réalisés par Mutabaruka et al. [153] ont duré plusieurs mois et ont généré environ 1 To de données à traiter par simulation.

Malgré leur caractère simplifié, les simulations bidimensionnelles permettent de rendre compte de comportements granulaires réalistes [184, 212, 177, 41]. Par exemple, bien que les états de compacité en 2D tels que l'état dense de Random Close Packing ou l'état critique (voir section 1.1.4. chapitre 1) ne soient pas les mêmes qu'en 3D, le comportement des milieux granulaires 2D est qualitativement très proche de celui en 3D. La prise en compte d'un fluide interstitiel est possible mais, pour des raisons topologiques, l'espace poral d'un échantillon granulaire dense 2D est occlus. Il est donc nécessaire de laisser le fluide passer au niveau des contacts. Le choix de l'épaisseur perméable au niveau du contact a des conséquences sur la perméabilité du milieu et peut être difficile à fixer.

## 2.2. La méthode Lattice Boltzmann

La Méthode Lattice Boltzmann (LBM) est une méthode numérique pour la simulation des écoulements fluides, introduite en 1988 [143]. Elle est le fruit du développement de deux théories indépendantes : la théorie cinétique des gaz et les automates cellulaires qui a été mise en

œuvre par une discrétisation spatio-temporelle sur réseau originale<sup>7</sup> dans le cadre de la simulation des gaz. Dans cette partie, après avoir brièvement rappelé l’historique de la genèse des méthodes sur réseau, on explicitera l’algorithme Lattice Boltzmann choisi, basé sur une approche à plusieurs temps de relaxation ou Multiple Relaxation Time (MRT). Enfin, la section se terminera par quelques éléments de comparaison avec l’approche classique à un seul temps de relaxation ou Single Relaxation Time (SRT).

### 2.2.1. Premiers modèles Lattice Gaz Automata

Le but du modèle Lattice Gaz Automata (LGA) est de simuler le comportement d’un gaz composé de molécules indépendantes astreintes à se déplacer sur un réseau discret. La théorie cinétique des gaz permet de remonter à l’évolution globale des grandeurs macroscopiques (densité, vitesse, pression). L’évolution du système est en général modélisé en deux étapes : la première dite de propagation ou **streaming** consiste à déplacer les particules d’un nœud du réseau à un autre suivant des directions de vitesses discrètes. La seconde étape dite de **collision** consiste à appliquer des règles d’interactions simples en utilisant des opérations booléennes.

**Modèle HPP** La première tentative pour simuler le comportement d’un fluide en utilisant un modèle de gaz sur réseau à été proposée en 1973 par Hardy, Pomeau et Pazzis (modèle HPP) [83]. Sur la Figure 2.3, le réseau HPP est carré avec 4 directions de vitesses discrètes dans l’espace : Est  $e = (1, 0)$ , Nord  $n = (0, 1)$ , Ouest  $w = (-1, 0)$  et Sud  $s = (0, -1)$ . Pour respecter la conservation du nombre de particules et de leur quantité de mouvement, les seules collisions possibles (Figure 2.4) sont :  $(1, 0) + (-1, 0) \Leftrightarrow (0, 1) + (0, -1)$ .

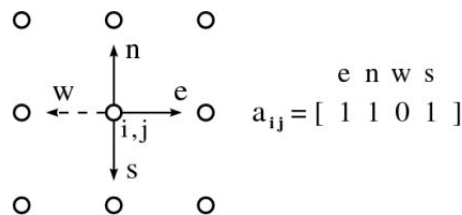


FIGURE 2.3: Modèle HPP,  $a_{ij}$  est l’état du nœud à la position  $(i, j)$  [208].

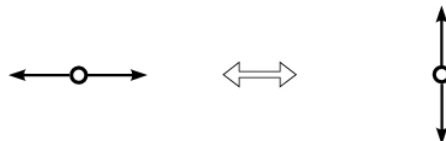


FIGURE 2.4: Collisions possibles dans le modèle HPP [209].

Il est intéressant de constater que l’automate HPP, bien que très simple, se comporte presque comme un fluide usuel [209]. Il présente néanmoins quelques problèmes pathologiques :

7. ou méthodes “Lattices” en anglais

- La quantité de mouvement est conservée ligne par ligne ce qui implique qu’il n’y a pas de dissipation due à un cisaillement dans la direction perpendiculaire à l’écoulement.
- Les équations de transport sont anisotropes.
- Le modèle ne permet pas de retrouver les équations de Navier-Stokes.

**Modèle FHP** Un modèle alternatif a été proposé par Frish, Hasslacher et Pomeau (modèle FHP) en 1986 [71]. Le réseau utilisé dans ce cas (Figure 2.5) est triangulaire avec 6 directions de vitesses discrètes. Cette configuration donne au réseau une meilleure symétrie par rapport au cas HPP. Ce modèle 1) respecte la conservation du nombre de particules, 2) la conservation de la quantité de mouvement 3) autorise plusieurs directions post-collision (Figure 2.6). Avec ces conditions, il est possible de montrer que l’on retrouve les équations de la mécanique des fluides [71]. Le principal inconvénient de ce modèle provient du bruit statistique qu’il génère du fait de l’utilisation de variables booléennes. On verra par la suite que le modèle LBM pallie cet inconvénient en gardant les directions discrètes mais avec des variables réelles.

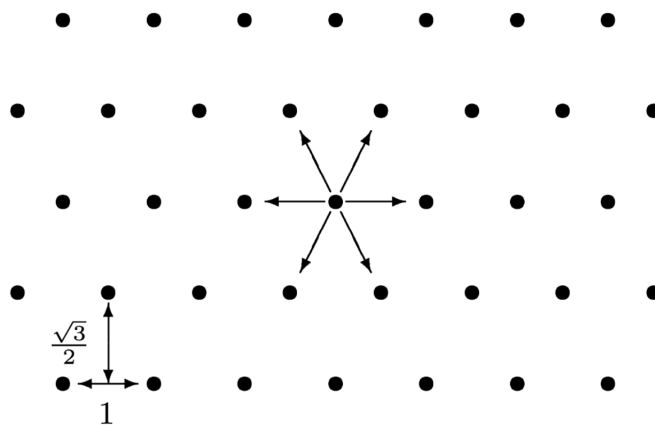


FIGURE 2.5: *Modèle FHP* . Source [217].

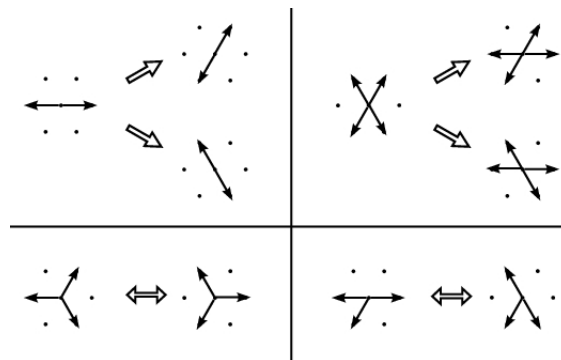


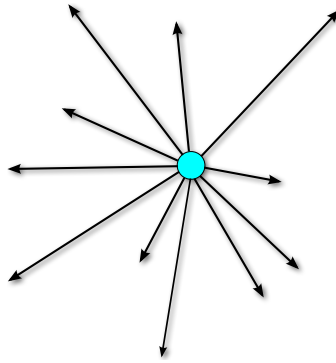
FIGURE 2.6: *Collisions possibles dans le modèle FHP* [209].

## 2.2.2. Discrétisation de l'équation de Boltzmann sur réseau

Dans cette partie on présente la discrétisation sur réseau de l'équation de Boltzmann en détaillant son expression pour une topologie discrete bidimensionnelle ainsi que le calcul des opérateurs de collision pour des approches à un ou plusieurs temps de relaxation.

### 2.2.2.1. Principe général

Considérons un domaine fluide en 2D. Dans une description continue (Figure 2.7) une particule fluide située en  $r$  peut prendre une direction de vitesse  $v$  quelconque. L'équation de Boltzmann décrit l'évolution des fonctions de distribution  $f$  en fonction d'une vitesse  $c$  pouvant prendre des valeurs quelconques dans  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^3$  en 3D). Dans la méthode LBM, comme dans les modèles Lattice Gaz Automata, les vitesses des particules fluides sont limitées à un ensemble fini de directions [86, 223, 166]. Ainsi, chaque particule ne peut se déplacer que selon un nombre fini de directions fixées et ne peut se retrouver à chaque pas de temps qu'à une position définie par un nœud <sup>8</sup>.



**FIGURE 2.7:** Représentation des directions de vitesses que peut prendre une particule dans un modèle continue.

Différents schémas 1D, 2D et 3D ont été proposés dans la littérature [187]. Il est classique d'utiliser une numérotation du type DnQm où n est la dimension de l'espace (1, 2 ou 3) et m est le nombre de vitesses discrètes selon les directions considérées permettant de passer d'un nœud à l'autre ou de rester sur place (vitesse nulle notée avec l'indice 0). La figure 2.8 montre quelques exemples de schémas classiques en 1D et en 3D et la figure 2.9 présente le schéma D2Q9 utilisé dans cette thèse.

8. Les fondements théoriques de ce passage des vitesses continues aux vitesses discrètes ont été étudiés en détail par He et Luo [85].

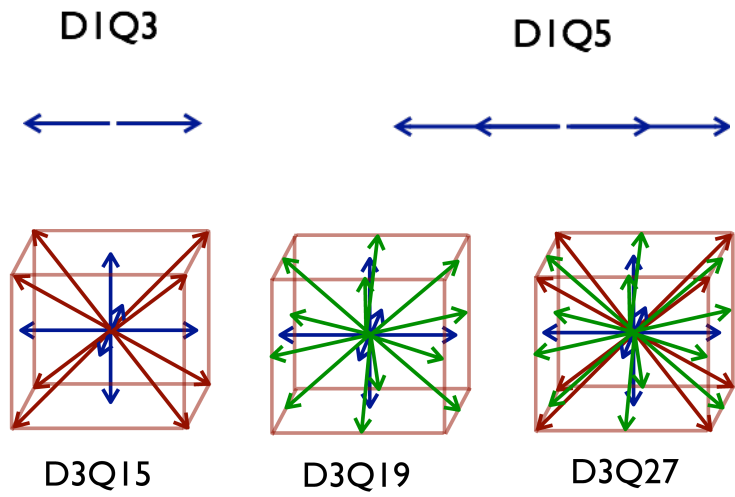


FIGURE 2.8: Exemples de schémas numériques classiques 1D et 3D.

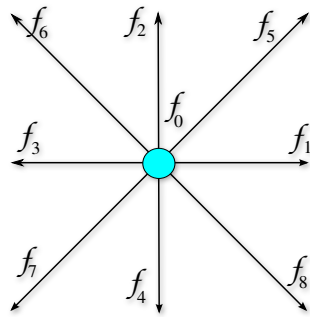


FIGURE 2.9: Le modèle D2Q9

**Modèle D2Q9**

Le modèle D2Q9 (figure 2.9) comporte 9 directions  $i = \{0, 1, \dots, 8\}$  auxquelles correspondent 9 vitesses  $e_i$  et 9 fonctions de distribution de densité  $f_i(r, t)$  :

$$[e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8] = c \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

On introduit une vitesse de réseau  $c$  comme le rapport entre le pas d'espace et de temps :

$$c = \Delta x / \Delta t \quad (2.12)$$

Ainsi, pour obtenir les quantités macroscopiques dans ce modèle discret, les intégrales (2.9)

et (2.10) sont remplacées par les sommes suivantes :

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, t) &= \sum_i f_i(\mathbf{r}, t) \\ \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \sum_i \mathbf{e}_i f_i(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (2.13)$$

### Unités Lattice

Pour simplifier l'écriture des équations, il est d'usage de remplacer les unités physiques par des unités appelées unités réseau (lattice unit) :

— La vitesse réseau  $c$  correspond à : 1 lu ts<sup>-1</sup> (lattice unit / time step)

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 1 \text{ lu ts}^{-1} \quad (2.14)$$

— Les directions de vitesses  $\mathbf{e}_i$  deviennent :

$$[\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$(2.16)$$

— La densité du fluide ne subissant aucune force est prise égale à 1 :

$$\rho_0 = 1 \quad (2.17)$$

### Equation de Boltzmann sur réseau

La discrétisation de l'équation de Boltzmann (2.2) suivant les neuf directions du schéma D2Q9 peut se mettre sous la forme explicite :

$$f_i(\mathbf{r} + \Delta t \mathbf{e}_i, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{r}, t) = \Omega_i \quad (2.18)$$

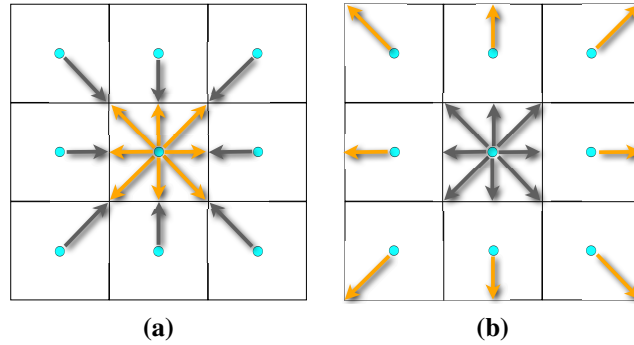
Comme dans le cas des modèles LGA, cette équation comporte deux termes qui sont en général calculés en deux étapes pour chaque noeud du réseau :

1. L'étape de propagation ou d'advection, appelée "streaming" en anglais, consiste à déplacer les fonctions de densités  $f_i^{out}(\mathbf{r}, t)$  selon la direction  $i$  correspondante (voir figure 2.10) :

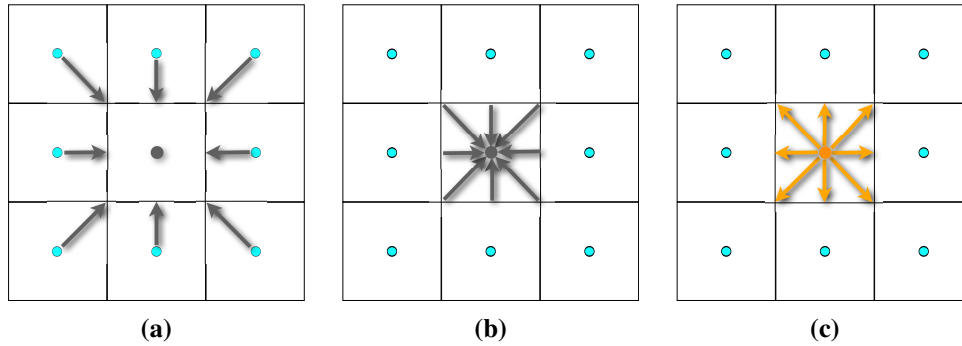
$$f_i(\mathbf{r} + \Delta t \mathbf{e}_i, t + \Delta t) = f_i^{out}(\mathbf{r}, t) \quad (2.19)$$

2. L'étape de collision consiste à calculer les densités  $f_i^{out}(\mathbf{r}, t)$  après le choc entre particules fluide en provenance des noeuds adjacents  $f_i^{in}(\mathbf{r}, t)$  conformément au schéma de la figure 2.11 :

$$f_i^{out}(\mathbf{r}, t) = f_i^{in}(\mathbf{r}, t) + \Omega_i \quad (2.20)$$



**FIGURE 2.10:** *Processus de streaming : (a) état du nœud fluide à l'instant  $t$ . (b) Propagation des fonctions de densités vers les nœuds voisins selon l'équation 2.19 à l'instant  $t + \Delta t$ .*



**FIGURE 2.11:** *Processus de collision : (a) Fonctions de densité  $f_i^{in}$  à l'instant  $t$ . (b) Entrée en collision des nœuds de fonctions de densité  $f_i^{in}$ . (c) Nouvelles fonctions de densité  $f_i^{out}$  à l'instant  $t + \Delta t$ .*

### 2.2.2.2. Résolution du processus de Collision

Il existe plusieurs approches pour calculer l'opérateur de collision. La plus classique, appelée Single Relaxation Time (SRT) [87], sera décrite dans cette section ainsi qu'une approche moins utilisée appelée Multi Relaxation Time (MRT)<sup>9</sup> mais qui présente des avantages notables en terme de stabilité et de précision des calculs [122].

#### Approche SRT

L'approche SRT est basée sur la discrétisation sur réseau de l'opérateur BGK :

$$\Omega_i = -\frac{1}{\tau}(f_i(\mathbf{r}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{r}, t)), \quad i \in \{0, 1, \dots, 8\} \quad (2.21)$$

9. On peut noter qu'il existe une approche Two Relaxation Time (TRT), développée dans les travaux de Ginzburg [75, 76, 77] pour des problèmes d'écoulement et transport dans les milieux poreux.

Pour chaque direction  $i$ , le processus de collision se traduit par une relaxation linéaire de la fonction de densité  $f_i(\mathbf{r}, t)$  pendant un temps  $\tau$  vers une fonction d'équilibre  $f_i^{eq}(\mathbf{r}, t)$ . Celle-ci peut être obtenue à l'aide d'un développement en série de Taylor de la fonction d'équilibre de Maxwell (2.4) :

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left( 1 + 3\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \quad (2.22)$$

Elle fait intervenir les champs de densité  $\rho(\mathbf{r}, t)$  et de vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  ainsi que des coefficients  $w_i$  qui dépendent de la discrétisation :

$$\begin{cases} w_i = 4/9, & \text{pour } \|\mathbf{e}_i\| = 0 \\ w_i = 1/9, & \text{pour } \|\mathbf{e}_i\| = 1 \\ w_i = 1/36, & \text{pour } \|\mathbf{e}_i\| = \sqrt{2} \end{cases} \quad i \in \{0, 1, \dots, 8\} \quad (2.23)$$

Comme son nom l'indique, l'approche SRT fait intervenir un seul temps de relaxation  $\tau$  qui peut être défini à partir de la viscosité du fluide :

$$\nu = \frac{2\tau - 1}{6} \quad (2.24)$$

En utilisant le développement de Chapman-Enskog [17], on peut montrer que l'équation de Boltzmann munie de l'opérateur BGK permet de retrouver les équations de Navier-Stokes pour des écoulements quasi-incompressibles et des nombres de Mach faible et que l'équation d'état du fluide est celle d'un fluide parfait :

$$P = c_s^2 \rho \quad (2.25)$$

où  $c_s^2 = \frac{1}{3}c$  est la vitesse du son sur le réseau.

### Approche Multi-Relaxation-Time (MRT)

Comme on l'a vu précédemment, dans l'approche SRT chaque grandeur physique (donc chaque moment de la fonction de distribution) est relaxée vers son état d'équilibre avec le même temps caractéristique  $\tau$ . Or, il est clair que différents moments de la fonction de répartition ne tendent pas vers l'équilibre en même temps. L'approche MRT est définie dans l'espace des moments et on considère que chaque moment peut être relaxé vers son état d'équilibre indépendamment des autres, la propagation étant toujours réalisée dans l'espace des vitesses [59, 122, 56, 55].

D'un point de vue numérique, à chaque nœud du domaine, on calcule un ensemble de neuf moments  $m_i$  correspondant aux neuf fonctions de distribution  $f_i$ . On peut noter cette transformation linéaire sous forme matricielle :

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathbf{F} \quad (2.26)$$

avec  $\mathbf{m} = (m_0 \ m_1 \ m_2 \ m_3 \ m_4 \ m_5 \ m_6 \ m_7 \ m_8)^T$  et  $\mathbf{F} = (f_0 \ f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7 \ f_8)^T$ . La matrice  $\mathbf{M}$  est une matrice réversible d'ordre 9 dont les lignes sont orthogonales deux à deux. Le



détail du calcul de cette matrice pour le schéma D2Q9 est décrit dans [58] :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

La collision est appliquée aux moments  $m_i$  indépendamment, c'est à dire, chaque moment  $m_i$  est relaxé vers son état d'équilibre pendant un temps de relaxation  $s_i$ . On obtient ainsi des nouveaux moments  $m_i^{out}$  :

$$\mathbf{m}^{out} = \mathbf{m} - \mathbf{S}(\mathbf{m} - \mathbf{m}^{eq}) \quad (2.28)$$

avec

$$(2.29)$$

$$\mathbf{S} = \text{diag}(0, s_2, s_3, 0, s_5, 0, s_7, s_8, s_9) \quad (2.30)$$

et

$$(2.31)$$

$$\mathbf{m}^{eq} = \begin{bmatrix} \rho \\ -2\rho + 3(j_x^2 + j_y^2) / \rho \\ \rho - 3(j_x^2 + j_y^2) / \rho \\ \dot{j}_x \\ -\dot{j}_x \\ \dot{j}_y \\ -\dot{j}_y \\ (j_x^2 - j_y^2) / \rho \\ \dot{j}_x \dot{j}_y / \rho \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Finalement, les nouvelles fonctions de distribution  $f_i^{out}$  sont déterminées à partir des nouveaux moments  $m_i^{out}$  :

$$\mathbf{F}^{out} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{m}^{out} \quad (2.33)$$

Les valeurs des temps de relaxations  $s_i$  sont déterminés à partir de l'analyse de stabilité linéaire du modèle [157, 122, 151]. On peut noter que la densité  $\rho$  et les impulsions  $(j_x, j_y) = (\rho u_x, \rho u_y)$  sont parfaitement conservées ( $s_1 = 0$ ,  $s_4 = 0$  et  $s_6 = 0$  dans l'expression de  $\mathbf{S}$ ) impliquant des temps de relaxations nuls pour ces grandeurs physiques. Dans notre modèle, les autres valeurs utilisées pour les  $s_i$  sont celles proposées par Mussa et al. [151] :

$$s_2 = 1.63, s_5 = s_7 = 1.92, s_8 = s_9 = 1/\tau \quad (2.34)$$

Enfin, on peut noter que si tous les temps de relaxations sont égaux à  $1/\tau$ , on retrouve l'opérateur de BGK.

### 2.2.2.3. Algorithme et stabilité

D'un point de vue numérique, l'approche LBM peut être implémenté suivant l'algorithme suivant :

1. Initialiser les  $f_i(\mathbf{r}, t = 0)$  à partir de la densité initiale  $\rho_0$  et des vitesses initiales  $\mathbf{u}_0$  en utilisant la fonction d'équilibre (2.22) :

$$f_i(\mathbf{r}, t = 0) = f_i^{eq}(\rho_0, \mathbf{u}_0) \quad (2.35)$$

2. Etape de collision (2.20).
3. Etape de streaming (2.19).
4. Calculer les  $f_i$  manquantes aux bords (2.37).
5. Mettre à jours les densités  $\rho(\mathbf{r}, t)$  et les vitesses  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  à partir des équations (2.13).

Plusieurs conditions doivent être vérifiées pour assurer la stabilité du calcul [185] :

1. Pour chaque nœud du domaine, la norme de la vitesse du fluide calculée  $\|\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\|$  ne doit pas dépasser la vitesse du son du réseau  $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , ce qui correspond à la vitesse de déplacement d'une perturbation de la pression. Cette condition peut se mettre sous la forme  $Ma = \frac{\max \|\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\|}{c_s} < 1$  où  $Ma$  est un nombre de Mach. Pour modéliser un fluide incompressible, c'est à dire avec une densité  $\rho_0$  constante, le nombre de Mach doit être très faible  $Ma \ll 1$ <sup>10</sup>.
2. On a vu précédemment que le temps de relaxation  $\tau$  est relié à la viscosité réseau  $\nu$  par l'équation (2.24). Comme cette viscosité doit rester strictement positive,  $\tau$  doit respecter la condition :

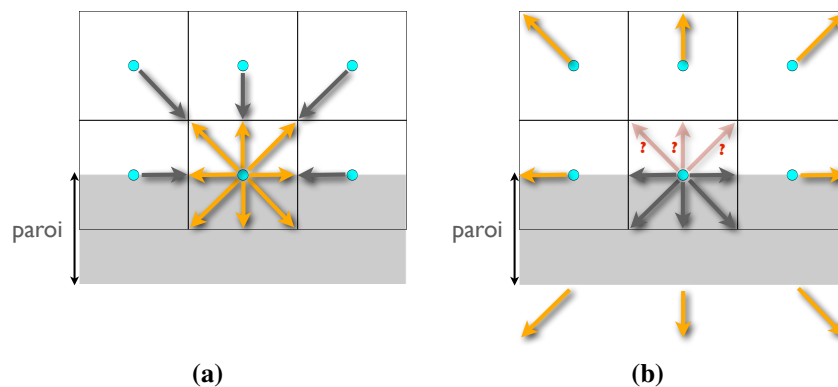
$$\tau > 1/2 \quad (2.36)$$

Ce point est particulièrement important lorsque l'on utilise l'opérateur BGK qui engendre des instabilités numériques pour des fluides de très faible viscosités ( $\tau$  proche de  $1/2$ ). Dans cette limite l'opérateur MRT offre une bien meilleure stabilité et doit être préféré à BGK [142, 44].

10. On peut noter que la densité  $\rho$  calculée est de l'ordre de  $\rho = \rho_0 + O(Ma^2)$  [56].

### 2.2.3. Traitement des conditions aux limites

Un traitement correct des conditions aux limites est crucial pour la stabilité et la précision de tout schéma numérique. Un avantage majeur de la méthode LBM est sa capacité à incorporer simplement des conditions aux limites variées et complexes. Pour illustrer la mise en œuvre des conditions aux limites en LBM on considère un domaine fluide avec pour frontière inférieure une paroi horizontale. Après l'opération de Streaming au niveau des nœuds fluides en contact à la paroi, les  $f_i$  qui proviendrait de nœuds extérieurs au domaine ne sont pas connus (Figure 2.12b) et il est nécessaire de les calculer.

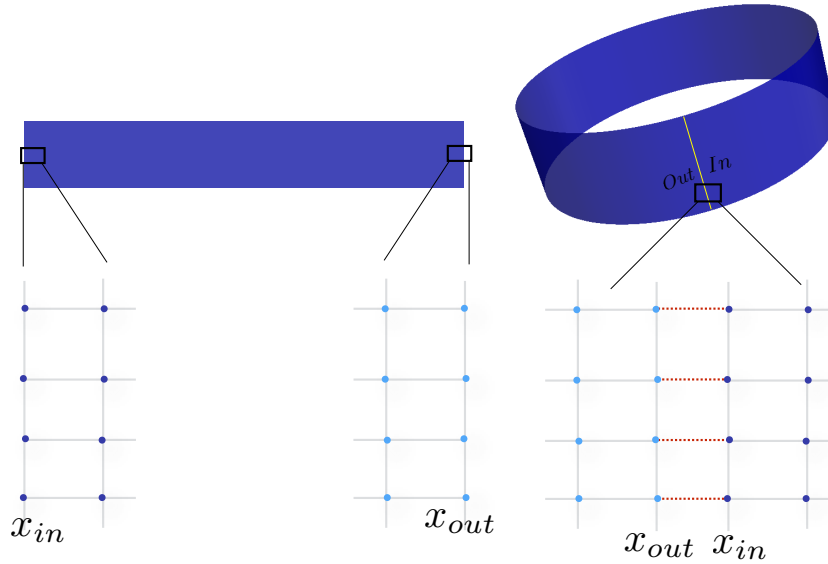


**FIGURE 2.12:** (a) : état des fonctions de densités d'un nœud fluide à la paroi. (b) Les  $f_i$  manquantes après l'opération de streaming.

Dans la suite de cette section on présente et compare plusieurs implémentations de conditions aux limites fixes utiles pour nos travaux. Le cas des frontières mobiles, important pour la prise en compte des interactions grains-fluide, sera quant à lui abordé dans la section 2.3.

#### 2.2.3.1. Condition aux limites périodiques

Les conditions aux limites périodiques sont plus simples à implémenter. Elles sont très couramment utilisées notamment pour limiter la taille du domaine et sont particulièrement intéressantes dans l'étude des écoulements rhéométriques. Pour imposer une périodicité à un domaine fluide dans une direction de l'espace (selon  $x$  par exemple), on utilise une topologie cylindrique comme illustrée sur la Figure 2.13. Dans ce cas particulier, les nœuds fluides du réseau LBM qui se trouvent de part et d'autre du bords du domaine deviennent adjacents et l'étape de Streaming peut être obtenue sans calcul additionnel. En effet, les  $f_i^{out}$  qui quittent les nœuds situés à la position  $x_{in}$  vers la sortie du domaine fluide sont advectées vers les nœuds situés à la position  $x_{out}$  dans les directions de vitesses  $e_i$  correspondantes. De la même façon, les  $f_i^{out}$  qui quittent les nœuds situés à la position  $x_{out}$  vers la sortie du domaine fluide sont advectées vers les nœuds situés à la position  $x_{in}$  dans les directions de vitesses  $e_i$  correspondantes.



**FIGURE 2.13:** Topologie cylindrique d'un domaine fluide périodique dans la direction  $x$  qui montre comment ce domaine se déforme autour de lui-même. Les nœuds fluides en position  $x_{in}$  et  $x_{out}$  deviennent adjacents.

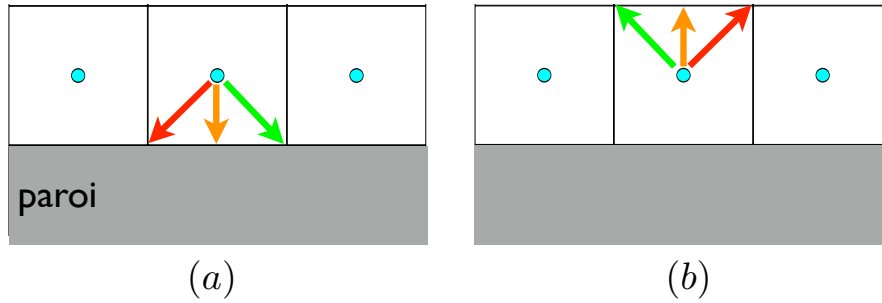
### 2.2.3.2. Condition de Bounce-Back

La condition au limite de Bounce-Back (BB) est fréquemment utilisée dans la méthode LBM lorsque l'on souhaite un non-glissement du fluide en bord de domaine (no-slip condition) ou au voisinage d'un obstacle solide. En 2D, elle consiste à imposer à chaque fonction de densité  $f_i$  inconnue la valeur de  $f_{iopp}$  de la direction opposée (voir la Figure 2.14 pour un exemple dans le cas d'un nœuds fluide se trouvant à la limite basse du domaine). Cette condition au limite est précise au premier ordre en espace [47] et peut être améliorée en plaçant l'interface entre la parois et le fluide à mi-distance entre deux rangées nœuds [227, 43, 73, 115].

L'opération de Bounce-Back peut être formalisée par l'équation :

$$f_i^{in}(\mathbf{r}, t + \Delta t \mathbf{e}_i) = f_{iopp}^{out}(\mathbf{r}, t) \quad (2.37)$$

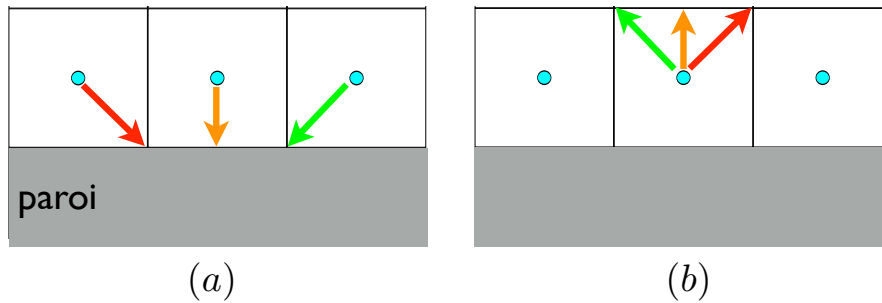
où  $f_i^{in}$  et  $f_{iopp}^{out}$  sont respectivement les fonctions de distribution entrantes et sortantes et où  $iopp$  désigne la direction opposée à la direction  $i$ .



**FIGURE 2.14:** Représentation schématique du calcul des  $f_i$  manquantes par la technique du Bounce-Back, (a) avant l'étape streaming et (b) après l'étape streaming.

### 2.2.3.3. Condition de Bounce-Forward

Il est parfois nécessaire de prendre en compte la possibilité d'un glissement du fluide au niveau de la paroi<sup>11</sup>. Dans ce cas, la condition de Bounce-Forward (BF) peut être utilisée pour implémenter une condition de glissement (slip condition). En 2D, elle consiste à effectuer une réflexion spéculaire des  $f_i$  au niveau de la paroi tel que représenté sur la Figure 2.15.



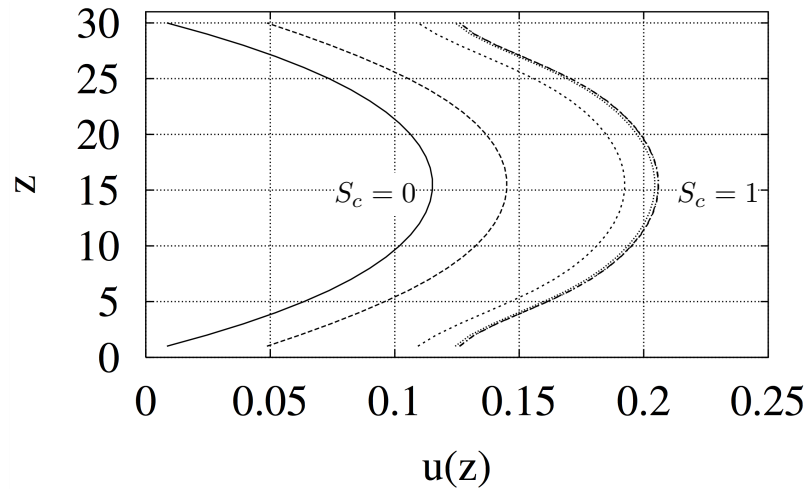
**FIGURE 2.15:** Fonctionnement schématique de la condition de bounce-forward, (a) avant l'étape streaming et (b) après l'étape streaming.

D'un point de vue numérique, on peut utiliser une combinaison des deux conditions BB et BF. Ceci permet de contrôler précisément le glissement entre le fluide et la surface solide [5, 187, 188, 226, 204] :

$$f_i^{in}(\mathbf{r}, t + \Delta t \mathbf{e}_i) = Sc f_i^{BF} + (1 - Sc) f_i^{BB} \quad (2.38)$$

où  $f_i^{BB}$  et  $f_i^{BF}$  sont respectivement les fonctions de densité résultants d'un BB et d'un BF,  $Sc$  est un coefficient de glissement compris entre 0 et 1 ( $Sc = 0$  pour un non glissement et  $Sc = 1$  pour un glissement pur). La Figure 2.16 illustre les effets de ce paramètre pour un écoulement dans une conduite [188].

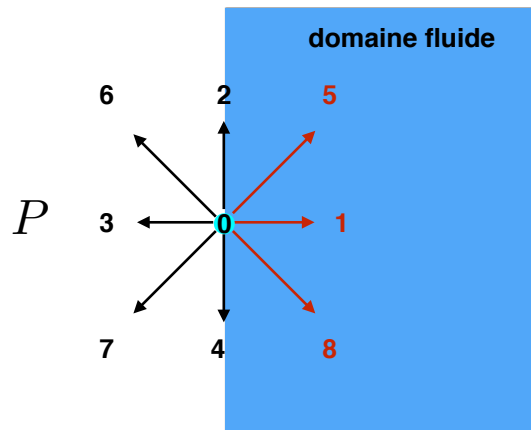
11. Des études expérimentales ont montré que ce glissement peut apparaître dans une couche limite de l'ordre de 100 nm [124, 196].



**FIGURE 2.16:** Profil de vitesse d'écoulement  $u$  dans un tube en fonction de la hauteur  $z$  pour des valeurs de  $Sc = 0, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 1$ , la courbe  $Sc = 0$  correspond au profil Poiseuille standard [188].

#### 2.2.3.4. Conditions aux limites de Dirichlet (Pressure Boundary Condition)

Des conditions de Dirichlet (ou de pression imposée) peuvent être prises en compte au bord de domaine fluide [228] en utilisant la relation (2.25) qui relie la pression à la densité du fluide. Imposer une pression  $p$  au bord revient alors à imposer  $\rho$ .



**FIGURE 2.17:** Application d'une pression dans un nœud fluide. Les directions en rouge correspondent aux  $f_i$  manquantes.

Pour illustrer cette condition aux limites, on considère un nœud fluide sur le bord gauche du domaine au niveau duquel on impose une pression  $p$  (voir Figure 2.17). Si l'on suppose que la vitesse du fluide selon l'axe  $y$  est nulle ( $u_y = 0$ ), il faudra déterminer les quatre inconnues  $f_1, f_5, f_8$  et la vitesse  $u_x$  à partir de :

— l'expression de la densité macroscopique  $\rho$  (2.13) :

$$\rho = f_1 + f_2 + \dots + f_8 \quad (2.39)$$

— de la décomposition de l'expression du flux  $\rho \mathbf{u}$  (2.13) sur les axes  $x$  et  $y$  :

$$\rho u_x = f_1 + f_5 + f_8 - (f_3 + f_6 + f_7) \quad (2.40)$$

$$\rho u_y = 0 = f_2 + f_5 + f_6 - (f_4 + f_7 + f_8) \quad (2.41)$$

— et d'une quatrième équation qui satisfait l'hypothèse de Zou et He [228]. Elle consiste à appliquer un bounce-back pour la partie non-équilibrée des deux fonctions de densités  $f_i$  dont les directions de vitesses  $\mathbf{e}_i$  sont normales au bord :

$$f_1 - f_1^{eq} = f_3 - f_3^{eq} \quad (2.42)$$

où  $f_1^{eq}$  et  $f_3^{eq}$  sont données par l'Eq. (2.22).

La résolution de ce système permet d'obtenir les expressions suivantes dans le code de calcul :

$$\begin{aligned} u_x &= -1 + (f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_7 + f_6))/\rho \\ f_1 &= f_3 + \frac{2}{3}\rho u_x \\ f_5 &= f_7 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}\rho u_x \\ f_8 &= f_6 + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}\rho u_x \end{aligned} \quad (2.43)$$

### 2.2.3.5. Conditions aux limites de Neumann (Flux Boundary Condition)

Le cas des conditions de Neumann est dual à celui des conditions de Dirichlet. Si l'on considère le même exemple que précédemment (2.17) et que l'on souhaite imposer une vitesse  $\mathbf{u} = (u_x, 0)$  au fluide, les inconnues deviennent  $f_1, f_5, f_8$  et la densité  $\rho$  du fluide. A partir des équations précédentes on obtient les mêmes expressions pour  $f_1, f_5$  et  $f_8$  (2.43) avec :

$$\rho = (f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_7 + f_6))/(1 - u_x) \quad (2.44)$$

### 2.2.3.6. Conditions aux limites ouvertes

Des conditions aux limites ouvertes (Open Boundary Condition, OBC) sont utilisées dans les cas où l'on souhaite absorber les ondes de pression en bord de domaine. Ce type de condition, bien que très utile dans de nombreux problèmes, reste néanmoins souvent difficile à mettre en œuvre. En effet, les champs hydrodynamiques se propageant vers la frontière du domaine fluide ne doivent subir ni déformation ni réflexion au voisinage de la position à laquelle la condition est appliquée. En outre, dans la mesure où l'on n'a pas d'information sur l'état de densité

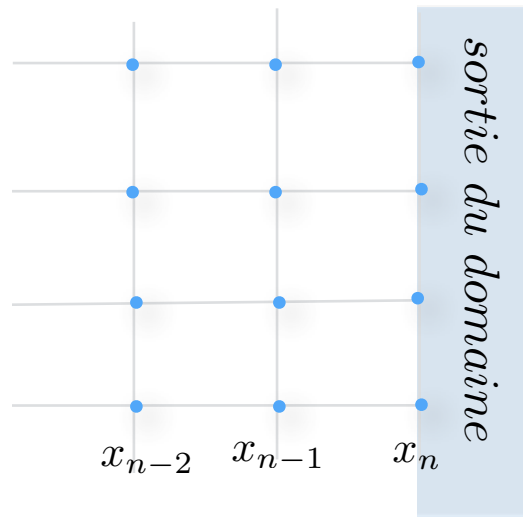


FIGURE 2.18: Schémas d'application des conditions aux limites libres.

et de vitesse en dehors du domaine, la stabilité et la précision de la méthode peut être difficile à assurer.

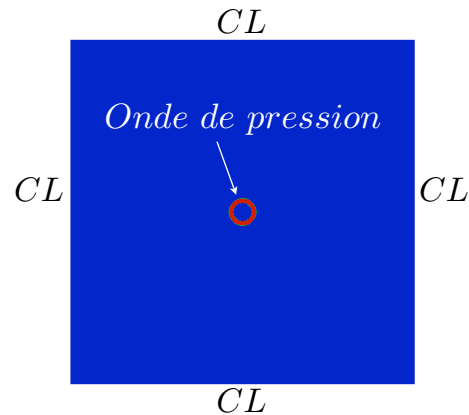
Différents schémas [129, 113, 114, 104, 160] ont été proposés dans la littérature pour prendre en compte les OBC. Dans cette thèse, nous nous limiterons à la méthode d'extrapolation linéaire (extrapolation boundary condition, EBC) [114]. Dans cette approche, les fonctions de densité  $f_i$  inconnues aux nœuds en bord de domaine sont obtenues à partir des valeurs des deux premiers voisins. Par exemple, sur la figure 2.18, les fonctions  $f_i(x_n, t)$  inconnues à la position  $x_n$  sont données par

$$f_i(x_n, t) = 2f_i(x_{n-1}, t) - f_i(x_{n-2}, t) \quad (2.45)$$

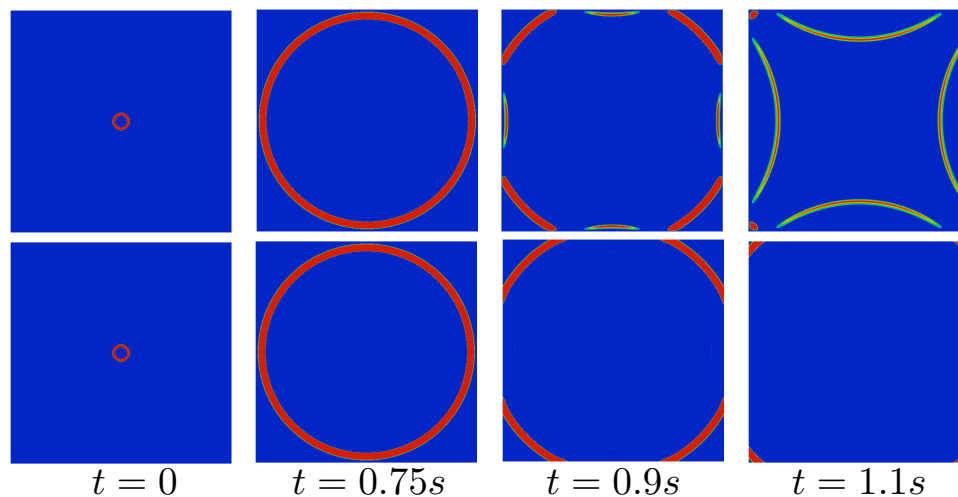
Pour illustrer l'intérêt de l'OBC, nous nous intéressons à la simulation de la propagation d'une onde de pression dans un domaine fluide carré (figure 2.19). L'onde est générée en imposant une surpression autour d'une zone circulaire au centre du domaine. Ce type de configuration sera utilisé dans la suite de cette thèse pour imposer une surpression localisée. Deux simulations ont été réalisées avec pour conditions aux limites (CL) imposées en bord du domaine : 1) des conditions de Dirichlet avec pression nulle imposée ; 2) des conditions OBC.

