

N° d'ordre : 6846

UNIVERSITE PARIS XI

UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE
présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE PARIS XI

par

Abdellah DOURI

**Développement à partir du concept CACAO (Caméra A Collimation
Assistée par Ordinateur) d'un système tomographique adapté à la
mesure 3D de plaies contaminées**

Soutenue le 29 mars 2002 devant la commission d'examen :

**Mr. Yves BIZAIS
Mr. Christian COLLIEX
Mr. Didier FRANCK
Mr. Marcial HUVER
Mr. Christian JEANGUILLAUME
Mr. Ali MOHAMMAD-DJAFARI
Mr. Alain YGER**

Tables des Matières

<u>I. INTRODUCTION:</u>	1
<u>II. GÉNÉRALITÉS</u>	8
<u>II.1. L'état de l'art</u>	8
<u>II.1.1. Les techniques d'imagerie tomographique X et γ en médecine</u>	8
<u>II.1.2. La tomographie par transmission X ou tomodensitométrie</u>	8
<u>II.1.3. Tomographie d'émission monophotonique ou SPECT</u>	9
<u>II.1.4. Tomographie par émission de positrons ou PET</u>	10
<u>II.2. La gamma caméra ou caméra d'Anger</u>	12
<u>II.2.1. Vue d'ensemble</u>	12
<u>II.2.2. Le collimateur</u>	13
<u>II.2.3. Le scintillateur</u>	14
<u>II.2.4. Les photomultiplicateurs</u>	15
<u>II.2.5. L'électronique</u>	16
<u>II.2.6. Le statif</u>	16
<u>II.3. Performances des gamma caméras</u>	17
<u>II.3.1. Sensibilité et résolution</u>	18
<u>II.3.2. Les autres performances du détecteur</u>	22
<u>II.3.3. Les modes d'acquisitions</u>	22
<u>II.3.4. Les limites de la caméra d'Anger</u>	23
<u>II.4. Les méthodes de reconstruction tomographique</u>	23
<u>II.4.1. La transformée de Radon</u>	23
<u>II.4.2. Les méthodes analytiques</u>	31
<u>II.4.3. Les méthodes Algébriques</u>	36
<u>II.4.4. Les méthodes de reconstruction utilisant une approche probabiliste</u>	37
<u>II.5. Bruits influençant les reconstructions tomographiques</u>	39
<u>II.5.1. bruit de comptage</u>	39
<u>II.5.2. Bruit de poisson</u>	39
<u>III. LE SYSTEME CACAO</u>	41
<u>III.1. Description du système CACAO</u>	41
<u>III.1.1. Principe</u>	41
<u>III.1.2. Description du Système CACAO [60]</u>	42
<u>III.2. Le problème de la reconstruction CACAO à 2D</u>	44
<u>III.2.1. Formulation bidimensionnelle de l'acquisition CACAO</u>	44
<u>III.2.2. Modélisation de l'acquisition à l'angle zéro</u>	46
<u>III.2.3. Réponse à une source ponctuelle</u>	49
<u>III.3. L'algorithme de reconstruction CACAO à 2D</u>	51
<u>III.3.1. Description générale</u>	51
<u>III.3.2. Sommation et décalage</u>	51
<u>III.3.3. Déconvolution et filtrage</u>	54
<u>III.3.4. Rotation et somation</u>	61
<u>III.3.5. La relation entre le système CACAO et la transformée de Radon</u>	62
<u>III.3.6. Exemple de reconstruction</u>	62
<u>III.4. Critères d'évaluation de la qualité des images reconstruites</u>	63
<u>III.4.1. Le rapport signal sur bruit</u>	64
<u>III.4.2. Le gain en signal sur bruit</u>	64
<u>IV. ACQUISITION ET DECONVOLUTION</u>	66
<u>IV.1. Rappel sur la déconvolution</u>	66