La figure 2.20 montre les résultats de ces deux simulations pour différents temps de simulation. Dans le cas des conditions OBC, l'onde propagée sort du domaine avec une réflexion et une déformation très limitées au niveau du bord. Au contraire, dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet, qui sont classiquement employées dans ce type de simulation, on constate qu'une partie non négligeable de l'onde est réfléchiée vers l'intérieur du domaine. La figure 2.21 illustre comment l'onde incidente (ou signal) est réfléchiée au niveau du bord de domaine pour les deux types de conditions aux limites.





**FIGURE 2.19:** Simulation numérique de la propagation d'une onde de pression dans un domaine fluide carré.

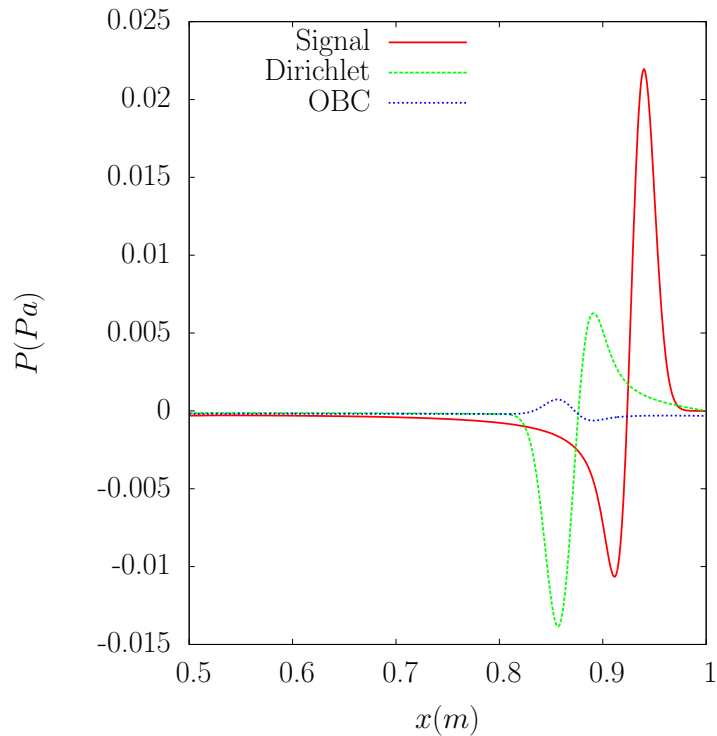


**FIGURE 2.20:** Résultats de la simulation numérique de la propagation d'une onde de pression pour différents temps de simulation numérique : comparaison entre l'utilisation de l'OBC (en bas) et les conditions aux limites à pression imposée (en haut).

#### 2.2.4. Comparaison entre les approches SRT et MRT pour différentes conditions aux limites

S'il est admis que l'approche MRT est plus stable que BGK, il existe très peu de comparaisons de ces approches dans la littérature. Dans cette section, nous les avons comparé dans le cas simple d'un écoulement de Poiseuille<sup>12</sup> et pour deux conditions aux limites.

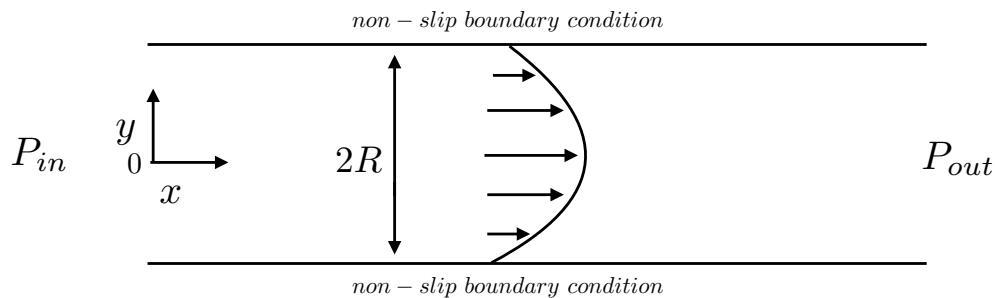
12. On remarquera que la solution de Poiseuille présente l'intérêt d'être obtenue analytiquement à partir des équations de Navier-Stokes.



**FIGURE 2.21:** L'onde de pression : la courbe en rouge montre l'onde de pression avant l'intersection avec le bord, les deux autres signaux correspondent aux ondes réfléchies.

#### 2.2.4.1. Cas test de Poiseuille

On considère un d'écoulement incompressible entre deux parois parallèles (figure 2.22). Une pression  $P_{in}$  est appliquée à l'entrée et une pression  $P_{out} < P_{in}$  est appliquée à la sortie. Le fluide s'écoule dans la direction  $x$  sous l'effet du gradient de pression négatif  $\Delta p = P_{out} - P_{in}$ . Par symétrie et en raison de l'incompressibilité du fluide, la vitesse du fluide admet une seule composante  $u$  selon la direction  $x$  ( $v(x, y) = 0$ ). Des conditions aux limites de non-glissement sont imposées le long des deux plaques conformément au schéma de la figure 2.22.



**FIGURE 2.22:** Schémas d'un écoulement de Poiseuille plan.

Dans cette situation, les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

$$\eta_f \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.46)$$

où  $\eta_f = \rho\nu$  est la viscosité dynamique du fluide.

Le profil de vitesse  $u(x, y)$  est donné par :

$$u(x, y) = u_{max} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) \quad (2.47)$$

où  $u_{max} = u(x, y = 0)$  correspond à la vitesse du fluide au centre du domaine. Son expression est donnée par<sup>13</sup> :

$$u_{max} = -\frac{1}{2\eta_f} \frac{dp}{dx} \quad (2.48)$$

avec  $L$  la largeur du domaine suivant l'axe  $x$ .

Pour nos essais, les conditions et les paramètres suivants ont été choisis :

- Le domaine fluide a pour dimensions  $L = 0.1m$  et  $R = 1.510^{-2}m$ .
- Le fluide a une densité de  $\rho = 1000kg.m^{-3}$  et une viscosité dynamique de  $\eta_f = 1.5Pa.s$ .
- Si on choisit, par exemple, un nombre de Reynolds  $Re = 2R\rho u_{avg}/\eta_f = 2$  (qui correspond à un écoulement laminaire), avec une vitesse maximale au centre de  $u_{max} = 1.510^{-2}m.s^{-1}$ , il faut appliquer une différence de pression  $\Delta p = P_{out} - P_{in} = -2Pa$ .
- La pression est imposée en utilisant des conditions aux limites de Dirichlet (décrites dans la section 2.2.3.4.) et en remplaçant  $\rho$  par  $\rho_{in}$  ou  $\rho_{out}$  suivant que l'on se place à l'entrée ou à la sortie du domaine (figure 2.22).

### 2.2.4.2. Application des conditions aux limites et comparaison

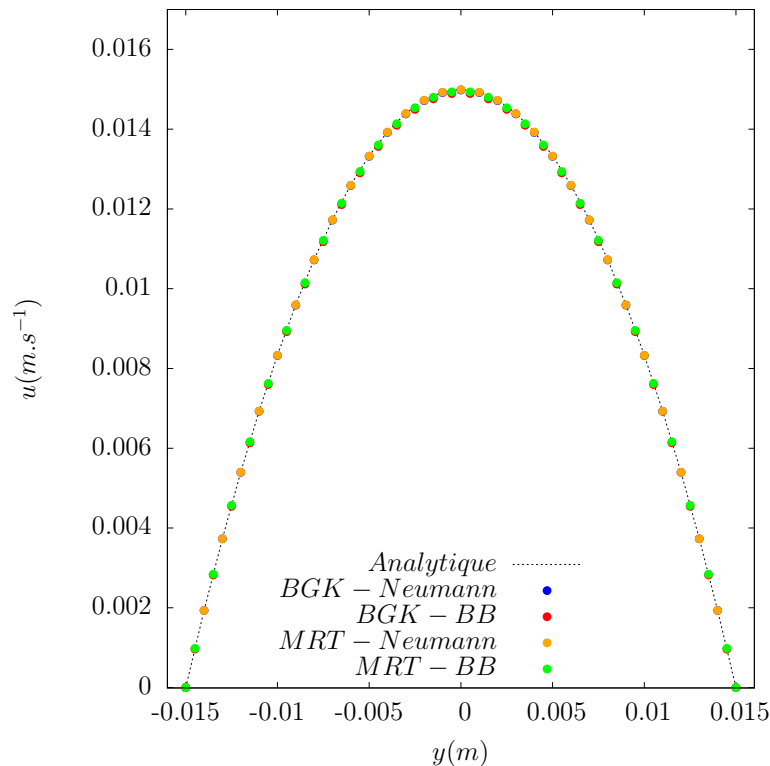
Pour pouvoir comparer les deux opérateurs de collision BGK et MRT, ainsi que les conditions aux limites de bounce-back (BB) et de Neumann, quatre simulations ont été réalisées :

- BKG-BB : utilisant l'opérateur de collision BGK avec application des conditions aux limites de type bounce-back (BB) aux nœuds qui sont au bord le long des deux parois.
- BGK-Neumann : utilisant l'opérateur de collision BGK en remplaçant les conditions aux limites BB par celles de Neumann (section 2.2.3.5. en imposant une vitesse nulle  $u = 0$ ).
- MRT-BB : utilisant l'opérateur de collision MRT avec application des conditions aux limites de type BB.
- MRT-Neumann : utilisant l'opérateur de collision MRT avec application des conditions aux limites de type Neumann.

13. On peut noter que la vitesse moyenne de l'écoulement est  $u_{avg} = 2/3u_{max}$

Comme on peut le constater sur la figure 2.23, les résultats des simulations sont en bon accord avec la solution analytique. Néanmoins, si l'on considère l'écart  $E(\%)$  entre la vitesse  $u(y)$  calculée analytiquement et numériquement (figure 2.24), on constate que ces méthodes ne sont pas équivalentes. De manière générale on peut faire les remarques suivantes :

- Dans tous les cas l'erreur est symétrique et dépend uniquement de  $y$ .
- Le fait d'imposer la vitesse nulle au bord (en utilisant Neumann) engendre une erreur plus faible que le bounce-back aussi bien en BGK qu'en MRT.
- Dans tous les cas, MRT est plus précis que BGK.



**FIGURE 2.23:** Comparaison du profil de vitesse  $u$  analytique avec les profils obtenus par différentes simulations numériques.

### 2.3. Couplage LBM/DEM

Dans cette section, on s'intéresse au couplage entre le fluide et le milieu granulaire. L'algorithme choisi pour la simulation du milieu granulaire est l'approche DEM "classique" bien que les développements présentés pourraient s'appliquer sans modifications majeures à d'autres algorithmes tels que la Dynamique des Contacts par exemple. Après avoir rappelé succinctement le principe de fonctionnement de la DEM, on présente en détail le traitement des calculs aux interfaces entre les grains et le fluide, ingrédient majeur du couplage LBM-DEM. Enfin,

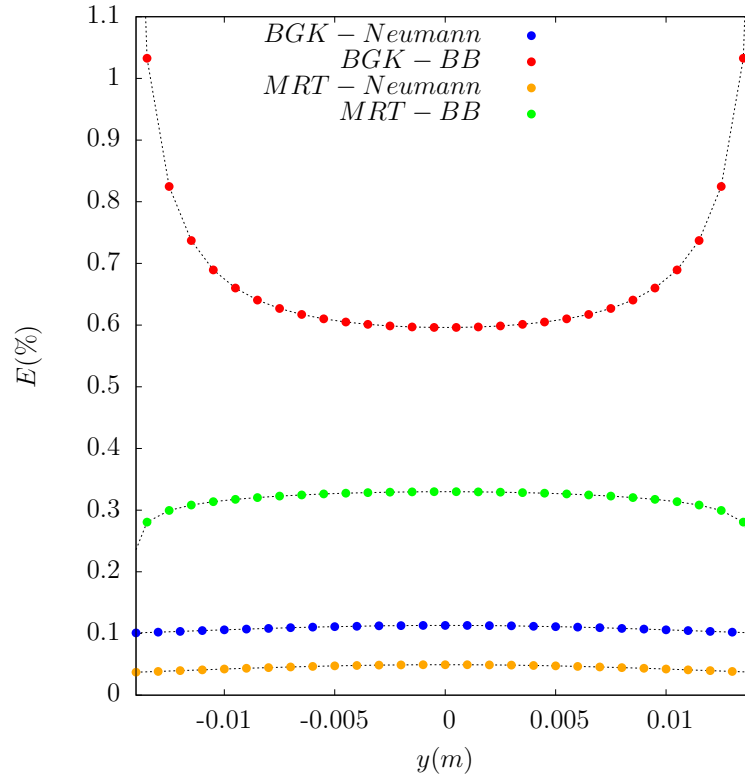


FIGURE 2.24: Ecart entre la vitesse analytique et la vitesse calculée par simulation numérique.

cette section se termine par une série de cas tests permettant de s'assurer de la validité et de la précision de la méthode.

### 2.3.1. Modélisation de la phase granulaire

Nous avons choisi de modéliser le milieu granulaire en utilisant l'approche DEM introduite en mécanique et génie civil par Cundall à la fin des années 70 [50]. Cette méthode est présentée ci-dessous dans ses grandes lignes.

#### 2.3.1.1. Principe de l'algorithme

Le principe consiste à considérer le mouvement de chaque grain  $i$  composant le milieu. Ce mouvement est décrit par l'équation classique de la dynamique qui peut se mettre sous la forme :

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i, \quad i = 1 \dots N \quad (2.49)$$

où  $N$  est le nombre de grains, pour  $i \in N$ ,  $m_i$  est la masse,  $\mathbf{r}_i$  est la position et  $\mathbf{F}_i$  est la force exercée sur le grain considéré. La force  $\mathbf{F}_i$  peut être décomposée de la manière suivante :

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{C_{ij}} + \mathbf{F}g_i + \mathbf{F}h_i \quad (2.50)$$

où

- $\sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{C_{ij}}$  représente les forces de contact qui s'exercent en un point à la surface des grains.
- La force de la gravité  $\mathbf{F}g_i$  et les forces hydrodynamiques  $\mathbf{F}h_i$  qui sont obtenues par intégration volumique ou surfacique et que l'on considère à travers leur résultante calculée au centre de masse (voir section 2.3.).

Si l'on considère un repère local  $(\mathbf{n}_{ij}, \mathbf{t}_{ij})$  associé au contact entre deux grains, la force  $\mathbf{F}_{ij}$  peut être décomposée de la manière suivante (figure 2.25) :

$$\mathbf{F}_{ij} = F_N \mathbf{n}_{ij} + F_T \mathbf{t}_{ij} \quad (2.51)$$

où  $F_N$  et  $F_T$  sont les composantes normale et tangentielle de la force de contact <sup>14</sup>.

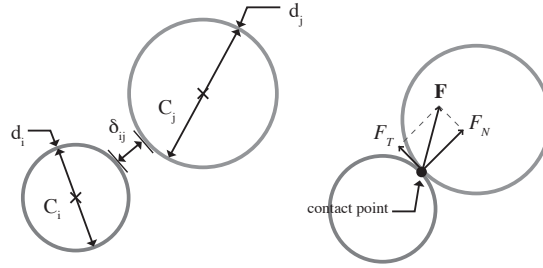


FIGURE 2.25: Contact et collision entre deux grains.

Comme on l'a vu à la section 1.1.2., un modèle rhéologique est nécessaire pour décrire la relation entre la force et la déflexion au contact. Par souci de simplicité, nous utiliserons une loi viscoélastique (Figure 2.26-a) caractérisée par une rigidité  $k_n$  que l'on choisira assez élevée pour que les interpénétrations entre grains soit faibles. Le terme visqueux de la loi permettra de prendre en compte la dissipation d'énergie durant le contact :

$$\mathbf{F}_N = \begin{cases} (-k_n \delta_{ij} - \gamma_n v_n) \mathbf{n}_{ij} & \text{si } \delta_{ij} < 0 \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.52)$$

où  $\gamma_n$  et le coefficient d'amortissement normal et  $\delta_{ij}$  correspond à la distance normale qui sépare les deux grains  $i$  et  $j$  (voir Figure 2.25) quand elle est positive et à la déflexion au contact

14. Il est possible de considérer également un moment de contact qui peut être dû au frottement de roulement.

(recouvrement) quand elle est négative. Pour un disque (ou une forme sphérique) elle peut être définie simplement par la relation géométrique

$$\delta_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| - (R_i + R_j) \quad (2.53)$$

La force de frottement  $F_T$  est calculée en utilisant la loi de frottement de Coulomb régularisée (Figure 2.26-b) qui relie la force de frottement  $F_T$  à la vitesse tangentielle  $v_t$  :

$$\mathbf{F}_T = -\min \{ \gamma_t \|\mathbf{v}_t\| ; \mu_f F_N \} \mathbf{t}_{ij} \quad (2.54)$$

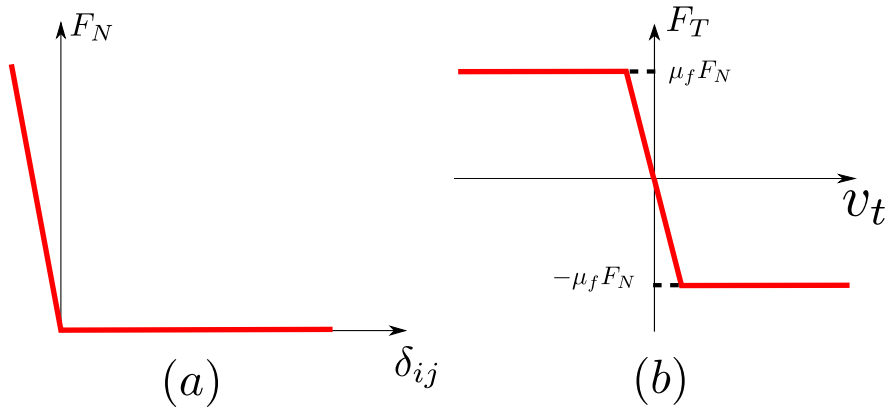


FIGURE 2.26: (a) Loi de contact linéaire ; (b) Loi de Coulomb régularisée.

### 2.3.1.2. Discrétisation et implémentation dans le code calcul

Il existe plusieurs algorithmes pour résoudre numériquement l'équation (2.49), et calculer la nouvelle position  $\mathbf{r}_i(t + \Delta t)$  à partir de celle au temps  $t$  [7]. Dans notre étude, nous utilisons l'algorithme classique de Verlet en vitesse [205] qui a l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre tout en étant stable et en consommant peu de mémoire et de temps de calcul. Cet algorithme s'obtient directement à partir des développements limités de la position calculés au pas de temps précédent  $t - \Delta t$  et suivant  $t + \Delta t$  :

$$\mathbf{r}_i(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{v}_i(t)\Delta t + \frac{\mathbf{a}_i(t)\Delta t^2}{2} + \frac{\mathbf{b}_i(t)\Delta t^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (2.55)$$

$$\mathbf{r}_i(t - \Delta t) = \mathbf{r}_i(t) - \mathbf{v}_i(t)\Delta t + \frac{\mathbf{a}_i(t)\Delta t^2}{2} - \frac{\mathbf{b}_i(t)\Delta t^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (2.56)$$

où  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{v}_i$  et  $\mathbf{a}_i$  sont respectivement les positions, vitesse et accélérations de la particule et où  $\mathbf{b}_i(t)$  la dérivée troisième de la position. En sommant les deux expressions précédentes, on obtient :

$$\mathbf{r}_i(t + \Delta t) = 2\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(t - \Delta t) + \mathbf{a}_i(t)\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (2.57)$$

Cette expression montre que l'algorithme de Verlet est d'ordre 3 (erreur en  $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ ). Si l'on inclut explicitement la vitesse, on obtient :

$$\mathbf{r}_i(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{v}_i(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}_i(t)\Delta t^2 \quad (2.58)$$

$$\mathbf{v}_i(t + \Delta t) = \mathbf{v}_i(t) + \frac{\mathbf{a}_i(t) + \mathbf{a}_i(t + \Delta t)}{2}\Delta t \quad (2.59)$$

Du point de vue de la programmation, l'implémentation de l'algorithme est effectué à l'aide du schéma suivant :

1. Calculer la vitesse  $\mathbf{v}_i(t + \frac{1}{2}\Delta t) = \mathbf{v}_i(t) + \frac{1}{2}\mathbf{a}_i(t)\Delta t$
2. Calculer la position  $\mathbf{r}_i(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{v}_i(t + \frac{1}{2}\Delta t)\Delta t$
3. Calculer l'accélération  $\mathbf{a}_i(t + \Delta t) = \frac{1}{m_i}\mathbf{F}_i$
4. Calculer la vitesse  $\mathbf{v}_i(t + \Delta t) = \mathbf{v}_i(t + \frac{1}{2}\Delta t) + \frac{1}{2}\mathbf{a}_i(t + \Delta t)\Delta t$

### 2.3.1.3. Conditions de stabilité numérique

Le schéma de la DEM étant explicite, le pas de temps ainsi que le coefficient d'amortissement doivent vérifier certaines conditions pour assurer la stabilité du schéma numérique. Pour évaluer ces deux paramètres, considérons un contact normal entre une particule de masse  $m$  et un plan horizontal [167]. On considère que ce contact réagit comme un système masse-ressort-amortisseur dont l'équation de mouvement s'écrit

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_n\frac{dx}{dt} + k_n x = 0 \quad (2.60)$$

où  $k_n$  et  $\gamma_n$  sont la raideur et la viscosité de contact, respectivement.

La particule subit alors une oscillation amortie autour de sa position d'équilibre qui peut être décrite par l'équation :

$$x(t) = A \exp((\mu_0^2 - \pm\sqrt{\mu_0^2 - w_0^2})t) \quad (2.61)$$

où  $A$  est l'amplitude de l'oscillation. Cette solution fait apparaître deux échelles de temps différentes auxquelles on peut associer 1) un temps caractéristique lié à la raideur  $k_n$  avec une fréquence caractéristique  $w_0 = \sqrt{k_n/m}$  et 2) un temps lié à la viscosité  $\gamma_n$  avec une fréquence caractéristique  $\mu_0 = \gamma_n/2m$ . Pour assurer la stabilité de la simulation, il faut que lors des chocs les grains perdent de l'énergie tout en laissant la possibilité aux contacts créés de s'ouvrir dans un temps fini. Dans ce cas, les deux situations suivantes ne permettront pas d'assurer la stabilité du système :

- Si  $(\mu_0 \gg w_0)$  : l'amortissement domine et le système tend vers l'état d'équilibre sans osciller.



- Si  $\mu_0 \ll w_0$  : le système oscille avec une période  $T = 2\pi/w_0$  sans qu'il soit amorti. A partir de là, on en déduit un pas de temps critique  $\Delta t_c = T/2$  pour assurer la stabilité de l'algorithme de l'intégration temporelle. En effet, le pas de temps  $\Delta t$  choisi pour les simulations numériques doit être bien inférieur à  $\Delta t_c$ .

La seule solution envisageable est obtenue pour  $w_0 = \mu_0$  qui conduit à un amortissement critique :

$$\gamma_c = 2\sqrt{mk_n} \quad (2.62)$$

avec  $\gamma_n$  choisi dans l'intervalle  $[0, \gamma_c]$ .

### 2.3.2. Interaction grain-fluide

Les particules sont introduites dans l'espace discrétisé par le réseau. Les nœuds appartenant aux particules sont des nœuds solides. Ainsi, le couplage entre le fluide et une particule se fait au niveau de l'interface entre les nœuds solides de celle-ci et les nœuds fluides voisins (Figure 2.27).

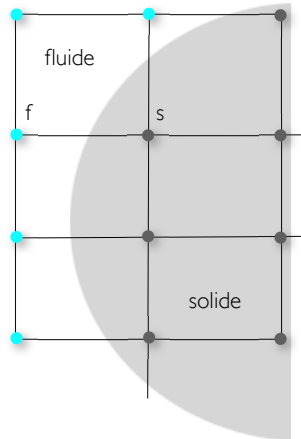


FIGURE 2.27: Introduction d'une particule dans le réseau Lattice Boltzmann.

#### 2.3.2.1. Effet de la particule sur le fluide

Pour le fluide, les nœuds solides à l'interface sont vus comme des frontières mobiles aux niveaux desquelles un traitement des conditions aux limites de type Bounce-back (section 2.2.3.2.) est nécessaire pour obtenir les fonctions de distribution manquantes lors de l'étape de propagation (Streaming).

### Prise en compte de la position réelle de la paroi

Nous utilisons la méthode proposée par Bouzidi et Lallemand [28, 123], qui prend en compte la surface réelle de la particule. Supposons un cas unidimensionnel où la vitesse de la paroi est nulle. Soit  $x_f$  la position du nœud fluide à l'interface,  $x_s$  la position du nœud solide voisin,  $x_b$  la position de la frontière solide et  $q = |x_f - x_b|/\Delta x$  la fraction de la zone fluide à l'interface. En effet, pour une direction  $i$  donnée, la particule fluide doit parcourir une distance  $\Delta x$  pendant son advection. Trois cas se présentent (Figure 2.28) :

- $q = 1/2$  : la particule fluide quitte la position  $x_f$  et rebondit sur la paroi pour revenir à la même position  $x_f$  (Figure 2.28-A). On applique la méthode de Bounce-back usuelle. La fonction de densité inconnue  $f_i(x_f, t + \Delta t)$  est donnée par la relation suivante :

$$f_i(x_f, t + \Delta t) = f_{iopp}^{out}(x_f, t) \quad (2.63)$$

- $q > 1/2$  : la particule quitte la position  $x_f$  et rebondit sur la paroi. Mais comme la distance parcourue par celle-ci est  $\Delta x$ , la particule se retrouve à une position entre  $x_f$  et  $x_b$  (Figure 2.29-B). Pour trouver la fonction de densité  $f_i(x_f, t + \Delta t)$ , on utilise une interpolation linéaire :

$$f_i(x_f, t + \Delta t) = \frac{1}{2q} f_{iopp}^{out}(x_f, t) + \frac{(2q - 1)}{2q} f_i^{out}(x_f, t) \quad (2.64)$$

- $q < 1/2$  : la particule quitte la position  $x_f$  rebondit sur la paroi et se retrouve à une position entre  $x_f$  et  $x_{f'}$  (Figure 2.28-C). Une interpolation linéaire fournit  $f_i(x_f, t + \Delta t)$  :

$$f_i(x_f, t + \Delta t) = 2q f_{iopp}^{out}(x_f, t) + (1 - 2q) f_i^{out}(x_{f'}, t) \quad (2.65)$$

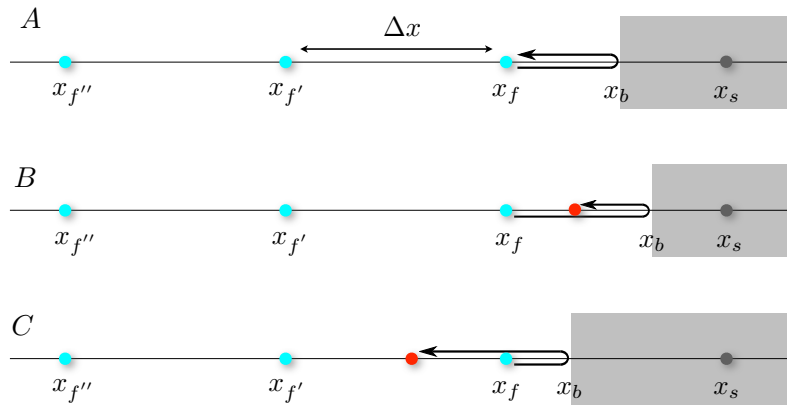


FIGURE 2.28: Schémas des différents cas de rebondissement de la particule fluide sur la paroi.

### Frontières mobiles

Dans le cas de frontières mobiles, il faut prendre en compte le mouvement des particules dans le calcul des fonctions de densités  $f_i(x_f, t + \Delta t)$ . Ainsi, pour une direction  $i$  donnée nous avons [28] :

—  $q \geq 1/2$

$$f_i(x_f, t + \Delta t) = \frac{1}{2q} f_{iopp}^{out}(x_f, t) + \frac{(2q-1)}{2q} f_i^{out}(x_f, t) + \partial f_i \quad (2.66)$$

—  $q < 1/2$

$$f_i(x_f, t + \Delta t) = 2q f_{iopp}^{out}(x_f, t) + (1-2q) f_i^{out}(x_f, t) + \partial f_i \quad (2.67)$$

où le terme  $\partial f_i$  impose une vitesse macroscopique du fluide à la paroi égale à la vitesse de la paroi (vitesse relative nulle entre le fluide et la particule). Si on considère que  $\mathbf{V}_0$  est la vitesse de la paroi, on obtient :

—  $q \geq 1/2$

$$\partial f_i = \frac{3}{q} w_i \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{e}_i \quad (2.68)$$

—  $q < 1/2$

$$\partial f_i = 6w_i \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{e}_i \quad (2.69)$$

où les termes  $w_i$  sont les poids de densité (2.23) et  $\mathbf{e}_i$  les vitesses (2.11).

### 2.3.2.2. Effet du fluide sur la particule

L'effet du fluide sur la particule est pris en compte par l'intermédiaire de la force hydrodynamique  $\mathbf{F}$  résultante que l'on ajoute aux forces externes dans l'équation de mouvement. Nous utilisons la méthode proposée par Ladd [120] basée sur les variations de quantité de mouvement au niveau de l'interface fluide-grain. En effet, pendant l'advection dans une direction  $i$  donnée, la fonction de distribution  $f_i(x_f, t)$  à une position  $x_f$  de l'interface rebondit sur la paroi et devient  $f_{iopp}(x_f, t + \Delta t)$ . La force hydrodynamique  $\partial \mathbf{F}$  résultante de cette interaction avec la paroi est donnée par :

$$\partial \mathbf{F} = (f_{iopp}(x_f, t + \Delta t) + f_i(x_f, t)) \mathbf{e}_i \quad (2.70)$$

Comme la fonction de distribution  $f_i(x_f, t)$  est propagée à la position  $x_s$ , nous avons  $f_i(x_s, t + \Delta t) = f_i(x_f, t)$ . Ainsi, pour obtenir la force hydrodynamique  $\mathbf{F}$ , on additionne toutes les forces  $\partial \mathbf{F}$  pour tous les nœuds  $x_s$  de l'interface ayant au moins un nœud fluide voisin.

### 2.3.2.3. Schéma de couplage LBM/DEM

On peut résumer toutes les étapes précédentes sous la forme du schéma de la Figure 2.29. A l'état initial (en haut à droite du schéma), l'échantillon granulaire est immergé dans le fluide. La première étape consiste à mailler les grain dans le domaine fluide et à affecter aux nœuds solides les vitesses des particules qui les recouvrent. On applique alors la procédure de collision et d'advection à l'ensemble des nœuds fluides du domaine et on obtient ainsi des nouvelles densités et vitesses du fluide. La force hydrodynamique exercée par le fluide sur chaque particule est obtenue par intégration des échanges de quantité de mouvement au niveau des frontières grains-fluide. Cette force est introduite dans les équations du mouvement de Newton. La résolution de

ces équations nous donne les nouvelles positions et vitesses des particules. Les positions des grains sont actualisées ainsi que leurs positions sur maillage discrétisé Lattice Boltzmann.

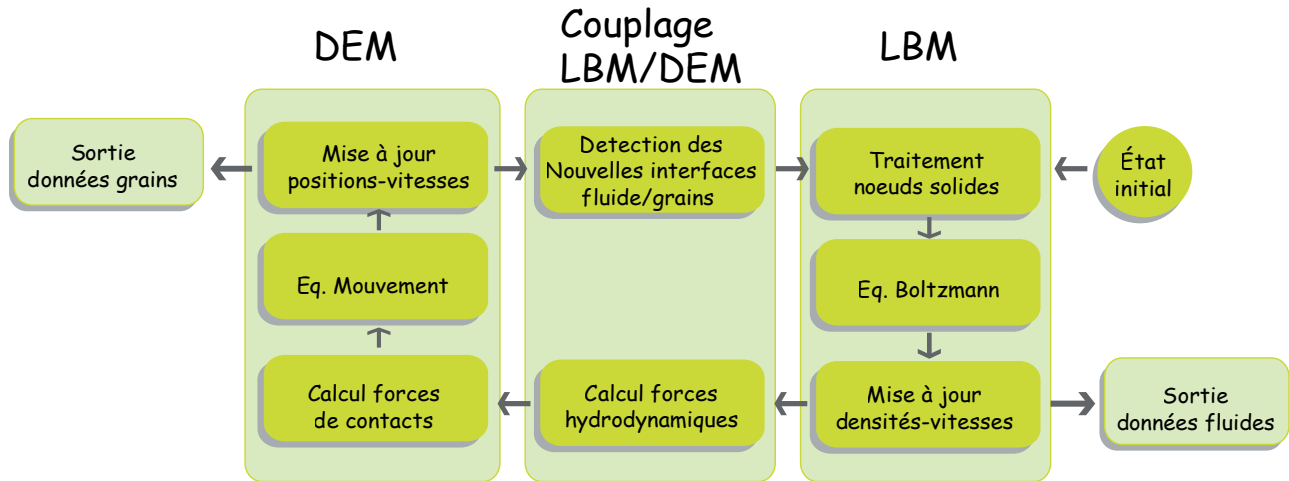


FIGURE 2.29: Schéma de couplage LBM/MD.

### 2.3.3. Tests de validation

Il existe différents tests proposés dans la littérature concernant le couplage grain-fluide en utilisant Lattice Boltzmann et DEM [152, 156]. Dans la suite de cette partie, on ne cherchera pas à être exhaustif mais plutôt à comparer la qualité des résultats de couplage en BGK et MRT.

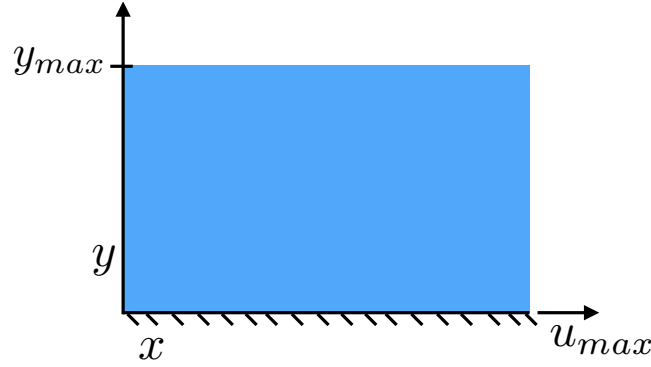
#### 2.3.3.1. Diffusion de la quantité de mouvement

Le but de ce cas test est de comparer la diffusion de la quantité de mouvement (en absence de gravité) transmise au fluide par une paroi mobile avec une solution analytique. La configuration choisie, où l'on considère un domaine bidimensionnel infini en contact avec une plaque plane horizontale, est schématisée sur la figure 2.30. A  $t = 0$  le fluide, initialement au repos, est instantanément mis en mouvement par l'intermédiaire de la plaque dont la vitesse imposée est  $u_x(y = 0) = u_{max}$ .

Dans cette configuration, les équations de Navier-Stokes admettent une solution exacte [162] et le profil de vitesse est donné par :

$$u_x(y, t) = u_{max}(1 - \operatorname{erf}(y/2\sqrt{\nu t})) \quad (2.71)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide. Pour la simulation, nous considérons que le domaine fluide a une hauteur  $y_{max}$  et est périodique selon l'axe  $x$ . Des conditions aux limites de type



**FIGURE 2.30:** Configuration géométrique constituée d'un domaine fluide et d'une plaque animée à  $t = 0$  d'une vitesse horizontale  $u_x(y = 0) = u_{max}$ .

Neumann avec une vitesse imposée  $u_{max}$  pour les nœuds qui sont au bord de la partie basse du domaine sont prises en compte et des conditions aux limites ouverte (OBC) sont appliquées aux nœuds du fluide qui sont sur la partie haute du domaine<sup>15</sup>. Pour le processus de collision, nous utilisons ici l'opérateur de collision MRT.

La figure 2.31a montre un bon accord entre les profils de vitesses obtenus pour différents temps de simulation et le profil exact donné par l'équation 2.71. En adimensionnant par la hauteur  $y$  par  $2\sqrt{\nu t}$  l'ensemble des courbes se met à l'échelle [162] (figure 2.31b). La figure 2.31(a) montre qu'on obtient la bonne mise à l'échelle des profils de vitesses.

### 2.3.3.2. Stabilité des champs de pression

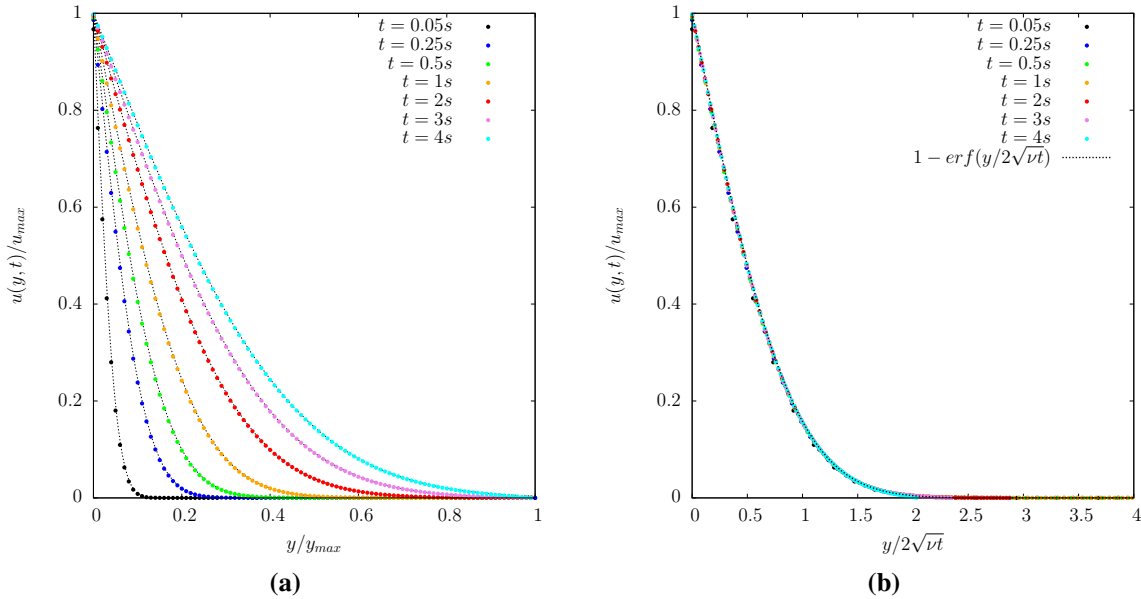
Pour observer la différence entre l'utilisation du modèle BGK et MRT, nous considérons la chute libre d'une particule soumise à la gravité dans un fluide. Dans ce cas, il est nécessaire de tenir compte de l'effet de la gravité sur la particule mais aussi sur le fluide. Celle-ci se traduit par l'apparition d'un gradient de pression hydrostatique. Pour cela, comme l'accélération de gravité  $\mathbf{g}$  est constante, on utilise une méthode directe qui consiste à appliquer cette accélération sur chaque nœuds du fluide en ajoutant un terme dans les fonctions de distribution de densité  $f_i$  avant l'étape de Streaming (Equation 2.20), selon la formule suivante [203, 118, 80, 88, 180] :

$$f_i^{out}(\mathbf{r}, t) = f_i^{in}(\mathbf{r}, t) + \Omega_i + \frac{w_i}{c_s^2} \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{e}_i \quad (2.72)$$

La viscosité du fluide est fixée à celle de l'eau  $\eta_w$  dans les deux cas.

La figure 2.32 montre les champs de pressions, de vitesses et de vorticités (donné par le rotationnel de la vitesse) en BGK et MRT. Les champs de vitesse et vorticités sont globalement très similaires avec apparition des instabilités de Von Karman. Par contre, si l'on considère le champ de pression, on constate des fluctuations importantes en BGK alors qu'elles restent très

15. Ceci permet de supprimer les effets de réflexion d'ondes aux parois.



**FIGURE 2.31:** (a) Comparaison entre les profils de vitesse obtenus numériquement pour différents temps de simulations avec la solution analytique donnée par l'équation (2.71) en fonction de la hauteur normalisé; (b) Mise à l'échelle des profils de vitesse en fonction de  $y/2\sqrt{\nu t}$  et comparaison avec la solution analytique.

faibles en MRT.

### 2.3.3.3. Mouvement d'une particule non-soumise à la gravité dans un écoulement plan

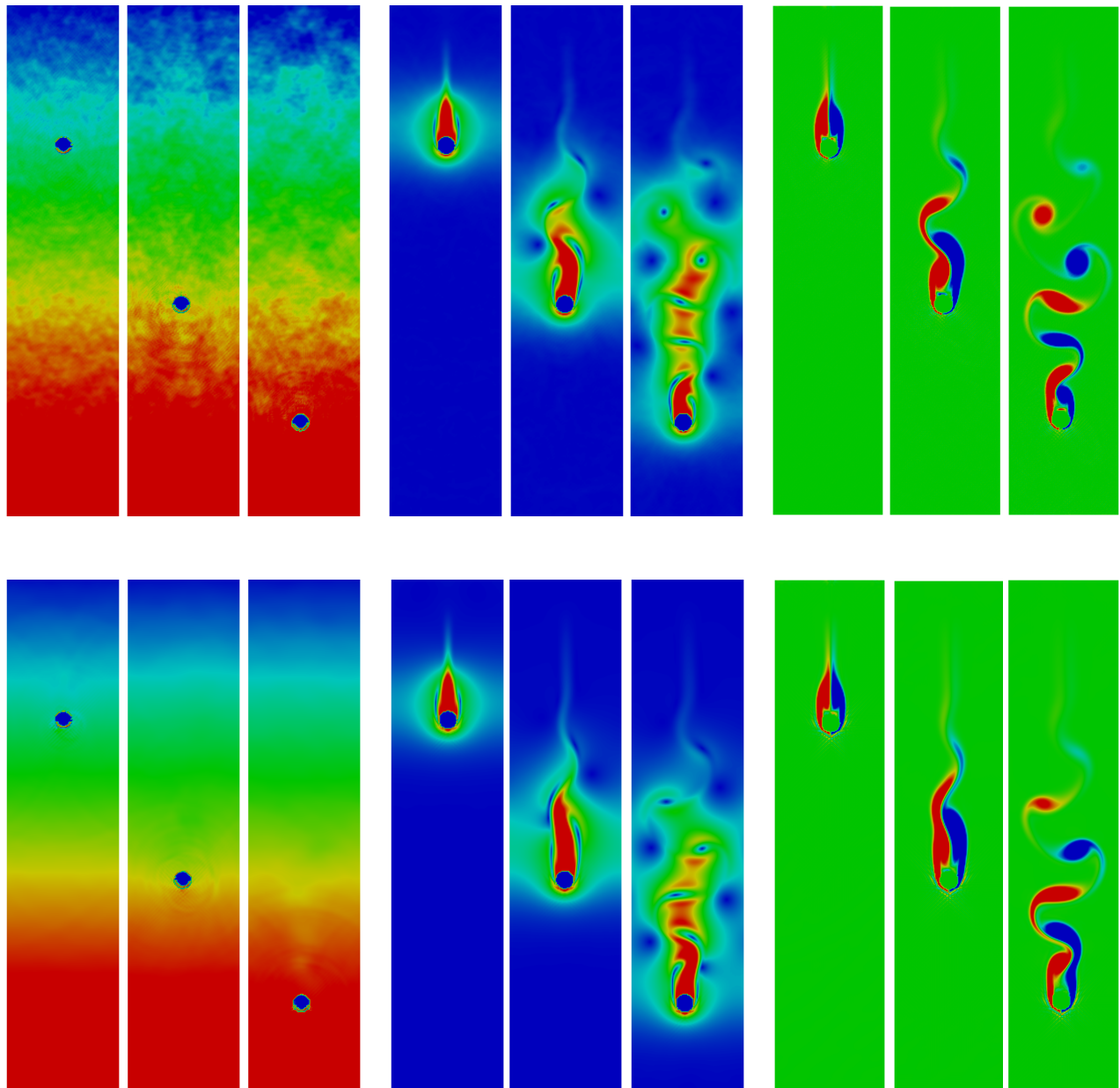
Un test classique de validation du couplage fluide grain consiste à étudier le mouvement d'une particule flottante plongée dans un fluide de même densité et soumise à un cisaillement plan de type Couette [66, 69, 70, 68, 157, 219]. La particule de rayon  $a$  et de densité  $\rho_p$  est placée dans un fluide de densité  $\rho_f = \rho_p$  située entre deux plaques de longueur  $L$  séparées par une distance  $H = 8a$  (figure 2.33). A  $t = 0$ , on impose un mouvement opposé, de magnitude  $U_w/2$ , aux deux plaques.

On considère le nombre de Reynolds  $Re$  de l'écoulement :

$$Re = \frac{U_w H}{\nu} \quad (2.73)$$

Quatre simulations (S1, S2, S3 et S4) sont réalisées avec le même nombre de Reynolds en faisant varier la vitesse et la longueur des deux plaques. Les paramètres choisis pour la simulation sont donnés dans le tableau 2.1.

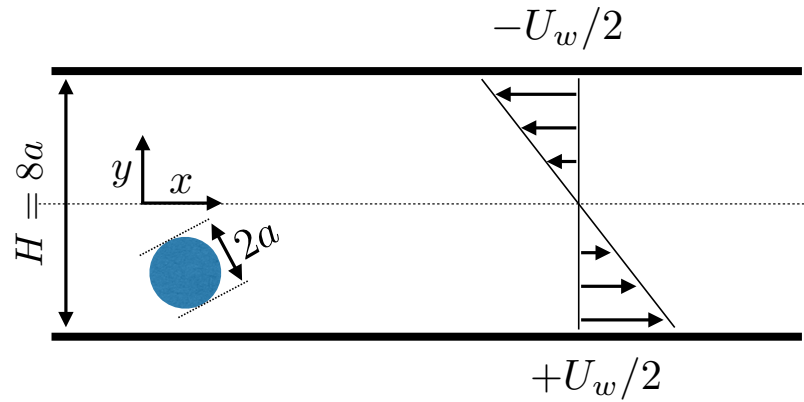
La figure 2.34 montre l'évolution de la position verticale  $y/H$  en fonction du temps adimensionné  $t^* = U_w t/H$ . On constate une très bonne adéquation des résultats obtenus comparés aux études de Feng et al. [68], Nui et al. [157] et Wu et al [219].



**FIGURE 2.32:** Chute de grain dans un fluide : visualisation des champs de pression, de vitesse et de vorticité pour différents temps de simulations. En haut, modèle BGK et, en bas, modèle MRT.

Les figures 2.35 montrent respectivement l'évolution des composantes horizontale  $u$  et verticale  $v$  de la vitesse de la particule adimensionnées par la vitesse  $U_w$ . Conformément aux résultats de la littérature la vitesse s'annule quand la particule rejoint le centre du domaine.

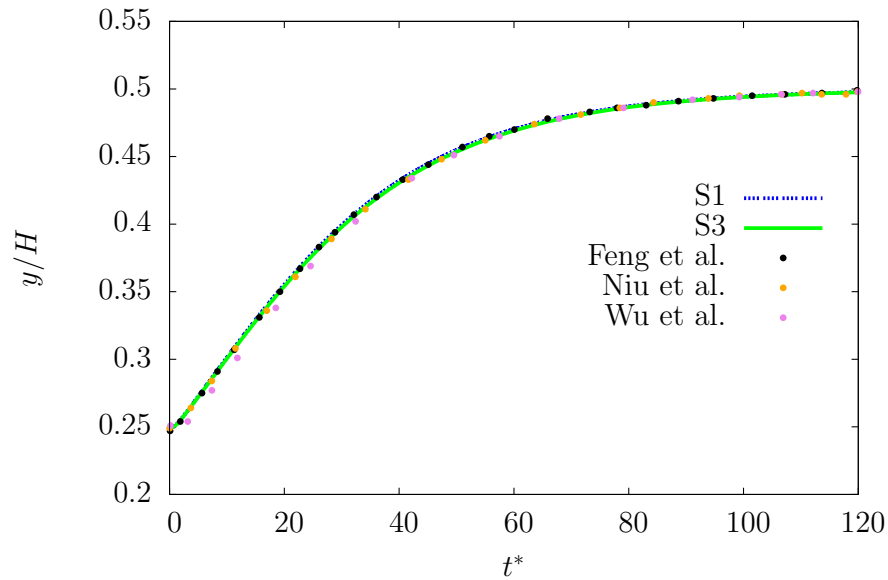
Dans les cas tests S2 et S4 pour lesquels la largeur  $L$  du domaine est réduite d'un facteur quatre par rapport à S1 et S2, la particule a le temps de parcourir l'ensemble du domaine. Du fait de la condition de périodicité en  $x$ , le grain sort du domaine pour reparaitre de l'autre coté.



**FIGURE 2.33:** Schémas d'une particule flottante dans un fluide entre deux plaques soumises à un cisaillement Couette plan.

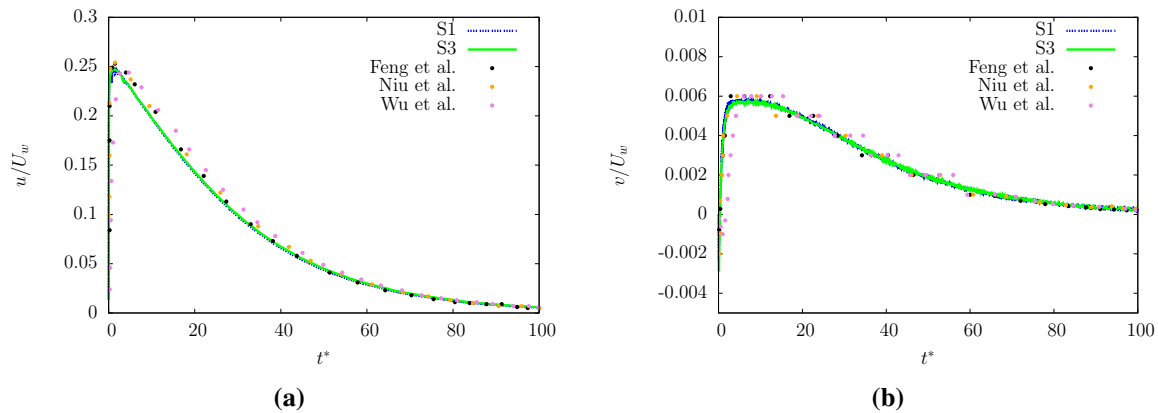
S1	S2	S3	S4
$c = \Delta x / \Delta t = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ; $Re = 40$ ; $H = 80$ ; $a = 10$			
$U_w/2 = 1/120$		$U_w/2 = 3/120$	
$L = 2000$	$L = 500$	$L = 2000$	$L = 500$

**TABLE 2.1:** Paramètres utilisés pour les quatre tests.



**FIGURE 2.34:** Evolution du rapport  $y/H$  en fonction du temps adimensionné  $t^*$ . Comparaison avec différentes données : Feng et al. [68], Nui et al. [157] et Wu et al [219].





**FIGURE 2.35:** Comparaison de l'évolution des deux composantes de la vitesse de la particule  $u(a)$  et  $v(b)$  en fonction du temps adimensionné  $t^*$  avec différentes données : Feng et al. [68], Niu et al. [157], Wu et al. [219].

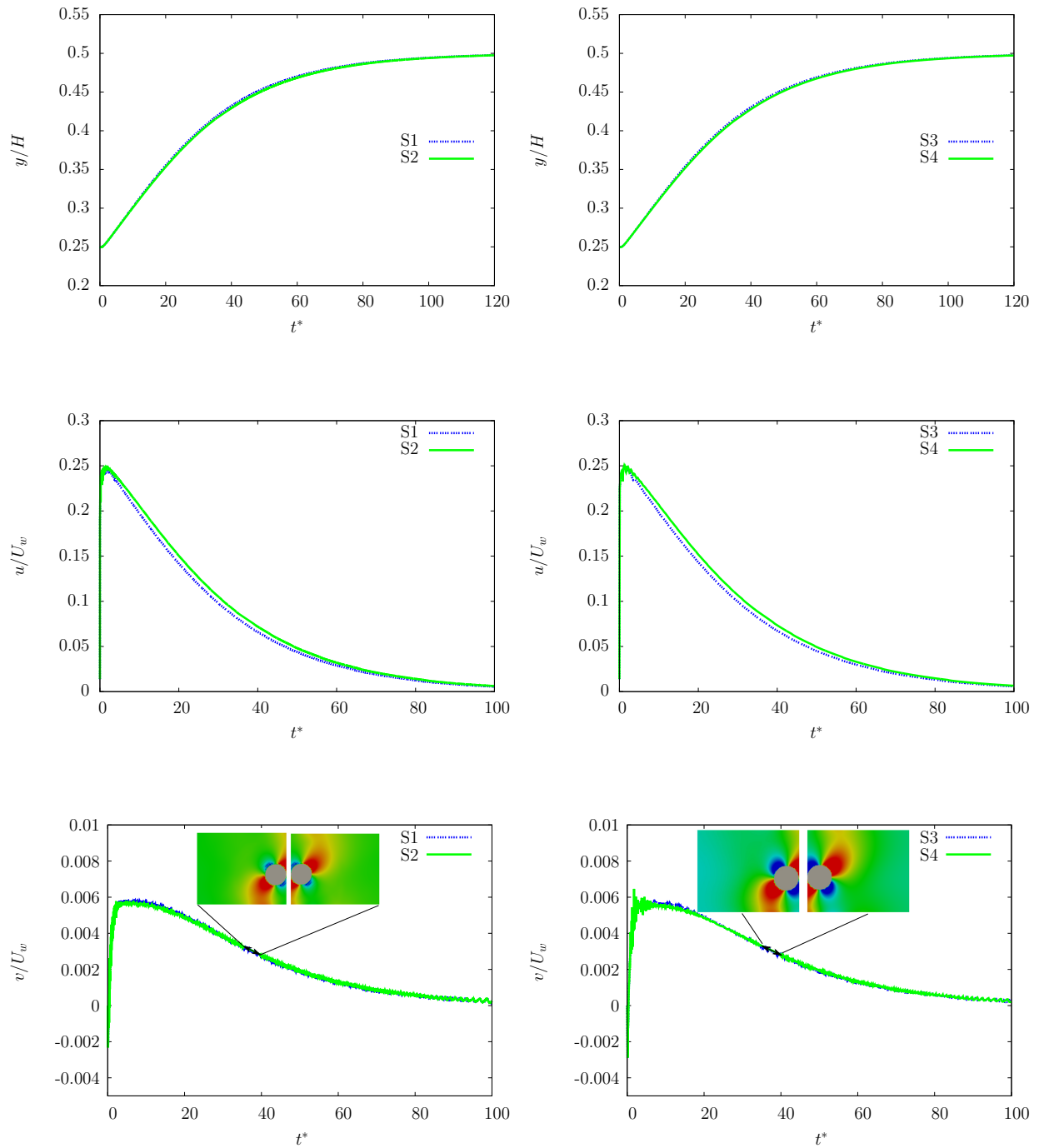
Les courbes de la figure 2.36 montrent que la perturbation due à ce passage aux limites et à la diminution de la longueur  $L$  du domaine est négligeable.

## Conclusion

La modélisation des fluides et des solides représente un enjeu majeur dans l'industrie depuis de nombreuses années. Cette situation a largement contribué à l'effort d'intégration de méthodes numériques puissantes dans des codes de calcul pour l'ingénieur. Ainsi, de nombreux codes dédiés à la simulation d'écoulements ou à l'analyse de structures mécaniques sont disponibles dans le commerce. Ceci n'est pas encore le cas pour les méthodes numériques couplant un fluide et un milieu granulaire malgré un intérêt considérable en technologie des poudres, dans l'industrie pétrolière, chimique... Les raisons principales viennent de la nécessité de disposer de ressources importantes pour le calcul et de la complexité des algorithmes qui restent encore souvent en phase de conception et de validation dans les laboratoires.

Dans ce chapitre nous avons choisi de faire un panorama rapide des enjeux et des difficultés pour mettre en œuvre des modèles couplant un fluide et un milieu granulaire. S'il existe de nombreux modèles possibles, nous avons choisi, pour des raisons de réalisme mais aussi d'efficacité numérique et de flexibilité dans l'implémentation, d'utiliser une approche en éléments discrets classique (DEM) pour la modélisation des grains associée à une méthode Lattice Boltzmann (LBM) pour le fluide.

La qualité des simulations LBM dépend fortement du choix de modélisation de l'opérateur de collision qui décrit le comportement des particules de fluide à la petite échelle. La discrétisation à un seul taux de relaxation (SRT ou BGK), largement utilisée dans la littérature, a été confrontée à une approche plus riche à plusieurs taux de relaxation (MRT). Cette dernière, pré-



**FIGURE 2.36:** Comparaison de l'évolution des positions et vitesses de la de la particule pour différents tests. Les images correspondent au passage de la particule périodique de  $x = L - a$  à  $x = a$  (les couleurs montrent le champ des pressions).

cise et stable, a été couplée à l'approche DEM et est utilisée dans les études présentées dans ce mémoire. La qualité des résultats a été examinée en les comparant à des modèles analytiques et à des données d'autres simulations disponibles dans la littérature. Cette comparaison a été réalisée essentiellement sur un grain, mais on notera qu'à l'heure actuelle il n'existe pas de véritable benchmark pour les simulations de mélanges fluide-grains denses. Dans le chapitre suivant, l'étude de la rhéologie du mélange constitue une base sérieuse de comparaison et de validation.



# Rhéologie des écoulements granulaires immergés

## Sommaire

---

<b>3.1. Introduction</b> . . . . .	<b>96</b>
<b>3.2. Le système simulé</b> . . . . .	<b>96</b>
<b>3.3. Paramètres de contrôle</b> . . . . .	<b>98</b>
<b>3.4. Le régime visqueux</b> . . . . .	<b>99</b>
3.4.1. Domaine paramétrique . . . . .	99
3.4.2. Frottement interne et compacité des écoulements . . . . .	102
3.4.3. Les viscosités effectives . . . . .	105
<b>3.5. Le régime visco-inertiel</b> . . . . .	<b>108</b>
3.5.1. Domaine paramétrique . . . . .	108
3.5.2. Unification de la rhéologie . . . . .	109
3.5.3. Relation contrainte-compacité . . . . .	115
3.5.4. Relation entre frottement interne et compacité . . . . .	117
<b>3.6. Suspension à l'échelle des grains</b> . . . . .	<b>119</b>
3.6.1. Connectivité des particules . . . . .	120
3.6.2. Anisotropies de l'écoulement . . . . .	123
3.6.3. Relation entre anisotropies et frottement interne . . . . .	126
<b>3.7. Conclusions</b> . . . . .	<b>129</b>

---

### 3.1. Introduction

Afin de comprendre le rôle du fluide dans divers processus tels que l'éjection et la relocalisation des fragments de combustible nucléaire lors d'un accident, il est nécessaire de connaître la rhéologie des milieux granulaires denses immergés dans un fluide. Contrairement aux suspensions diluées, le rôle du fluide dans les suspensions denses est en grande partie soumis à celui des interactions entre les grains. Dans ce chapitre, nous présentons une étude paramétrique détaillée de la rhéologie d'une suspension dense de grains dans un fluide visqueux soumis au cisaillement. Cette étude permet de préciser les rôles de différents paramètres des mélanges fluides-grains. Des expériences récentes réalisées sur les milieux granulaires immergés fournissent une opportunité de validation précieuse pour l'approche numérique mise en oeuvre. Cette approche permet ensuite d'approfondir l'analyse de la microstructure des écoulements et des mécanismes physiques sous-jacents aux comportements observés.

Pour obtenir la plus grande homogénéité de l'écoulement, nous avons appliqué le cisaillement sur le fluide avec des conditions aux limites périodiques dans la direction de l'écoulement tandis que la contrainte de confinement est appliquée exclusivement sur la phase granulaire. Les paramètres de l'étude sont donc la contrainte de confinement  $\sigma_s$  (l'index 's' indique la phase solide), le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , la viscosité du fluide  $\eta_f$  (l'index 'f' indique la phase fluide) et le rapport des densités  $\rho_f/\rho_s$ . Les gammes considérées des valeurs de ces paramètres sont tels que les effets inertiels du fluide sont petits devant ceux des grains. Ainsi, dans ce chapitre, le régime "inertiel" se réfère uniquement à l'inertie des grains. Dans cette limite, l'inertie du fluide s'exprime essentiellement à travers ses interactions avec l'assemblage granulaire.

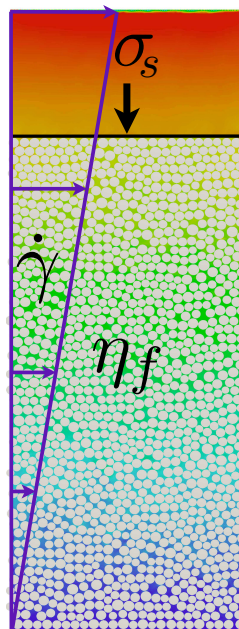
Dans la suite de ce chapitre, nous décrirons le système simulé avec ses paramètres et conditions aux limites. Nous étudions ensuite l'effet de la viscosité du fluide sur les écoulements pour montrer que pour la mise à l'échelle du comportement rhéologique, il est possible de remplacer le temps inertiel employé pour écoulements granulaires secs par le temps de Stokes ou le temps de relaxation sous l'effet des forces de trainée. Nous étendrons cette étude au régime visco-inertiel et la possibilité d'unifier les régimes visqueux et inertiel dans un seul cadre décrit par un seul paramètre adimensionnel. Enfin, nous étudierons le lien entre le coefficient de frottement interne et les anisotropies des réseaux des contacts et des forces en fonction du paramètre de contrôle.

### 3.2. Le système simulé

La Figure 3.1 présente un schéma du système simulé. Le domaine fluide est rectangulaire, fixe et périodique suivant la direction de l'écoulement  $x$ . La phase granulaire est composée de 1253 disques rigides de diamètre moyen  $d = 2.5 \times 10^{-3}$  m, avec une polydispersité de taille telle que le diamètre minimal  $d_{min}$  est 0.6 fois le diamètre maximal  $d_{max}$  et la distribution des volumes est uniforme. Cette distribution granulométrique assure une répartition homogène des classes de taille des particules et une compacité élevée à l'état d'équilibre. Dans les études

présentées dans ce chapitre, la densité des particules est fixée à  $\rho_s = 2.6\rho_f$ . Le domaine des grains est inclu dans le domaine fluide avec des conditions périodiques (comme pour le fluide) dans la direction  $x$ , la paroi inférieure est fixe et la paroi supérieure est soumise à une pression de confinement  $\sigma_s$  et complètement perméable au fluide. Ces conditions permettent ainsi à la contrainte normale  $\sigma_s$  d'agir uniquement sur la phase solide tandis que la paroi supérieure est libre de se déplacer sous l'effet du cisaillement. Le coefficient de frottement est nul entre cette paroi et les particules. Afin d'éviter le glissement en bloc du milieu granulaire sur la paroi inférieure du système, on impose une vitesse de glissement nulle aux grains en contact avec la paroi, ce qui revient à recouvrir la paroi inférieure par une rangée de grains. La gravité  $g$  est négligée dans ces études.

A l'état initial, le fluide est au repos et les particules sont compactées sous l'effet d'une pression de confinement initiale  $\sigma_s = 51$  Pa avec une compacité au repos égale à  $\phi_i = 0.84$ . Le cisaillement est appliqué non pas sur les grains mais sur le fluide aux bords gauche et droit du domaine et uniformément le long de l'axe  $y$ , ce qui permet d'obtenir un cisaillement fluide de type Couette plan. Le fluide cisailé entraîne les particules et permet d'obtenir un écoulement homogène du mélange fluide-grains. La configuration initiale évolue et tend vers un état stationnaire caractérisé notamment par une compacité  $\phi$  et un coefficient de frottement  $\mu$  constants dans le temps. Sauf mention contraire, ces symboles désignent dans la suite de ce chapitre les valeurs stationnaires de ces variables.



**FIGURE 3.1:** Le système simulé et les conditions aux limites utilisées pour l'étude des suspensions denses.

### 3.3. Paramètres de contrôle

Nous nous sommes intéressés ici à l'effet du fluide sur les écoulements granulaires. Dans l'étude des suspensions, on s'intéresse généralement à l'effet de la présence des grains en suspension sur la viscosité du fluide. La contrainte dominante dans notre cas est donc la contrainte de confinement  $\sigma_s$ . La force moyenne sur un grain dans l'assemblage est de l'ordre de  $F_s = \sigma_s d$  (en 2D). L'ordre de grandeur de la force exercée par le fluide cisailé sur un grain est  $F_v = \eta_f \dot{\gamma} d$ . Il faut ajouter à ces forces la force inertielle ou la force de Bagnold qui résulte des collisions entre grains. Ces forces  $F_i$  résultent des échanges de quantité de mouvement  $m d \dot{\gamma}$  entre les couches cisailées, où  $m \sim \rho_s d^2$  est la masse moyenne des grains, avec un temps caractéristique égal au temps d'écoulement  $\dot{\gamma}^{-1}$ , ce qui donne  $F_i = \rho_s (d \dot{\gamma})^2 d$ .

On peut dimensionnellement associer un temps caractéristique  $t$  à chaque force  $F$  par la relation  $t^2 = md/F$ . Pour les trois forces qui nous intéressent, les temps associés sont les suivants :

$$t_s = d \left( \frac{\rho_s}{\sigma_s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

$$t_i = \dot{\gamma}^{-1} \quad (3.2)$$

$$t_v = d \left( \frac{\rho_s}{\eta_f \dot{\gamma}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

que nous appellerons respectivement le temps d'équilibre, le temps inertiel et temps visqueux.  $t_i$  est le temps de cisaillement imposé sur le système, alors que  $t_s$  et  $t_v$  sont des temps de réponse internes sous l'effet de la contrainte imposée  $\sigma_s$  et sous l'effet des forces visqueuses.

Il faut remarquer que le temps caractéristique  $t_v$  est différent du temps de Stokes  $t_e$  donné par :

$$t_e = \frac{\eta_f}{\sigma_s} \quad (3.4)$$

Ce temps est celui d'un grain qui se déplace d'une distance égale à son diamètre avec sa vitesse terminale dans le fluide sous l'action de la force  $F_s$ . Notons que les quatre temps cités plus haut sont reliés par la relation

$$\frac{t_e}{t_i} = \left( \frac{t_s}{t_v} \right)^2 \quad (3.5)$$

La différence entre les relations (3.3) et (3.4) réside dans le fait que dans le premier cas le grain se déplace sous le seul effet de la force exercée par le fluide alors que dans le deuxième cas les deux forces  $\sigma_s d$  et  $\eta_f \dot{\gamma} d$  agissent simultanément.

Boyer et al. [30] ont utilisé le temps de Stokes pour l'analyse de leurs expériences. Leur idée de base est la suivante : En l'absence du fluide, la rhéologie est uniquement caractérisée par le nombre inertiel  $I$  défini par :

$$I = \frac{t_s}{t_i} = \dot{\gamma} d \left( \frac{\rho_s}{\sigma_s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$



En présence du fluide, le temps de retour à l'équilibre  $t_s$  sous l'effet de  $\sigma_s$  doit être modifié dans la mesure où les grains ne sont plus soumis uniquement à la contrainte de confinement mais aussi à l'action visqueuse du fluide  $\eta_f \dot{\gamma}$ . Si le fluide est suffisamment visqueux, un grain atteint rapidement sa vitesse terminale  $\sigma_s d / \eta_f$  et le temps est donné par la longueur  $d$  divisés par cette vitesse, ce qui donne le temps de Stokes (3.4). Un nombre sans dimension est alors défini par le rapport entre le temps de Stokes et le temps inertiel :

$$J' = \frac{t_e}{t_i} = \frac{\eta_f \dot{\gamma}}{\sigma_s} \quad (3.7)$$

Les expériences montrent que dans un fluide très visqueux, ce nombre  $J'$  (appelé  $I_v$  par Boyer et al. [30]) permet en effet de décrire la rhéologie des écoulements denses de mélanges fluide-grains en remplaçant le nombre inertiel  $I$ .

Même si le paramètre  $J'$  décrit bien les écoulements dans un fluide très visqueux, il ne permet pas de prendre en compte l'inertie des grains et les contraintes de Bagnold. Pour ré-introduire le nombre  $I$ , il faut considérer séparément les trois forces caractéristiques  $F_s$ ,  $F_i$  et  $F_v$ . Les trois temps  $t_s$ ,  $t_i$  et  $t_v$  associés respectivement à chacune de ces forces dans l'équation (3.3) permettent de définir deux nombres sans dimension :

$$I = \frac{t_s}{t_i} = \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_s} \right)^{\frac{1}{2}} = \dot{\gamma} d \left( \frac{\rho_s}{\sigma_s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

$$J = \frac{t_s}{t_v} = \left( \frac{\sigma_v}{\sigma_s} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\eta_f \dot{\gamma}}{\sigma_s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

On constate que  $J' = J^2$  en accord avec la relation (3.5). Un troisième nombre sans dimension est simplement le nombre de Stokes :

$$St = \left( \frac{t_v}{t_i} \right)^2 = \frac{\sigma_i}{\sigma_v} = \frac{I^2}{J^2} = \frac{\rho_s d^2 \dot{\gamma}}{\eta_f} \quad (3.10)$$

Dans la suite, nous étudierons l'effet de la viscosité du fluide pur  $\eta_f$  sur le cisaillement. Cela revient à fixer  $I$  et faire varier  $J$ . Nous montrerons que, comme dans les études expérimentales de Boyer et al. [30] et numériques de Trulsson et al. [200], on obtient la bonne mise à l'échelle des données avec  $J$  (ou alternativement avec  $J'$ ). Ensuite, nous traiterons le cas général des écoulements en fonction de  $I$  et  $J$ .

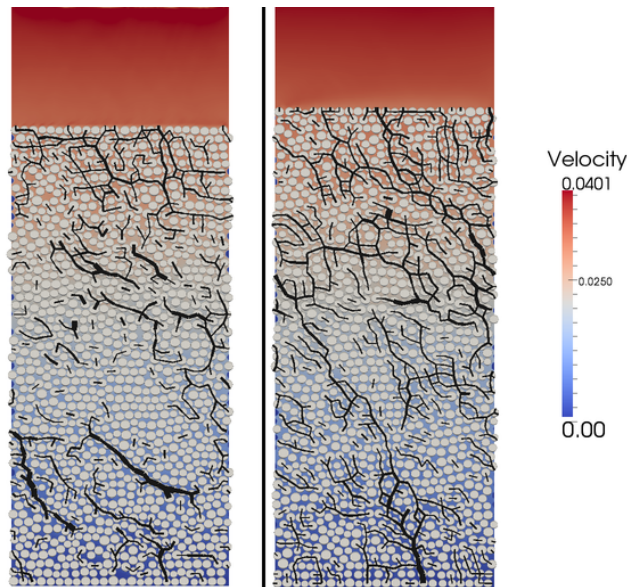
## 3.4. Le régime visqueux

### 3.4.1. Domaine paramétrique

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à l'influence de la viscosité du fluide sur l'écoulement en régime visqueux en fixant le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  et la pression de confinement  $\sigma_s$ . L'objectif est de montrer qu'une description granulaire de la rhéologie (en termes d'un

coefficient de frottement) est possible avec  $J$  comme paramètre de contrôle. Nous considérons 11 valeurs différentes de la viscosité  $\eta_f$  variant entre celle de l'eau  $\eta_w$  et  $100\eta_w$  par pas de  $10\eta_w$ . Le taux de cisaillement et la pression de confinement sont respectivement fixés à  $\dot{\gamma} = 3.75 \text{ s}^{-1}$  et  $\sigma_s = 51 \text{ Pa}$ . Le nombre de Stokes  $St = \rho_s d^2 \dot{\gamma} / \eta_f$  varie donc de 0.6 à 60. La valeur du nombre inertiel est fixe et égal à  $I \simeq 0.066$ . La valeur de  $J$  varie de 0.0086 à 0.086 lorsque  $\eta_f$  varie de  $\eta_w$  à  $100\eta_w$ .

La Figure 3.2 montre deux images à l'état stationnaire de deux simulations numériques pour les deux valeurs extrêmes de la viscosité. On voit clairement une différence de hauteur (et donc de compacité) de l'échantillon avec  $\eta_f = \eta_w$  par rapport au cas  $\eta_f = 100\eta_w$ . La compacité stationnaire  $\phi$  est plus faible pour le fluide le plus visqueux. Cet exemple montre que pour la gamme choisie des valeurs de  $J$ , l'effet de la viscosité du fluide s'exprime bien.



**FIGURE 3.2:** Deux clichés de deux écoulements stationnaires simulés : à gauche pour  $\eta_f = \eta_w$  et à droite pour  $\eta_f = 100\eta_w$ . Les largeurs des traits noirs sont proportionnelles aux forces de contact entre grains.

Pour étudier l'homogénéité de la compacité selon la hauteur, nous avons divisé l'échantillon granulaire en plusieurs couches. La Figure 3.3 montre le profil de la compacité. Celle-ci est constante en fonction de la hauteur mais fluctue au voisinage des parois. Dans la suite, nous utiliserons une moyenne des grandeurs calculées dans la zone où ces effets de bords sont absents. Pour cela, nous avons choisi un domaine d'étude plus petit en excluant une épaisseur égale à  $5d$  des parties supérieure et inférieure du domaine granulaire. Mises à part ces zones, le système est homogène avec une valeur de  $\phi$  pratiquement indépendante de la hauteur.

La Figure 3.4 montre  $\phi$  en fonction du temps pour différentes valeurs de la viscosité. La

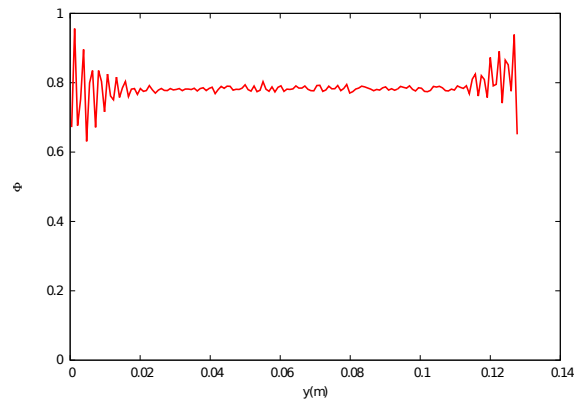


FIGURE 3.3: La compacité en fonction de la hauteur.

compacité initiale étant celle d'un matériau compact,  $\phi$  diminue pour atteindre une valeur stationnaire quasi-constante. Cette évolution traduit la dilatance sous l'effet du cisaillement des grains par le fluide. La variation est d'autant plus importante que la viscosité est grande. Dans l'état stationnaire, le profil des vitesses  $v_x$  des particules selon la direction de l'écoulement coïncide avec celui des vitesses du fluide pour chaque viscosité imposée ; voir Figure 3.5.

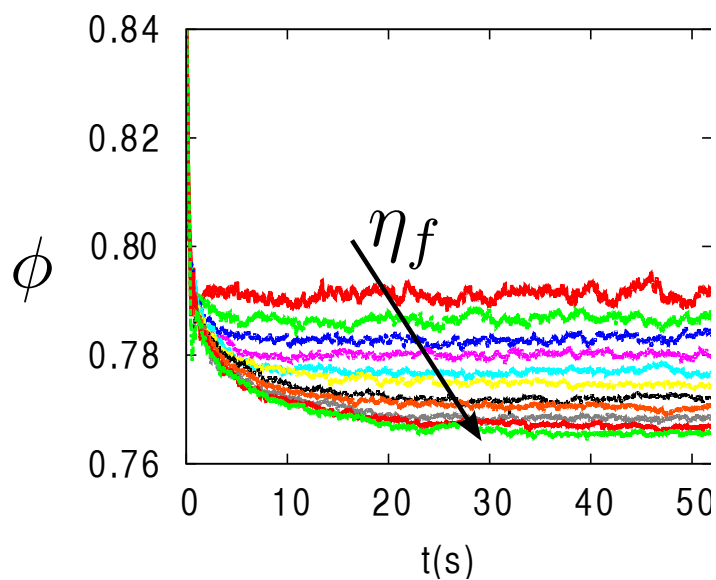


FIGURE 3.4: Evolution de la compacité  $\phi$  en fonction du temps.

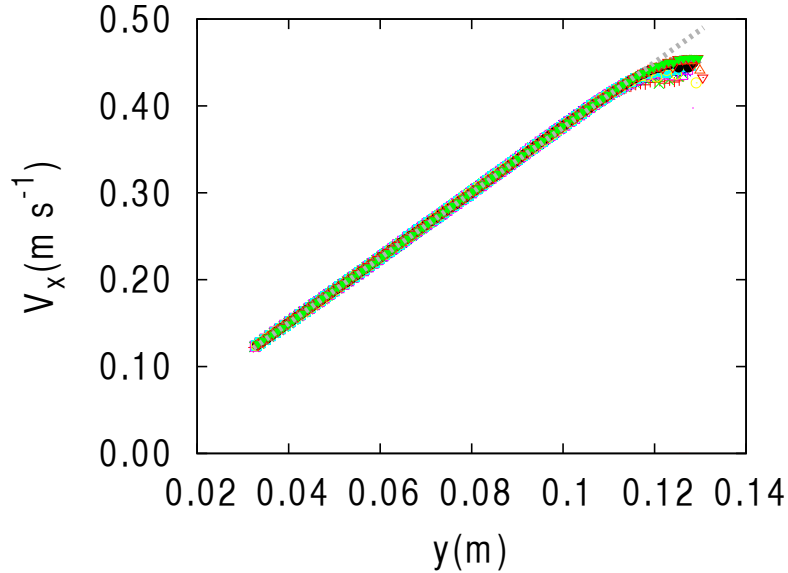


FIGURE 3.5: Profil des vitesses des grains en fonction de la hauteur.

### 3.4.2. Frottement interne et compacité des écoulements

Pour calculer le coefficient de frottement de l'écoulement, on évalue le tenseur des contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$  à partir des forces de contact (voir la section 3.6.). La composante verticale  $\sigma_n = \sigma_{yy}$  est perpendiculaire à la direction de l'écoulement et elle équilibre la contrainte imposée  $\sigma_s$ . La composante cisailante  $\tau = \sigma_{yx}$  est parallèle à l'écoulement et elle représente la résistance de l'assemblage à l'écoulement. Le coefficient de frottement interne est défini par

$$\mu = \frac{\tau}{\sigma_n} \quad (3.11)$$

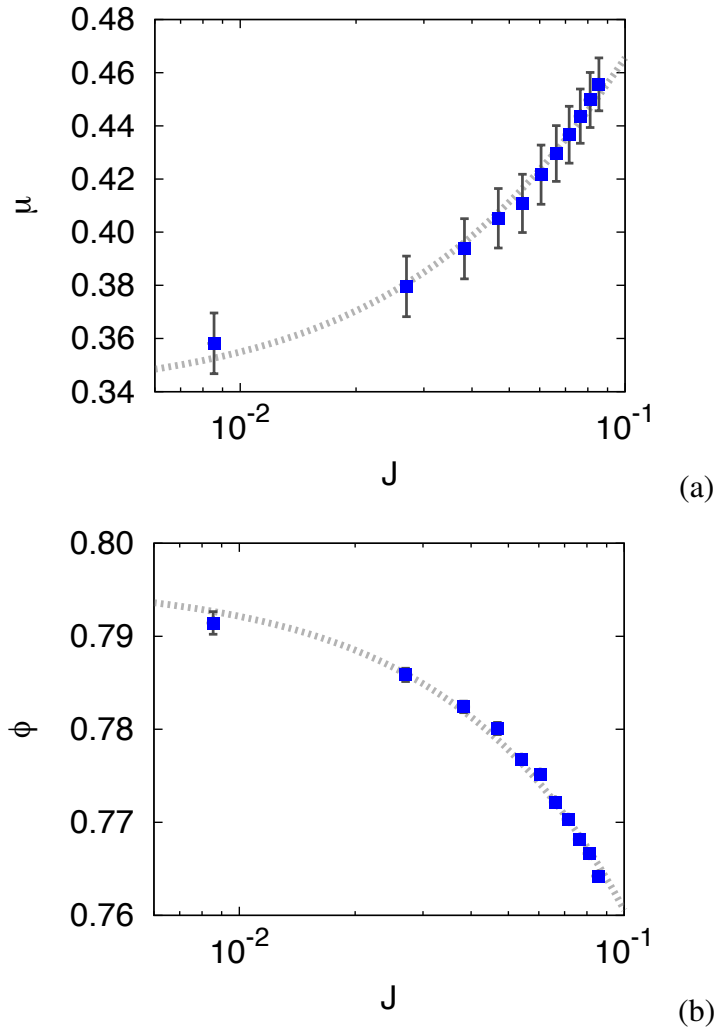
Pour obtenir une valeur représentative de  $\mu$ , sa valeur est moyennée sur l'état stationnaire pour une déformation de l'ordre de 100%. L'écart-type des fluctuations de  $\mu$  sur cet intervalle définit la barre d'erreur portée sur les figures.

La Figure 3.6 montre  $\mu$  et  $\phi$  dans l'état stationnaire en fonction de  $J$ . Le frottement interne  $\mu$  augmente avec le nombre visqueux de 0.35 à 0.46. Il est assez bien approché par la fonction suivante :

$$\mu = \mu_c + \frac{\mu_{max} - \mu_c}{1 + J_0/J} \quad (3.12)$$

avec  $\mu_c = 0.338 \pm 0.003$ ,  $\mu_{max} = 0.83 \pm 0.015$  et  $J_0 = 0.290 \pm 0.004$ . La forme de cette fonction est celle habituellement utilisée pour le régime inertiel des écoulements secs avec  $I$  comme paramètre de contrôle. Le fait que la même forme ajuste les données indique un dénominateur commun entre les effets du fluide et ceux de l'inertie des grains induits par le cisaillement [30]. Dans les deux cas, le paramètre important de l'écoulement est le rapport entre un temps de réponse interne et le temps imposé par le cisaillement. Le fait que cette forme convient dans les deux cas signifie que  $J$  est un bon paramètre de contrôle et que l'effet du fluide dans le

régime visqueux est très similaire à l'effet de l'inertie des grains. La seule différence est dans l'origine des contraintes : dans le cas inertiel, ce sont les collisions qui induisent une contrainte interne supplémentaire en plus de  $\sigma_s$  alors que dans le cas visqueux, c'est le fluide qui induit la contrainte interne supplémentaire. Il est aussi remarquable que les valeurs numériques des paramètres de fit sont très proches de celles obtenues dans une étude similaire en utilisant un modèle simplifié pour la phase fluide [200]. Rappelons ici que ces auteurs ont utilisé  $J'$  dans leurs analyses.



**FIGURE 3.6:** Evolution du coefficient de frottement interne  $\mu$  (a) et de la compacité  $\phi$  (b) en fonction du nombre visqueux  $J$ . Les "fits" sont ceux donnés respectivement par les équations (3.12) et (3.13).

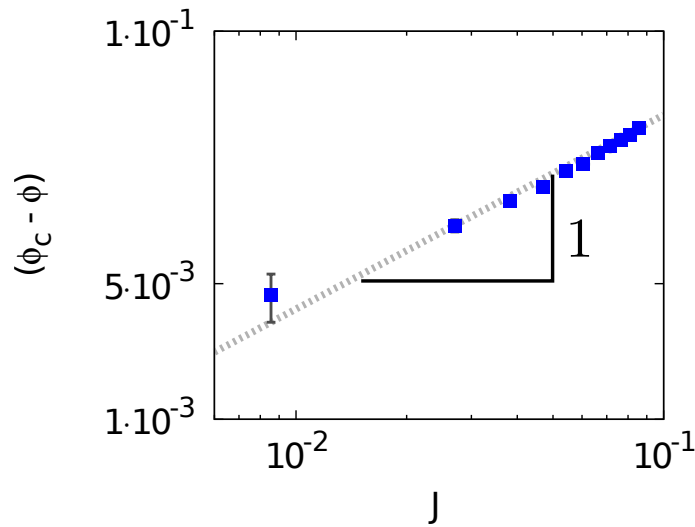
La compacité  $\phi$  décroît en fonction de  $J$  de 0.791 à 0.764. Cette décroissance est bien approchée par la fonction suivante qui a été utilisée pour les données expérimentales [30] :

$$\phi(J) = \frac{\phi_c}{1 + aJ} \quad (3.13)$$

avec  $a \simeq 0.46 \pm 0.01$  (sa valeur étant égale à 1 dans le cas expérimental) et  $\phi_c \simeq 0.7958 \pm 0.0007$ . Comme dans le cas expérimental, la compacité  $\phi$  tend vers  $\phi_c$  lorsque  $J$  diminue. Cette convergence s'exprime simplement sous la forme :

$$\frac{\phi_c - \phi}{\phi} \propto J \quad (3.14)$$

Ce scaling est en excellent accord avec nos données comme on peut le voir sur la Figure 3.7.



**FIGURE 3.7:** Mise à l'échelle de l'écart  $\phi_c - \phi$  de la compacité par rapport à la compacité critique avec le nombre visqueux.

De même, en éliminant le nombre visqueux entre les deux équations (3.12) et (1.55), on obtient une relation entre le frottement interne  $\mu$  et la compacité  $\phi$  :

$$\mu = \mu_c + \frac{\mu_{max} - \mu_c}{1 + aJ_0\phi/(\phi_c - \phi)} \quad (3.15)$$

La Figure 3.8 montre que cette forme approche bien nos données pour la gamme des valeurs de  $J$  considérées dans cette étude. Nous verrons dans la section 3.5.4. que la relation entre  $\mu$  et  $\phi$  s'exprime d'une manière générale sous une forme beaucoup plus simple et générique ne faisant intervenir qu'un paramètre d'ajustement.

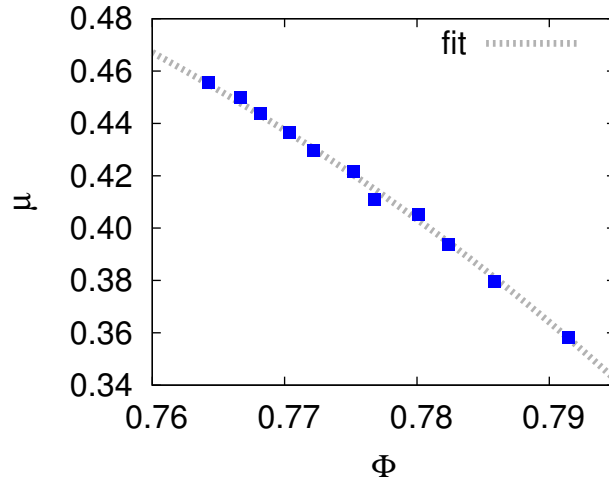


FIGURE 3.8: Le coefficient de frottement interne en fonction de la compacité. Le “fit” est celui donné par l’équation (3.15).