IV.1.1. Notation	66
IV.1.2. La déconvolution un problème mal posé.....	68
IV.1.3. Régularisation.....	70
IV.2. Méthodes d'étude	71
IV.2.1. Problème simplifié.....	71
IV.2.2. Simulations	72
IV.3. Étude des différentes méthodes de Déconvolution avec un noyau rectangulaire.....	75
IV.3.1. Décomposition en valeurs singulières tronquées (DVST).....	75
IV.3.2. Maximum de vraisemblance (Maximum Likelihood - Expectation Maximisation (ML-EM))	78
IV.4. Acquisition-déconvolution avec des noyaux rectangulaires : intérêt d'une acquisition supplémentaire.....	84
IV.4.1. Remplacement du problème à l'acquisition	84
IV.4.2. Résolution de la double équation de déconvolution par la méthode dite du Noyau composite (NC).....	84
IV.4.3. Comparaison de la méthode du NC avec la DVST	85
IV.4.4. Comparaison de la méthode du NC à 2 Noyaux avec ML-CG à un seul noyau. ...	86
IV.5. Étude des différentes méthodes de Déconvolution avec deux noyaux rectangulaires ..	87
IV.5.1. Multi-kernel optimisation	87
IV.5.2. Méthode de Wiener à deux noyaux	89
IV.5.3. Méthode des multiplicateurs de Lagrange.....	92
IV.5.4. Maximum de vraisemblance à deux noyaux.....	94
IV.5.5. RAMLA	96
IV.5.6. Cross Burg Entropy CBE.....	98
IV.6. Discussion et conclusion.....	99
IV.6.1. Choix de l'algorithme de déconvolution	99
IV.6.2. Conclusion	101
V. RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE CACAO À 2D.....	102
V.1. Description des simulations	102
V.1.1. Paramètres liés à l'acquisition CACAO.....	102
V.1.2. Les objets d'études pour les simulations (Fantôme):	105
V.1.3. Simulation de l'acquisition CACAO.....	107
V.2. Amélioration des programmes de reconstruction CACAO	109
V.2.1. Choix de l'algorithme de déconvolution.....	109
V.2.2. Implémentation de la méthode MKO dans l'algorithme de reconstruction CACAO ..	109
V.2.3. Choix de l'algorithme d'Interpolation	110
V.2.4. Implémentation des B-splines dans l'algorithme de reconstruction CACAO	115
V.3. Optimisation des paramètres du système CACAO	117
V.3.1. Optimisation des paramètres de reconstruction: alpha, bêta, lambda, fc	117
V.3.2. Optimisation des dimensions physique du collimateur et des paramètres de l'acquisition	122
V.3.3. Étude de l'influence de la Largeur de trous du collimateur sur le rapport signal sur bruit	123
V.3.4. Optimisation de Nombre d'angles.....	125
V.4. Études de l'algorithme de reconstruction.....	126
V.4.1. Résultat des reconstructions optimisées avec la méthode MKO	126
V.4.2. Étude comparative avec les autres techniques.....	129
V.5. Comparaison avec le système classique (CPHC).....	134
V.5.1. Méthodologie	134
V.5.2. Système classique (CPHC).....	136
V.5.3. Système CACAO.....	137
V.5.4. Résultats.....	138
V.6. Conclusion	141

<u>VI. RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE À 3D</u>	142
<u>VI.1. Description générale du système CACAO à 3 Dimension</u>	142
<u>VI.1.1. Le système CACAO en 3D</u>	142
<u>VI.1.2. Mouvement de rotation:</u>	143
<u>VI.1.3. Mouvement de translation:</u>	144
<u>VI.1.4. Système d'axes</u>	145
<u>VI.2. Description des acquisitions</u>	146
<u>VI.2.1. Arrangement des trous du collimateur</u>	146
<u>VI.2.2. Mouvement en translation du collimateur</u>	146
<u>VI.2.3. Étude de la surface balayée par translation</u>	149
<u>VI.2.4. Acquisitions 3D</u>	151
<u>VI.3. L'algorithme de reconstruction CACAO en 3D</u>	154
<u>VI.3.1. Somme décalage</u>	154
<u>VI.3.2. Déconvolution et Filtrage</u>	156
<u>VI.3.3. Extension de la déconvolution à deux dimensions</u>	157
<u>VI.4. Reconstructions 3D</u>	159
<u>VI.4.1. Configuration de la géométrie du collimateur CACAO et de l'acquisition</u>	159
<u>VI.4.2. L'objet d'étude</u>	160
<u>VI.4.3. Résultats des reconstructions</u>	161
<u>VII. APPROCHE EXPERIMENTALE</u>	166
<u>VII.1. Matériel et méthode</u>	167
<u>VII.1.1. Matériel utilisé</u>	167
<u>VII.1.2. Les sources et les fantômes</u>	173
<u>VII.1.3. La chaîne de mesure</u>	175
<u>VII.1.4. L'informatique commandant le banc</u>	175
<u>VII.1.5. L'algorithme général de l'acquisition</u>	176
<u>VII.1.6. Le logiciel Genie-PC</u>	176
<u>VII.2. Spectrométrie X et Gamma</u>	177
<u>VII.2.1. Bruit de fond</u>	177
<u>VII.2.2. Vérification des résolutions en énergie pour chaque élément détecteur</u>	180
<u>VII.2.3. Comparaison entre les mesures CACAO et Classique</u>	181
<u>VII.2.4. Choix de la fenêtre énergétique</u>	182
<u>VII.3. Reconstruction</u>	183
<u>VII.3.1. Reconstruction plane</u>	183
<u>VII.3.2. Reconstruction tomographique</u>	185
<u>VII.3.3. Linéarité et résolution</u>	188
<u>VII.4. Conclusion</u>	190
<u>VIII. CONCLUSION</u>	192