### 3.4.3. Les viscosités effectives

A partir de la description de l’écoulement du mélange à contrainte normale imposée, on peut obtenir la viscosité effective de cisaillement  $\eta_t$  et la viscosité normale  $\eta_n$  du mélange dans un cisaillement à compacité imposée. Ce lien entre les deux descriptions “frottant” et “visqueux” de l’écoulement du mélange a été introduit par Boyer et al. [30] et appliqué en particulier pour obtenir la divergence algébrique des viscosités du mélange  $\eta_t(\phi)$  et  $\eta_n(\phi)$  en fonction de  $\phi_c - \phi$ . Dans un écoulement à contrainte  $\sigma_n$  imposée et égale à  $\sigma_s$ ,  $\phi$  est une variable libre qui dépend de  $J$ . Dans un écoulement à compacité imposée, c’est  $\sigma_n$  qui est libre et dépend de  $J$ . Mais le matériau et les mécanismes physiques (géométrie, dissipation, ...) étant les mêmes dans les deux cas, on doit pouvoir obtenir une équivalence entre un écoulement décrit par  $(\mu(J), \phi(J))$  et le comportement de l’écoulement décrit par  $(\eta_t(\phi), \eta_n(\phi))$ . A  $\phi$  imposée,  $\eta_f \dot{\gamma} = \sigma_n J^2$  est la seule contrainte interne du matériau, et donc les contraintes normale et cisailante doivent se mettre à l’échelle avec cette contrainte :

$$\tau = c_t(\eta_f \dot{\gamma}) = \eta_t \dot{\gamma} = c_t \sigma_s J^2 \quad (3.16)$$

$$\sigma_n = c_n(\eta_f \dot{\gamma}) = \eta_n \dot{\gamma} = c_n \sigma_s J^2 \quad (3.17)$$

Les viscosités effectives sont alors données par  $\eta_t = c_t \eta_f$  et  $\eta_n = c_n \eta_f$  qui sont indépendantes de  $\dot{\gamma}$ . Comme  $\sigma_n = \sigma_s$  est imposée directement sur la phase granulaire, on en déduit les relations suivantes

$$\eta_t = \frac{\mu \eta_f}{J^2} \quad (3.18)$$

$$\eta_n = \frac{\eta_f}{J^2} \quad (3.19)$$

La figure 3.9 présente  $c_t = \eta_t/\eta_f$  et  $c_n = \eta_n/\eta_f$  en fonction de  $\phi$  calculés en utilisant ces relations et nos données numériques de l’écoulement à contrainte imposée. Les viscosités

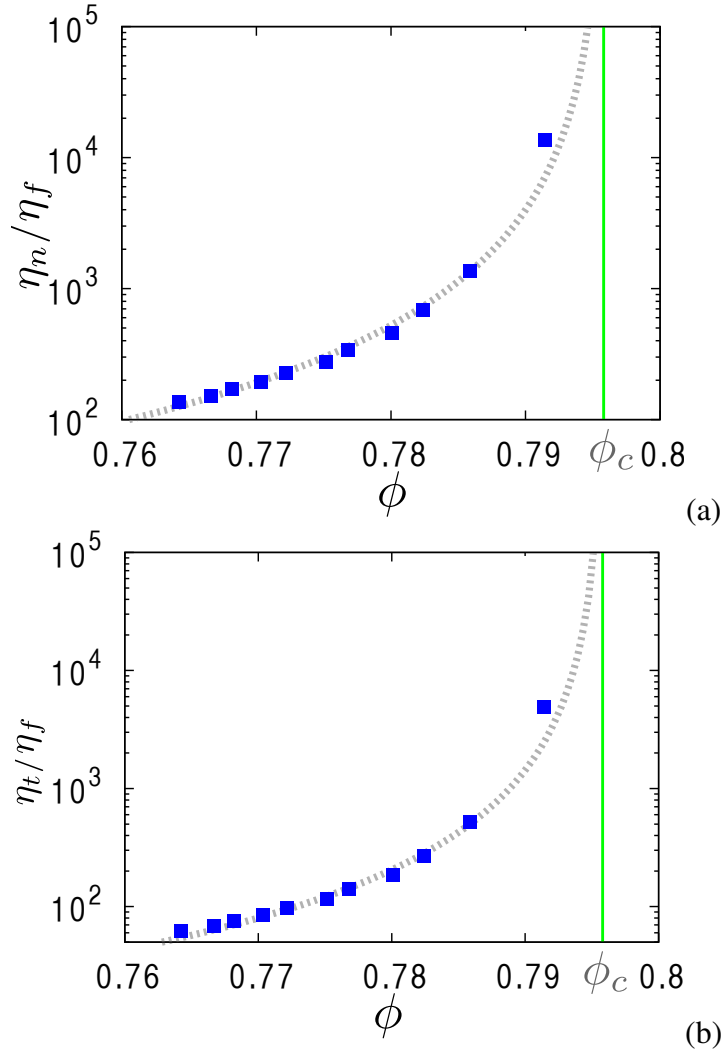
augmentent avec  $\phi$  et divergent lorsque  $\phi$  tend vers  $\phi_c$ . En utilisant les relations (3.18) et (3.19) avec les équations (3.12) et (3.13), on obtient également les expressions suivantes pour les viscosités :

$$\frac{\eta_n}{\eta_f} = a^2 \left( \frac{\phi}{\phi_c - \phi} \right)^2 \quad (3.20)$$

et

$$\frac{\eta_t}{\eta_f} = a^2 \left( \frac{\phi}{\phi_c - \phi} \right)^2 \left\{ \mu_c + \frac{\mu_{max} - \mu_c}{1 + aJ_0 \frac{\phi}{\phi_c - \phi}} \right\} \quad (3.21)$$

Ces expressions ajustent bien les données sur la figure 3.9. On obtient en particulier une divergence des viscosités en  $(\phi_c - \phi)^{-2}$  en accord avec des mesures expérimentales [30, 25].

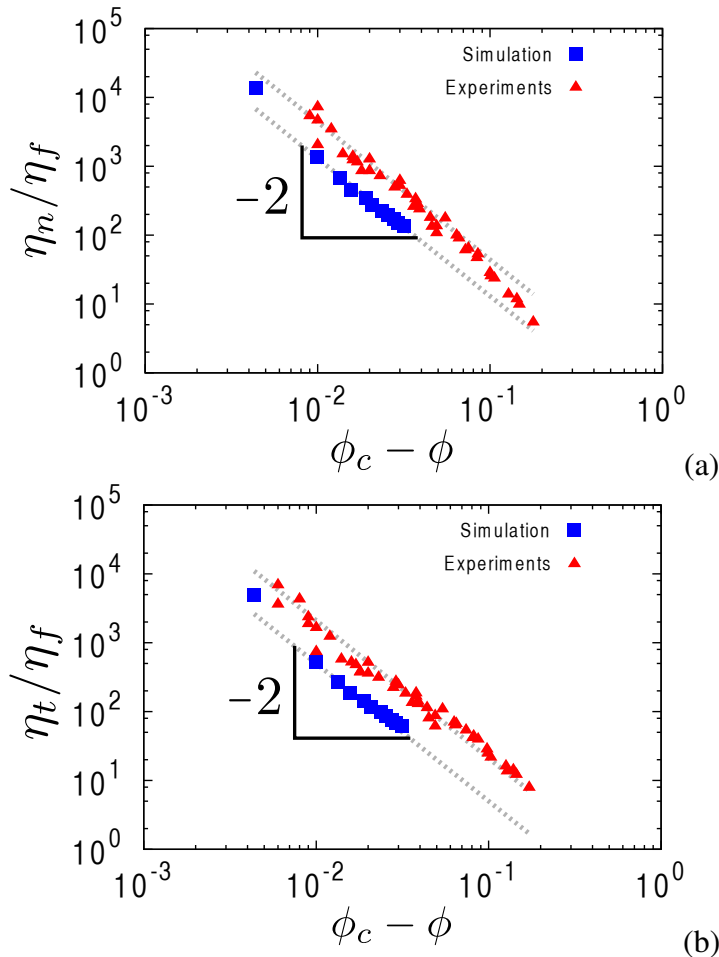


**FIGURE 3.9:** Viscosité normale (a) et de cisaillement (b) en fonction de la compacité. Les fits sont donnés par les équations (3.20) et (3.21), respectivement.

La Figure 3.10 montre nos données ainsi que celles de Boyer et al. [30]. On observe expli-



citement la divergence des deux viscosités effectives en  $(\phi_c - \phi)^{-2}$  dans les deux cas. L'écart entre nos données numériques et celles issues de l'expérience est lié aux valeurs différentes du paramètre  $a$ . Seul le point correspondant à la viscosité  $\eta_f = \eta_w$  sort du fit. Cela s'explique par le fait que les données expérimentales ont été obtenues dans les conditions où les forces hydrodynamiques dominant par rapport aux forces dues à l'inertie des particules, c'est à dire avec un nombre de Stokes bien inférieur à 1 alors que dans notre cas les effets inertiels ne sont pas négligeables. Il faut également noter que nous ne nous attendons pas à ce que les fits "théoriques" puissent décrire la dépendance des viscosités effectives pour les valeurs faibles de  $\phi$ . Dans les écoulements dilués, les viscosités sont modifiées par l'effet des grains sur les champs hydrodynamiques.



**FIGURE 3.10:** Viscosité normale (a) et de cisaillement(b) en fonction de la compacité pour nos données numériques et les données expérimentales [30].

Les résultats présentés précédemment indiquent clairement la capacité des simulations 2D par un couplage DEM-LBM de reproduire la rhéologie des mélanges fluide-grains et plus particulièrement l'effet de la viscosité sur l'écoulement à travers le nombre sans dimension  $J$ . Fort de ces résultats, nous allons étendre l'étude dans la section suivante au cas plus général des

écoulements régis par une variation à la fois des effets inertiels et visqueux.

### 3.5. Le régime visco-inertiel

Dans cette section, nous étudions le comportement du mélange en fonction de  $I$  et  $J$ . On analyse le comportement rhéologique en modifiant non seulement  $\eta_f$ , mais aussi  $\sigma_s$ ,  $\dot{\gamma}$  et  $\rho_f/\rho_s$ . Nos résultats numériques sont cohérents avec une description du comportement en fonction d'un seul nombre sans dimension combinant  $I$  et  $J$ . Une étude similaire a été réalisée par Trulsson et al. [200] en modélisant la présence du fluide par l'application des forces de trainée directement sur les particules en fonction de leurs vitesses. Nous comparons également nos résultats avec leurs simulations.

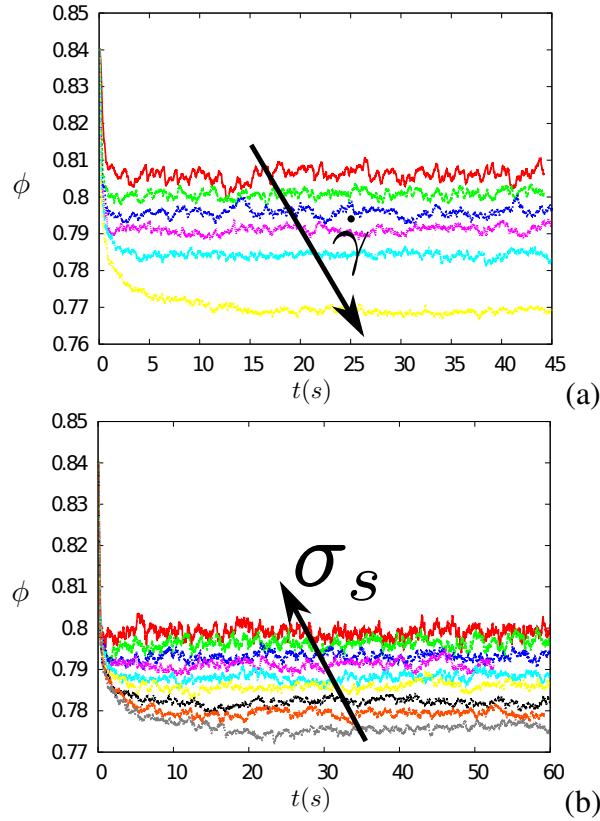
#### 3.5.1. Domaine paramétrique

Pour cette étude paramétrique, nous faisons varier  $\sigma_s$  et  $\dot{\gamma}$ . Le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  du fluide varie entre  $0.5 \text{ s}^{-1}$  et  $5.5 \text{ s}^{-1}$ . Pour chaque valeur de  $\dot{\gamma}$ , la pression de confinement  $\sigma_s$  varie entre 20 Pa et 120 Pa. De même, la viscosité du fluide varie entre  $\eta_w$  et  $1000\eta_w$ .

Pour mettre en évidence l'effet de  $\dot{\gamma}$  et  $\sigma_s$ , nous avons tracé sur la Figure 3.11 l'évolution de la compacité  $\phi$  en fonction du temps  $t$  pour différentes valeurs de ces deux paramètres et pour  $\eta_f = \eta_w$ . On voit que l'écoulement atteint un état stationnaire qui dépend de ces paramètres.  $\phi$  stationnaire diminue lorsque  $\dot{\gamma}$  augmente. Inversement, la compacité augmente lorsque  $\sigma_s$  augmente.

Afin de comparer avec les écoulements secs, nous avons également réalisé des simulations sans fluide en utilisant le même échantillon granulaire et les mêmes valeurs des paramètres de cisaillement et de confinement. Les grains en contact avec la paroi supérieure ont la même vitesse de cisaillement  $U$ , et ceux en contact avec la paroi inférieure ont une vitesse de cisaillement nulle de manière à avoir un taux de cisaillement  $\dot{\gamma} = |U|/y_{max}$ . La Figure 3.12 montre l'évolution de la compacité  $\phi$  et du frottement interne  $\mu$  dans l'état stationnaire en fonction de  $\dot{\gamma}$  et  $\sigma_s$  pour le cas du cisaillement induit par le fluide avec une viscosité de  $\eta_w$  et de cisaillement imposé en l'absence du fluide en fonction du nombre inertiel  $I$ . On voit que, même si les tendances sont les mêmes, une dilatance plus importante a lieu dans le cas de grains cisailés par le fluide. Le frottement interne dans le cas du cisaillement sans fluide a tendance à saturer alors que celui correspondant au cas de cisaillement imposé par le fluide augmente presque linéairement avec  $I$ . La présence du fluide visqueux se traduit ainsi par une valeur plus élevée de  $\mu$  et une valeur plus faible de  $\phi$  pour la même valeur de  $I$ . Cet exemple montre que le nombre inertiel ne permet pas de décrire la rhéologie des milieux saturés et secs dans le même cadre.

Pour mettre en évidence les limites de la description de l'écoulement en fonction du nombre inertiel, nous avons également fait varier la viscosité du fluide jusqu'à  $1000\eta_w$ . Pour une même viscosité, on a fait varier la pression de confinement  $\sigma_s$  et le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . La Figure



**FIGURE 3.11:** Effet du changement du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  (a) et de la pression de confinement  $\sigma_s$  (b) sur l'évolution de la compacité  $\phi$  en fonction du temps.

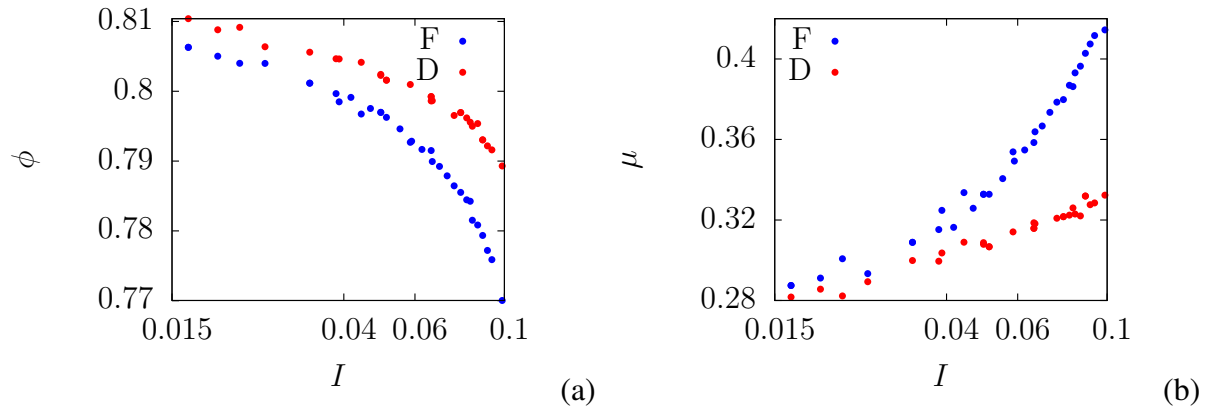
3.13 montre  $\mu$  et  $\phi$  en fonction de  $I$ . Pour ces données, on voit également que le nombre inertiel ne permet pas de mettre à l'échelle les données pour les différentes valeurs de la viscosité.

### 3.5.2. Unification de la rhéologie

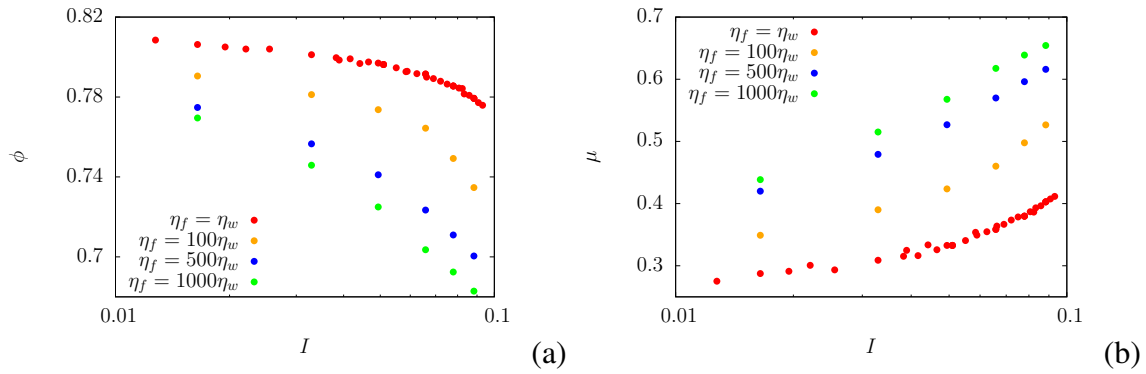
Pour obtenir une description unifiée des écoulements secs et immergés et des régimes visqueux et inertiels par un paramètre de contrôle approprié, il faut simplement remarquer que les contraintes internes qui s'opposent au cisaillement du mélange fluide-grains sont additives. Ces contraintes sont la contrainte "statique"  $\tau_c = \mu_c \sigma_s$  induite par le frottement, la contrainte d'origine inertielle de Bagnold  $\tau_i = k_i \rho_s (d\dot{\gamma})^2$  et la contrainte visqueuse  $\tau_v = k_v \eta_f \dot{\gamma}$  exercée par le fluide sur les grains. Les coefficients  $k_i$  et  $k_v$  sont des coefficients qui dépendent de la configuration granulaire et des détails de la dissipation. On s'attend donc à ce que  $\tau - \tau_c$  soit une fonction de  $k_i \rho_s (d\dot{\gamma})^2 + k_v \eta_f \dot{\gamma}$ . Pour fixer les idées, on introduit le nombre  $I_v$ <sup>1</sup> par

$$I_v^2 = \frac{\rho_s (d\dot{\gamma})^2 + \alpha_v \eta_f \dot{\gamma}}{\sigma_s} = (I^2 + \alpha_v J^2) = I^2 \left( 1 + \frac{\alpha_v}{St} \right) \quad (3.22)$$

1. Il convient de noter ici que le symbole  $I_v$  a été utilisé par Boyer et al. [30] pour désigner  $J^2$ .



**FIGURE 3.12:** La compacité  $\phi$  (a) et le frottement interne  $\mu$  (b) en fonction du nombre inertiel  $I$  pour un cisaillement induit par le fluide (F) et pour un cisaillement sans fluide (D).

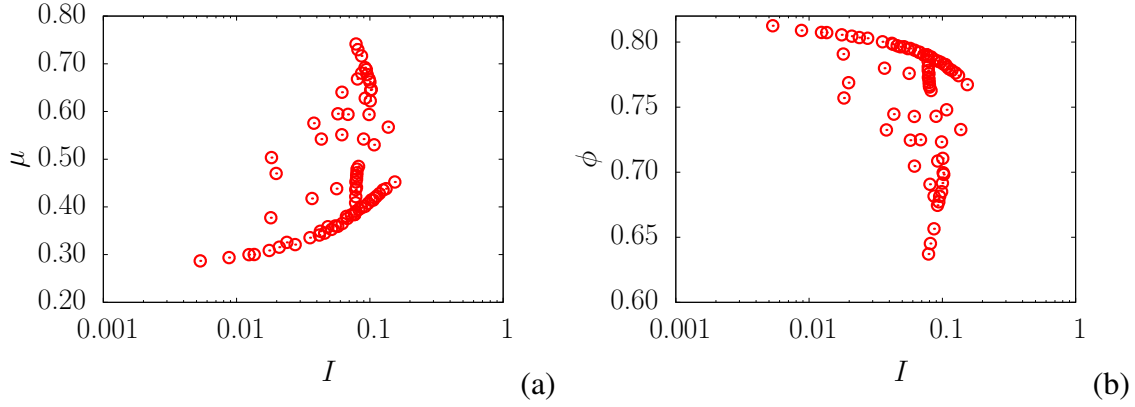


**FIGURE 3.13:** La compacité  $\phi$  (a) et le coefficient de frottement interne  $\mu$  (b) en fonction du nombre inertiel  $I$  pour différentes valeurs de la viscosité du fluide.

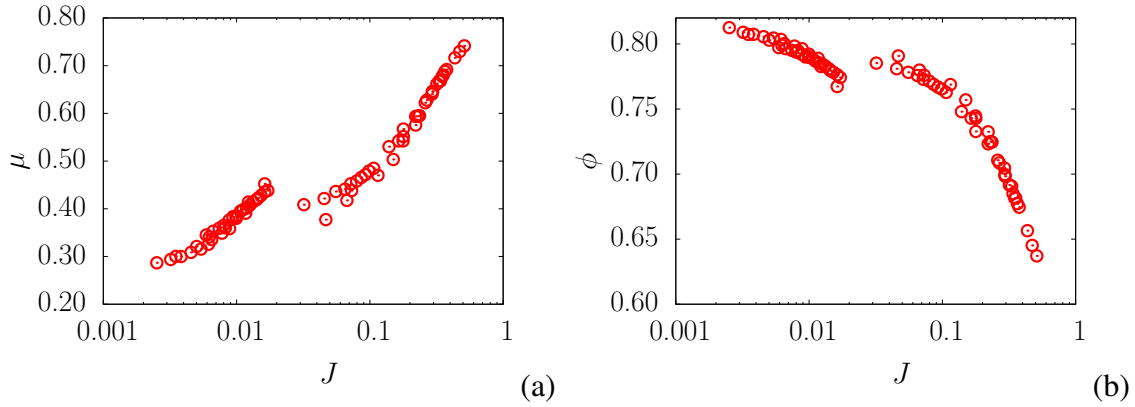
Le paramètre  $I_v = I(1 + \alpha_v/St)^{1/2}$  peut donc être considéré comme un nombre inertiel modifié (par l'inverse du nombre de Stokes) que nous appellerons "nombre visco-inertiel". Le paramètre  $\alpha_v$  est un paramètre qui traduit les poids relatifs des deux mécanismes de dissipation et la transition entre les deux régimes inertiel et visqueux. Le problème d'unification se réduit dans cette modélisation à savoir si pour une valeur fixe de  $\alpha_v$ , on peut faire superposer l'ensemble de nos données pour  $\mu$  et  $\phi$  sur une courbe unique en fonction de  $I_v$ .

La figure 3.14 montre  $\mu$  et  $\phi$  en fonction de  $I$  pour toutes les simulations réalisées en faisant varier  $\eta_f$ ,  $\sigma_s$ ,  $\dot{\gamma}$  et  $\rho_f/\rho_s$ . On voit que le nombre  $I$  ne met pas à l'échelle les valeurs de  $\mu$  et  $\phi$ . De même, la figure 3.15 montre  $\mu$  et  $\phi$  en fonction de  $J$  pour les mêmes données. De nouveau, ce nombre ne donne pas une courbe unique.

La Figure 3.16 montre  $\mu$  et  $\phi$  en fonction de  $I_v$  pour toutes les simulations réalisées en faisant varier  $\eta_f$ ,  $\sigma_s$ ,  $\dot{\gamma}$  et  $\rho_f/\rho_s$  et en posant  $\alpha_v = 2$ . On observe cette fois une très bonne mise à l'échelle des données sur une courbe unique. Sur la même figure sont également tracés des



**FIGURE 3.14:** La compacité  $\phi$  (a) et le coefficient de frottement interne  $\mu$  (b) en fonction du paramètre d'inertie  $I$  pour l'ensemble de nos simulations.



**FIGURE 3.15:** La compacité  $\phi$  (a) et le coefficient de frottement interne  $\mu$  (b) en fonction du nombre visqueux  $J$  pour l'ensemble de nos simulations.

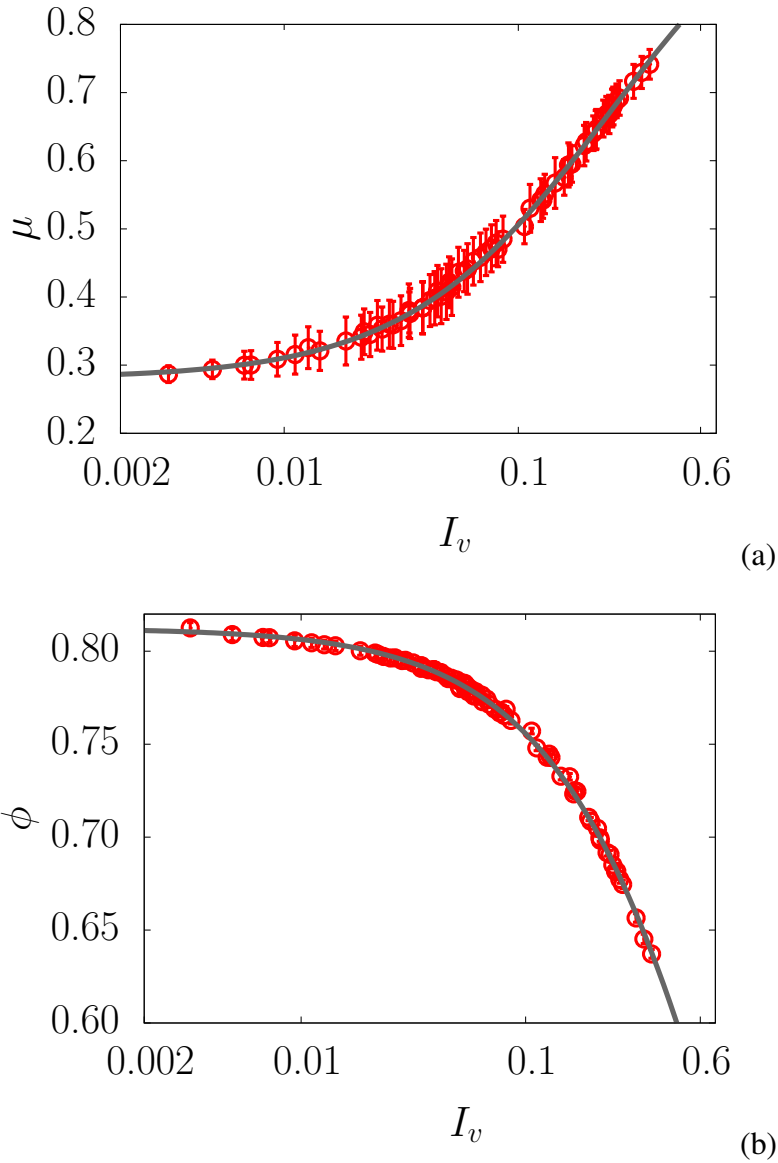
fits en utilisant les formes (3.12) et (3.13) et en remplaçant  $J$  par  $I_v$  :

$$\mu = \mu_c + \frac{\mu_{max} - \mu_c}{1 + I_{v0}/I_v} \quad (3.23)$$

et

$$\phi(I_v) = \frac{\phi_c}{1 + aI_v} \quad (3.24)$$

avec  $\phi_c = 0.8124 \pm 0.0003$ ,  $a = 0.750 \pm 0.003$ ,  $\mu_c = 0.280 \pm 0.002$ ,  $\mu_{max} = 1.063 \pm 0.0124$  et  $I_{v0} \simeq 0.246 \pm 0.008$ . Ces fonctions ajustent bien les données. Dans la limite visqueuse ( $St \ll 1$ ), on a  $I_v \simeq J$  et on obtient la description de la rhéologie en fonction d'un nombre visqueux. Dans la limite de faible viscosité ( $St \gg 1$ ), on a  $I_v \simeq I$  et le comportement est bien décrit par le nombre inertiel  $I$  comme dans les écoulements ses. Ces résultats confirment ceux de Trulsson et al. [200] obtenu avec une prise en compte simplifiée du fluide. Rappelons que le paramètre utilisé par Trulsson et al. [200] est légèrement différent.



**FIGURE 3.16:** Le coefficient de frottement interne  $\mu$  (a) et la compacité  $\phi$  (b) en fonction du paramètre visco-inertiel  $I_v$  pour  $\alpha_v = 2$ . Les barres d'erreur représentent l'écart-type des fluctuations. Les fits sont ceux donnés par les équations (3.24) et (3.23), respectivement.

Pour la description du système à compacité imposée, nous pouvons introduire les viscosités effectives  $\eta_t$  et  $\eta_n$  en fonction de  $I_v$  :

$$\tau = \eta_t \dot{\gamma} = c_t \sigma_s I_v^2 \quad (3.25)$$

$$\sigma_n = \eta_n \dot{\gamma} = c_n \sigma_s I_v^2 \quad (3.26)$$

ce qui conduit aux relations suivantes :

$$c_t = \frac{\mu}{I_v^2} \quad (3.27)$$

$$c_n = \frac{1}{I_v^2} \quad (3.28)$$

et

$$\eta_t = c_t(\eta_f + \rho_s d^2 \dot{\gamma}) \quad (3.29)$$

$$\eta_n = c_n(\eta_f + \rho_s d^2 \dot{\gamma}) \quad (3.30)$$

Les viscosités effectives augmentent ainsi avec le taux de cisaillement (comportement rhéo-épaississant), mais elles dépendent surtout de la compacité à travers les coefficients  $c_t$  et  $c_n$ .

La figure 3.17 montre  $c_t$  et  $c_n$  en fonction de  $\phi$  à partir des données numériques de l'écoulement à contrainte imposée. Les deux coefficients augmentent avec  $\phi$  et divergent lorsque  $\phi$  tend vers  $\phi_c$ . En utilisant les relations (3.27) et (3.28) avec les équations (3.23) et (3.24), on obtient les expressions suivantes :

$$c_n = a^2 \left( \frac{\phi}{\phi_c - \phi} \right)^2 \quad (3.31)$$

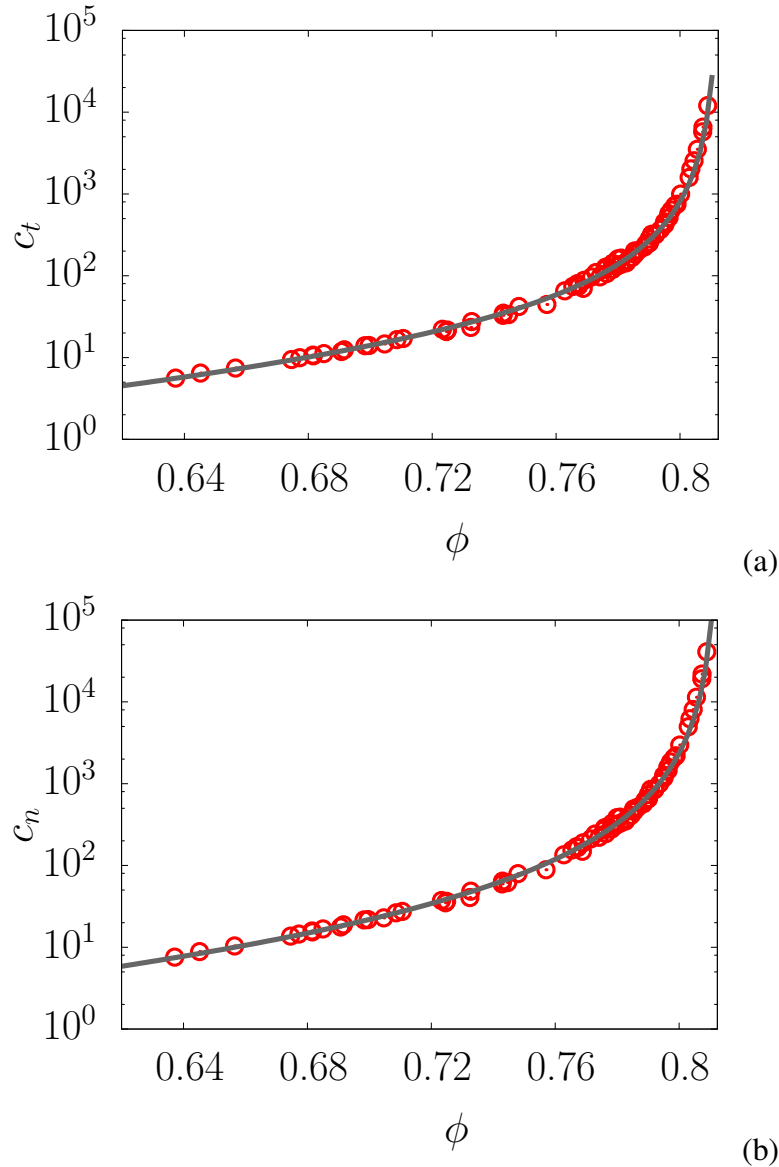
et

$$c_t = a^2 \left( \frac{\phi}{\phi_c - \phi} \right)^2 \left\{ \mu_c + \frac{\mu_{max} - \mu_c}{1 + a I_{v0} \frac{\phi}{\phi_c - \phi}} \right\} \quad (3.32)$$

Ces expressions ajustent bien les données sur la figure 3.17

Les équations (3.31) et (3.32) généralisent la divergence de la viscosité de l'écoulement à l'approche de l'état critique aux cas des matériaux visco-inertiels et secs. En ce sens, le qualificatif de "critique" pour l'état stationnaire en mécanique des sols trouve ici pour la première fois un vrai sens physique pour les écoulements secs. La figure 3.18 montre  $c_t$  et  $c_n$  en fonction de  $\phi_c - \phi$  en échelle logarithmique pour nos données et les données de Boyer et al. [30]. Il est remarquable que, non seulement on observe ici la divergence en  $(\phi_c - \phi)^{-2}$ , mais les données numériques coïncident avec les données expérimentales ! On a vu dans la section 3.4.3. que le régime visqueux traité en fonction de  $J$  permettait d'obtenir cette divergence ; voir figure 3.10. Mais on observait une différence entre les courbes expérimentale et numérique. La raison de cette différence était précisément l'utilisation de  $J$  plutôt que de  $I_v$ , qui permet de prendre en compte les effets inertiels dans le régime visqueux. C'est donc en intégrant ces effets dans la rhéologie à travers le paramètre  $I_v$  que l'on obtient une comparaison plus proche entre les données numériques et expérimentales. Cette validation constitue une vraie surprise dans la mesure où les simulations sont en 2D alors que les données expérimentales sont issues des expériences 3D !

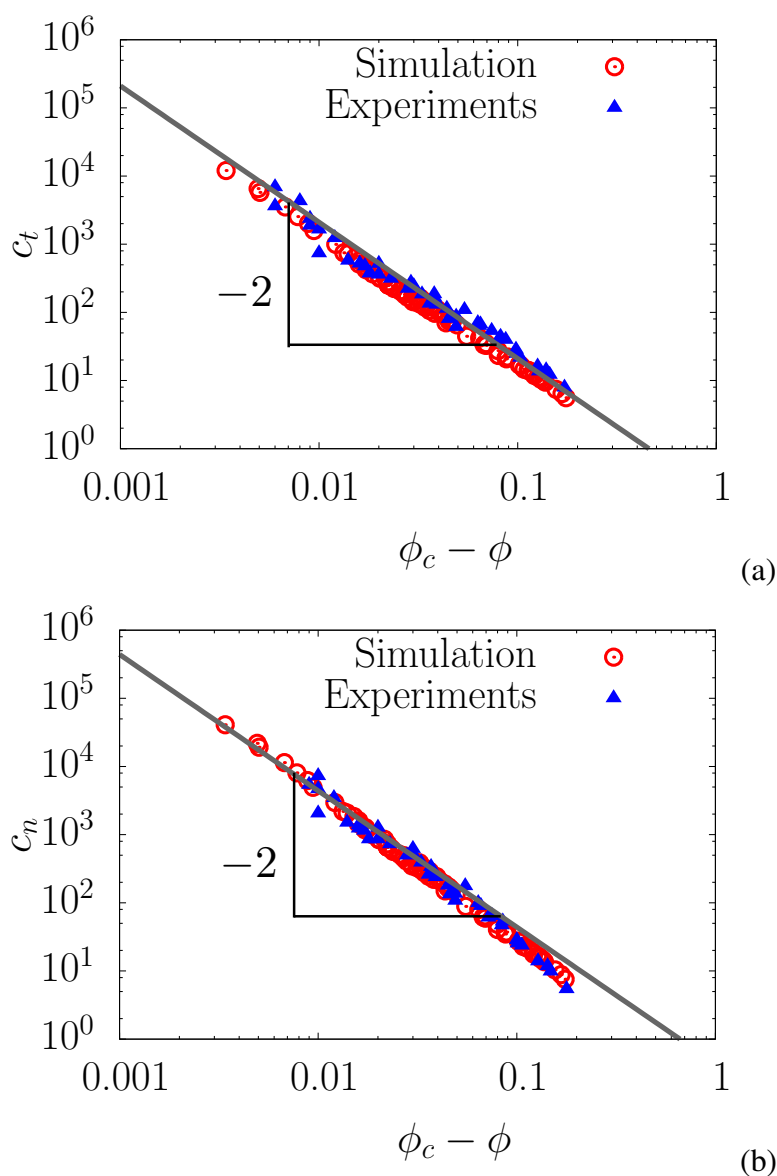
La rhéologie en fonction du nombre visco-inertiel  $I_v$  généralise ainsi la description visqueuse aux écoulements secs avec une viscosité effective proportionnelle à  $\rho_s d^2 \dot{\gamma}$  et un préfacteur qui augmente avec la compacité. D'une manière symétrique, cette rhéologie généralise la



**FIGURE 3.17:** Les viscosités effectives  $c_t$  (a) et  $c_n$  (b) en fonction de la compacité  $\phi$ . Les fits sont ceux définis par les équations (3.32) et (3.31), respectivement.

description frictionnelle aux suspensions denses avec un coefficient de frottement qui augmente avec la viscosité du fluide. Mais il faut souligner que cette description unifiée des écoulements denses manque à ce stade d'une base physique claire. L'origine des fonctions (3.23) et (3.24), utilisées pour l'ajustement des données, n'est pas établie à partir des interactions locales. Il n'est pas encore clair le fait que la dépendance du coefficient de frottement interne par rapport à la compacité est non-linéaire. L'exposant  $-2$  de la divergence des viscosités en fonction de  $\phi_c - \phi$  reste encore mal compris, même si cet exposant est inclu dans les fits utilisés qui conduisent aux expressions (3.31) et (3.32).





**FIGURE 3.18:**  $c_t$  (a) et  $c_n$  (b) en fonction de la compacité  $\phi_c - \phi$  pour nos données numériques et les données expérimentales de Boyer et al. [30]. Le trait plein représente une fonction linéaire de pente  $-2$ .

### 3.5.3. Relation contrainte-compacité

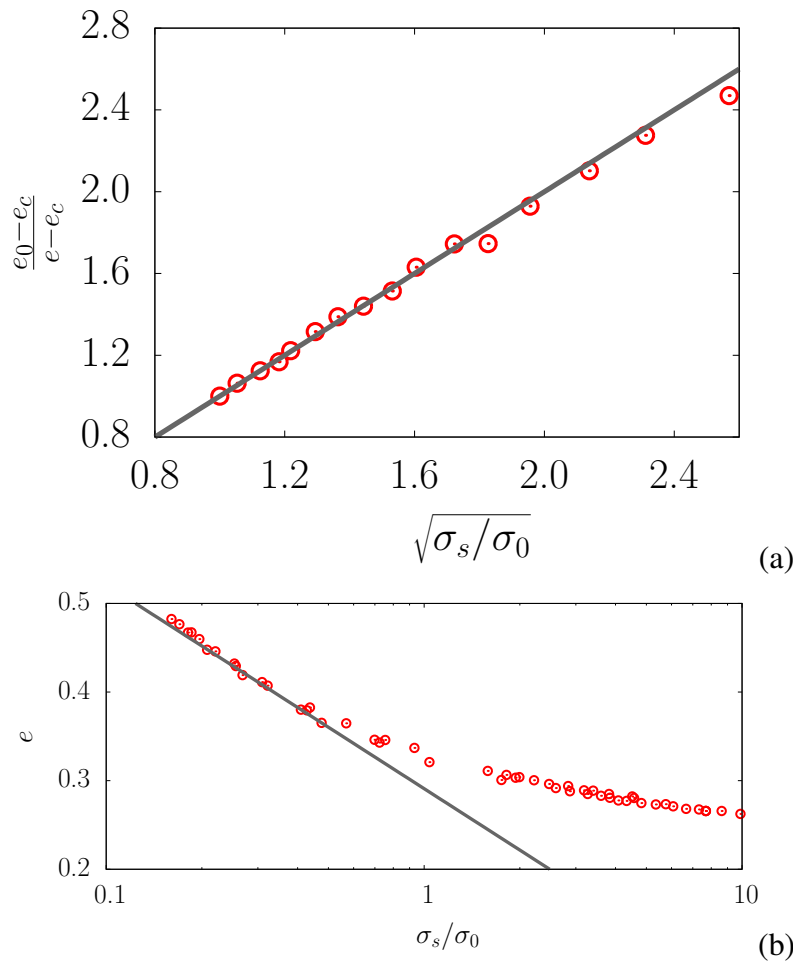
La rhéologie des écoulements, telle qu'elle est décrite par les relations approchées (3.23) et (3.24), contient un ensemble de relations entre plusieurs variables qui interviennent dans la rhéologie. Nous allons considérer ici à titre d'exemple la relation entre la contrainte de confinement et les variations de volume. Qualitativement, dans un écoulement stationnaire, si  $\sigma_s$  augmente, la compacité  $\phi$  augmente. Pour quantifier cette relation, on écrit la forme développée

de la relation (3.24) en faisant apparaître  $\sigma_s$  et  $\phi$  :

$$I_v = \left( \frac{\rho_s (d\dot{\gamma})^2 + \alpha_v \eta_f \dot{\gamma}}{\sigma_s} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \left( \frac{\phi_c}{\phi} - 1 \right) \quad (3.33)$$

Pour simplifier, on définit un point de référence  $(\phi_0, \sigma_{s0})$  qui vérifie cette relation :

$$\left( \frac{\rho_s (d\dot{\gamma})^2 + \alpha_v \eta_f \dot{\gamma}}{\sigma_{s0}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \left( \frac{\phi_c}{\phi_0} - 1 \right) \quad (3.34)$$



**FIGURE 3.19:** (a) Relation entre l'indice des vides normalisé  $e$  et la contrainte normale normalisée  $\sigma_s / \sigma_{s0}$  pour un taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  et viscosité  $\eta_f$  fixes. Le trait plein correspond à la fonction  $f(x) = x$ ; (b) La variation  $e$  de l'indice des vides en fonction de la contrainte normale normalisée en échelle semi-log. La droite représente une pente  $-C_c$  donnée par l'équation (3.38) pour  $e_c = 0.23$  et  $e_0 = 0.43$ .

La compacité de référence  $\phi_0$  peut être faible correspondant à une contrainte de confinement faible. En combinant les relations (3.34) et (3.34), on obtient la relation suivante entre la

variation de l'indice des vides  $e = 1/\phi - 1$  et la pression :

$$\sqrt{\frac{\sigma_s}{\sigma_{s0}}} = \frac{e_0 - e_c}{e - e_c} = \frac{1}{e_r} = \frac{\phi}{\phi_0} \frac{\phi_c - \phi_0}{\phi_c - \phi} \quad (3.35)$$

où  $e_r$  est l'indice des vides relatif défini comme une valeur pondérée de l'indice des vides entre une valeur minimal  $e_c$  et une valeur maximale  $e_0$ . Il varie entre 0 et 1. La figure 3.19 montre que cette relation entre  $\sigma_s$  et  $e$  est bien vérifiée par nos simulations pour l'ensemble des points qui correspondent à une valeur constant de  $\dot{\gamma}$  et de  $\eta_f$ , mais pour différentes valeurs de  $\sigma_s$ .

En mécanique des sols, on observe généralement une relation logarithmique entre la pression moyenne  $p$  et la variation de l'indice des vides  $e = 1/\phi - 1$  :

$$e = e_0 - C_c \log \left( \frac{p}{p_0} \right) \quad (3.36)$$

où le paramètre  $C_c$  est le coefficient de compression. Le coefficient  $C_c$  n'est pas une propriété intrinsèque du matériau mais augmente avec l'indice des vides de référence. Divers types d'argiles sont généralement caractérisés par une relation linéaire entre  $C_c$  et  $e_0$  [146].

Pour rapprocher la relation (3.35) de la relation (3.36), il faut se mettre dans la limite où  $(e_0 - e_c)/(e - e_c) \simeq 1$ . Dans cette limite, en prenant le logarithme des deux membres de l'équation (3.35), on obtient

$$e \simeq e_0 - C_c \log \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_{s0}} \right) \quad (3.37)$$

avec

$$C_c \simeq \frac{e_0 - e_c}{2} \quad (3.38)$$

Nos données utilisées sur la figure 3.19(a) correspondent à une valeur constante de  $\dot{\gamma}$  et de  $\eta_f$ , mais pour différentes valeurs simulées de  $\sigma_s$ . Pour obtenir une gamme plus large des valeurs de ce rapport, nous avons utilisé tous les points simulés mais en recalculant  $\sigma_s$  de manière à garder une valeur fixe de  $I_v^2 \sigma_s$ . La figure 3.19(b) montre  $e$  en fonction de la contrainte normalisée en échelle semi-logarithmique. On voit que la relation logarithmique est en bon accord avec nos données avec une pente donnée par l'équation (3.38). Il faut remarquer que, comme en mécanique des sols, cette équation correspond bien à une relation linéaire entre  $e$  et  $\log(\frac{\sigma_s}{\sigma_{s0}})$  avec un coefficient 0.5. Pour obtenir cette valeur, il faut que la valeur de  $e_0$  soit égale à 1.23, et que les données de  $e$  soient proches de  $e_0$ . l'application de cette équation au cas des milieux immergés et aux argiles est un point à approfondir.

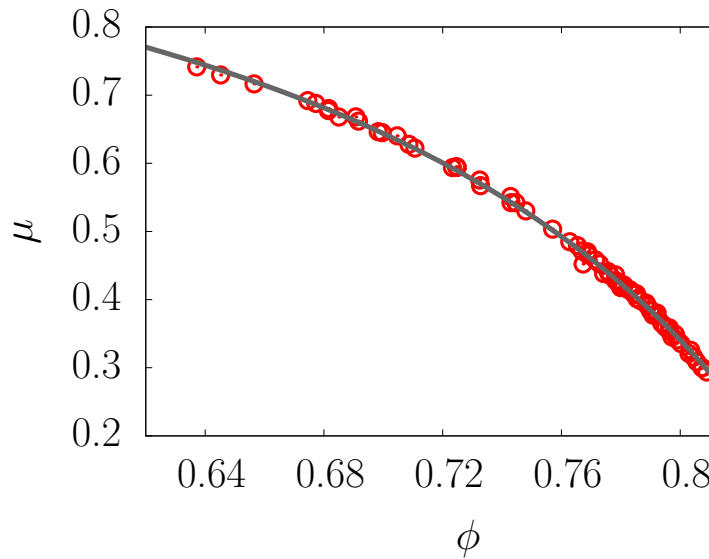
### 3.5.4. Relation entre frottement interne et compacité

Une autre relation intéressante de la rhéologie des écoulements inertiels, qui n'a pas été encore bien comprise, est la relation entre  $\mu$  et  $\phi$ . dans la formulation actuelle cette relation est

une conséquence des deux relations  $\mu(I_v)$  et  $\phi(I_v)$ . En effet, en éliminant  $I_v$  entre les équations (3.23) et (3.24), on obtient la relation suivante :

$$\mu = \mu_c + \frac{\mu_{max} - \mu_c}{1 + aI_{v0}\phi/(\phi_c - \phi)} \quad (3.39)$$

Cette forme ajuste très bien les données numériques pour l'ensemble de nos simulations avec les valeurs des paramètres  $a$ ,  $\phi_c$ ,  $\phi_{max}$ ,  $I_{v0}$  et  $\alpha_v$  données précédemment, comme on peut le voir sur la figure 3.20.



**FIGURE 3.20:** Le coefficient de frottement interne  $\mu$  en fonction de la compacité  $\phi$  pour l'ensemble de nos simulations, y compris les écoulements secs. Le trait plein représente le fit donné par l'équation (3.39).

Nous proposons ici une relation plus simple entre l'indice des vides  $e$  et le coefficient de frottement interne. L'idée est la suivante : la résistance au cisaillement  $\tau - \tau_c$  de l'écoulement visco-inertiel est due aux collisions entre les grains (avec ou sans médiation du fluide). L'énergie potentielle associée à l'écoulement est donnée par  $\sigma_s(V_p - V_{pc})$ , où  $V_p$  est le volume total des pores et  $V_{pc}$  est le volume des pores dans l'état critique. Le volume  $V_p - V_{pc}$  est le volume libre accessible aux particules. L'énergie potentielle rapportée au volume total de l'espace poral  $V_p$ , c'est à dire  $\sigma_d = \sigma_s(V_p - V_{pc})/V_p$ , définit une contrainte cinétique qui fixe l'échelle de contrainte de l'écoulement. Comme les collisions sont régies par la loi de frottement et qu'il n'y a aucune autre contrainte de référence dans le système ( $\sigma_s$  étant la contrainte qui fixe uniquement l'échelle de contrainte pour le squelette granulaire dans l'état critique), la résistance inertielle  $\tau - \tau_c$  est nécessairement proportionnelle à la contrainte cinétique :

$$\tau - \tau_c = \mu_d \sigma_d = \mu_d \sigma_s \frac{V_p - V_{pc}}{V_p} \quad (3.40)$$

ce qui implique

$$\mu - \mu_c = \mu_d \frac{e - e_c}{e} = \mu_d \frac{\phi_c - \phi}{\phi_c(1 - \phi)} \quad (3.41)$$

Le coefficient  $\mu_d$  définit un "coefficient de frottement dynamique" pour l'écoulement.

La relation (3.41) est une relation linéaire simple entre le coefficient de frottement de l'écoulement et l'indice des vides. Cette relation constitue une bonne interpolation linéaire des données numériques, comme on peut le voir sur la figure 3.21, avec  $\mu_d = 0.7896 \pm 0.0017$ . Ceci montre la pertinence de l'utilisation de  $e$  comme variable de volume et la nécessité de reformuler les relations précédemment utilisées pour la rhéologie. En particulier, en éliminant  $\mu$  entre les équations (3.41) et (3.23), on obtient la dépendance de  $\phi$  par rapport  $I_v$  :

$$\frac{\phi}{\phi_c} = \frac{1 + \beta I_v}{1 + \gamma I_v} \quad (3.42)$$

avec

$$\beta = \frac{1}{I_{v0}} \left( 1 - \frac{\mu_{max} - \mu_c}{\mu_d} \right) \quad (3.43)$$

$$\gamma = \frac{1}{I_{v0}} \left( 1 - \frac{\mu_{max} - \mu_c}{\mu_d} \phi_c \right) \quad (3.44)$$

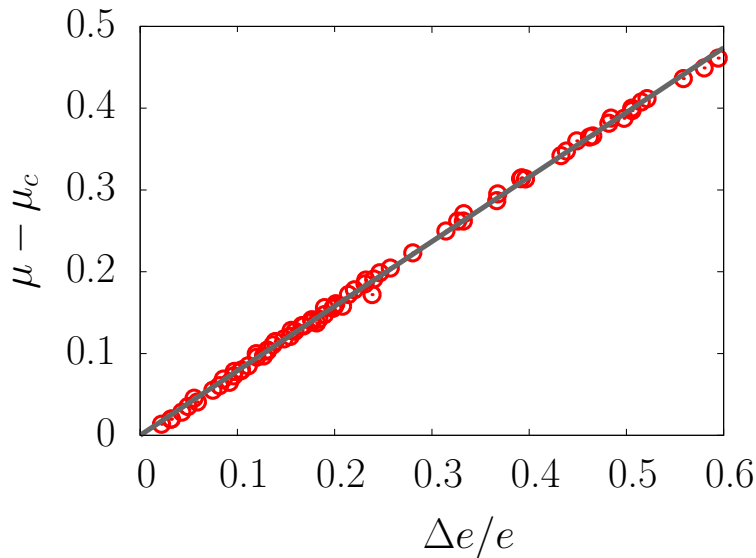
L'équation (3.42) se réduit à l'équation (3.24) à l'ordre de  $K$  ( $K^2 \ll 1$ ) avec :

$$a = \frac{\mu_{max} - \mu_c}{I_{v0} \mu_d} (1 - \phi_c) \quad (3.45)$$

Les valeurs numériques de  $\mu_d$ ,  $\phi_c$ ,  $I_{v0}$ ,  $\mu_{max}$  et  $\mu_c$  permettent de retrouver la valeur de  $a \simeq 0.75$ . L'approximation à l'origine du passage entre les équations (3.24) et (3.42) est presque toujours valable de sorte que les deux équations sont pratiquement équivalentes. Il faut aussi noter que nous avons  $\mu_{max} - \mu_c \simeq \mu_d$  de telle sorte que  $\beta \simeq 0$ ,  $a \simeq (1 - \phi_c)/I_{v0}$  et  $e = e_c(1 + I_v/I_{v0})$ . La relation linéaire (3.41) apparaît ici comme plus fondamentale que la relation phénoménologique (3.24).

### 3.6. Suspension à l'échelle des grains

La rhéologie des écoulements immergés denses de grains est dominée par les contacts mécaniques entre les grains. La présence du fluide et des forces de lubrification n'empêche pas la formation des contacts mécaniques. Physiquement, la rugosité de surface des particules a pour effet de permettre le contact entre aspérités de surface à une distance telle que les forces de lubrification ne divergent pas trop [9]. Les effets de lubrification sont pris en compte dans la méthode LBM utilisée pour les simulations. Dans ce cadre, des contacts peuvent se former dans la limite imposée par le pas de Lattice. Comme les expériences le montrent sans ambiguïté, le réseau des contacts est responsable de la transmission des forces qui conduisent à la divergence



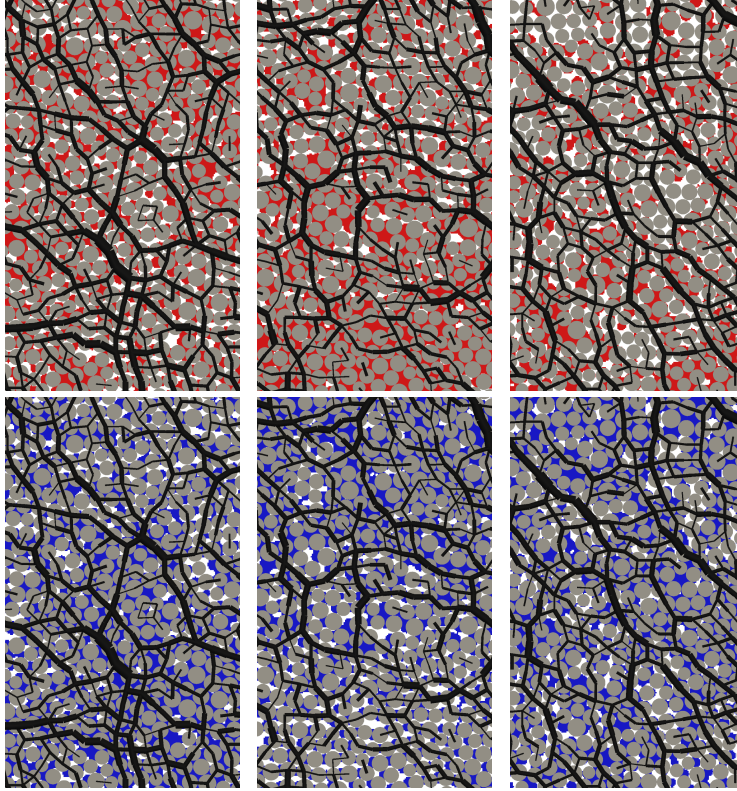
**FIGURE 3.21:** Le coefficient de frottement interne en fonction de l'écart  $\Delta e = e - e_c$  de l'indice des vides par rapport à l'indice des vides critique et normalisé par l'indice des vides actuel  $e$ . La droite représente un fit linéaire de pente  $\mu_d \simeq 0.79$ .

de la viscosité et au blocage de l'écoulement lorsque la compacité s'approche de la compacité critique. Le fluide cisaille les grains par l'action des forces de traînée, mais la résistance au cisaillement, décrite par la valeur du coefficient de frottement interne, est essentiellement une conséquence de l'organisation du réseau des contacts. Nous allons étudier cette organisation et son lien avec le coefficient de frottement interne.

Il existe de nombreuses variables associées aux grains et au réseau des contacts. Parmi ces variables, nous allons considérer celles qui interviennent directement dans l'expression du tenseur des contraintes. Ces variables décrivent la connectivité des particules et les anisotropies du réseau des contacts et des forces normales et tangentielles entre les grains [159, 174, 170, 212, 10, 178, 153].

### 3.6.1. Connectivité des particules

Les figures 3.22 et 3.23 montrent plusieurs clichés des chaînes de force pour deux valeurs extrêmes de  $I_v$ , ainsi que les pressions du fluide entre les grains. On observe des zones bien marquées des pressions positives (sur-pressions) et négatives (dépressions). Ces zones reflètent les variations des compacités locales des amas de particules qui subissent soit une dilatance soit une contraction. Pour des valeurs élevées de  $\eta_f$  (très visqueux) ces zones s'apparentent à des filaments dans la direction d'extension (45 degrés). La figure 3.23 représente les amas à pressions négatives (en bleu). Il est intéressant d'observer que les chaînes de force sont essentiellement localisées à l'intérieur des amas à pression négative. Ce phénomène suggère que la présence des



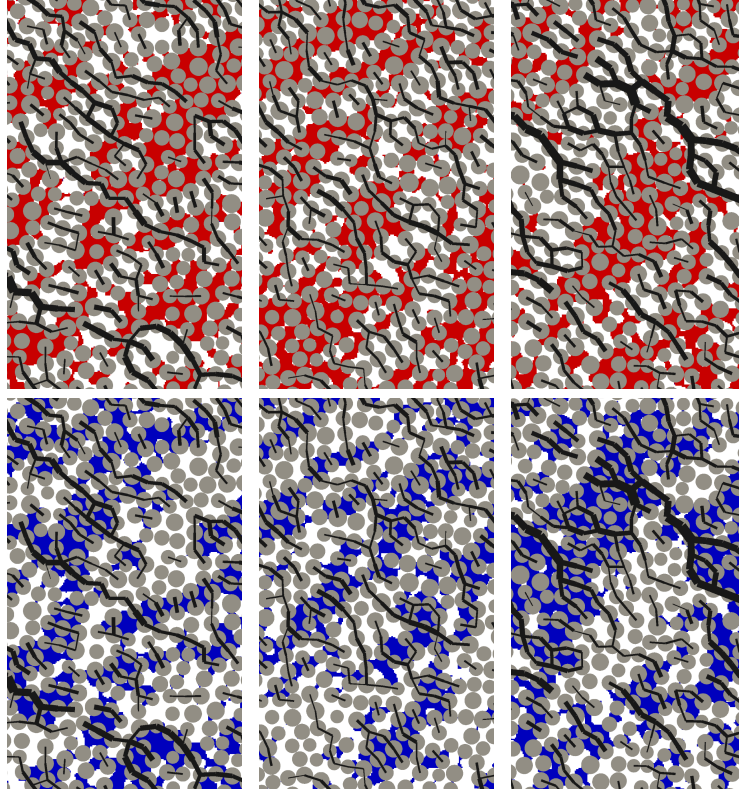
**FIGURE 3.22:** Clichés des chaînes de forces, des zones de fluide interstitiel à pression négative (en bleu ) et à pression positive (en rouge) pour  $I_v = 0.007$ .

rangées contiguës des particules orientées suivant la direction de contraction (à 135 degrés) implique des mécanismes de flambage dans la direction perpendiculaire qui tendent à augmenter la compacité autour de ces chaînes.

La figure 3.24(a) montre le nombre de coordination  $Z$  en fonction de  $I_v$  pour  $\eta_f = \eta_w$  et toutes les valeurs de  $I$ .  $Z$  diminue considérablement lorsque  $I$  augmente. Il faut noter que  $Z$  est défini à partir des contacts actifs (qui portent une force normale non nulle) et des grains qui ont au moins un contact actif. On voit qu'en raison de la présence du fluide et du cisaillement continu, la valeur maximale de  $Z$  est de l'ordre de 2, ce qui est bien inférieur à celui d'un écoulement sec pour le même niveau inertiel (plutôt de l'ordre de 3). La figure 3.24(b) montre  $Z$  en fonction de  $I_v$  dans un écoulement avec  $I = 0.021$  et toutes les valeurs de la viscosité  $\eta_f$  simulées. On voit que  $Z$  augmente pratiquement linéairement avec  $I_v$  en raison de l'augmentation de  $\eta_f$ , mais pour des valeurs plus élevées de la viscosité,  $Z$  diminue de nouveau en passant par une valeur maximum pour  $I_v \simeq 0.1$ . Cette variation non-monotone suggère que le cisaillement dans le domaine des faibles valeurs de la viscosité favorise l'adhérence entre les particules tandis que dans le domaines des grandes valeurs de la viscosité il favorise l'effet de la lubrification et réduit donc le nombre de contacts.

On peut aussi attribuer ce comportement à une transition entre un régime inertiel et un





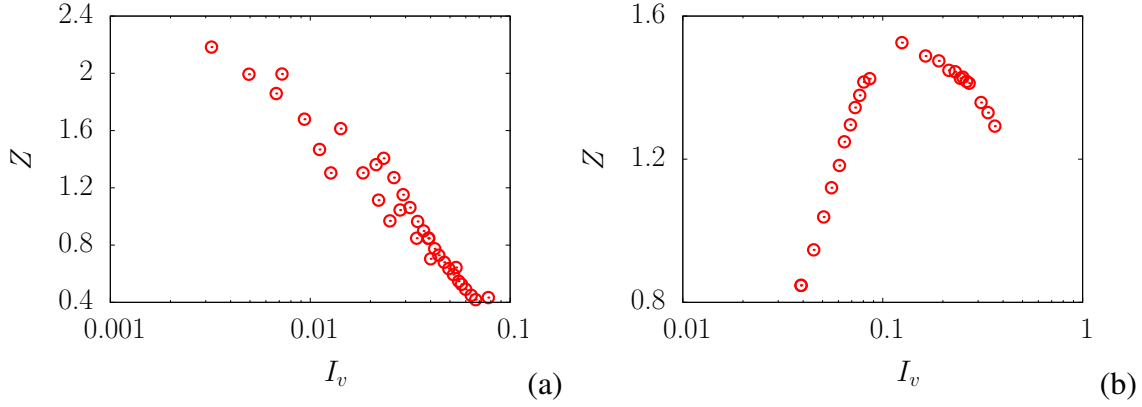
**FIGURE 3.23:** Clichés des chaînes de forces, des zones de fluide interstitiel à pression négative (en bleu) et à pression positive (en rouge) pour  $I_v = 0.33$ .

régime visqueux, le point de transition étant  $St \simeq 2$ . Pour mieux comprendre l'évolution de  $Z$ , il faut étudier les structures locales. En particulier, on peut caractériser la connectivité de l'écoulement par la proportion  $P_n$  de particules avec exactement  $n$  contacts. Le nombre de coordination est simplement donnée par la valeur moyenne de  $n$  en excluant  $P_0$  qui représente la fraction des particules flottantes :

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n \quad (3.46)$$

La figure 3.25(a) montre les probabilités  $P_n$  en fonction de  $I_v$  pour  $\eta_f = \eta_w$  et toutes les valeurs simulées de  $I$ . Cette variation des  $P_n$  est très similaire à celle observée dans les écoulements secs [13]. Les nombres des particules flottantes  $P_0$  et des particules à un contact  $P_1$  augmentent avec  $I$ .  $P_2$  et  $P_3$  sont pratiquement constants jusqu'à  $I_v \simeq 0.05$ , mais se mettent à diminuer au-delà.  $P_4$  diminue avec  $I_v$  et les  $P_5$  et  $P_6$  sont négligeables. On observe clairement un changement à partir de  $I_v \simeq 0.05$  où  $P_0$  se met à croître plus rapidement. La figure 3.25(b) montre les probabilités  $P_n$  en fonction de  $I_v$  dans un écoulement avec  $I = 0.021$  et toutes les valeurs de la viscosité  $\eta_f$  simulées. Le comportement ici est clairement très différent.  $P_0$  diminue considérablement et se stabilise à une valeur pratiquement constante à partir de  $I_v = 0.1$  alors même que  $P_1$  et  $P_2$  augmentent. L'augmentation de  $P_2$  est un signe de formation des chaînes de forces.





**FIGURE 3.24:** Le nombre de coordination  $Z$  en fonction du nombre visco-inertiel  $I_v$  (a) pour  $\eta_f = \eta_w$  et une valeur croissante du nombre inertiel  $I$  et (b) pour le nombre inertiel fixé à  $I = 0.021$  et une valeur croissante de la viscosité du fluide .

$P_3$  et  $P_4$  augmentent et puis diminuent à partir de  $I_v = 0.1$ . On voit donc ici plus clairement la restructuration du réseau des contacts qui est sous-jacente à la variation non-monotone de  $Z$ .

La figure 3.26(a) montre le nombre de coordination en fonction de  $I_v$  pour l'ensemble de nos simulations. On voit que  $I_v$  ne permet pas de mettre les valeurs de  $Z$  à l'échelle. Cette variation non-univoque de  $Z$  en fonction de  $I_v$  indique aussi que  $Z$  n'est pas une fonction monotone de la compacité  $\phi$ . C'est ce qu'on peut voir sur la figure 3.26(b). En ce sens, il semble donc que  $Z$  soit d'une manière générale plus une "variable d'ajustement" passive qu'une variable directement corrélée avec les grandeurs macroscopiques ou les paramètres de contrôle. Nous allons voir dans la suite que ce sont plutôt les paramètres d'anisotropie qui contrôlent la rhéologie du mélange.

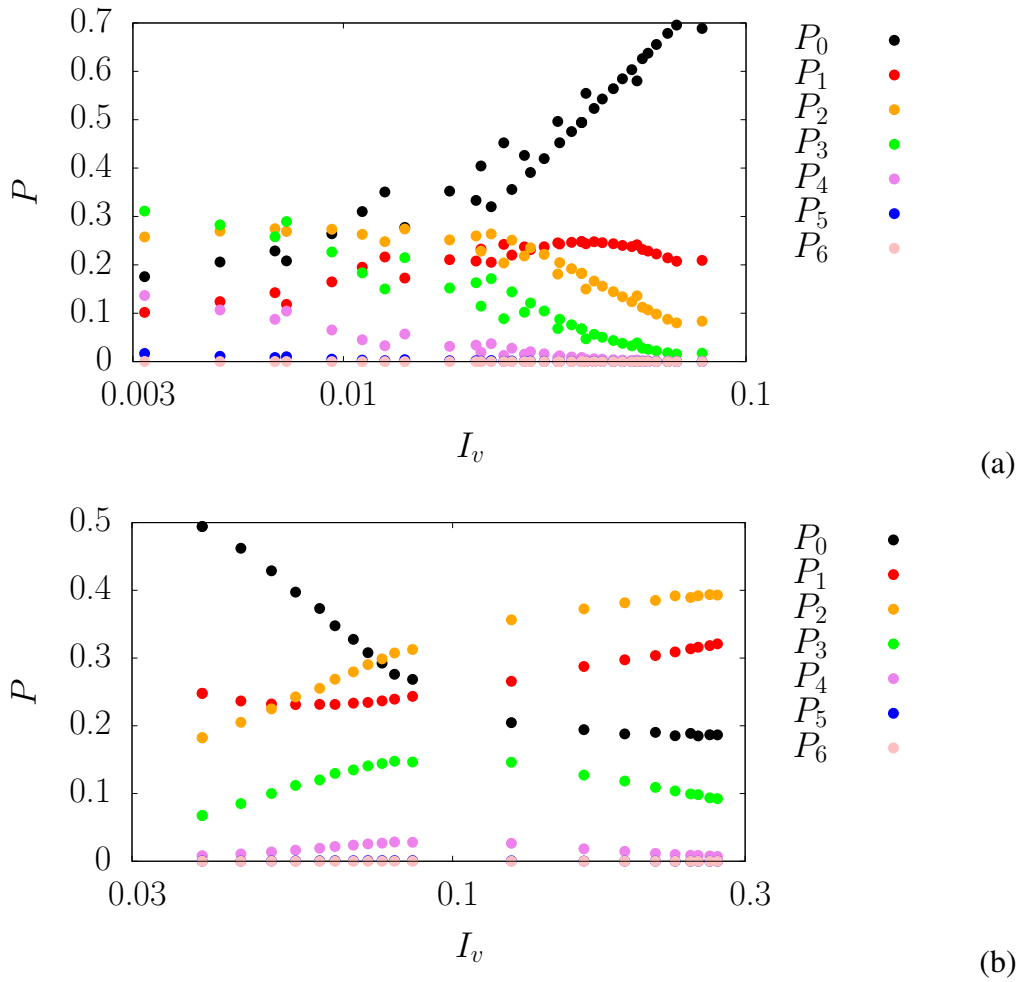
### 3.6.2. Anisotropies de l'écoulement

On peut construire trois tenseurs à partir des vecteurs branches  $\ell^c = \ell n^c$  et des forces de contact  $f^c$  dans un assemblage granulaire. Le tenseur de fabrique  $F_{\alpha\beta}$  ne fait intervenir que les orientations  $n$  des vecteurs branches [179] :

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} n_\alpha^c n_\beta^c = \langle n_\alpha n_\beta \rangle_V \quad (3.47)$$

où la moyenne  $\langle \rangle_V$  porte sur tous les contacts actifs. Le tenseur de fabrique décrit la distribution  $P(\theta)$  des orientations  $\theta$  des contacts à l'ordre 2. En effet, cette distribution peut être le plus souvent approchée par un développement de Fourier à l'ordre 2 :

$$P(\theta) \simeq \frac{1}{\pi} \{1 + a_c \cos 2(\theta - \theta_c)\} \quad (3.48)$$



**FIGURE 3.25:** Les connectivités  $P_n$  de l'écoulement en fonction du nombre visco-inertiel  $I_v$  (a) pour  $\eta_f = \eta_w$  et une valeur croissante du nombre inertiel  $I$  et (b) pour le nombre inertiel fixé  $I = 0.021$  et une valeur croissante de la viscosité du fluide.

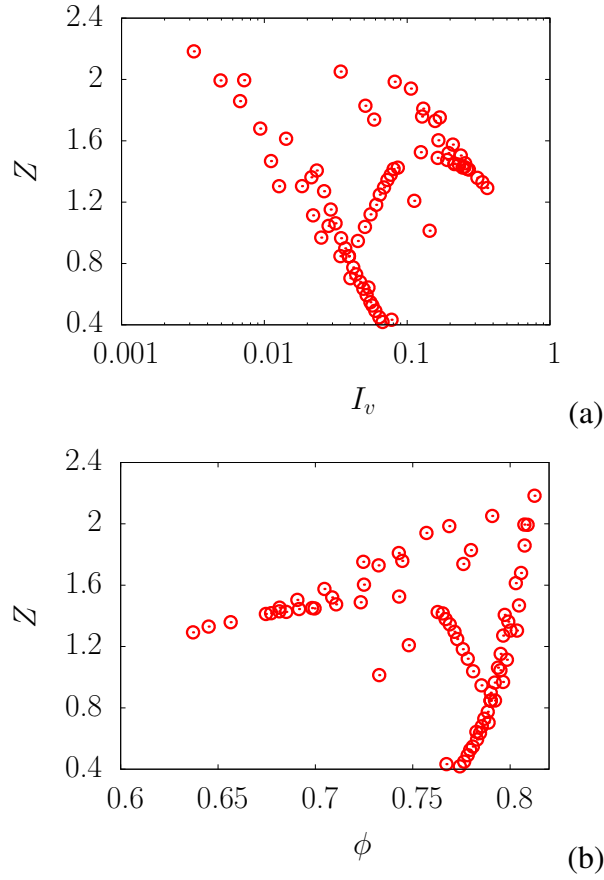
où  $a_c$  correspond à l'anisotropie du réseau de contacts et  $\theta_c$  correspond à la direction moyenne des contacts. Avec cette mesure, le tenseur de fabrique peut également s'écrire sous la forme

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi n_\alpha(\theta) n_\beta(\theta) P(\theta) d\theta. \quad (3.49)$$

Il est alors facile de montrer que l'anisotropie  $a_c$  définie par (3.48) est simplement donnée par

$$a_c = 2(F_1 - F_2), \quad (3.50)$$

où  $F_1$  et  $F_2$  sont les valeurs propres de  $F$ . Ainsi, dans l'approximation harmonique, les orientations des contacts sont décrites par une grandeur scalaire  $a_c$  qui peut évoluer avec les déformations.



**FIGURE 3.26:** Le nombre de coordination  $Z$  en fonction du nombre visco-inertiel  $I_v$  (a) et en fonction de la compacité  $\phi$  (b) pour l'ensemble de simulations.

Les forces de contact supportées par le réseau de contacts anisotrope s'organisent en un réseau également anisotrope qui sous-tend en partie la résistance au cisaillement. Pour quantifier le degré d'anisotropie du réseau de forces, on va considérer les forces moyennées en fonction des orientations des contacts qui les portent pour les forces normales et tangentielles  $\langle f_n \rangle(\theta)$  et  $\langle f_t \rangle(\theta)$ , respectivement. Comme la distribution  $P(\theta)$ , ces fonctions peuvent être développées à l'ordre 2 sur une base de Fourier :

$$\langle f_n \rangle(\theta) \simeq \frac{\langle f \rangle}{\pi} \{1 + a_n \cos(2(\theta - \theta_n))\} \quad (3.51)$$

et

$$\langle f_t \rangle(\theta) \simeq \frac{\langle f \rangle}{\pi} \{-a_t \sin(2(\theta - \theta_t))\} \quad (3.52)$$

où  $\langle f \rangle$  est la force normale moyenne,  $a_n$  et  $a_t$  sont les anisotropies des forces normales et tangentielles et  $\theta_n$  et  $\theta_t$  sont les directions pour lesquelles les forces normales et tangentielles sont, en moyenne, les plus intenses. Il faut noter que le développement de  $\langle f_t \rangle(\theta)$  reflète l'équilibre des moments des forces sur les particules. Cet équilibre implique que la valeur moyenne des forces de frottement est nulle.

Pour les calculs de  $a_n$  et  $a_t$ , il est plus aisé d'utiliser les deux tenseurs d'ordre deux suivants [170] :

$$\chi_{\alpha\beta}^n = \frac{1}{\langle f \rangle} \sum_{c=1}^{N_c} f_n n_\alpha^c n_\beta^c = \frac{1}{\langle f \rangle} \langle f_n n_\alpha n_\beta \rangle_V \equiv \frac{1}{\langle f \rangle} \int_0^\pi \langle f_n \rangle(\theta) n_\alpha(\theta) n_\beta(\theta) P(\theta) d\theta \quad (3.53)$$

et

$$\chi_{\alpha\beta}^t = \frac{1}{\langle f \rangle} \sum_{c=1}^{N_c} f_t t_\alpha^c n_\beta^c = \frac{1}{\langle f \rangle} \langle f_t t_\alpha n_\beta \rangle_V \equiv \frac{1}{\langle f \rangle} \int_0^\pi \langle f_t \rangle(\theta) t_\alpha(\theta) n_\beta(\theta) P(\theta) d\theta. \quad (3.54)$$

De manière similaire au tenseur de fabrique, en introduisant les développements de Fourier de  $P(\theta)$ ,  $\langle f_n \rangle(\theta)$  et  $\langle f_t \rangle(\theta)$  dans les expressions intégrales de  $\chi_{\alpha\beta}^n$  et  $\chi_{\alpha\beta}^t$ , on obtient la relation suivante en négligeant les produits croisés des anisotropies :

$$2 \frac{\chi_1^n - \chi_2^n}{\chi_1^n + \chi_2^n} = a_c + a_n \quad (3.55)$$

où  $\chi_1^n$  et  $\chi_2^n$  sont les valeurs propres de  $\chi^n$ . De plus, en posant  $\chi = \chi^n + \chi^t$ , on montre que :

$$2 \frac{\chi_1 - \chi_2}{\chi_1 + \chi_2} = a_c + a_n + a_t \quad (3.56)$$

où  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont les valeurs propres de  $\chi$ . Ces relations permettent de calculer les anisotropies  $a_c$ ,  $a_n$  et  $a_t$  à partir des tenseurs  $F$  et  $\chi$ .

### 3.6.3. Relation entre anisotropies et frottement interne

Par définition, il est toujours possible d'évaluer les contraintes dans un volume de contrôle en calculant la densité surfacique (linéique en 2D) des forces exercées par les grains extérieurs sur ceux appartenant au volume de contrôle. Cette évaluation du tenseur de contrainte est d'autant plus juste que le volume de contrôle est grand, mais perd son sens mécanique lorsque le volume de contrôle tend vers celui d'un grain. Mais il existe un autre concept mécanique, qui permet de donner un sens au tenseur des contraintes dans la limite discrète. Il s'agit du tenseur des moments internes introduit par Moreau [150]. Il est défini pour une particule  $i$  possédant  $c$  contacts par

$$M_{\alpha\beta}^i = \sum_{c \in i} f_\alpha^c r_\beta^c \quad (3.57)$$

où  $f_\alpha^c$  est la composante  $\alpha$  de la force exercée sur  $i$  au contact  $c$  et  $r_\beta^c$  est la composante  $\beta$  d'un vecteur position du contact  $c$ . Ce moment est additif et indépendant de l'origine du vecteur  $r^i$ . Ainsi, pour un ensemble de particules contenues dans un volume  $V$ , on peut montrer que le tenseur de contraintes de Cauchy est équivalent à la densité volumique du moment tensoriel :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{V} \sum_{i \in V} M_{\alpha\beta}^i \quad (3.58)$$

Pour obtenir l'égalité stricte entre la contrainte macroscopique et la somme des  $M^i/V^i$  où  $V^i$  est le volume de la particule  $i$ , il convient de pondérer ce dernier rapport par la compacité  $\phi$  exprimée par  $\rho = \sum V^i/V$ , tel que

$$\sigma^i = \frac{1}{V} \sum_{i \in V} M^i = \frac{1}{\phi} \sum_{i \in V} \frac{M^i}{V^i} \quad (3.59)$$

Cette expression fait apparaître une somme sur les particules et les contacts de chaque particule. Plutôt que d'exprimer le tenseur de contrainte à partir des contributions de chaque particule, il est aussi possible de l'exprimer comme une somme sur tous les contacts. En effet, la contribution d'un contact de l'ensemble s'exprime comme  $f_\alpha r_\beta^i - f_\alpha r_\beta^j = f_\alpha \ell_\beta^{ij}$  où  $f_\alpha$  est la force de contact et  $\ell^{ij} = r^i - r^j$  est le vecteur intercentre ou vecteur branche qui relie les centres des deux particules. Ainsi, le tenseur de contrainte  $\sigma$  peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^{N_c} f_\alpha^c \ell_\beta^c = n_c \langle f_\alpha \ell_\beta \rangle, \quad (3.60)$$

où  $N_c$  est le nombre total de contacts dans le volume et  $n_c = N_c/V$  est la densité numérique de contacts.

Dans le cas des disques, le vecteur branche  $\ell$  est colinéaire avec  $\mathbf{n}$ . De plus, en négligeant les corrélations entre les distances intercentres  $\ell$  et les forces de contact  $\mathbf{f} = f_n \mathbf{n} + f_t \mathbf{t}$ , on a :

$$\sigma_{\alpha\beta} = n_c \langle f \rangle \langle \ell \rangle \chi_{\alpha\beta}. \quad (3.61)$$

Cette expression peut être mise sous la forme intégrale :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{\pi} \langle \ell \rangle \int_0^\pi P(\theta) (\langle f_n \rangle(\theta) n_\alpha + \langle f_t \rangle(\theta) t_\alpha) n_\beta d\theta \quad (3.62)$$

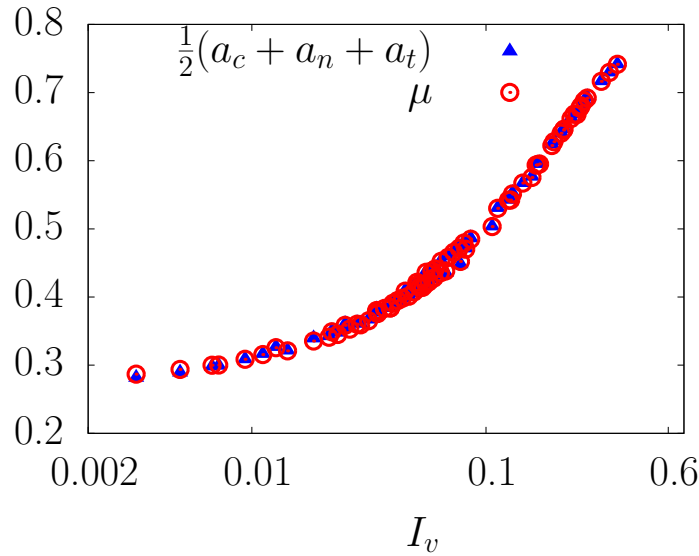
En introduisant les développements harmoniques de  $P(\theta)$ ,  $\langle f_n \rangle(\theta)$  et  $\langle f_t \rangle(\theta)$  dans cette expression intégrale et en supposant que les tenseurs  $F$ ,  $\chi$  et  $\sigma$  sont colinéaires, le déviateur de contraintes normalisé  $q/p$ , où  $p = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$  et  $q = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$  en 2D, est donnée par

$$\frac{q}{p} \simeq \mu \simeq \frac{1}{2} (a_c + a_n + a_t) \quad (3.63)$$

Cette relation fournit une très bonne approximation du coefficient de frottement interne dans le cas des déformations quasi-statiques [174, 170] et des écoulements inertiels secs [13]. Mais elle n'a jamais été appliquée dans le cas des suspensions.

La figure 3.27 montre l'évolution de  $q/p$  et de la demi-somme des anisotropies en fonction de  $I_v$  pour  $\alpha_v = 0.65$ . On y voit un excellent accord entre les deux valeurs. Cet accord permet à présent de mieux cerner l'origine de la résistance au cisaillement en étudiant séparément les trois anisotropies.

La figure 3.28 montre  $a_c$ ,  $a_n$  et  $a_t$  en fonction de  $I_v$ . Toutes ces anisotropies se mettent bien à l'échelle avec  $I_v$ . On observe une forte augmentation de  $a_c$  et une faible diminution de  $a_n$



**FIGURE 3.27:** Evolution de  $\mu$  et la demi somme  $\frac{1}{2}(a_c + a_n + a_t)$  en fonction de  $I_v$ .

accompagné d'une faible augmentation de  $a_t$ . Ainsi, les variations de  $a_n$  et  $a_t$  se compensent additivement, et la forte augmentation de  $a_c$  indique que la principale origine de la résistance au cisaillement est l'organisation de plus en plus anisotrope du réseau des contacts. En présence des effets dynamiques et des forces de lubrification, des chaînes de contact de plus en plus longues mais éphémères se forment. Même si l'anisotropie des forces varie peu, la polarisation croissante du réseau des contacts conduit à une transmission plus homogène des forces et donc à une augmentation de la résistance au cisaillement.

Le paramètre  $a_t$  représente le degré de mobilisation des forces de frottement. La valeur moyenne des forces de frottement est nulle sur l'ensemble de contacts en raison de l'équilibre des moments des forces sur les particules. Mais la valeur moyenne des forces de frottement n'est pas nulle dans toutes les directions. Elle est maximale dans la direction  $\theta_t$  qui est orthogonale à la direction principale majeure. La mobilisation du frottement est donc mesurée en divisant  $\langle f_t \rangle(\theta_t)$  par  $\langle f \rangle$ , ce qui est égal à  $a_t$  d'après (3.52). L'augmentation de  $a_t$  en fonction de  $I_v$  représente ainsi une plus grande sollicitation des forces de frottement qui accompagne la polarisation croissante du réseau des contacts.

Le fait que les effets inertiels et visqueux jouent pratiquement le même rôle vis-à-vis de la rhéologie à travers le paramètre  $I_v$  présente ici une contrepartie intéressante au niveau de la microstructure. Leur effet conjugué est de modifier l'anisotropie structurale du réseau des contacts. L'anisotropie totale des forces  $a_n + a_t$  n'est pas affectée. Une autre façon de voir cette analogie est que les effets inertiels peuvent aussi s'exprimer sous la forme d'une viscosité effective (quoique dépendant de la pression de confinement ou de la compacité). La viscosité effective est donc l'effet additif de cette viscosité et de la viscosité du fluide. L'effet conjugué de ces deux viscosités est de modifier le processus de gain et de perte des contacts pendant l'écoulement et donc l'anisotropie du réseau des contacts qui est le principal facteur qui contrôle

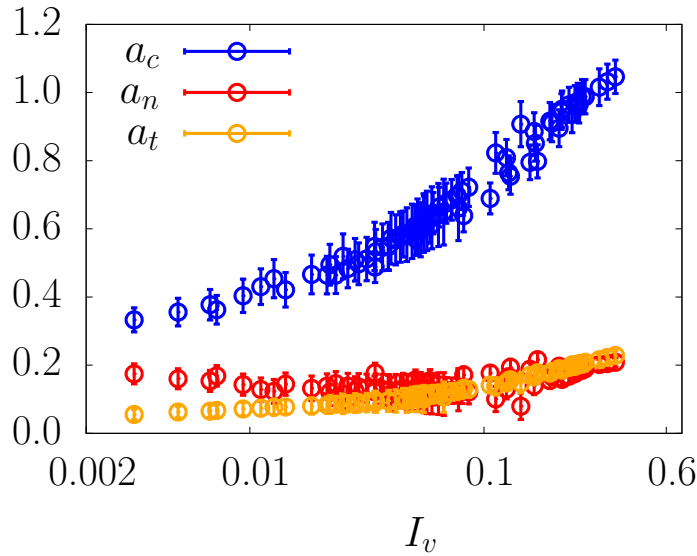


FIGURE 3.28: Evolution des anisotropies  $a_c, a_n$  et  $a_t$  en fonction de  $I_v$ .

le coefficient de frottement interne.

### 3.7. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté une analyse paramétrique détaillée des écoulements des mélanges fluide-grains en utilisant l’approche DEM-LBM dans une géométrie simple avec la pression de confinement exercée directement sur les grains. Nous avons montré qu’un nombre “visco-inertiel”  $I_v = I(1 + \alpha_v/St)^{1/2}$  permet de mettre à l’échelle le coefficient de frottement interne et la compacité pour une valeur fixe du paramètre  $\alpha_v \simeq 2$ . Nous en avons déduit également les viscosités effectives normale et en cisaillement en fonction de la compacité et ainsi mis en évidence la divergence de ces viscosités en  $(\phi_c - \phi)^{-2}$  en accord avec les expériences et les simulations basées sur la DEM avec des forces de traînées ajoutées directement sur les grains. Nous avons analysé la relation entre l’indice des vides et le coefficient de frottement interne et proposé une relation linéaire. De même, nous avons montré que les matériaux granulaires en écoulement sont régis par une loi de compression dynamique qui peut être interpolé par une loi logarithmique comme en mécanique des sols.