I. INTRODUCTION:

Tomographie, espace des phases et méthode multiplexe

Les appareils optiques classiques transfèrent des informations situées dans un plan objet en informations dans un plan image. L'espace des phases mesure à la fois l'étendue spatiale de l'objet analysé et l'étendue angulaire des photons transportant l'information. C'est un concept très utilisé en optique et notamment dans l'optique corpusculaire des accélérateurs de particules (espace des traces)[45, 92] pour calculer l'intensité des faisceaux et le rendement des systèmes placés sur ces faisceaux.

Le théorème de Liouville stipule en effet que pour un faisceau se propageant dans un système, la surface occupée dans l'espace des phases se conserve. L'espace des phases permet ainsi de calculer aisément l'efficacité d'un système optique. Il suffit de faire le rapport entre la surface dans l'espace des phases objet et celle de l'espace des phases image.

Nous allons voir dans les exemples suivants quelques applications de ce concept.

Le premier appareil d'acquisition ayant permis de réaliser des images à partir des rayons gamma est le scintigraphe à balayage. Cet instrument (Figure I.1) utilisait un détecteur mobile, équipé d'un collimateur focalisé sur un petit volume de l'objet. L'analyse de l'ensemble de l'objet étant réalisée par un balayage de la surface à étudier (en x,y). Typiquement la surface analysée (collimatée) était de l'ordre de la résolution soit 1 ou 2 cm de diamètre, le détecteur circulaire avait un diamètre de 12,7 cm, ainsi le demi-angle d'acceptante (maximale) était pour un objet situé à 20 cm du cristal d'environ 15°; d'où un volume dans l'espace des phases d'environ 37,8 mm²xstéradians (voir Tableau I-2)

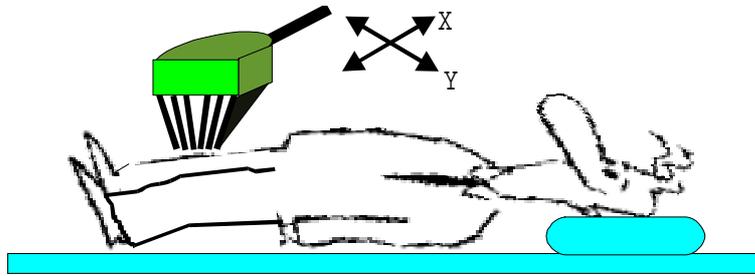


Figure I.1: Scintigraphie à balayage

La gamma caméra d'Anger a considérablement augmenté la sensibilité des systèmes d'imagerie, grâce à une augmentation de la surface du détecteur ($400 \times 540 \text{ mm}^2$) et du nombre de ses détecteurs (caméra à 2 et 3 têtes).

En ce qui concerne les gamma caméras classiques, deux types de collimateurs sont utilisés pour réaliser des images de projections: Le collimateur à trous parallèles (Figure I.3) et le collimateur "pinhole" en français sténopé (Figure I.2).

La limitation de l'espace des phases est dans ces cas:

1) Pour le sténopé, la surface du trou du sténopé est de πr^2 et l'angle d'ouverture est d'environ 30° .