Nous avons également analysé la microstructure en termes de la connectivité et des anisotropies des orientations des contacts et des forces normales et tangentiellles entre les grains. Ces anisotropies se mettent globalement bien à l’échelle avec  $I_v$  et leur demi-somme est égale au coefficient de frottement interne pour toutes les valeurs de  $I_v$ . La variation des anisotropies avec  $I_v$  montre que la contribution majeure à la résistance au cisaillement vient de l’anisotropie du réseau des contacts. Une légère augmentation de l’anisotropie des forces de frottement, qui représente une mesure de la mobilisation des forces de frottement, est compensée par la baisse

de l'anisotropie des forces normales, qui représente l'organisation des contacts en chaînes de forces. Nos résultats montrent que le nombre de coordination n'est pas une fonction univoque de  $I_v$ . Ceci indique qu'en présence du fluide, la simple connectivité des grains par contacts ne représente pas une information robuste par rapport à la rhéologie. Cette étude pourrait être poursuivie pour mieux caractériser les interactions locales entre les grains, les pressions interstitielles et la cinématique d'ensemble.



# Fragmentation et écoulement des agrégats dans un fluide

## Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>132</b>
<b>4.1. Effet du fluide interstitiel sur l'écoulement de sablier</b> . . . . .	<b>133</b>
4.1.1. Effets de voûte et "jamming" . . . . .	133
4.1.2. Le système simulé . . . . .	135
4.1.3. Evolution des pressions hydrodynamiques . . . . .	135
4.1.4. Débit d'écoulement . . . . .	140
<b>4.2. Fragmentation et écoulement des grains cohésifs immergés</b> . . . . .	<b>143</b>
4.2.1. Relocalisation-Surfragmentation . . . . .	143
4.2.2. Modélisation numérique . . . . .	144
4.2.3. Exemples de simulations . . . . .	147
4.2.4. Effet du ballonnement . . . . .	148
<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>150</b>

---

## Introduction

Une géométrie d'écoulement des milieux granulaires souvent rencontrée dans les applications industrielles consiste en une conduite avec ou sans constriction. Le cas considéré dans le contexte nucléaire est celui d'un empilement compact de fragments de forme polyédrique au sein d'un tube cylindrique. Selon le temps de séjour en réacteur la distribution en taille de ces fragments peut avoir une évolution spatiale : typiquement, de plus gros fragments au voisinage de l'axe du tube et de plus petits fragments en périphérie. Certaines constatations expérimentales révèlent par ailleurs que l'interaction pastille-gaine en fonctionnement normal peut conduire à une adhésion des plus petits fragments périphériques à la paroi interne du tube. La situation est alors celle d'un empilement dans un tube à parois rugueuses [148].

L'étude de la stabilité d'un tel empilement consiste à étudier son écoulement potentiel sous l'effet d'un gradient de pression due à la formation d'un ballonnement ou une brèche dans la paroi de la gaine, ou encore sous l'effet de la gravité. La zone par laquelle cet empilement s'écoule est alors une section circulaire transversale du tube. En plus de la rugosité interne de cette section, des fragments de plus grandes tailles peuvent rester adhérents au tube diminuant ainsi cette section efficace d'écoulement.

Dans ce chapitre, nous allons donc nous intéresser à deux problèmes indépendants : 1) l'écoulement des grains immergés dans un sablier et 2) la relocalisation des grains cohésifs sous l'effet d'un gradient de pression dans le fluide. Le cas du sablier est choisi ici comme une configuration qui se prête bien à une analyse détaillée. On voudrait en particulier étudier l'effet du fluide sur le débit par rapport au cas d'un sablier sous vide (sans fluide). En l'absence de fluide, le débit est indépendant de la hauteur de l'assemblage au-dessus de l'orifice et il varie d'après une loi de puissance, dite loi de Beverloo [21], en fonction du diamètre de l'orifice. Pour un diamètre en-dessous de  $\simeq 6$  diamètres de grains, l'écoulement peut se bloquer à la suite de la formation d'un voûte stable de grains juste au-dessus de l'orifice. Le fluide peut donc affecter l'écoulement en jouant sur le débit ou sur la probabilité de blocage des grains à travers les forces de lubrification.

Le problème de la relocalisation du combustible est étudié en considérant un modèle de fragments polygonaux (en 2D) interagissant par une loi de cohésion et empilés dans un tube rectangulaire avec un orifice latéral de largeur donnée. Le fluide représente le fluide caloporteur placé à l'extérieur de la gaine, mais qui pénètre dans le milieu fragmenté à l'ouverture de l'orifice. Nous allons nous intéresser à l'effet de la géométrie de l'ouverture sur la fragmentation et l'éjection des fragments.

## 4.1. Effet du fluide interstitiel sur l'écoulement de sablier

### 4.1.1. Effets de voûte et "jamming"

La géométrie de silo ou de sablier a souvent servi d'exemple remarquable qui singularise les matériaux granulaires par rapport aux liquides. En effet, l'équilibre mécanique des grains dans un silo implique le frottement aux parois et conduit à l'*effet de silo*<sup>1</sup>. On considère l'équilibre d'une section du matériau ensilé de largeur  $L$  en supposant que

1. La contrainte tangentielle au niveau des parois est complètement mobilisée et égale à  $\mu_w \sigma_{xx}$ , où  $\mu_w$  est le coefficient de frottement entre le matériau et les parois et  $\sigma_{xx}$  est la contrainte horizontale,
2. Le matériau est dans un état de Rankine actif de telle sorte que  $\sigma_{xx} = K \sigma_{zz}$ , ou  $K = (1 + \sin \varphi)/(1 - \sin \varphi)$  est le coefficient de redirection des contraintes.

On montre alors que la contrainte verticale moyenne  $\sigma_{zz}$  à une distance  $z$  de la surface libre est donnée par

$$\sigma_{zz} = \rho g \lambda (1 - e^{-z/\lambda}) \quad (4.1)$$

où  $\lambda = L/(4\mu_w K)$ . Cette relation montre que la contrainte sature exponentiellement et tend vers une valeur constante  $\sigma_{zz} = \rho g \lambda$  en fonction de la profondeur. Ainsi, la contrainte au fond d'un silo est pratiquement indépendante de la hauteur  $H$  du matériau granulaire si celle-ci est supérieure à  $\lambda$  alors qu'elle augmente linéairement avec  $H$  en l'absence de frottement avec les parois comme pour un liquide.

Cet effet peut être qualifié d'*effet de voûte macroscopique* en ce sens qu'il résulte de l'équilibre mécanique à l'échelle du silo. La référence aux "voûtes" sous-entend l'analogie avec une voûte architecturale qui redirige le poids de ses éléments vers l'extérieur (vers les parois dans un silo). Mais il existe un autre effet de voûte dans un silo ou un sablier, cette fois au niveau de l'orifice d'évacuation des grains. Si le diamètre  $R$  de l'orifice est suffisamment large comparé au diamètre des particules, alors les grains s'écoulent comme un liquide, mais avec un débit  $Q$  indépendant de la hauteur  $H$ . Cette valeur constante du débit a valu au sablier son utilisation comme un chronomètre. Elle s'explique comme une conséquence du fait que la pression à la base est indépendante de  $H$ . Ceci implique que le débit est contrôlé localement par des phénomènes qui se passent autour de l'orifice. Une observation remarquable est que le débit n'est pas proportionnel à la section  $R^2$  de l'orifice, mais obéit à une loi de puissance  $Q \propto (R - R_e)^\beta$  avec  $\beta \simeq 5/2$  et où  $R_e$  est le diamètre minimal permettant le passage des grains. Cette loi, connue sous le nom de *loi de Beverloo*, est robuste et valable indépendamment des détails géométriques locaux.

Pour expliquer la loi de Beverloo, il faut prendre en compte le fait que la zone juste au-dessus de l'orifice est une zone de transition des grains d'un régime d'écoulement quasi-statique vers un régime inertiel ou de chute balistique. La frontière entre ces deux régimes se situe à une

1. ou effet de Janssen d'après les travaux réalisés par Janssen qui s'intéressait à la pression qui s'exerce sur le fond d'un silo

distance de l'ordre du diamètre  $R$  de l'orifice. Cette frontière s'apparente à une voûte : une chaîne de particules qui s'appuie à ses extrémités sur les bords de l'orifice. Cette image de voûte "microscopique" est donc plus proche d'une voûte architecturale que l'effet de voûte macroscopique. Pendant l'écoulement, cette voûte a un caractère dynamique : les grains à l'intérieur du sablier s'appuient sur celle-ci qui se renouvelle constamment avec des grains qui la traversent. Les grains situés en-dessous de cette voûte constituent une zone "fluidisé" avec une densité  $n_p$  inférieure à celle situé au-dessus. Par définition, le débit est donné par une vitesse multipliée par une densité et par la section efficace de l'écoulement. On peut donc écrire

$$Q = n_p v_{out} (R - R_e)^2 \quad (4.2)$$

où  $v_{out}$  est la vitesse moyenne des grains à la sortie du silo (ou du compartiment haut du sablier),  $n_p$  est la densité numérique des grains dans la zone fluidisée et  $R_e$  est le diamètre minimal (de l'ordre du diamètre des grains) pour permettre aux grains de passer.  $(R - R_e)^2$  définit la "section efficace" de l'écoulement. Le fait que  $Q$  varie comme  $(R - R_e)^{5/2}$  indique donc que  $v_{out}$  varie comme  $\sqrt{R - R_e}$  en supposant que  $n_p$  est indépendant de  $R$ . Cette dépendance s'explique par le fait que les grains qui se détachent de la voûte parcourent une distance de l'ordre de  $R - R_e$  avec une accélération  $g$  impliquant  $v_{out} \simeq \sqrt{g(R - R_e)}$ .

Enfin, un troisième effet se rapproche encore plus de l'image que l'on peut se faire d'une voûte. Les expériences et simulations numériques montrent que pour une ouverture  $R$  inférieure à une ouverture critique  $R_c$ , l'écoulement s'arrête suite à la formation d'une voûte stable. Le temps nécessaire pour l'arrêt de l'écoulement augmente avec  $R$  et diverge lorsque  $R \rightarrow R_c$ . Le nombre de grains  $N_p$  passants avant l'arrêt est aléatoire et il montre une distribution exponentielle et une valeur moyenne  $\langle N_p \rangle$  qui diverge quand  $R \rightarrow R_c$ . Il s'agit d'un exemple de phénomène de "jamming" au sens d'une transition d'un régime d'écoulement continu vers un régime statique [197, 229, 229, 107, 137].

La présence d'un fluide interstitiel peut influencer de différentes façons les trois effets de voûte mentionnés brièvement ci-dessus. Le fluide peut d'abord intervenir par sa viscosité dans la zone fluidisée. On peut s'attendre donc à ce que la loi de Beverloo en soit modifiée. Il peut aussi avoir un effet lubrifiant sur les grains, perturber la formation de voûtes et par conséquent faciliter l'écoulement des grains en modifiant le seuil  $R_c$ . De même, le passage des grains d'un compartiment à l'autre peut engendrer des gradients de pression qui tendent soit à favoriser l'apparition de voûte soit de les déstabiliser. Cet effet conduit à un phénomène d'écoulement oscillatoire appelé "ticking hour glass" ou *sablier intermittent*. En effet, la chute rapide d'un grain du compartiment supérieur vers le compartiment inférieur en passant par l'orifice entraîne la décompression de l'air dans la partie haute et la compression de l'air dans la partie basse du sablier. Pour des grains suffisamment fins, une différence de pression de l'ordre de  $\delta p = 10^{-4}$  atm entre les pressions dans les deux compartiments peut suffire pour stabiliser une voûte et obstruer l'écoulement [125] ! Ensuite, la diffusion de l'air dans les pores entre grains tend à rétablir l'équilibre et réduire exponentiellement  $\Delta p$ , ce qui entraîne le déblocage de la voûte [125].

Pour étudier le débit d'écoulement et les phénomènes de blocage dans un sablier en présence d'un fluide, nous avons réalisé des simulations en géométrie 2D. Etant données les durées

relativement longues des simulations, nous avons fixé les paramètres relatifs au fluide et aux grains sauf pour la densité des grains et considérer plusieurs valeurs de l'ouverture  $R$ . Chaque simulation a été effectuée avec et sans fluide. Dans la suite, nous allons présenter ces simulations et les analyser pour montrer leur cohérence globale et les effets parfois contradictoires que le fluide peut avoir en interaction avec les grains.

#### 4.1.2. Le système simulé

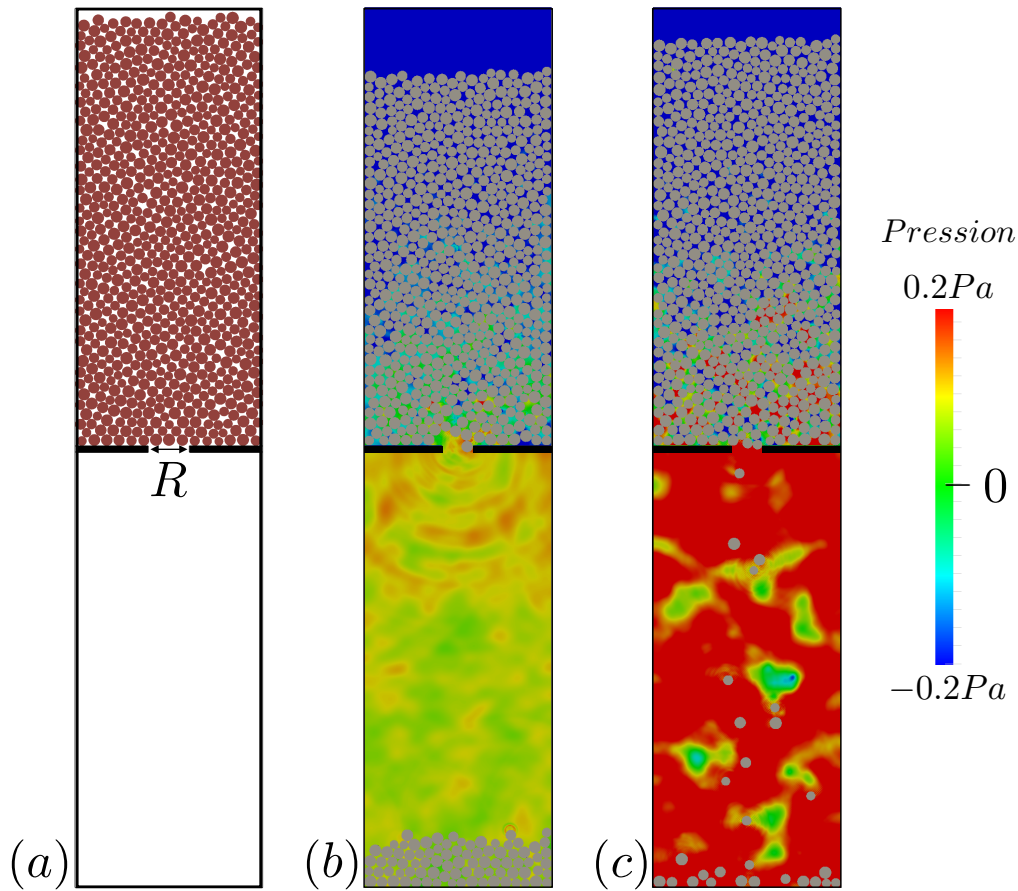
On considère un sablier 2D de forme rectangulaire de largeur  $L$  et composé de deux compartiments de même volume et séparés par une paroi comportant une ouverture de largeur  $R$  en son milieu, comme schématisé sur la figure 4.1(a). L'état initial est préparé par dépôt gravitaire de grains circulaires dans le compartiment supérieur et sans ouverture à sa base. La distribution des tailles des grains est uniforme par fractions volumiques avec un rapport  $d_{max}/d_{min} = 1.43$  entre les diamètres maximum et minimum. Le nombre total des grains est  $N_{tot} = 725$ . Il y a environ 15 diamètres de grains dans la largeur  $L$  du sablier et 50 dans sa hauteur  $H$ .

Le coefficient de frottement entre grains est  $\mu = 0.5$  et celui entre les grains et les parois est de  $\mu_w = 0.5$ . Le rapport d'aspect relativement important choisi ( $H/L > 3$ ) permet à l'effet Janssen de s'exprimer pendant l'écoulement. Mais il faut noter que pour des ouvertures  $R$  de faibles valeurs, l'effet de voûte local (au-dessus de l'orifice) domine l'écoulement. Dans les simulation, le domaine fluide recouvre la totalité du volume intérieur du sablier. Les viscosité  $\eta_f$  et densité  $\rho_f$  choisies sont égales à celles de l'eau. Pour simplifier les simulations, nous avons désactivé l'effet de la gravité sur le fluide. La pression hydrostatique est donc identiquement unitaire dans tout le volume. Nous avons fait varier l'ouverture  $R$  de  $2d$  à  $12d$ . Pour chaque ouverture, quatre simulations de vidange sont réalisées : 1) deux simulations sans fluide pour  $\rho_s = 1200$  et  $\rho_s = 2600$  et 2) deux simulations avec fluide pour  $\rho_s = 1200$  et  $\rho_s = 2600$ .

Nos simulations montrent que l'écoulement des grains secs pour  $R = 2d$  et  $R = 3d$  s'arrête rapidement alors que pour les mêmes valeurs de  $R$ , en situation immergée, l'écoulement des grains se poursuit sur des durées plus longues. Un gradient de pression dans le fluide est induit par le mouvement des grains entraînant un blocage temporaire de l'écoulement comme dans un sablier intermittent. La figure 4.1(b) représente, pour  $R = 3d$ , l'écoulement des grains juste avant blocage ainsi que le gradient de pression dans le compartiment supérieur. La figure 4.1(c) représente le champ des pressions hydrodynamiques pendant l'écoulement. Dans ce cas les gradients de pression apparaissent encore plus marqués.

#### 4.1.3. Evolution des pressions hydrodynamiques

La figure 4.2 montre l'évolution des pressions moyennes du fluide  $p_h$  et  $p_b$  respectivement dans les compartiments haut et bas du sablier en fonction du temps, ainsi que les instants de passage des grains par l'orifice, pour les quatre valeurs les plus faibles de  $R$  (de  $3d$  à  $6d$ ). La pression moyenne est la pression hydrostatique et elle est posée égale à 0. Comme attendu, les



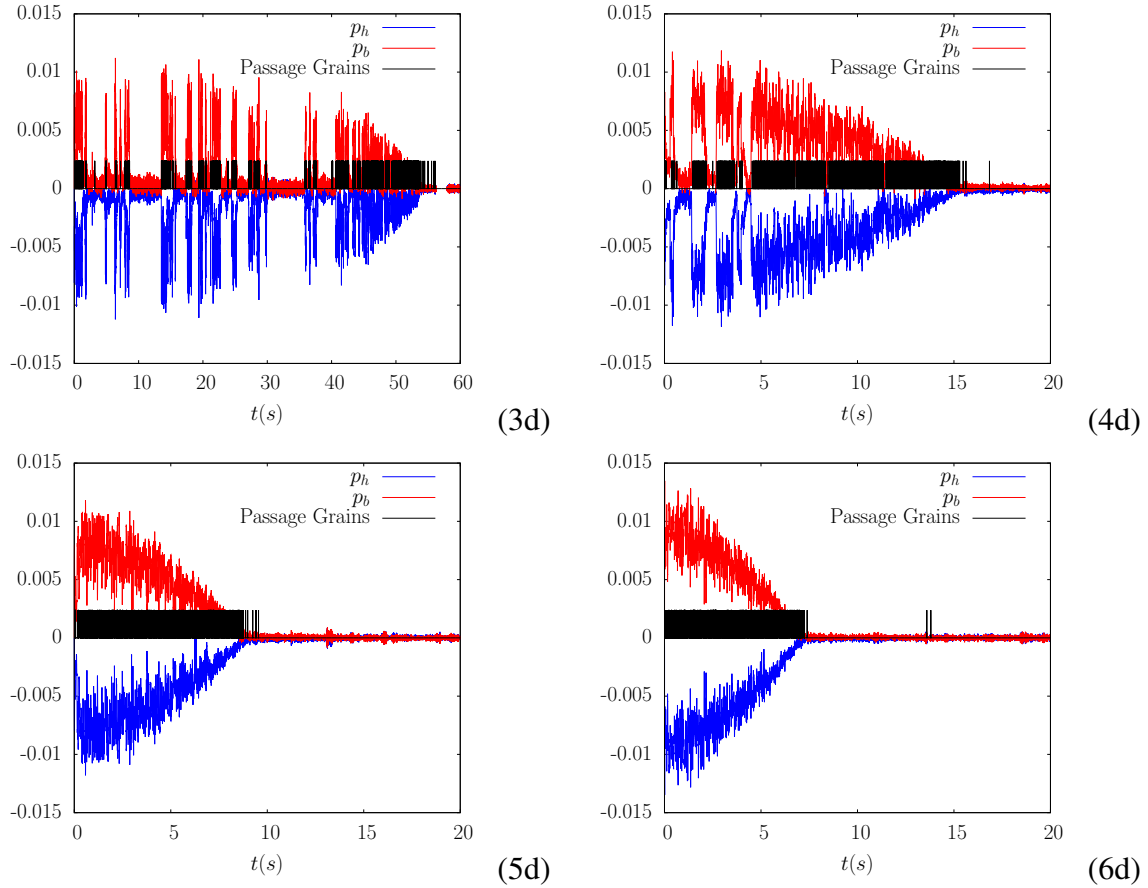
**FIGURE 4.1:** (a) Le sable numérique ; (b) Un exemple du champ des pressions du fluide juste avant le blocage de l'écoulement ; (c) un exemple du champ des pressions pendant l'écoulement.

variations de la pression dans les deux compartiments sont opposées et égales en amplitude. Pour  $R = 3d$ , on observe que le passage des grains a un caractère intermittent et irrégulier. Alternativement les périodes d'écoulement (phase active) sont suivies de périodes d'arrêt (phase inactive). Cette alternance est corrélée avec les fluctuations de pression dans les compartiments haut et bas. Ce caractère intermittent est beaucoup moins marqué vers la fin de la vidange. La différence de pression  $\Delta p = p_b - p_h$  s'annule rapidement pendant les phases d'arrêt. La différence de pression maximale  $\Delta p_{max}$  diminue pendant la vidange et tend vers zéro quand tous les grains ont rejoint le compartiment du bas.

Le caractère intermittent de l'écoulement est aussi visible pour  $R = 4d$  avec des phases d'arrêt plus courtes. Pour les valeurs plus élevées de  $R$  l'écoulement se poursuit sans blocage. Les derniers grains qui passent sont des grains isolés qui se trouvaient dans les zones mortes de part et d'autre de l'orifice. Transportés par l'écoulement du fluide, ils atteignent progressivement l'orifice et finissent par tomber après avoir roulé sur le fond du compartiment haut. La durée totale de l'écoulement diminue lorsque  $R$  augmente en raison de la diminution des périodes d'inactivité mais, comme on le verra par la suite, du fait du débit plus élevé des grains.

La figure 4.3 montre, en fonction du temps, le nombre cumulé  $N_p$  de grains traversant l'orifice dans les simulations avec et sans fluide<sup>2</sup>.

Dans le cas sec, pour  $R = 3d$ , on observe un arrêt rapide de l'écoulement alors que, en présence du fluide, celui-ci se poursuit malgré des phases d'arrêt. Dans cette limite, le fluide semble donc empêcher l'obstruction définitive de l'écoulement. Ces arrêts sont clairement corrélés avec la différence de pression induite. Pour les valeurs plus élevées de  $R$  on n'observe plus de phase d'arrêt des grains et le débit est très bien défini.

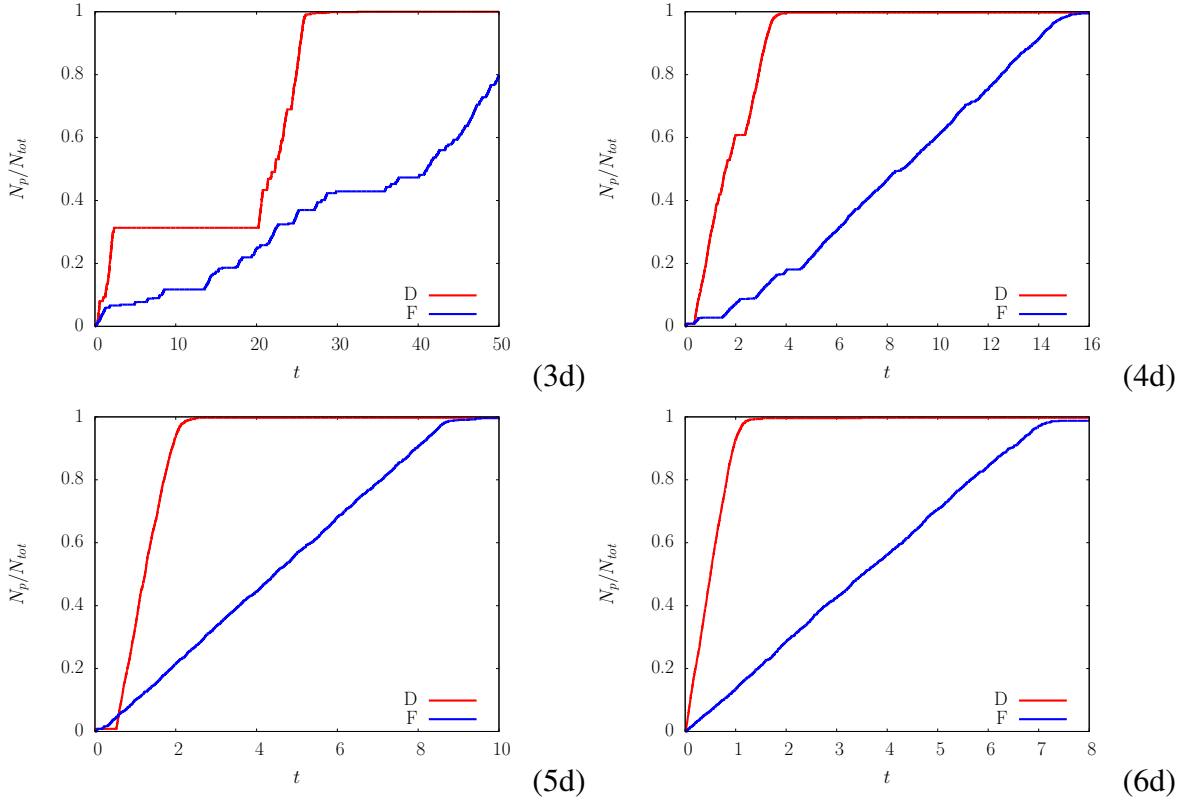


**FIGURE 4.2:** Evolutions temporelles des pressions moyennes normalisées  $p_h$  et  $p_b$  dans les compartiments haut et bas du sablier pour  $R = 3d, 4d, 5d$  et  $6d$ . Les pressions sont normalisées par  $mg/d$ .

La figure 4.4(a) montre, pour  $R = 4d$ , un zoom sur la série temporelle de la pression dans le compartiment haut. On voit qu'au moment de l'arrêt de l'écoulement la pression est à sa valeur maximale et décroît rapidement pendant l'arrêt. La figure 4.4(b) montre que la diminution de la différence de pression peut être ajustée par une décroissance exponentielle [220] :

$$\Delta p = \Delta p_{max} e^{-t/\tau} \quad (4.3)$$

2. Le tracé est fait pour les mêmes valeurs de  $R$  que celles de la figure 4.2.



**FIGURE 4.3:** Evolution temporelle du nombre cumulé de grains traversant l'orifice normalisé par le nombre total de grains, pour quatre valeurs de  $R$ .

où  $\Delta p_{max}$  est la pression juste avant l'arrêt et  $\tau$  est le temps caractéristique donné par [220, 125]

$$\tau = \frac{\eta_f V}{p_{moy} \pi \kappa R} \quad (4.4)$$

où  $V$  est le volume du compartiment haut et  $\kappa$  est la perméabilité de l'assemblage. La décroissance exponentielle a été déduite par Wu et al. [220] comme une conséquence de la loi de Darcy et de la loi des gaz parfaits. Mais la décroissance que nous observons sur la figure 4.4(b) n'est pas strictement exponentielle et l'écoulement ne se déclenche pas immédiatement lorsque la différence de pression atteint sa valeur presque nulle. Dans les expériences de Wu et al. [220], le fluide est l'air et les pressions hydrodynamiques sont induites par la compressibilité du fluide. Dans notre cas, le fluide est l'eau et sa très faible compressibilité est liée essentiellement au calcul par la méthode LBM.

La figure 4.5 montre pour différentes valeurs de  $R$  et dans la phase d'écoulement, l'évolution de  $p_h$  en fonction du nombre  $N_p$  normalisé par le nombre total de grains  $N_{tot}$  traversant l'orifice. Toutes les courbes se superposent bien et sont bien ajustées par une décroissance quadratique comme on peut le voir sur la figure.

On s'intéresse donc à l'origine de  $p_h$  et sa décroissance avec  $N_p$ . Nous allons considérer

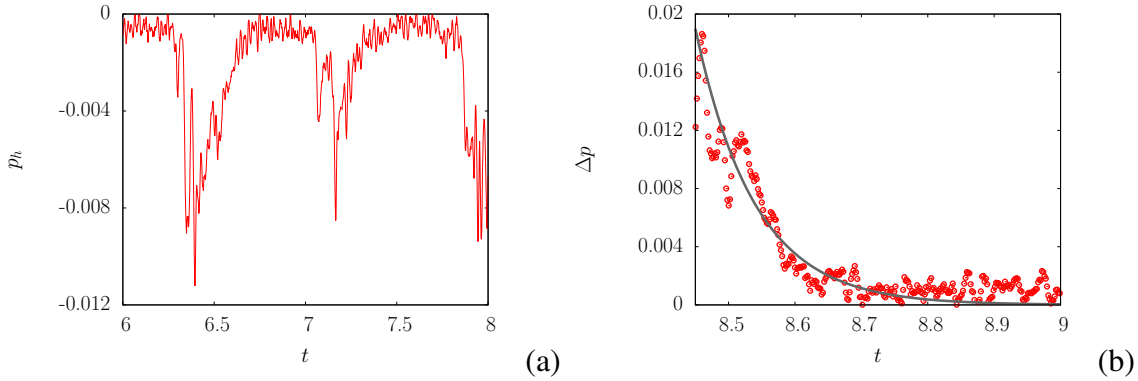


d'abord le cas d'un écoulement continu des grains. Dans la phase fluidisée, l'écoulement n'est régi que par le passage successif des grains à travers l'orifice. Dans la phase dense, la hauteur du lit granulaire au-dessus de la voûte descend lentement en fonction des détachements successifs des particules de la voûte. Ce processus n'est pas instantané et implique l'apparition d'une onde de densité qui se propage du bas vers le haut dans la colonne de grains. En moyenne, ce processus peut être assimilé à une déformation verticale  $\dot{\epsilon}_{zz}$  de la colonne définie par

$$\dot{\epsilon}_{zz} = \frac{v_z(z)}{z} \quad (4.5)$$

Cette déformation est pilotée par la vitesse moyenne  $v_z^s(z=0) \simeq v_{out}R/L$  des grains à la base du compartiment haut. En supposant que la déformation locale est contrôlée par la taille de l'orifice sur une distance de l'ordre de  $R$ , on a

$$\dot{\epsilon}_{zz} \simeq \frac{v_z^s(z=0)}{R} \simeq \frac{v_{out}}{L} \quad (4.6)$$



**FIGURE 4.4:** (a) Zoom sur l'évolution de la pression hydrodynamique dans le compartiment haut pour  $R = 4d$ ; (b) Ajustement exponentiel de la décroissance de la pression pendant la phase d'arrêt.

D'après la loi de Darcy,

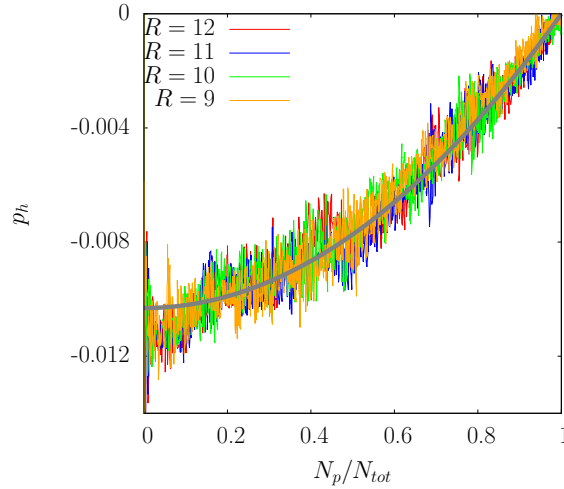
$$v_z^{sf}(z) = \frac{\kappa}{\eta_f} \frac{dp}{dz} \quad (4.7)$$

où  $v_z^{sf}(z)$  est la vitesse du fluide par rapport aux grains à une distance  $z$  de la base et  $\kappa$  est la perméabilité de l'empilement. La conservation de la masse du fluide pendant la déformation implique

$$v_z^{sf} = -v_z^s \quad (4.8)$$

Les équations précédentes impliquent

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\eta_f v_{out}}{\kappa L} z \quad (4.9)$$



**FIGURE 4.5:** Dépression normalisée dans le compartiment haut du sablier en fonction du nombre de grains passés. La courbe pleine est un ajustement quadratique prédit par l'équation (4.12).

En intégrant cette équation sur la hauteur  $H$  de la colonne, on obtient la différence pression  $\Delta p$  entre la base et la surface libre de la colonne :

$$\Delta p = \frac{\eta_f v_{out}}{\kappa L} H^2 \quad (4.10)$$

En toute rigueur, cette équation représente la valeur maximale  $\Delta p_{max}$  de la différence de pression dans la mesure où elle est obtenue pour une phase active.

La hauteur  $H$  est liée au nombre de grains  $N_p$  et à la compacité par la relation suivante :

$$H \simeq \frac{\pi d^2}{4L\phi} (N - N_p) \quad (4.11)$$

La différence de pression peut donc s'exprimer également en fonction de  $N_p$  :

$$\Delta p_{max} \simeq \frac{\eta_f v_{out}}{\kappa L} \left( \frac{\pi d^2}{4L\phi} \right)^2 (N - N_p)^2 \quad (4.12)$$

Cette relation prédit une dépendance quadratique de  $\Delta p$  par rapport  $N_p$  et c'est ce que l'on observe sur la figure 4.5. La figure 4.5 montre que  $\Delta p_{max}$  ne dépend pas de  $R$  sauf à travers  $v_{out}$  qui augmente faiblement avec  $R$ , comme on le verra plus bas.

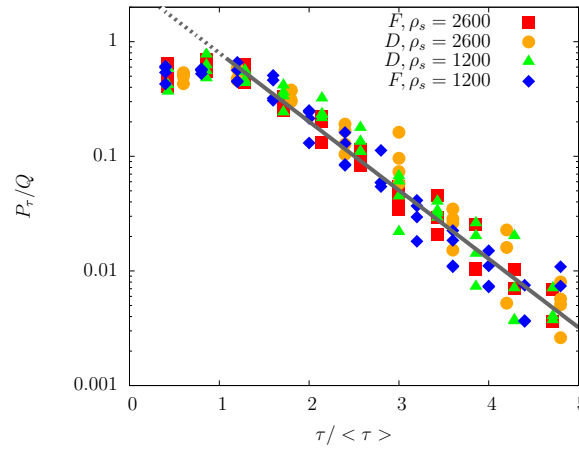
#### 4.1.4. Débit d'écoulement

Le passage des grains à travers l'orifice est un processus stochastique qui reflète le désordre dans la zone fluidisée. Le débit  $Q = dN_p/dt$  est relativement bien défini pendant l'écoulement. Mais la distribution des temps d'attente  $\tau_i = t_{i+1} - t_i$  entre deux passages successifs reflète le

caractère stochastique du processus. La figure 4.6 montre la distribution  $P_\tau$  des valeurs des  $\tau$  pour l'ensemble de nos simulations avec et sans fluide. Si l'on normalise  $P_\tau$  par  $Q$  et les valeurs de  $\tau$  par la moyenne des temps d'attente  $\langle \tau \rangle = 1/Q$ , toutes les distributions quelque soit  $R$  et  $\rho_s$  se superposent. Sauf pour les faibles valeurs de  $\tau$ , la distribution peut être décrite par un loi exponentielle décroissante. En remarquant que  $Q = 1/\langle \tau \rangle$ , cette loi exponentielle peut s'écrire sous la forme :

$$P_\tau(\tau) = \alpha Q e^{-\alpha Q t} \quad (4.13)$$

avec  $\alpha \simeq 3, 15$ . Il est remarquable que cette loi s'applique aussi bien dans le domaine des faibles valeurs de  $R$  que dans le domaine des grandes valeurs pour lesquelles la probabilité de blocage est nulle.



**FIGURE 4.6:** Densité de probabilité des temps d'attente  $\tau$  entre deux passages successifs de grains en fonction de  $\tau/\langle \tau \rangle$ .

Pour les faibles valeurs de  $\tau$  la densité de probabilité est presque constante. Ce domaine correspond aux passages rapprochés de deux ou plusieurs grains lorsque l'ouverture du sablier le permet. En écartant ces phénomènes de passage rapproché, la distribution exponentielle de  $\tau$  suggère un processus sans mémoire lié au caractère chaotique des grains dans la zone fluidisée. L'absence de mémoire et le caractère homogène du processus dans le temps conduisent à un processus de Poisson. Dans un tel processus, le nombre de grains passants  $k$  dans un intervalle de temps  $[t', t' + t]$  obéit à la distribution de Poisson avec  $\alpha Q t$  comme paramètre :

$$P_k(t) = \frac{(\alpha Q t)^k e^{-\alpha Q t}}{k!} \quad (4.14)$$

La distribution  $P_0(t)$  est la probabilité qu'aucun grain ne passe dans l'intervalle  $t$ . Elle est reliée à  $P_\tau(\tau)$  par

$$P_0(t) = \int_t^\infty P_\tau(\tau) d\tau = e^{-\alpha Q t} \quad (4.15)$$

L'observation d'une même densité de probabilité des temps d'attente indique que le fluide et l'ouverture  $R$  n'influencent la nature du processus de vidange qu'à travers le débit  $Q$ . La figure

4.7 montre le débit en fonction de  $R$  pour les écoulements secs et immergés. Dans le cas sec, le débit est clairement non-linéaire en fonction de  $R$  :  $Q \sim (R - R_e)^{3/2}$ . L'exposant  $3/2$  en 2D est cohérent avec le modèle de Beverloo. En effet, en 2D le débit s'écrit

$$Q = n_p v_{out} (R - R_e) \quad (4.16)$$

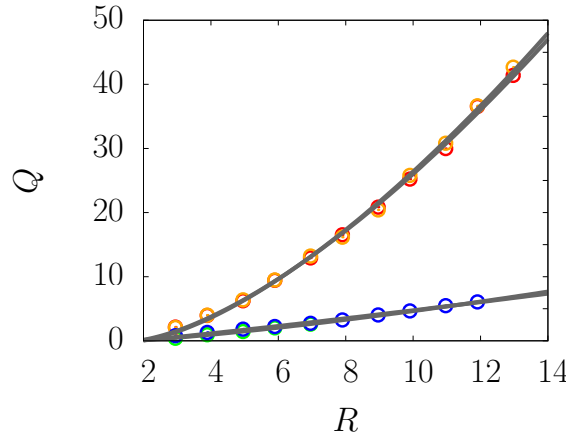
Sur la figure 4.8, on voit que  $v_{out}^3$  augmente comme  $\sqrt{R - R_e}$  avec  $R_e \simeq 1,8$  en accord avec le modèle de Beverloo. Par contre on constate que  $v_{out}$  ne s'annule pas pour  $R_e$ . On peut donc écrire :

$$v_{out} = v_0 + \sqrt{R - R_e} \quad (4.17)$$

Ceci implique

$$Q_{sec} = n_p \sqrt{g} (R - R_e)^{3/2} + n_p v_0 (R - R_e) \quad (4.18)$$

Étant donnée la faible valeur de  $v_0$ , on note que cet ajustement fonctionne bien et n'est pas très éloigné de la prédiction de Beverloo. En outre, on remarquera que cette dépendance indique aussi que la densité numérique des grains dans la zone fluidisée  $n_p$  est pratiquement indépendante de  $R$ .



**FIGURE 4.7:** Débit d'écoulement en fonction de  $R$  pour l'ensemble des simulations. Les lignes continues représentent les ajustements obtenues d'après les équations (4.18) et (4.20), respectivement.

Contrairement au cas sec,  $v_{out}$  est quasiment linéaire en fonction de  $R$ , mais ne varie que très peu. On peut donc écrire

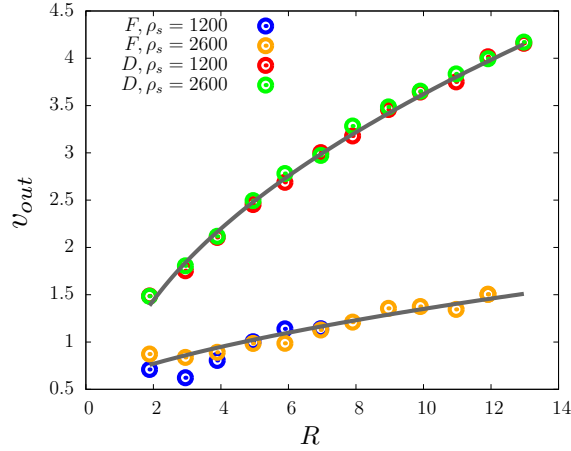
$$v_{out} = v_0 + \gamma(R - R_e) \quad (4.19)$$

ce qui implique

$$Q_{immerg} = n_p \gamma (R - R_e)^2 + n_p v_0 (R - R_e) \quad (4.20)$$

Cette fois le terme dominant est le terme linéaire. Contrairement au cas sec, la vitesse des grains est contrôlé principalement par la viscosité du fluide. Si la viscosité est suffisamment

3. La vitesse moyenne de sortie des grains  $v_{out}$  est tracée sur la figure 4.8 avec et sans fluide.



**FIGURE 4.8:** Vitesse moyenne de sortie des grains en fonction de  $R$  pour les cas sec et immergés. Les lignes continues sont des ajustements obtenus à partir des équations (4.17) et (4.19). Les vitesses sont normalisées par  $\sqrt{gd}$ .

grande (faible valeur du nombre de Stokes), la vitesse de chute des grains est indépendante de la hauteur  $R$  de la voûte et  $v_0$  correspond simplement la vitesse de Stokes. Le terme linéaire  $\gamma(R - R_e)$  dans l'équation (4.19) indique que la vitesse terminale n'est pas complètement atteinte et ceci d'autant plus que  $R$  est petit. Le rapport entre les débits peut donc être approché par la relation :

$$\frac{Q_{sec}}{Q_{immerg}} \simeq \frac{\sqrt{g(R - R_e)}}{v_{Stokes}} \quad (4.21)$$

Les valeurs des débits que nous avons reportée sur la figure 4.7 sont compatibles avec cette relation.