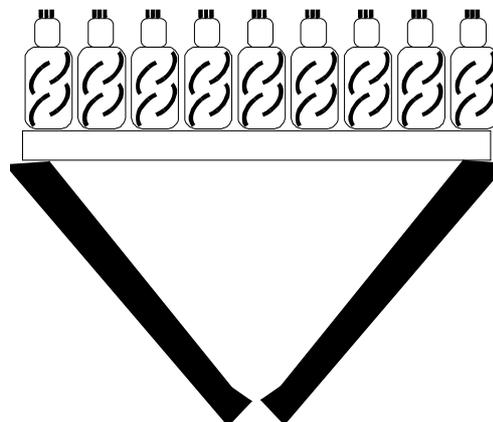


Figure I.2: Collimateur "pinhole"

2) Pour le collimateur à trous parallèles: la surface du détecteur est inférieure à $400 \times 540 \text{ mm}^2$ et l'angle d'ouverture du collimateur : $\text{Arctangente } 2/50$ (4×10^{-2}) pour des trous de 2 mm de diamètre et de 50 mm de profondeur. Remarque: la surface utile du collimateur doit être diminuée de la surface masquée par les cloisons du collimateur, ici négligée.

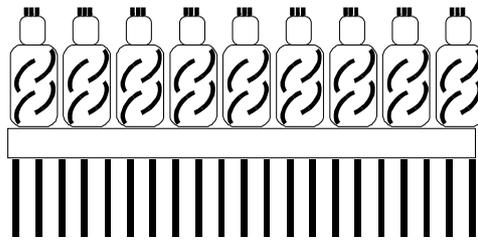


Figure I.3: Collimateur à trous parallèle

Ces appareils initialement dérivés de l'optique photonique donnaient des images planes à partir d'objets en 3 dimensions donc réalisaient des images de projections plus ou moins acceptables.

En 1960 Hounsfield réalise un des premiers systèmes d'imagerie capable de donner une représentation de l'intérieur de l'organisme étudié par une méthode multiplexe, un codage en mouvement et une reconstruction informatique. L'objet en 3 dimensions est décrit par un ensemble de plans à 2 dimensions (ou plans de coupe).

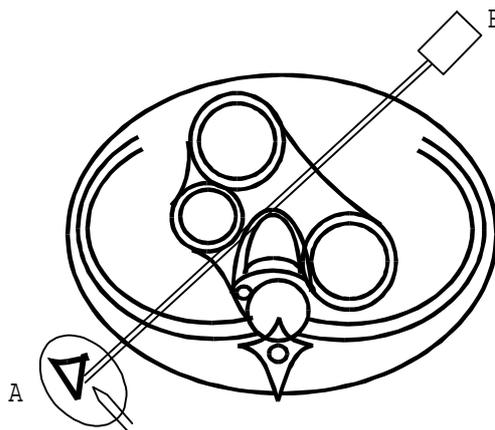


Figure I.4: Principe de la tomodensitométrie

Pour arriver à ce résultat, compte tenu de l'absence de détecteurs en 3 dimensions et de l'impossibilité de couper les patients en tranches, il faut multiplexer l'information c'est à dire qu'un élément de surface du détecteur n'est plus en relation avec un seul élément de l'objet mais avec plusieurs. L'information finale (l'activité dans chaque voxel de l'objet) n'est retrouvée que par un traitement informatique des données, correspondant à une multitude d'acquisitions sous différents angles ayant réalisé un codage en mouvement.

La tomographie a été une des premières réussites des méthodes multiplex. La Figure I.4 illustre ce fait où la mesure correspondant à la ligne de projection AB enregistre une valeur liée à plusieurs voxels

alignés de l'objet. Nous sommes donc en présence d'un multiplex spatial (à 1 dimension). On peut, ici également, calculer l'étendue dans l'espace des phases.

Alors qu'en tomographie axiale transverse, la source est extérieure au patient (elle est de plus de petites dimensions rendant l'efficacité du système excellente. (qq mm² x divergence faible)). À l'opposé la médecine nucléaire travaille avec des sources très étendues (tout le patient), émettant dans toutes les directions. L'espace des phases source, correspond en extension spatiale à tout le patient (170x50x25 cm³) x 4π stéradians.