## 4.2. Fragmentation et écoulement des grains cohésifs immergés

### 4.2.1. Relocalisation-Surfragmentation

Une éventuelle fissuration des gaines de combustibles nucléaires pourrait avoir des conséquences sévères pour le cœur des réacteurs nucléaires à eau pressurisée. Si la fissure est suffisamment ouverte et si le combustible nucléaire est finement fragmenté, ce dernier pourrait être éjecté hors du gainage (*éjection*) et interagir avec le fluide caloporteur environnant (*interaction combustible-caloporteur*). Du fait de la haute température du combustible, une vaporisation rapide et localisée de l'eau pressurisée du caloporteur pourrait apparaître : une onde de pression pourrait se propager dans le cœur du combustible et mettre en péril l'intégrité des crayons combustibles voisins. A taille de fissure donnée, l'occurrence de ce type de situation est donc

favorisée par la finesse de la fragmentation du combustible.

Certaines constatations expérimentales du domaine nucléaire laissent à penser que la présence d'un ballonnement des gainages pourrait favoriser cette éjection de combustible. Plusieurs raisons, éventuellement concomitantes, peuvent être évoquées.

1. L'apparition d'un ballonnement est principalement liée à un chargement en pression interne de la gaine et donc à la présence d'une pression élevée (des gaz de fission) dans le gainage. Plus la pression interne est forte, plus les chances d'éjection du combustible en cas de fissuration de la gaine sont élevées.
2. A même hauteur de fissure, l'ouverture angulaire azimutale de la fissure sera probablement plus importante en cas de ballonnement que sans. L'ouverture de la fissure étant plus grande, l'éjection de combustible peut être favorisée.
3. Si du combustible est éjecté, un espace est laissé vide dans le gainage. Cet espace peut être comblé par du combustible de la partie supérieure de la colonne combustible sous l'effet notamment de la gravité. Cette situation de *relocalisation* nécessite que la colonne de combustible ne soit pas bloquée par des effets d'arche [137]. Ces effets d'arche sont moins prononcés en présence de ballonnement, ce qui peut donc conduire à une relocalisation plus marquée du combustible qui à son tour peut être éjecté et ainsi de suite jusqu'à éventuelle "vidange" de la colonne combustible.
4. En cas de ballonnement, l'extension spatiale des gradients de pression (de la pression interne au centre du combustible à la pression externe du caloporteur) est plus marquée et concerne donc potentiellement une collection de fragments de combustible plus grande. Ces gradients de pression pouvant avoir tendance à surfragmenter les fragments combustible, il est envisageable que la présence d'un ballonnement favorise la *surfragmentation* du combustible. Cette surfragmentation favorise alors toutes les situations évoquées : éjection et relocalisation.

Une analyse numérique de ce dernier point est ici tentée de manière qualitative.

#### 4.2.2. Modélisation numérique

Le modèle le plus simple à mettre en œuvre consiste à assimiler le matériau comme un assemblage de grains sphériques collés par des forces d'adhésion. Ce type d'approche a été appliqué pour la modélisation des ruptures de particules dans les sols cimentés et les roches. Dans ce modèle, appelé Bonded-Particle Model (BPM), les particules sont souvent de forme sphérique et des lois de cohésion adaptées pour chaque matériau sont utilisées. Dans notre étude, nous avons choisi une configuration bidimensionnelle pour la quelle les particules sont des disques cohésifs immergés dans un fluide. La prise en compte des phénomènes de cohésion pour les poudres frittées implique non seulement des efforts transmis par les contacts frottants, mais aussi par l'intermédiaire de couples rendant compte de la résistance au roulement entre particules. Par ailleurs, dans nos simulations, la cohésion est irréversible. C'est-à-dire que dès que le seuil de rupture est atteint l'interaction devient non-cohésive et le lien ne peut se reformer. Le

comportement mécanique avant la rupture et à la rupture de ces liens détermine, en association avec le frottement, le comportement macroscopique global, l'apparition et la propagation des fissures.

Nous avons implémenté dans notre code de calcul un modèle de cohésion basé sur une approche lagrangienne où la cinématique et les déformations sont évaluées par rapport à un état de référence [54]. La présence de la cohésion est de nature à limiter les amplitudes des mouvements, les déplacements sont donc adoptés comme variables cinématiques dans cette étude.

Dans un repère global  $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ , considérons un état de référence où deux particules  $i$  et  $j$  sont en contact (voir Figure 4.9). La cohésion se manifeste au niveau des points  $I_i$  et  $I_j$  appartenant respectivement aux disques  $i$  (de centre  $C_i$  et de rayon  $R_i$ ) et  $j$  (de centre  $C_j$  et de rayon  $R_j$ ). Les points  $I_i$  et  $I_j$  sont confondus. Par la suite, ces deux points sont suivis dans leurs mouvement à travers les déplacements des particules  $i$  et  $j$  ainsi que leurs rotations  $\theta_i$  et  $\theta_j$  par rapport au repère global. Dans le repère  $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ , on calcule les déplacements normal  $d_n$ , tangentiel  $d_t$  et la rotation  $\gamma$  autour du point de cohésion ; voir la Figure 4.10 :

$$d_n = \|\mathbf{C}_i \mathbf{C}_j\| - (R_i + R_j) \quad d_t = \mathbf{I}_i \mathbf{I}_j \mathbf{t} \quad \gamma = \theta_i - \theta_j \quad (4.22)$$

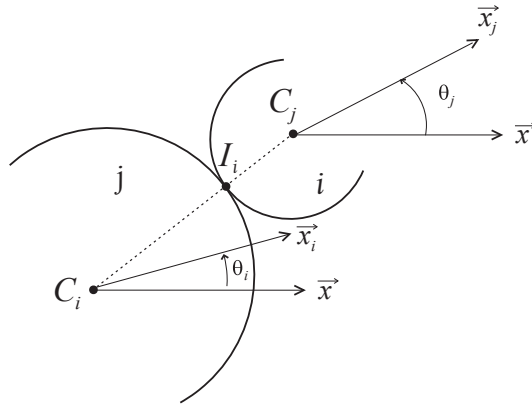


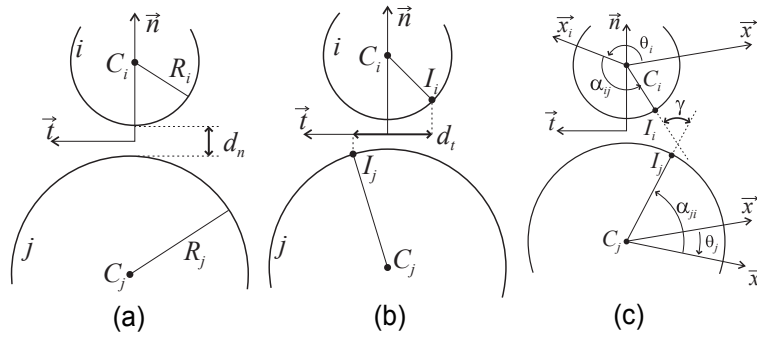
FIGURE 4.9: État de référence de deux particules en contact.

On distingue alors deux phases. Avant la rupture du lien cohésif, le comportement est pris en compte à travers des lois de cohésion reliant les variables cinématiques ( $d_n$ ,  $d_t$  et  $\gamma$ ) aux actions mécaniques que sont :

- La force normale  $f_n$  de traction ou compression suivant le vecteur  $\mathbf{n}$ .
- La force de cisaillement  $f_t$  suivant le vecteur tangent  $\mathbf{t}$ .
- Le couple  $M_\gamma$  suivant le vecteur  $\mathbf{z}$ .

Ces lois peuvent être exprimées sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_t \\ M_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_n & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_t & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n \\ d_t \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (4.23)$$



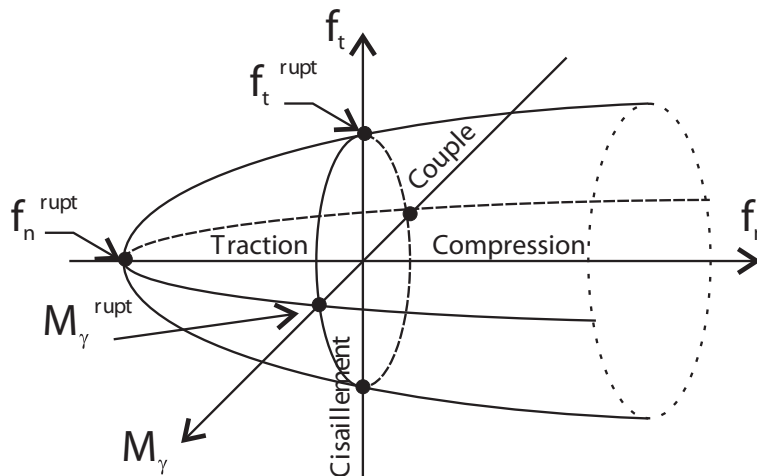
**FIGURE 4.10:** Variables cinématiques à l'échelle locale : (a) déplacement normal, (b) déplacement tangentiel et (c) rotation.

où les paramètres  $\Psi_n$ ,  $\Psi_t$  et  $\Psi_\gamma$  sont des raideurs et leurs valeurs dépendent de la nature du lien cohésif qui relie les deux particules  $i$  et  $j$ .

Après la rupture du joint, on affecte au contact les lois classiques de contact et de frottement. Un critère de rupture local assure la transition entre la loi de cohésion et les lois de contact et de frottement. Ce critère de rupture s'écrit sous la forme suivante :

$$\xi = \left( \frac{f_t}{f_t^{rupt}} \right)^2 + \left( \frac{M_\gamma}{M_\gamma^{rupt}} \right)^2 + \left( \frac{f_n}{f_n^{rupt}} \right) - 1 \quad (4.24)$$

où  $f_n^{rupt}$ ,  $f_t^{rupt}$  et  $M_\gamma^{rupt}$  sont des seuils de rupture en traction, en cisaillement et en couple respectivement, et qui dépendent aussi de la nature du lien cohésif. Si  $\xi < 0$ , alors il y a cohésion, sinon le lien cohésif est rompu. Ce critère de cohésion est schématisé sur la Figure 4.11.



**FIGURE 4.11:** Critère de rupture du lien cohésif.

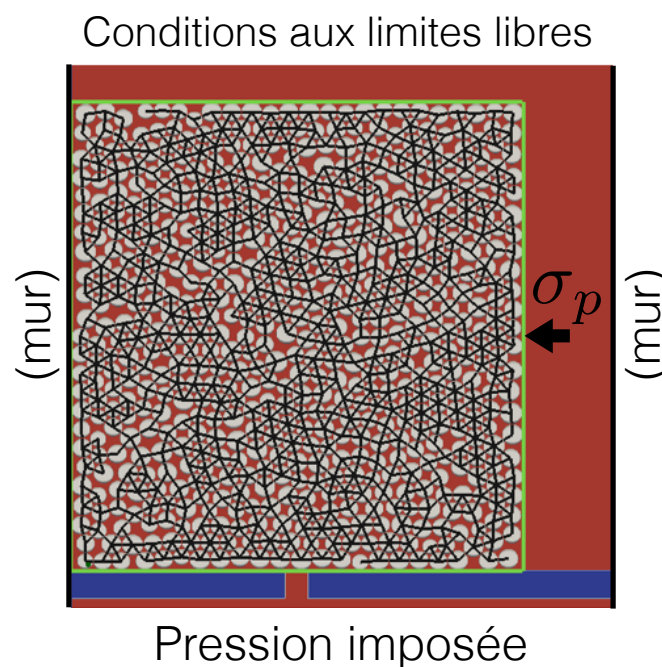


### 4.2.3. Exemples de simulations

En l'absence de gravité, nous avons mis en place deux modèles numériques pour la simulation de la fragmentation d'un milieu granulaire cohésif immergé sous l'effet soit d'un gradient de pression soit d'une surpression localisée. L'échantillon granulaire cohésif est préalablement préparé par application d'une compression bi-axiale.

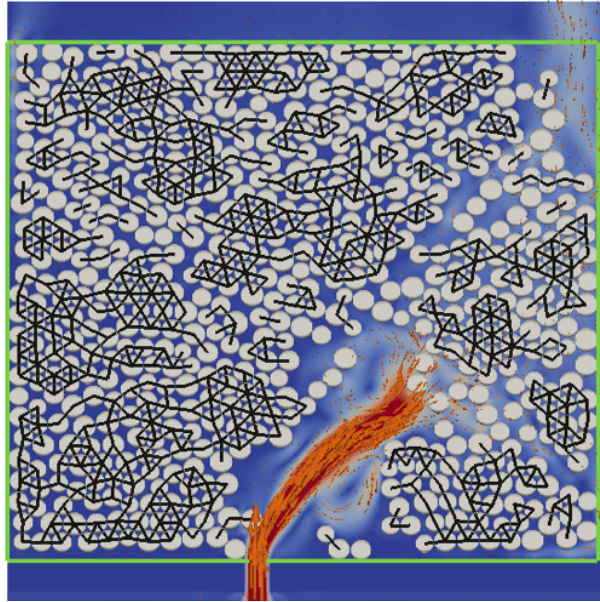
#### 4.2.3.1. Fragmentation sous l'effet d'un gradient de pression

Nous avons soumis l'échantillon granulaire cohésif à un jet de fluide généré par l'application d'une pression de fluide imposée  $P_{in}$  à la limite inférieure du domaine fluide. Pour éviter le remonté en bloc des grains cohésifs, les parois contenant l'échantillon sont toutes perméables au fluide et fixes à l'exception de la paroi située à droite (voir Figure 4.12) qui est extensible et soumise à une pression de confinement  $\sigma_p$ .



**FIGURE 4.12:** Modèle utilisé pour la fragmentation d'un milieu granulaire cohésif sous l'effet d'un gradient de pression. Les traits reliant les grains correspondent aux liens cohésifs.

A la fin de la simulation, l'échantillon se fragmente et l'on obtient ainsi des agrégats composés de grains pour lesquels les liens cohésifs n'ont pas été rompus ; voir Figure 4.13.



**FIGURE 4.13:** *Echantillon à la fin de la simulation numérique : rupture des liens cohésifs et fragmentation de l'échantillon granulaire sous l'effet du gradient de pression.*

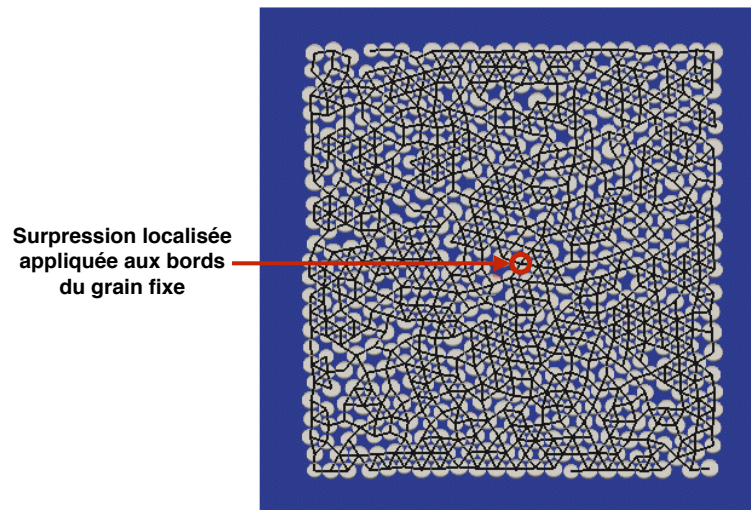
#### 4.2.3.2. Fragmentation sous l'effet d'une surpression localisée

Dans le second exemple, une surpression localisée est introduite autour d'un grain fixé au milieu de l'échantillon granulaire placé au milieu du domaine fluide. Au bord de ce domaine, les conditions aux limites libres sont appliquées ; voir Figure 4.14. La figure 4.15 montre un cliché de la fragmentation produite sous l'effet de la surpression imposée. L'échantillon se fracture en fragments de différentes tailles.

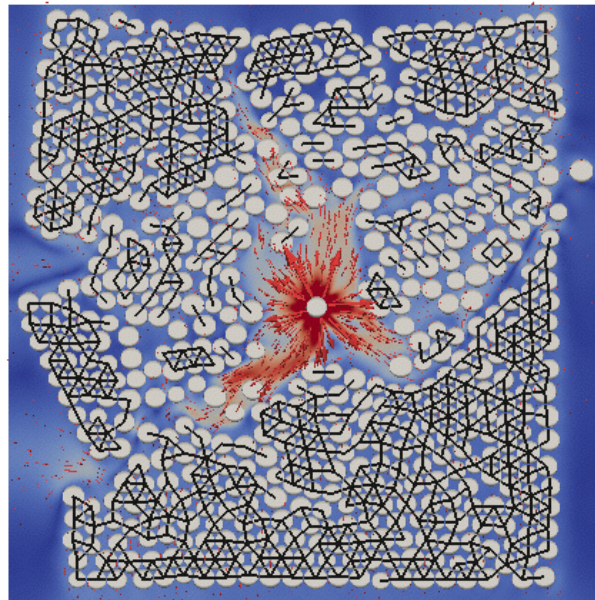
#### 4.2.4. Effet du ballonnement

La colonne combustible est représentée par un empilement compact de fragments polyédriques dont la taille caractéristique est d'environ un quart du diamètre de la gaine. Pour des raisons d'efficacité numérique et de simplicité de mise en œuvre, les simulations envisagées restent assez éloignées d'une configuration réelle : une colonne de seulement une dizaine de rayons de hauteur est considérée, radialement seule une demi-colonne est représentée, des conditions de déformations planes sans symétrie sont retenues. Bien que cette modélisation soit peut conforme à la configuration tubulaire de la gaine, elle est en mesure d'indiquer si la présence d'un ballonnement favorise ou non la surfragmentation du combustible. L'extension axiale de la fissure considérée est d'environ 2.5 tailles de fragments initiaux et le ballonnement est représenté par un petit espace rectangulaire additionnel pouvant contenir environ 2.5 fragments initiaux.

Deux types de conditions aux limites pour la pression dans le système sont considérées : A/ pression initiale  $P^+$  uniforme dans toute la colonne de combustible et pression uniforme



**FIGURE 4.14:** Modèle utilisé pour la simulation de la fragmentation sous l'effet d'une surpression localisée appliquée en un point du milieu de l'échantillon. Les nœuds fluides aux bords du domaine fluide sont soumis à des conditions aux limites libres.



**FIGURE 4.15:** Cliché de la fin de la simulation numérique : Fragmentation et extension de l'échantillon granulaire.

$P^-$  dans le caloporteur ( $\Delta P = P^+ - P^- \simeq 10^6 Pa$ ), ces pressions se relaxent au cours du calcul et  $P^-$  reste constante sur les bords extérieurs de la paroi délimitant le caloporteur, B/ situation identique à la précédente, mais la pression  $P_0$  est maintenue constante tout au long de la simulation en surfaces inférieure et supérieure de la colonne granulaire (notion de *plenum*).

Pour les situations A/ ou B/ (FIGURE 4.16 et FIGURE 4.17), le cas avec ballonnement in-

duit une décompaction prononcée des fragments de combustible compte tenu de l'espace libre supplémentaire disponible.

Pour la situation A/ à pression initiale uniforme, aucune éjection notable n'est constatée pour le cas sans ballonnement et une éjection minimale est notée pour le cas avec ballonnement. Dans ce dernier cas, une surfragmentation partielle est cependant observée et une partie des liaisons cohésives intra-fragments est rompue. Dans la zone de la colonne combustible correspondant au droit du "ballon", environ 15% des liaisons initialement saines sont rompues.

Pour la situation B/ avec pression maintenue en parties basse et haute de la colonne combustible, une surfragmentation est clairement observée dès l'établissement des gradients de pression. Les sous-fragments résultants sont de taille suffisamment petite pour être éjectés. Une relocalisation massive s'en suit et une large partie de la colonne combustible peut être vidangée.

La situation réelle s'établit probablement entre ces deux situations extrêmes. Ces simulations numériques semblent clairement indiquer que la présence d'un ballonnement favorise la surfragmentation du combustible d'une dizaine de pourcents à minima. Ces analyses restent cependant très qualitatives et l'obtention de données chiffrées mériterait une étude plus poussée et des configurations plus réalistes. Par ailleurs, les mécanismes éventuels de vaporisation locale au niveau de l'interaction combustible-caloporteur peuvent aussi jouer un rôle majeur dans l'éjection.

## Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté des simulations d'écoulements de grains immergés à travers un orifice. L'écoulement dans un sablier est l'archétype de ce type d'écoulement. Nous avons montré que le fluide influence le débit en jouant sur la vitesse de sortie des grains. Comme la vitesse de sortie est régie par la viscosité du fluide, le débit n'obéit plus à la loi de Berverloo. Néanmoins, l'analyse de la série temporelle des grains nous a permis de montrer que la nature du processus au niveau de l'orifice n'est pas modifiée par la présence du fluide. Ces simulations mettent aussi en évidence l'effet perturbateur sur l'écoulement des gradients de pression dans le fluide. Si ceux-ci sont suffisamment intenses ils tendent à bloquer l'écoulement. Mais lorsque la hauteur de la colonne granulaire diminue l'intensité de ces gradients de pression diminue et l'écoulement devient de plus en plus régulier.

Nous avons réalisé aussi des simulations de fragmentation d'agrégats cohésifs sous l'effet d'un gradient de pression localisé ou d'un gradient global. Nous avons montré que la géométrie de gaine de combustible joue un rôle important sur la sur-fragmentation des agrégats. Ceci est notamment le cas en présence d'un ballonnement. Cette analyse qualitative montre qu'il est possible d'appliquer l'approche DEM-LBM pour traiter des problèmes relativement complexes.

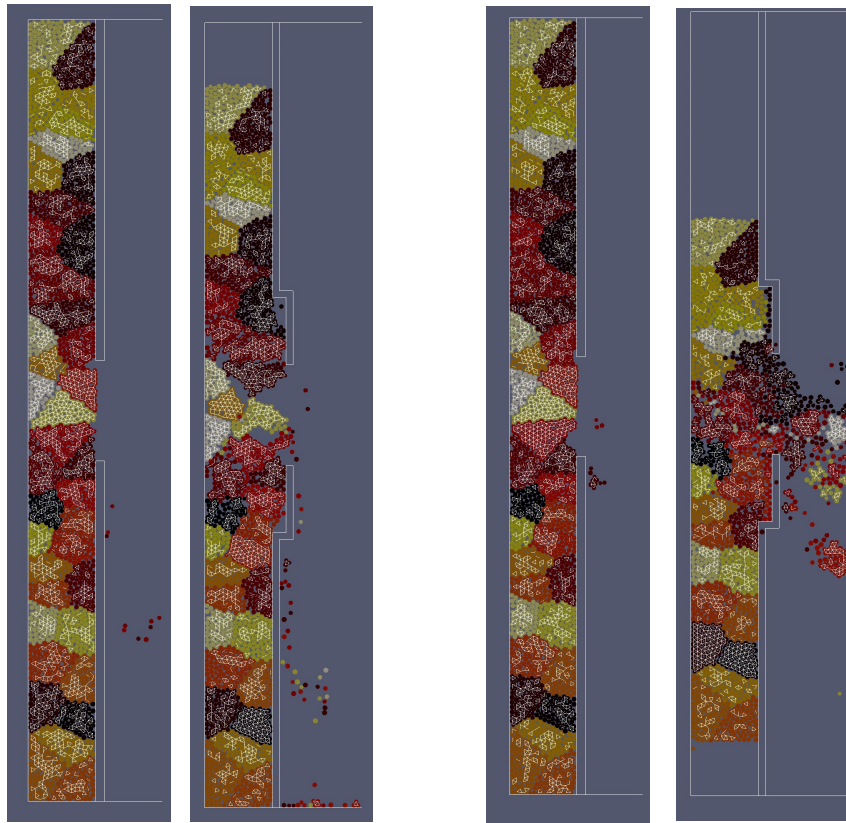
Les configurations étudiées impliquent des temps de calcul très longs. Dans le cas du sablier,





**FIGURE 4.16:** *Relocalisation/surfragmentation avec ou sans présence d'un "ballonnement". Pression uniforme (situation A/).*

les simulations réalisées ne permettent pas d'accéder à des statistiques suffisamment riches pour évaluer la variabilité des résultats. Mais il s'agit des premières simulations réalisées sur des temps aussi longs pour des systèmes comportant un nombre aussi important de particules dans un fluide.



**FIGURE 4.17:** *Relocalisation/surfragmentation avec ou sans présence d'un "ballonnement". Suppression en haut et en bas de la colonne combustible et pression uniforme dans le caloporteur (situation B/).*

## CHAPITRE 5

# Conclusions générales

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse ont porté sur l'étude de la rhéologie d'écoulements granulaires immergés dans un fluide visqueux. Cette thématique est centrale à de nombreux problèmes en technologie des poudres mais intervient aussi dans l'étude des mécanismes en jeux lors de processus environnementaux majeurs, tels que le transport de sédiment, l'érosion, la liquéfaction des sols, les instabilités gravitaires . . . . Les études réalisées dans cette thèse sont motivés par les phénomènes apparaissant lors du processus de fragmentation et de relocalisation du combustible nucléaire sous l'effet de la pression des gaz de fissions et du fluide caloporteur. Cette thématique, particulièrement importante pour l'évaluation des risques en cas d'accident nucléaire, nécessite la prise en compte de différents ingrédients faisant intervenir simultanément plusieurs phénomènes physiques. Il faut, par exemple, rendre compte de la rhéologie du mélange, des effets de blocage au niveau d'ouvertures dans la gaine de confinement, de l'évolution du matériau sous l'effet d'une fragmentation activée par des gradients de pression dans le fluide.

Malgré leur importance, le comportement des écoulements granulaires immergés denses reste un largement ouvert. Des progrès importants ont pu être réalisés depuis une dizaine d'années sur les écoulements granulaires secs. De même, la rhéologie des suspensions non-browniens dilués de particules est bien comprise. Mais à l'interface entre ces deux domaines, les suspensions denses ou les milieux granulaires denses immergés dans un fluide soulèvent encore de nombreuses interrogations. Des expériences nouvelles ont récemment permis de progresser vers l'unification entre ces deux domaines. Mais l'approche numérique avec une discrétisation sub-granulaire du fluide n'avait pas encore été appliquée pour une étude systématique de ce domaine. Cette étude numérique des écoulements immergés denses constitue ainsi le thème principal de cette thèse. Bien que la méthodologie développée dans cette thèse s'applique sans restriction à toute la gamme de concentrations en grains, nos travaux se sont essentiellement focalisés sur la modélisation des fortes densités pour lesquelles la prise en compte des interactions aux contacts pose des questions à la fois fondamentale et numériques. Ces travaux ont permis de raffiner progressivement l'approche numérique en examinant la cohérence des résultats entre eux et avec les expériences existantes et de mieux comprendre l'effet des paramètres qui contrôlent la rhéologie. Ensuite, nous avons appliqué la démarche numérique développée pour la simulation des problèmes plus complexes en termes des conditions aux limites de manière à obtenir des éléments de réponse à des problèmes plus appliqués d'écoulement des grains à travers une ouverture sous l'effet de la gravité ou sous l'effet d'un gradient de pression.

Le premier chapitre a permis de donner un aperçu des principaux résultats disponibles dans la littérature concernant la rhéologie des milieux granulaires secs et immergés. Les modèles usuels de tribologie du contact-frottant avec adhésion ont été évoqués pour le frottement de glissement et de roulement ainsi que les adaptations nécessaires à leur utilisation dans des approches en éléments discrets. Dans le cas sec, la définition de deux paramètres sans dimension a permis de caractériser l'évolution de l'assemblage granulaire sous sollicitation mécanique : 1) le comportement "solide" peut être mis à l'échelle en considérant la rigidité relative des assemblages ; 2) le comportement "en écoulement" peut être décrit à partir d'un nombre inertiel défini comme le rapport des forces d'inertie induites par le cisaillement et des forces statiques dues à la pression de confinement. La rhéologie quasi-statique a été ensuite précisée plus en dé-



tail. Les dispositifs classiques de caractérisation des écoulements fluides sont difficiles à mettre en oeuvre dans le cas d'un écoulement granulaire dense. En effet le comportement dilatant de ces matériaux ne permet pas de réaliser des essais à volume constant aux fortes concentrations en particules. Pour palier cette difficulté, des expériences à pression imposée sont couramment réalisées en mécanique des sols. Les résultats classiques sur l'évolution de la contrainte de cisaillement et de la compacité lors des transitoires et en régime permanent ont été rappelés. A l'échelle de l'assemblage granulaire, la compacité et l'angle de frottement interne qui caractérisent la surface de charge, l'angle de dilatance de Reynolds qui donne la direction de l'écoulement plastique ont été précisés ainsi que le modèle macroscopique de Mohr-Coulomb classique en mécanique des sols. Dans le régime inertiel, l'évolution de ces grandeurs physiques est rappelé pour les états critique, dense et collisionnel. La présence de micro-instabilités et de chocs entre particules contribue à la résistance au cisaillement et reste compatible avec la loi de Coulomb dans la mesure où l'énergie dissipée lors de ces événements est proportionnelle à la pression de confinement. La mise à l'échelle du frottement interne en fonction du nombre inertiel est rappelée en détail. Elle est à l'origine de nombreuses études expérimentales, numériques et théoriques récentes. L'expression de la résistance au cisaillement montre que l'effet de l'inertie peut être vu comme un effet visqueux caractérisé par une viscosité dépendante de la pression de confinement.

En présence d'un liquide saturant des forces d'interactions entre le fluide et le milieu granulaire apparaissent. Les expressions théoriques des forces de Stokes, de trainée ... définies pour un grain isolé dans un fluide sont rappelées ainsi que la force de lubrification entre deux particules. Le cas de la sédimentation et du cisaillement du fluide sont considérés ainsi que l'évolution des forces hydrodynamique en fonction d'un nombre de Reynolds associé au grain. Les régimes d'écoulement des mélanges grains-fluide sont rappelés et situés dans un diagramme associant un nombre de Stokes et le rapport de densité entre grain et fluide. Trois régimes se distinguent : un régime visqueux pour lequel la trainée appliquée aux grains est donnée par la force de Stokes, un régime inertiel dans lequel celle-ci est déterminée par les effets inertiels du fluide et un régime de chute libre où les forces dominantes sont celles des contacts comme dans les écoulements secs. Pour un milieu granulaire, les résultats issus de la littérature sur l'étude de la distance d'arrêt d'une avalanche déclanchée dans un fluide sont rapelés ainsi que des travaux récents sur l'initiation d'instabilités gravitaires immergées. Ces résultats s'appuient sur des campagnes expérimentales très fournies dans lesquelles sont considérées différentes viscosité de fluides, configurations géométriques d'échantillons, compacité initiales ... Ils ont fait l'objet d'études numériques récentes et ont montré la pertinence des modèles numériques couplant simulations granulaires et fluide ainsi que la capacités de ces modèles à décrire l'évolution du système au delà des grandeurs accessibles par l'expérience directe.

Enfin le chapitre se termine par une revue des résultats relatifs à la rhéologie des suspensions. Les résultats expérimentaux et les modèles empiriques décrivant l'évolution de la viscosité effective d'un fluide chargé en particules et à différentes concentrations sont rappelés. Le principe de fonctionnement du dispositif original de Boyer et al. a été décrit dans ce chapitre. Il permet de réaliser des cisaillements à pression imposée sur un échantillon granulaire immergé et a rendu possible l'établissement d'un lien direct entre la rhéologie des suspensions diluées

et le frottement interne défini en mécanique des milieux granulaires, montant notamment que la divergence de la viscosité effective apparaît pour une compacité maximale qui correspond à la compacité critique des sols. En outre, il est possible de mettre à l'échelle le frottement interne et la compacité mesurés pour différentes viscosités du fluide, tailles de grains, pression de confinement en fonction d'un nombre sans dimension visqueux au même titre que le nombre inertiel rend compte des écoulements secs. Enfin, le cas des écoulements inertiels et visqueux est abordé succinctement. Des résultats de la littérature montrent qu'il est possible de faire une mise à l'échelle à partir d'une combinaison non linéaire du nombre inertiel et du nombre visqueux.

Le deuxième chapitre a été consacré à la méthodologie mise en oeuvre dans cette thèse. Les ingrédients de base nécessaires à la modélisation des mélanges fluides-grains ont été présentés. La complexité du modèle et son coût en terme de consommation CPU imposent une démarche d'optimisation dans laquelle on cherche à isoler les traits essentiels de la phénoménologie étudiée tout en conservant seulement les éléments minimaux nécessaires. Les principaux algorithmes disponibles dans la littérature pour la modélisation du fluide, du milieu granulaire et des couplages grains-fluides ont été rappelés succinctement. Quelques exemples illustrent les avantages et inconvénients de ces approches en fonction de l'échelle de description.

Concernant la modélisation du fluide, il a été choisi d'utiliser une approche de type directe dans laquelle l'espace poral entre les grains est maillé dans sa totalité. L'algorithme de résolution de la dynamique du fluide est basé sur une méthode Lattice Boltzmann à plusieurs taux de relaxation (Multi Relaxation Time ou MRT) mais des tests de comparaisons ont été fait avec la méthode plus classique à un seul taux de relaxation (Single Relaxation Time ou SRT). Dans ce type de modèle, la viscosité du fluide apparaît comme une propriété émergente de la dynamique des molécules à l'échelle microscopique, et intervient par l'intermédiaire d'un terme de relaxation qui rend compte de leurs collisions mutuelles. Un effort particulier a été fait pour décrire et tester la pertinence de différents algorithmes de gestion des conditions aux limites telles que les conditions aux limites périodiques, le Bounce-Back pour imposer une vitesse nulle en bord de domaine, le Bounce-Forward pour prendre en compte un glissement du fluide, les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann, les conditions aux limites ouvertes pour limiter les réflexions d'ondes . . . Par exemple, pour un écoulement dans un tube, il a été montré que l'erreur minimale dans le profil de vitesse de Poiseuille est obtenu pour l'approche MRT avec des conditions aux limites de Neumann.

Pour la modélisation de la phase granulaire l'approche en element discret classique DEM a été utilisée et rappelée en détail dans ce chapitre. L'implémentation des frontières mobiles au niveau des interfaces grains-fluide est détaillée et les termes de couplages explicités. Le calcul de la force et du moment hydrodynamique est obtenu par intégration des échanges de quantité de mouvement entre le fluide et grains et le mouvement du fluide est corrigé aux niveau des interfaces, à chaque pas de temps, en prenant en compte les vitesses des grains. Plusieurs cas tests sont réalisés pour valider ce couplage comme l'étude de la diffusion de la quantité de mouvement dans le fluide, l'évaluation de la stabilité des champs de pression et de vitesse en SRT et en MRT pour la sédimentation d'un grain, l'évolution de la position et de la vitesse

d'une particule cisailée en configuration de Couette.

Le troisième chapitre représente le coeur de l'étude et traite de la rhéologie des écoulements granulaires immergés. Cette étude a permis de préciser les rôles de différents paramètres des mélanges fluides-grains et de comparer avec des expériences récentes réalisées sur les milieux granulaires immergés. Le système simulé a été décrit en détail. Il a pour but d'obtenir l'écoulement le plus homogène possible avec un nombre nécessairement limité de grains. Pour cela, des conditions aux limites particulières ont été implémentées pour lesquelles on considère des conditions périodiques dans la direction de l'écoulement avec un cisaillement appliqué directement au fluide et une contrainte de confinement agissant exclusivement sur la phase granulaire.

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus à partir de l'analyse d'une campagne d'essais particulièrement fournie dans laquelle on a fait varier le rapport de densité entre le fluide et les grains, la viscosité du fluide sur trois décades, le taux de cisaillement d'un facteur supérieur à 10, la pression de confinement d'un facteur 6. La rhéologie du mélange est caractérisé à partir de deux nombres adimensionnels. Ces nombres notés  $I$  et  $J$  correspondent respectivement au nombre inertiel tel qu'il a été défini dans le cas sec et au nombre visqueux modifié. L'effet de la viscosité du fluide sur le cisaillement est d'abord étudié dans le régime visqueux en faisant varier  $J$  pour des valeurs de  $I$  constantes. Le comportement frottant, obtenu à pression de confinement constante, a été mis en correspondance avec le comportement visqueux obtenu sous conditions aux limites à volume contrôlé et qui conduit à une divergence des viscosités effectives normales et tangentielles en inverse du carré de la différence entre compacité et compacité critique de l'assemblage. La viscosité effective du mélange est déterminées dans la direction de cisaillement et dans la direction normale à partir d'une description du mélange à contrainte normale imposée.

Nos résultats montrent clairement, comme dans les études expérimentales de Boyer et al., une mise à l'échelle des données avec  $J$ . L'étude est poussée plus loin en se plaçant dans le cas du régime visco-inertiel pour lequel les valeurs de  $I$  et  $J$  varient. Nous avons montré qu'un nombre visco-inertiel  $I_v$  défini à partir de  $I$  et  $J$  permet de mettre à l'échelle le coefficient de frottement interne et la compacité. Nous avons analysé la relation entre l'indice des vides et le coefficient de frottement interne et proposé une relation linéaire. De même, nous avons montré que les matériaux granulaires en écoulement sont régis par une loi de compression dynamique qui peut se mettre sous la forme d'une loi logarithmique comme en mécanique des sols.

L'évolution de la connectivité et de l'anisotropie du réseau de force en fonction du nombre visco-inertiel montre que l'augmentation de la résistance au frottement est une conséquence directe d'une anisotropie de structure renforcée à la fois par les effets de la viscosité et de l'inertie des grains. Il a été noté tout de même que le nombre de coordination n'est pas une fonction univoque du nombre visco-inertiel. Ceci montre qu'en présence du fluide, la simple connectivité des grains par contacts ne représente pas une information pertinente pour la rhéologie. Finalement, les résultats numériques sont en excellent accord avec les données expérimentales de Boyer et al..

Le dernier chapitre a été l'occasion d'une ouverture vers des problématiques liées à la mo-

délisation des risques en cas d'accident nucléaire. Dans ce chapitre, des conditions aux limites non-homogènes sont implémentées. Une étude de l'écoulement d'un matériau granulaire immergé dans une configuration proche de la décharge d'un silo ou d'un sablier nous a permis de montrer que le fluide influence le débit en jouant sur la vitesse de sortie des grains. Comme la vitesse de sortie est régie par la viscosité du fluide, le débit n'obéit plus à la loi de Beverloo. Le débit des grains dans le cas sec est contrôlé par  $\sqrt{(R - R_e)g}$  tandis qu'il est contrôlé par la vitesse de Stokes en présence d'un fluide visqueux. L'analyse des fluctuations des temps de sortie des grains montre que la nature du processus au niveau de l'orifice n'est pas modifiée par la présence du fluide.

Nos simulations ont également permis de mettre en évidence le caractère intermittent de l'écoulement lorsque la différence de pression induite par l'écoulement à travers l'orifice est suffisamment importante. Cette différence de pression tend à bloquer l'écoulement. L'écoulement se débloque lorsque cet stabilisateur disparaît par le retour du fluide interstitiel à l'équilibre. Nous avons montré que au fur et à mesure que la hauteur de la colonne granulaire diminue, l'intensité des gradients de pression diminue et l'écoulement devient de plus en plus régulier. Nous avons expliqué cette évolution à partir de la loi de Darcy appliquée à la colonne des grains dans le compartiment supérieur du sablier.

Nous avons réalisé aussi des simulations de fragmentation d'agrégats cohésifs sous l'effet d'un gradient de pression localisé ou d'un gradient global. Dans cette étude on a cherché à se rapprocher de conditions aux frontières plus proches du cas réel. Par exemple, les effets géométriques de déformation de la gaine (ou ballonnement) ont été considérés. La colonne combustible est représentée par un empilement compact de fragments polyédriques constitués d'assemblages de disques collés et dont la taille caractéristique est d'environ un quart du diamètre de la gaine. Pour rendre compte d'une surpression dans le fluide caloporteur, deux types de conditions aux limites ont été envisagées. Les résultats de l'étude montrent la cinématique d'expulsion des fragments et permettent de mettre en évidence clairement les effets d'un ballonnement sur la surfragmentation du combustible.

Enfin on pourra noter qu'au delà des développements numériques qui nous ont conduit à mettre en oeuvre une méthodologie adaptée à la simulation des écoulements grain-fluide, un apport majeur de cette thèse a été de se placer dans des configurations comparables à des expériences réelles proposées dans des travaux récents. Bien que réalisés en configuration bidimensionnelles, les résultats obtenus sont en très bonne concordance avec les expériences et modèles numériques. Ils constituent une base solide qui semble suffisamment robuste pour aller vers des modèles prédictifs. Par ailleurs, cette approche permet d'aller beaucoup plus loin dans l'analyse de la microstructure que ce qui est possible du point de vue expérimental. Le cadre conceptuel de l'analyse des anisotropie de texture et le lien avec l'homogénéisation rendent possible une description à l'échelle du comportement du mélange via une mésostructure inaccessible aux expériences et qui implique les caractéristiques physiques du fluide et des grains.

Les perspectives ouvertes par cette thèse sont nombreuses et concernent à la fois les développements numériques et l'analyse physique. Certains problèmes majeurs en mécanique des milieux granulaires ne peuvent être abordés qu'en considérant un nombre plus important de grains

---

ou un domaine fluide plus grand. C'est le cas par exemple quand on souhaite tenir compte de polydispersité réalistes. Or, ces simulations sont très consommatrices en temps CPU, et il sera donc nécessaire d'améliorer les performances de calcul. Un calcul parallèle efficace nécessite un effort particulier en terme d'écriture et de maintenance de code. Si l'utilisation d'OpenMP ne pose pas de grande difficulté, l'utilisation de MPI, beaucoup plus intéressante en terme de performance sur les grands systèmes, demandera un effort particulier. Par ailleurs, l'utilisation des GPU semble être de plus en plus facilitée par de nouveaux standards tels que l'OpenAcc et pourrait apporter une alternative intéressante et des gains très importants.

Bien que l'on ne s'attende pas à des différences majeures par rapport aux résultats déjà obtenus, il serait intéressant d'effectuer ces études dans le cas 3D. En effet, le fait que l'espace poral en 2D soit occlus et qu'il est nécessaire de considérer un film d'eau entre les grains reste un artifice de calcul. Une étude détaillée des effets de ce film pourrait également être réalisée et permettrait indirectement d'aborder les effets de la perméabilité du milieu. La mise en oeuvre d'une modélisation à plusieurs échelles, dans laquelle les résultats des approches LBM/DEM pour un volume élémentaire représentatif sont intégrées dans des approches continue est aussi un enjeu importante pour aborder les problèmes à l'échelle des procédés. La possibilité d'obtenir des lois de comportement robustes du mélange grain-fluide ouvre des perspectives majeures et permettrait de traiter dans un cadre unifié de transitions continu-discret notamment en présence de géométrie de domaines complexe.

Le passage à 3D est aussi important pour une application nucléaire réaliste. Il nous semble qu'une application 3D doit permettre aujourd'hui d'obtenir des simulations très proches de la configuration réelle. Les analyses réalisées dans le chapitre 4 de cette thèse pourraient être poussées bien plus loin et l'effet des caractéristiques du fluide et des grains pourrait être analysé comme dans le cas des écoulements homogènes du chapitre 3. La nécessité de multiplier les simulations pour une analyse robuste de ces systèmes est liée au caractère stochastique des phénomènes physiques en jeu à l'échelle des grains ou à l'échelles de l'ouverture. C'est pourquoi nous avons préféré dans cette thèse de rester en 2D de manière à pouvoir obtenir des résultats statistiquement significatifs pour l'écoulement. Une telle démarche en 3D demande naturellement plus de ressources informatiques et un effort d'optimisation supplémentaire.



# Bibliographie

- [1] <http://www.laradioactive.com/fr/site/illustration/images/barrierecrayon.htm>.
- [2] I. Agnolin and J.-N. Roux. Internal states of model isotropic granular packings. iii. elastic properties. *Phys. Rev. E*, 76 :061304, 2007.
- [3] I. Agnolin and J.-N. Roux. On the elastic moduli of three-dimensional assemblies of spheres : Characterization and modeling of fluctuations in the particle displacement and rotation. *International Journal of Solids and Structures*, 45(3-4) :1101–1123, 2008.
- [4] Ivana Agnolin and Jean-Noël Roux. Internal states of model isotropic granular packings. i. assembling process, geometry, and contact networks. *Phys. Rev. E*, 76 :061302, 2007.
- [5] Nayaz Khalid Ahmed and Martin Hecht. A boundary condition with adjustable slip length for lattice boltzmann simulations. *J. Stat. Mech.*, 2009(09) :P09017, sep 2009.
- [6] B. J. Alder and T. E. Wainwright. Studies in molecular dynamics. i. general method. *Journal of Chemical Physics*, 31(2) :459, 1959.
- [7] M. P. Allen and D. J. Tildesley. *Computer Simulation of Liquids*. Oxford University Press, Oxford, 1987.
- [8] John David Anderson and J Wendt. *Computational fluid dynamics*, volume 206. Springer, 1995.
- [9] B. Andreotti, Y. Forterre, and O. Pouliquen. *Les milieux granulaires*. CNRS, EDP Sciences, 2011.
- [10] E. Azéma, F. Radjai, R. Peyroux, and G Saussine. Force transmission in a packing of pentagonal particles. *Phys. Rev. E*, 76 :011301, 2007.
- [11] E. Azéma, F. Radjai, and G. Saussine. Quasistatic rheology, force transmission and fabric properties of a packing of irregular polyhedral particles. *Mechanics of Materials*, 41(6) :729–741, 2009.
- [12] E. Azéma, G. Saussine, and F. Radjai. Quasistatic rheology, force transmission and fabric properties of a packing of irregular polyhedral particles. *Mechanics of Materials*, 41 :729–741, 2009.

- [13] Emilien Azéma and Farhang Radjai. Internal structure of inertial granular flows. *Phys. Rev. Lett.*, 112 :078001, Feb 2014.
- [14] N. J. Balmforth and R. R. Kerswell. Granular collapse in two dimensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 538 :399–428, 2005.
- [15] S.G. Bardenhagen, J.U. Brackbill, and D. Sulsky. The material-point method for granular materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187(3–4) :529 – 541, 2000.
- [16] J. P. Bardet and J. Proubet. A numerical investigation of the structure of persistent shear bands in granular media. *Geotechnique*, 41(4) :599–613, 1991.
- [17] Claude Bardos, François Golse, and David Levermore. Fluid dynamic limits of kinetic equations. i. formal derivations. *Journal of Statistical Physics*, 63(1-2) :323–344, 1991.
- [18] G. C. Barker and A. Metha. Transient phenomena, self-diffusion, orientational effects in vibrated powders. *Phys. Rev. E*, 47(1) :184, 1993.
- [19] P.L. Bathnagar, E.P. Gross, and M. Krook. A model for collision processes in gases, I. small amplitude processes in charged and neutral one-component system. *Physical Review E*, 94 :511–25, 1954.
- [20] Beguin Beguin, Rémi. *Contact erosion process in dykes*. Theses, Université de Grenoble, Dec 2011.
- [21] W.A. Beverloo, H.A. Leniger, and J. van de Velde. The flow of granular solids through orifices. *Chemical Engineering Science*, 15(3–4) :260 – 269, 1961.
- [22] S Bonelli. Guide erinoh : les essais de laboratoire. *Digues maritimes et fluviales de protection contre les submersions-2e colloque national-Digues 2013*, page 308, 2013.
- [23] Stéphane Bonelli. *Erosion in Geomechanics Applied to Dams and Levees*. Wiley ISTE, 2013.
- [24] Roberto R Olivera Bonilla. *Numerical simulations of undrained granular media*. PhD thesis, University of Waterloo, 2004.
- [25] C. Bonnoit, T. Darnige, E. Clement, and A. Lindner. Inclined plane rheometry of a dense granular suspension. *Journal of Rheology*, 54(1), 2010.
- [26] G. Bossis and J. F. Brady. The rheology of concentrated suspensions of spheres in simple shear flow by numerical simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 155 :105–129, 6 1985.
- [27] M. Bouzidi, M. Firdaouss, and P. Lallemand. Momentum transfer of a boltzmann-lattice fluid with boundaries. *Physics of Fluids*, 13 :3452–3459, 2001.
- [28] M’hamed Bouzidi, Mouaouia Firdaouss, and Pierre Lallemand. Momentum transfer of a boltzmann-lattice fluid with boundaries. *Physics of Fluids*, 13(11) :3452–3459, 2001.
- [29] F. P. Bowden and D. Tabor. *The Friction and Lubrication of Solids - Part I*. Clarendon Press, Oxford, 1950.
- [30] F. Boyer, E. Guazzelli, and O. Pouliquen. Unifying suspension and granular rheology. *Physical Review Letters*, 107(18), 2011.
- [31] J. F. Brady and G. Bossis. Stokesian dynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 20 :111–157, 1988.
- [32] I. Bratberg, F. Radjai, and A. Hansen. Dynamic rearrangements and packing regimes in randomly deposited two-dimensional granular beds. *Physical Review E*, 66(2), 2002.
- [33] CE Brennen. A review of added mass and fluid inertial forces. Technical report, DTIC



- Document, 1982.
- [34] Nikolai V Brilliantov, Nicole Albers, Frank Spahn, and Thorsten Pöschel. Collision dynamics of granular particles with adhesion. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, 76(5 Pt 1) :051302, 2007.
- [35] H. C. Brinkman. The viscosity of concentrated suspensions and solutions. *The Journal of Chemical Physics*, 20(4), 1952.
- [36] Steven L. Bryant, Peter R. King, and David W. Mellor. Network model evaluation of permeability and spatial correlation in a real random sphere packing. *Transport in Porous Media*, 11(1) :53–70, 1993.
- [37] C. Cassar, M. Nicolas, and O. Pouliquen. Submarine granular flows down inclined planes. *Physics of Fluids*, 17 :103301, 2005.
- [38] E. Catalano, B. Chareyre, and E. Barthélemy. Pore-scale modeling of fluid-particles interaction and emerging poromechanical effects. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 38(1) :51–71, jun 2013.
- [39] Emanuele Catalano. *Modélisation physique et numérique de la micro-mécanique des milieux granulaires saturés. Application à la stabilité de substrats sédimentaires en génie côtier*. PhD thesis, 2012. Thèse de doctorat dirigée par Barthélemy, Eric et Chareyre, Bruno Sciences de l’univers Grenoble 2012.
- [40] Pierre CAYOT. Vers la simulation aux grandes échelles sur maillage hybride.
- [41] CEGEO, B. Saint-Cyr, K. Szarf, C. Voivret, E. Azéma, V. Richefeu, J.-Y. Delenne, G. Combe, P. Sornay C. Nouguié-Lehon, P. Villard, M. Chaze, and F. Radjai. Particle shape dependence in granular media. *Europhysics Letters*, 98(4) :44008, 2012.
- [42] Bruno Chareyre, Andrea Cortis, Emanuele Catalano, and Eric Barthélemy. Pore-scale modeling of viscous flow and induced forces in dense sphere packings. *Transport in porous media*, 94(2) :595–615, 2012.
- [43] Shiyi Chen, Daniel Martínez, and Renwei Mei. On boundary conditions in lattice boltzmann methods. *Physics of Fluids*, 8(9) :2527–2536, 1996.
- [44] Yongguang Cheng and Hui Zhang. A viscosity counteracting approach in the lattice boltzmann {BGK} model for low viscosity flow : Preliminary verification. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(12) :3690 – 3702, 2011. Mesoscopic Methods for Engineering and Science — Proceedings of ICMES-09 Mesoscopic Methods for Engineering and Science.
- [45] B. Chevalier, G. Combe, and P. Villard. Experimental and discrete element modelling studies of the trapdoor problem : influence of the macro-mechanical frictional parameters. *Acta Geotechnica*, 7(1) :15–39, 2012.
- [46] G. Combe and J.-N. Roux. Strain versus stress in a model granular material : a devil’s staircase. *Physical Review Letters*, 85(17) :3628–3631, 2000.
- [47] R. Cornubert, D. d’Humières, and D. Levermore. A knudsen layer theory for lattice gases. *Phys. D*, 47(1-2) :241–259, January 1991.
- [48] Sylvain Courrech du Pont, Philippe Gondret, Bernard Perrin, and Marc Rabaud. Granular avalanches in fluids. *Physical Review Letters*, 90 :044301, 2003.
- [49] P. A. Cundall. *The measurement and analysis of accelerations in rock slopes*. PhD thesis, Imperial College London (University of London), 1971.

- [50] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1) :47–65, 1979.
- [51] F da Cruz. *Écoulement des grains sec : Frottement et blocage*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Février 2004.
- [52] F. da Cruz, S. Emam, M. Prochnow, J.-N. Roux, and F. Chevoir. Rheophysics of dense granular materials : Discrete simulation of plane shear flows. *Physical Review E*, 72(2–1), 2005.
- [53] R. Day, B. Hawlader, R. Phillips, and K. Soga. Effects of shear band propagation on submarine landslide. In *Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference*, pages 766–772, 2012.
- [54] Jean-Yves Delenne, Moulay Saïd El Youssoufi, Fabien Cherblanc, and Jean-Claude Bénet. Mechanical behaviour and failure of cohesive granular materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(15) :1577–1594, 2004.
- [55] P. J. Dellar. Non-hydrodynamic modes and general equations of state in lattice Boltzmann equations. *Physica A*, 362 :132–138, 2006.
- [56] Paul J. Dellar. Incompressible limits of lattice boltzmann equations using multiple relaxation times. *J. Comput. Phys*, page 2003.
- [57] B.V. Derjaguin, V.M. Muller, and Y.P. Toporov. Effect of contact deformations on the adhesion of particles. *J. Colloid Interface Sci.*, 53 :314, 1975.
- [58] Dominique D’Humières, Irina Ginzburg, Manfred Krafczyk, Pierre Lallemand, and Li-Shi Luo. Multiple-relaxation-time lattice boltzmann models in three dimensions. *Philos Trans A Math Phys Eng Sci*, 360(1792) :437–51, Mar 2002.
- [59] D. d’Humières. Generalized lattice-boltzmann equations. In *Rarefied Gas Dynamics : Theory and Simulations*, pages 450–458. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), jan 1994.
- [60] E. Barthélémy E. Catalano, B. Chareyre. Fluid-solid coupling in discrete models. In *In Alert Geomaterials Workshop 2009*, 2009.
- [61] Albert Einstein. Eine neue bestimmung der moleküldimensionen. *Annalen der Physik*, 324(2) :289–306, 1906.
- [62] Albert Einstein. Berichtigung zu meiner Arbeit : Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. (German) [Corrections to my work : A new determination of molecular dimensions]. *J-ANN-PHYS-1900-4*, 339(3) :591–592, 1911.
- [63] N. Estrada, E. Azéma, F. Radjai, and A. Taboada. Identification of rolling resistance as a shape parameter in sheared granular media. *Phys. Rev. E*, 84 :011306, Jul 2011.
- [64] N. Estrada, A. Taboada, and F. Radjai. Shear strength and force transmission in granular media with rolling resistance. *Phys. Rev. E*, 78 :021301, 2008.
- [65] S. Fazekas, J. Török, and J. Kertész. Critical packing in granular shear bands. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, 75(1 Pt 1) :011302, Jan 2007.
- [66] J. Feng, H. H. Hu, and D. D. Joseph. Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a newtonian fluid part 1. sedimentation. *J. Fluid Mech.*, 261(-1) :95, feb 1994.
- [67] Y. T. Feng, K. Han, and D. R. J. Owen. Coupled lattice boltzmann method and discrete

- element modelling of particle transport in turbulent fluid flows : Computational issues. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 72(9) :1111–1134, November 2007.
- [68] Z. G. Feng and E. E. Michaelides. The immersed boundary-lattice boltzmann method for solving fluid-particles interaction problems. *Journal of Computational Physics*, 195(2) :602–628, April 2004.
- [69] Zhi-Gang Feng and Efstathios E. Michaelides. Hydrodynamic force on spheres in cylindrical and prismatic enclosures. *International Journal of Multiphase Flow*, 28(3) :479–496, mar 2002.
- [70] Zhi-Gang Feng and Efstathios E. Michaelides. Interparticle forces and lift on a particle attached to a solid boundary in suspension flow. *Physics of Fluids*, 14(1) :49, 2002.
- [71] U. Frisch, B. Hasslacher, and Y. Pomeau. Lattice-gas automata for the navier-stokes equation. *Phys. Rev. Lett.*, 56 :1505–1508, Apr 1986.
- [72] Stany Gallier, Elisabeth Lemaire, Laurent Lobry, and François Peters. A fictitious domain approach for the simulation of dense suspensions. *Journal of Computational Physics*, 256 :367 – 387, 2014.
- [73] Martha A. Gallivan, David R. Noble, John G. Georgiadis, and Richard O. Buckius. An evaluation of the bounce-back boundary condition for lattice boltzmann simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25(3) :249–263, 1997.
- [74] GDR-MiDi. On dense granular flows. *Eur. Phys. J. E*, 14 :341–365, 2004.
- [75] Irina Ginzburg. Equilibrium-type and link-type lattice boltzmann models for generic advection and anisotropic-dispersion equation. *Advances in Water resources*, 28(11) :1171–1195, 2005.
- [76] Irina Ginzburg. Lattice boltzmann modeling with discontinuous collision components : Hydrodynamic and advection-diffusion equations. *Journal of Statistical Physics*, 126(1) :157–206, dec 2006.
- [77] Irina Ginzburg. Lattice boltzmann modeling with discontinuous collision components : Hydrodynamic and advection-diffusion equations. *Journal of Statistical Physics*, 126(1) :157–206, 2007.
- [78] R. Glowinski, T.W. Pan, T.I. Hesla, D.D. Joseph, and J. Périaux. A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies : Application to particulate flow. *Journal of Computational Physics*, 169(2) :363 – 426, 2001.
- [79] V. Guinot. *Wave Propagation in Fluids*. Wiley ISTE, 2010.
- [80] Z. L. Guo, C. G. Zheng, and B. C. Shi. An extrapolation method for boundary conditions in lattice boltzmann method. *Physics of Fluids*, 14(6) :2007–2010, June 2002.
- [81] Motohiko HAKUNO and Yuji TARUMI. A granular assembly simulation for the seismic liquefaction of sand. *Doboku Gakkai Ronbunshu*, (398) :129–138, 1988.
- [82] M. A. Hampton, H. J. Lee, and J. Locat. Submarine landslides. *Reviews of Geophysics*, 34 :33–59, 1996.
- [83] J. Hardy, Y. Pomeau, and O. de Pazzis. Time evolution of a two-dimensional model system. i. invariant states and time correlation functions. *Journal of Mathematical Physics*, 14(12) :1746–1759, 1973.

- [84] R. Hart, P.A. Cundall, and J. Lemos. Formulation of a three-dimensional distinct element model-part ii. mechanical calculations for motion and interaction of a system composed of many polyhedral blocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 25(3) :117–125, 1988.
- [85] X. He and L.-S. Luo. A priori derivation of the lattice boltzmann equation. *Physical Review E*, 55 :R6333–R6336, 1997.
- [86] Xiaoyi He and Gary D. Doolen. Thermodynamic foundations of kinetic theory and lattice boltzmann models for multiphase flows. *Journal of Statistical Physics*, 107 :309–328, 2002.
- [87] Xiaoyi He and Li-Shi Luo. Theory of the lattice boltzmann method : From the boltzmann equation to the lattice boltzmann equation. *Phys. Rev. E*, 56 :6811–6817, Dec 1997.
- [88] Xiaoyi He, Xiaowen Shan, and Gary D. Doolen. Discrete boltzmann equation model for nonideal gases. *Phys. Rev. E*, 57 :R13–R16, Jan 1998.
- [89] H. J. Herrmann, A.N.B. Poliakov, and H. J. Tillemans. Simulating shear bands in granular solids. In *Non Linear Phenomena in Materials Science III*, volume 42-43, pages 195–203, Zug, 1995. Scitec Publ.
- [90] J.-M. Hertzsch, F. Spahn, and N. V. Brilliantov. On low-velocity collisions of viscoelastic particles. *J. Phys. II*, 5 :1725–1738, 1995.
- [91] K. Hewitt. Gifts and perils of landslides. *American Scientist*, 98 :410–419, 2010.
- [92] P.-Y. Hicher. Experimental behaviour of granular materials. In B. Cambou, editor, *Behaviour of Granular Materials*, pages 1–98, Wien, 2000. Springer.
- [93] H.H. Hu. Direct simulation of flows of solid-liquid mixtures. *International Journal of Multiphase Flow*, 22(2) :335 – 352, 1996.
- [94] Howard H. Hu, N.A. Patankar, and M.Y. Zhu. Direct numerical simulations of fluid–solid systems using the arbitrary lagrangian–eulerian technique. *Journal of Computational Physics*, 169(2) :427 – 462, 2001.
- [95] L. Huabing, L. Xiaoyan, F. Haiping, and Q. Yuehong. Force evaluations in lattice boltzmann simulations with moving boundaries in two dimensions. *Physical review. E*, 70 :026701–026701, 2004.
- [96] O. Hungr, S. G. Evans, M. J. Bovis, and J. N. Hutchinson. A review of the classification of landslides of the flow type. *Environmental and Engineering Geoscience*, 7(3) :221–238, 2001.
- [97] K. Ichiki and H. Hayakawa. Dynamical simulation of fluidized beds : Hydrodynamically interacting granular particles. *Physical Review E*, 52 :658–670, 1995.
- [98] K. Iglberger, N. Thürey, and U. Rüde. Simulation of moving particles in 3d with the lattice boltzmann method. *Computers & Mathematics*, 55 :1461–1468, 2008.
- [99] Emöke Imre, Laszlo Nagy, Janos Lőrincz, Negar Rahemi, Tom Schanz, Vijay Singh, and Stephen Fityus. Some comments on the entropy-based criteria for piping. *Entropy*, 17(4) :2281–2303, apr 2015.
- [100] R. M. Iverson. The physics of debris flows. *Reviews of Geophysics*, 35(3) :245–296, August 1997.
- [101] R. M. Iverson, M. E. Reid, N. R. Iverson, R. G. LaHusen, M. Logan, J. E. Mann, and D. L. Brien. Acute sensitivity of landslide rates to initial soil porosity. *Science*,

- 290(5491) :513–516, Oct 2000.
- [102] R.M. Iverson. Landslide triggering by rain infiltration. *Water Resources Research*, 36(7) :1897–1910, 2000.
- [103] R.M. Iverson. Landslide triggering by rain infiltration. *Water Resources Research*, 36(7) :1897–1910, 2000.
- [104] Salvador Izquierdo, Paula Martínez-Lera, and Norberto Fueyo. Analysis of open boundary effects in unsteady lattice boltzmann simulations. *Computers & Mathematics with Applications*, 58(5) :914 – 921, 2009. Mesoscopic Methods in Engineering and Science.
- [105] Roux J.-N. Contact disorder and nonlinear elasticity of granular packings : a simple model. In R. P. Behringer and J. M. J. Jenkins, *Powders and grains*, pages 215–218, 1997.
- [106] H. M. Jaeger, S. R. Nagel, and R. P. Behringer. The physics of granular materials. *Physics Today*, 49(4) :32–38, 1996.
- [107] A Janda, R Harich, Iker Zuriguel, Diego Maza, P Cixous, and A Garcimartín. Flow-rate fluctuations in the outpouring of grains from a two-dimensional silo. *Physical Review E*, 79(3) :031302, 2009.
- [108] M. Jean. The non smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177 :235–257, 1999.
- [109] BLAIS Jean-Pierre. Typologie de l'érosion interne et érosion interne des digues fluviales : une courte revue bibliographique. In *in : Proc. Sécurité des digues fluviales et de navigation*, pages 65–70, Colloque, Orléans , FRANCE, 2005. CEMAGREF, Antony, FRANCE (1995-2009) (Revue).
- [110] L. Jing and J.A. Hudson. Numerical methods in rock mechanics. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 39(4) :409 – 427, 2002. Numerical Methods in Rock Mechanics.
- [111] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
- [112] K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. University Press, Cambridge, 1999.
- [113] Michael Junk and Zhaoxia Yang. Outflow boundary conditions for the lattice boltzmann method. *PCFD*, 8(1/2/3/4) :38, 2008.
- [114] Michael Junk and Zhaoxia Yang. Asymptotic analysis of lattice boltzmann outflow treatments. *Communications in Computational Physics*, 9 :1117–1127, 5 2011.
- [115] D Kandhai, A Koponen, A Hoekstra, M Kataja, J Timonen, and P.M.A Sloot. Implementation aspects of 3d lattice-bgk : Boundaries, accuracy, and a new fast relaxation method. *Journal of Computational Physics*, 150(2) :482 – 501, 1999.
- [116] Johnson K.L., Kendall. K, and Roberts A.D. Surface energy and the contact of elastic solids. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A (Mathematical and Physical Sciences)*, 324(1558) :301–313, 1971.
- [117] Irvin M. Krieger and Thomas J. Dougherty. A Mechanism for Non-Newtonian Flow in Suspensions of Rigid Spheres. *Transactions of the Society of Rheology*, 3 :137–152, 1959.
- [118] A.L. Kupershtokh. New method of incorporating a body force term into the lattice boltzmann equation. In *in : Proc. 5th International EHD Workshop, University of Poitiers*, page 241–246, Poitiers, France, 2004.

- [119] Laurent Lacaze, Jeremy C. Phillips, and Rich R. Kerswell. Planar collapse of a granular column : Experiments and discrete element simulations. *Physics of Fluids*, 20(6) :063302, June 2008.
- [120] Anthony J. C. Ladd. Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized boltzmann equation. part 1. theoretical foundation. *Journal of Fluid Mechanics*, 271 :285–309, 7 1994.
- [121] E. Lajeunesse, J. B. Monnier, and G. M. Homsy. Granular slumping on a horizontal surface. *Physics of Fluids*, 17(10) :103302, October 2005.
- [122] Pierre Lallemand and Li-Shi Luo. Theory of the lattice boltzmann method : Dispersion, dissipation, isotropy, galilean invariance, and stability. *Phys. Rev. E*, 61 :6546–6562, Jun 2000.
- [123] Pierre Lallemand and Li-Shi Luo. Lattice boltzmann method for moving boundaries. *Journal of Computational Physics*, 184(2) :406 – 421, 2003.
- [124] Eric Lauga, Michael Brenner, and Howard Stone. Microfluidics : The no-slip boundary condition. In Cameron Tropea, AlexanderL. Yarin, and JohnF. Foss, editors, *Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics*, pages 1219–1240. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [125] Thierry Le Pennec, Knut Jørgen Måløy, Alex Hansen, Madani Ammi, Daniel Bideau, and Xiao-lun Wu. Ticking hour glasses : experimental analysis of intermittent flow. *Physical Review E*, 53(3) :2257, 1996.
- [126] Aline Lefebvre and Bertrand Maury. Apparent viscosity of a mixture of a newtonian fluid and interacting particles. *Comptes Rendus Mécanique*, 333(12) :923 – 933, 2005. Fluid-solid interactions : modeling, simulation, bio-mechanical applications.
- [127] F. Legros. The mobility of long-runout landslides. *Engineering Geology*, 63(3–4) :301–331, 2002.
- [128] Andrea J. Liu and Sidney R. Nagel. *Jamming and Rheology*. Taylor and Francis, New York, 2001.
- [129] Qin Lou, Zhaoli Guo, and Baochang Shi. Evaluation of outflow boundary conditions for two-phase lattice boltzmann equation. *Phys. Rev. E*, 87 :063301, Jun 2013.
- [130] G. Lube, H. E. Huppert, R. S. J. Sparks, and A. Freundt. Collapses of two-dimensional granular columns. *Physical Review E*, 72(4) :041301, October 2005.
- [131] G. Lube, H. E. Huppert, R. S. J. Sparks, and M. A. Hallworth. Axisymmetric collapses of granular columns. *Journal of Fluid Mechanics*, 508 :175–199, 2004.
- [132] Leon B Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The astronomical journal*, 82 :1013–1024, 1977.
- [133] Stefan Luding. Cohesive, frictional powders : contact models for tension. *Granular Matter*, 10 :235–246, 2008.
- [134] JJ Major and RM Iverson. Debris-flow deposition : Effects of pore-fluid pressure and friction concentrated at flow margins. *Geological Society of America Bulletin*, 111(10) :1424–1434, OCT 1999.
- [135] H. A Makse, N. Gland, D. L. Johnson, and L. M. Schwartz. Why effective medium theory fails in granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :5070–5073, 1999.
- [136] M. Mansouri, J-Y. Delenne, M. S. El Youssoufi, and A. Seridi. A 3d dem-lbm ap-

- proach for the assessment of the quick condition for sands. *Comptes Rendus Mécanique*, 337 :675–681, 2009.
- [137] Alexandre Martin. *Écoulement confiné d'un matériau granulaire en interaction avec un gaz, application à la relocalisation du combustible nucléaire*. PhD thesis, Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc, 2010.
- [138] D. G. Masson, C. B. Harbitz, R. B. Wynn, G. Pedersen, and F. Lovholt. Submarine landslides : processes, triggers and hazard prediction. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 364(1845) :2009–2039, 2006.
- [139] T. Matsushima, J. Katagiri, K. Uesugi, A. Tsuchiyama, and T. Nakano. 3d shape characterization and image-based DEM simulation of lunar soil simulant FJS-1. *Journal of Aerospace Engineering ASCE*, 2009.
- [140] B. Maury. Direct simulations of 2d fluid-particle flows in biperiodic domains. *Journal of Computational Physics*, 156(2) :325 – 351, 1999.
- [141] Bertrand Maury. Fluid–particle shear flows. *ESAIM : M2AN*, 37(4) :699–708, jul 2003.
- [142] Michael E. McCracken and John Abraham. Multiple-relaxation-time lattice-boltzmann model for multiphase flow. *Phys. Rev. E*, 71 :036701, Mar 2005.
- [143] Guy R. McNamara and Gianluigi Zanetti. Use of the boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Phys. Rev. Lett.*, 61 :2332–2335, Nov 1988.
- [144] S. McNamara, E. Flekkoy, and K.J. Maloy. Grains and gas flow : Molecular dynamics with hydrodynamic interactions. *Physical Review E*, 61(4054), 2000.
- [145] H. J. Melosh. The physics of very large landslides. *Acta Mech.*, 64 :89, 1986.
- [146] J.K. Mitchell and K. Soga. *Fundamentals of Soil Behavior*. Wiley, New-York, NY, 2005.
- [147] Joe J Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 30 :543–574, 1992.
- [148] Y Monerie, PG VINCENT, and P Suquet. Céramiques nucléaires. In *Comptes rendus du colloque National Mécamat–Approches multi-échelles en mécanique des matériaux*, 2006.
- [149] J. J. Moreau. New computation methods in granular dynamics. In *Powders & Grains 93*, page 227, Rotterdam, 1993. A. A. Balkema.
- [150] J. J. Moreau. Numerical investigation of shear zones in granular materials. In D. E. Wolf and P. Grassberger, editors, *Friction, Arching, Contact Dynamics*, pages 233–247, Singapore, 1997. World Scientific.
- [151] Alberto Mussa, Pietro Asinari, and Li-Shi Luo. Lattice boltzmann simulations of 2d laminar flows past two tandem cylinders. *Journal of Computational Physics*, 228(4) :983 – 999, 2009.
- [152] Patrick Mutabaruka. *Numerical modeling of immersed granular materials : initiation and propagation of avalanches in a fluid*. Theses, Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, December 2013.
- [153] Patrick Mutabaruka, Jean-Yves Delenne, Kenichi Soga, and Farhang Radjai. Initiation of immersed granular avalanches. *Phys. Rev. E*, 89 :052203, May 2014.
- [154] Emiliano Mutti, Daniel Bernoulli, Franco Ricci Lucchi, and Roberto Tinterri. Turbidites and turbidity currents from alpine 'flysch' to the exploration of continental margins. *Sedimentology*, 56(1) :267–318, 2009.

- [155] R. M. Nedderman. *Statics and kinematics of granular materials*. Cambr. Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [156] Jeff Ngoma. *Numerical and experimental study of the destabilization of a submerged granular bed by fluidization*. Theses, Aix Marseille Université, April 2015.
- [157] X. D. Niu, C. Shu, Y. T. Chew, and Y. Peng. A momentum exchange-based immersed boundary-lattice boltzmann method for simulating incompressible viscous flows. *Physics Letters A*, 354(3) :173–182, May 2006.
- [158] Walton O. R. Numerical simulation of inclined chute flows of monodisperse, inelastique, frictional spheres. *Mechanics of Materials*, 16(1-2) :239–247, 1993.
- [159] M. Oda, J. Koshini, and S. Nemat-Nasser. Some experimentally based fundamental results on the mechanical behavior of granular materials. *Geotechnique*, 30 :479–495, 1980.
- [160] M. A. Ol'shanskii and V. M. Staroverov. On simulation of outflow boundary conditions in finite difference calculations for incompressible fluid. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 33(4) :499–534, 2000.
- [161] M. Pailha, M. Nicolas, and O. Pouliquen. Initiation of underwater granular avalanches : Influence of the initial volume fraction. *Physics of Fluids*, 20(11), 2008.
- [162] A. R. Paterson. *A First Course in Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1984.
- [163] G.G. Pereira, M. Prakash, and P.W. Cleary. {SPH} modelling of fluid at the grain level in a porous medium. *Applied Mathematical Modelling*, 35(4) :1666 – 1675, 2011.
- [164] Charles S. Peskin. The immersed boundary method. *ANU*, 11, jan 2002.
- [165] I. Preechawuttipong. *Modélisation du comportement mécanique de matériaux granulaires cohésifs*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2001.
- [166] D. W. Qi. Lattice-boltzmann simulations of particles in non-zero-reynolds-number flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 385 :41–62, April 1999.
- [167] F. Radjai and F. Dubois. *Discrete-element Modeling of Granular Materials*. Iste-Wiley, London, 2011.
- [168] F. Radjai and V. Richefeu. Contact dynamics as a nonsmooth discrete element method. *Mechanics of Materials*, 41 :715–728, 2009.
- [169] F. Radjai and S. Roux. Contact dynamics study of 2d granular media : Critical states and relevant internal variables. In H. Hinrichsen and D. E. Wolf, editors, *The Physics of Granular Media*, pages 165–186, Weinheim, 2004. Wiley-VCH.
- [170] F. Radjai, D. E. Wolf, M. Jean, and J.-J. Moreau. Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Phys. Rev. Lett.*, 80 :61–64, 1998.
- [171] P Raynaud. Fuel fragmentation, relocation, and dispersal during the loss-of-coolant accident. *NUREG-2121*, 2012.
- [172] Osborne Reynolds. Lvii. on the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. with experimental illustrations. *Philosophical Magazine Series 5*, 20(127) :469–481, 1885.
- [173] M. J. Rhodes. *Introduction to particle technology*. John Wiley & Sons, Chichester, 1998.
- [174] L. Rothenburg and R. J. Bathurst. Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials. *Geotechnique*, 39 :601–614, 1989.
- [175] T. Ruiz, E. Rondet, M. Delalonde, and J. P. Desfours. Hydro-textural and consistency



- surface states of humid granular media. *Powder Technol.*, 208(2) :409–416, Mar 2011.
- [176] P. G. Saffman. A theory of dispersion in a porous medium. *J. Fluid Mech.*, 6(03) :321, oct 1959.
- [177] B. Saint-Cyr, J.-Y. Delenne, C. Voivret, F. Radjai, and P. Sornay. Rheology of granular materials composed of nonconvex particles. *Phys. Rev. E*, 84(4) :041302–, 2011.
- [178] B. Saint-Cyr, J.-Y. Delenne, C. Voivret, F. Radjai, and P. Sornay. Rheology of granular materials composed of nonconvex particles. *Physical Review E*, 84(4), oct 2011.
- [179] M. Satake. Fabric tensor in granular materials. In P. A. Vermeer and H. J. Luger, editors, *Proceedings of the IUTAM symposium on deformation and failure of granular materials, Delft*, pages 63–68, Amsterdam, 1982. A. A. Balkema.
- [180] Xiaowen Shan and Hudong Chen. Lattice boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components. *Phys. Rev. E*, 47 :1815–1819, Mar 1993.
- [181] Jessica Sjah. *Couplage SPH-DEM pour l'étude de l'érosion dans les ouvrages hydrauliques*. Theses, Ecole Centrale de Lyon, December 2013.
- [182] L. Staron. Mobility of long-runout rock flows : a discrete numerical investigation. *Geophysical Journal International*, 172(1) :455–463, January 2008.
- [183] L. Staron and E. J. Hinch. Study of the collapse of granular columns using two-dimensional discrete-grain simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 545 :1–27, December 2005.
- [184] L. Staron and E. J. Hinch. The spreading of a granular mass : role of grain properties and initial conditions. *Granular Matter*, 9(3-4) :205–217, June 2007.
- [185] James D. Sterling and Shiyi Chen. Stability analysis of lattice boltzmann methods. *Journal of Computational Physics*, 123(1) :196 – 206, 1996.
- [186] J. J. Stickel and R. L. Powell. Fluid mechanics and rheology of dense suspensions. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 37 :129–149, 2005.
- [187] S. Succi. *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. Clarendon Press, Oxford, 2001.
- [188] Sauro Succi. Mesoscopic modeling of slip motion at fluid-solid interfaces with heterogeneous catalysis. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :064502, Jul 2002.
- [189] D Sulsky, S.-J. Zhou, and H L Schreyer. Application of a particle-in-cell method to solid mechanics, 1995.
- [190] C.E. Synolakis, J.P. Bardet, J.C. Borrero, H.L. Davies, E.A. Okal, E.A. Silver, S. Sweet, and D.R. Tappin. The slump origin of the 1998 papua new guinea tsunami. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 458 :763–789, 2002.
- [191] A. Taboada, K. J. Chang, F. Radjai, and F. Bouchette. Rheology, force transmission, and shear instabilities in frictional granular media from biaxial numerical test using the contact dynamics method. *Journal of Geophysical Research*, 110(1–24), 2005.
- [192] A. Taboada, N. Estrada, and F. Radjai. Additive decomposition of shear strength in cohesive granular media from grain-scale interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 97(9) :098302, September 2006.
- [193] Hidenori Takeda, Shoken M Miyama, and Minoru Sekiya. Numerical simulation of viscous flow by smoothed particle hydrodynamics. *Progress of Theoretical Physics*, 92(5) :939–960, 1994.

- [194] Erica L. Thompson and Herbert E. Huppert. Granular column collapses : further experimental results. *Journal of Fluid Mechanics*, 575 :177–186, March 2007.
- [195] Karsten E. Thompson and H. Scott Fogler. Modeling flow in disordered packed beds from pore-scale fluid mechanics. *AIChE Journal*, 43(6) :1377–1389, jun 1997.
- [196] P. A. Thompson and M. O. Robbins. Origin of stick-slip motion in boundary lubrication. *Science*, 250(4982) :792–794, nov 1990.
- [197] Kiwing To. Jamming transition in two-dimensional hoppers and silos. *Phys. Rev. E*, 71 :060301, Jun 2005.
- [198] V. Topin, F. Dubois, Y. Monerie, F. Perales, and A. Wachs. Micro-rheology of dense particulate flows : Application to immersed avalanches. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(1–2) :63–72, 2011.
- [199] V. Topin, Y. Monerie, F. Perales, and F. Radjai. Collapse dynamics and runout of dense granular materials in a fluid. *Physical Review Letters*, 109(18), 2012.
- [200] Martin Trulsson, Bruno Andreotti, and Philippe Claudin. Transition from the viscous to inertial regime in dense suspensions. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :118305, Sep 2012.
- [201] Y. Tsuji, T. Kawaguchi, and T. Tanaka. Discrete particle simulation of two-dimensional fluidized bed. *Powder Technology*, 77(1) :79–87, 10 1993.
- [202] Francisco J. Valdes-Parada, J. Alberto Ochoa-Tapia, and Jose Alvarez-Ramirez. Validity of the permeability carman–kozeny equation : A volume averaging approach. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 388(6) :789–798, mar 2009.
- [203] Pham van Thang, Bastien Chopard, Laurent Lefèvre, Diemer Anda Ondo, and Eduardo Mendes. Study of the 1d lattice boltzmann shallow water equation and its coupling to build a canal network. *Journal of Computational Physics*, 229(19) :7373 – 7400, 2010.
- [204] FATHOLLAH VARNIK, DOROTHÉE DORNER, and DIERK RAABE. Roughness-induced flow instability : a lattice boltzmann study. *Journal of Fluid Mechanics*, 573 :191–209, 2 2007.
- [205] Loup Verlet. Computer "experiments" on classical fluids. i. thermodynamical properties of lennard-jones molecules. *Phys. Rev.*, 159 :98–103, Jul 1967.
- [206] P. A. Vermeer. The orientation of shear bands in biaxial tests. *Géotechnique*, 40 :223, 1990.
- [207] Henk Kaarle Versteeg and Weeratunge Malalasekera. *An introduction to computational fluid dynamics : the finite volume method*. Pearson Education, 2007.
- [208] Franz J Vesely. *Computational Physics*. Springer, 1994.
- [209] Franz J. Vesely. *Computational Physics : An Introduction*. Springer, 2012.
- [210] Damien Violeau. *Fluid Mechanics and the SPH Method : Theory and Applications*. Oxford University Press, 2012.
- [211] C. Voivret, F. Radjai, J.-Y. Delenne, and M. S. El Youssoufi. Space-filling properties of polydisperse granular media. *Physical Review E*, 76, 2007.
- [212] C. Voivret, F. Radjai, J.-Y. Delenne, and M. S. El Youssoufi. Multiscale force networks in highly polydisperse granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :178001, 2009.
- [213] S. von Hoerner. Die numerische integration des n-korper-problemes fur sternhaufen. *Zeitschrift fur Astrophysik*, 50, 1960.
- [214] A. Wachs. A DEM-DLM/FD method for direct numerical simulation of particulate

- flows : Sedimentation of polygonal isometric particles in a newtonian fluid with collisions. *Computers & Fluids*, 38 :1608–1628, 2009.
- [215] A. Wachs. PeliGRIFF, a parallel DEM-DLM/FD direct numerical simulation tool for 3D particulate flows. *Journal of Engineering Mathematics*, 71(1) :131–155, 2011.
- [216] Anthony Wachs. A dem-dlm/fd method for direct numerical simulation of particulate flows : Sedimentation of polygonal isometric particles in a newtonian fluid with collisions. *Computers & Fluids*, 38(8) :1608 – 1628, 2009.
- [217] Dieter A Wolf-Gladrow. *Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models : An Introduction*. Number 1725. Springer Science & Business Media, 2000.
- [218] D.M. Wood. *Soil behaviour and critical state soil mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1990.
- [219] J. Wu and C. Shu. Particulate flow simulation via a boundary condition-enforced immersed boundary-lattice boltzmann scheme. *Communications in Computational Physics*, 2009.
- [220] XI Wu, KJ Måløy, A Hansen, M Ammi, and D Bideau. Why hour glasses tick. *Physical review letters*, 71(9) :1363, 1993.
- [221] S. Yimsiri and K. Soga. Micromechanics-based stress-strain behaviour of soils at small strains. *Geotechnique*, 50(5) :559–571, 2000.
- [222] S. Yimsiri and K. Soga. Dem analysis of soil fabric effects on behaviour of sand. *Geotechnique*, 60(6) :483–495, 2010.
- [223] D. Z. Yu, R. W. Mei, L. S. Luo, and W. Shyy. Viscous flow computations with the method of lattice boltzmann equation. *Progress In Aerospace Sciences*, 39(5) :329–367, July 2003.
- [224] Zhaosheng Yu and Anthony Wachs. A fictitious domain method for dynamic simulation of particle sedimentation in bingham fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 145(2–3) :78 – 91, 2007.
- [225] Zhaosheng Yu, Anthony Wachs, and Yannick Peysson. Numerical simulation of particle sedimentation in shear-thinning fluids with a fictitious domain method. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 136(2–3) :126 – 139, 2006.
- [226] Luoding Zhu, Derek Tretheway, Linda Petzold, and Carl Meinhart. Simulation of fluid slip at 3d hydrophobic microchannel walls by the lattice boltzmann method. *Journal of Computational Physics*, 202(1) :181 – 195, 2005.
- [227] DonaldP. Ziegler. Boundary conditions for lattice boltzmann simulations. *Journal of Statistical Physics*, 71(5-6) :1171–1177, 1993.
- [228] Qisu Zou and Xiaoyi He. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice boltzmann bgk model. *Physics of Fluids (1994-present)*, 9(6) :1591–1598, 1997.
- [229] Iker Zuriguel, Angel Garcimartín, Diego Maza, Luis A Pagnaloni, and JM Pastor. Jamming during the discharge of granular matter from a silo. *Physical Review E*, 71(5) :051303, 2005.



## **Rhéologie des écoulements granulaires immergés dans un fluide visqueux**

**Résumé :** Dans cette thèse on s'appuie sur la simulation numérique discrète pour étudier le comportement mécanique d'un milieu granulaire immergé dans un fluide visqueux. Le calcul de la dynamique du mélange est rendu possible grâce à un couplage fort entre méthodes des éléments discrets (DEM) pour les grains et Lattice Boltzmann (LBM) pour le fluide. Pour une large gamme de valeurs de vitesses de cisaillement, contraintes de confinement et viscosités, les résultats montrent que le coefficient de frottement interne et la compacité sont bien décrits par un unique paramètre adimensionnel "visco-inertiel" associant les nombres de Stokes et d'inertie. Le comportement frottant, obtenu à pression de confinement constante, est mis en correspondance avec le comportement visqueux obtenu sous conditions aux limites à volume contrôlé et qui conduit à une divergence des viscosités effectives normales et tangentielles en inverse du carré de la différence entre compacité et compacité critique de l'assemblage. Les résultats numériques montrent un excellent accord avec les données expérimentales de Boyer et al. (2011). L'évolution de la connectivité et de l'anisotropie du réseau de force en fonction du nombre visco-inertiel montrent que l'augmentation de la résistance au frottement est une conséquence directe d'une anisotropie de structure renforcée à la fois par les effets de la viscosité et de l'inertie des grains. En vue d'une contribution à l'évaluation des risques consécutifs à un accident nucléaire, nous nous sommes également intéressés à l'étude de la fragmentation et de l'écoulement d'agrégats poreux confinés et soumis à une surpression locale exercée par un fluide. L'étude de l'écoulement sous gravité d'un matériau granulaire immergé à travers une constriction a également fait l'objet d'une campagne d'essais numériques.

**Mots-clés :** milieu granulaire immergé, modélisation numérique, suspension, hydrofissuration.

## **Rheology of granular flows immersed in a viscous fluid**

**Abstract :** We investigate the behavior of granular materials immersed in a viscous fluid by means of extensive simulations based on the Discrete Element Method for particle dynamics coupled with the Lattice Boltzmann method for the fluid. We show that, for a broad range of parameters such as shear rate, confining stress and viscosity, the internal friction coefficient and packing fraction are well described by a single "visco-inertial" dimensionless parameter combining inertial and Stokes numbers. The frictional behavior under constant confining pressure is mapped into a viscous behavior under volume-controlled conditions, leading to the divergence of the effective normal and shear viscosities in inverse square of the distance to the critical packing fraction. The results are in excellent agreement with the experimental data of Boyer et al. (2011). The evolution of the force network in terms of connectivity and anisotropy as a function of the visco-inertial number, indicates that the increase of frictional strength is a direct consequence of structural anisotropy enhanced by both fluid viscosity and grain inertia. In view of application to a potential nuclear accident, we also study the fragmentation and flow of confined porous aggregates in a fluid under the action of local overpressures and pressure gradients as well as gravity-driven flow of immersed particles in an hourglass.

**Key words :** immersed granular materials, numerical modeling, suspension, hydrofissuring.