De nombreux auteurs ont proposé de remplacer le collimateur à trous fins et parallèles par des ouvertures codées. Le mot ouverture codée étant utilisé pour souligner le fait que l'image enregistrée sur le détecteur ne représente pas directement l'objet analysé. Les premiers essais se sont tout naturellement tournés vers l'imagerie de projection, directement inspiré par les travaux de l'optique photonique (plan objet – plan image).. Des réseaux zonés de Fresnel ont été proposés[6].

Puis des codes en mouvement ont également été proposés sans grande augmentation de l'espace des phases. On peut en effet le constater en comparant la plus petite dimension des ouvertures de ces systèmes, donné dans le Tableau I-1 [39, 60, 66, 70, 89, 105, 107, 109].

Nom du système	Auteur année	Diamètre des trous (mm)
7 Pinh. Thyroïde	Van Giessen 1987	4
7 Pinh. Heart	Vogel 1978 Lefree	7
TimeCoded Apert	Koral 1975	3,2
SPRINT	Rogers 1984/ Mountz 1991	3,2
Slat Collimator	Lodge 1996	1,5
Angled Spect	Esser 1984	1,4
Fresnel zone plate	Rogers 1972	1
Collimateur usuel	Notice du constructeur	1,5-2
CACAO	Jeanguillaume 1998	42

Tableau I-1: Comparaison des différents modes de collimation.

Plus récemment, le principe multiplex de la tomographie a été proposé pour réaliser des images de projection à l'aide d'un collimateur à fentes tournantes.[65, 70]. La figure I.5 illustre ce système où un collimateur à fente disposé sur une surface circulaire du détecteur réalise un mouvement de rotation de 180°. Une première transformée de Radon réalise la projection de l'objet située en face du collimateur dans le plan du détecteur. L'ensemble est ensuite tourné autour de l'axe du patient pour réaliser une tomographie à l'aide d'une seconde transformée de Radon. Cette approche est intéressante car elle

élargit, pour la première fois, l'ouverture du collimateur au moins dans une dimension. En effet, bien que les fentes du collimateur ne fassent que 1,5 mm d'épaisseur, le diamètre de la partie tournante du collimateur (Figure I.5) est de 300 mm, donc la plus longue fente a exactement cette longueur.

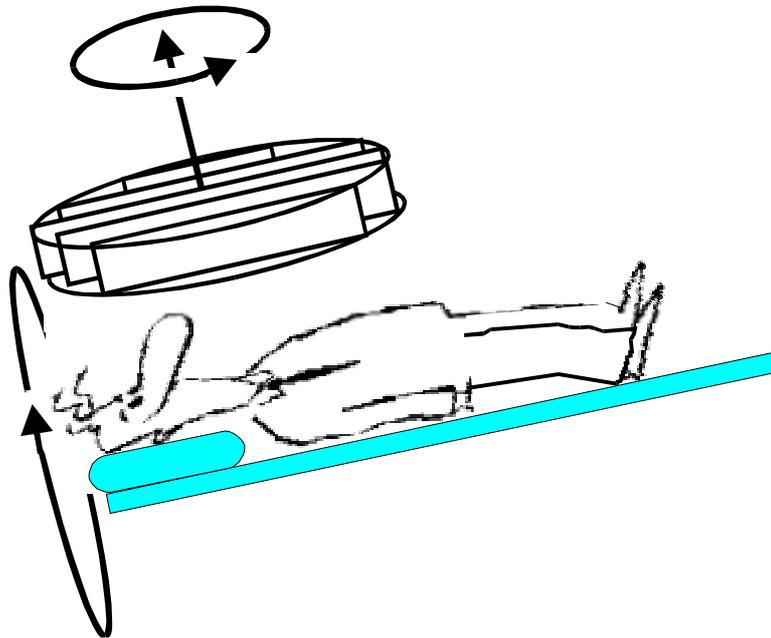


Figure I.5: Collimateur à fentes tournantes

Toutefois, le modèle physique n'est ici que très approché. L'effet de la profondeur finie des cloisons, 40mm dans la réalisation pratique de Lodge, n'est pas pris en compte. Il intervient pourtant deux fois lors des deux reconstructions tomographiques suivant les 2 transformées de Radon. Enfin de l'avis même des auteurs, la non-uniformité de la réponse impulsionnelle (pas d'invariance par translation) limite les résultats du système. L'étude est néanmoins intéressante car pour la première fois, l'association acquisition multiplex + mouvement + reconstruction compense les effets de l'ouverture de la fente dans une de ses dimensions. Le tableau suivant résume les extensions des hyper-surfaces dans les espaces des phases calculés sur les faisceaux arrivant aux détecteurs rencontrés dans ce chapitre.

	Scintigraphe à balayage	Collimateur sténopé	Collimateur trous fins	Collimateur à fentes	CACAO
Dimensions (mm)	Ø15	Ø7	400x540	Ø300	400x540
Surface(mm ²)	1,77x10 ²	2,16x10 ⁵	2,16x10 ⁵	7,07x10 ⁴	2,16x10 ⁵
½Angle d'ouverture(°)	15	30	1,14	1,07x68	11
Angle solide (stéradians)	2,41x10 ⁻¹	8,42 x10 ⁻¹	1,24 x10 ⁻³	1,64 x10 ⁻²	1,15 x10 ⁻¹
Espace Phase (stérds.mm ²)	3,78 x10 ¹	3,24 x10 ¹	2,69 x10 ²	1,16 x10 ³	2,49 x10 ⁴

Tableau I-2: Calculs des paramètres liés à l'espace des phases

Comme on le voit, la tendance évolutive est à l'augmentation de la surface dans cette espace des phases. Quelques remarques sont toutefois utiles pour bien comprendre l'évolution des systèmes. Pour le scintigraphe à balayage, les valeurs de cette surface dans l'espace des phases ne prennent pas en compte le fait que seule une partie du volume de l'objet observé se situe à un instant donné en face du détecteur et le rendement du système doit être divisé par cette fraction de l'objet étudié. En bref, le volume (ou l'hyper-surface) de l'espace des phases au niveau de l'objet serait considérablement réduit pour ce système. Pour tous les autres systèmes, le volume analysé est presque de l'ordre de la surface du champ du détecteur multiplié par l'épaisseur du patient (un peu réduit pour le sténopé dont l'efficacité diminue en s'écartant du centre du champ, et légèrement réduit pour le collimateur à fentes qui nécessite un champ circulaire). La prise en compte de cet effet en calculant un espace des phases au niveau de la source (volume x angle solide) serait plus satisfaisante, mais les calculs seraient également plus complexes.

Les conclusions que l'on peut tirer de ce tableau sont les suivantes :

1. les méthodes multiplex et en premier lieu, la tomographie, permettent d'augmenter le sous-ensemble de l'espace des phases source éclairant un point du détecteur (volume multiplex)
2. Keyes et al ont eut l'idée en appliquant 2 fois la transformée de Radon d'augmenter une dimension des trous de leur collimateur pour agrandir la portion de l'espace des phases vu par le détecteur.

Est-il possible d'augmenter la dimension des ouvertures du collimateur dans les deux dimensions, en tenant compte d'un modèle plus réaliste pour la tomographie d'émission? (prenant mieux en compte la profondeur fini des trous du collimateur). Est-il possible de conserver une réponse impulsionnelle du

système invariant par translation? La transformée de Radon est-elle la seule alternative multiplex pour réaliser des tomographies d'émission? Est elle la mieux adaptée?

Ces questions trouvent leurs réponses dans ce mémoire de thèse en ouvrant la voie à une imagerie d'émission à la sensibilité nettement améliorée, mieux adapté à l'imagerie des plaies contaminées.

II. GÉNÉRALITÉS

L'évolution de l'imagerie médicale a conduit, au cours du temps, à des solutions techniques très variées. L'imagerie tomographique occupe dans ces progrès une place de tout premier rang. Depuis la mise au point du Scanner X par Hounsfield en 1972, des systèmes de plus en plus performants ont été développés pour l'analyse des structures anatomiques ou fonctionnelles du corps humain. Tous ces systèmes fournissent des informations sur les organes à partir des mesures effectuées par l'instrument et traitées par un algorithme de reconstruction adapté. Dans ce chapitre, nous exposons les méthodes tomographiques les plus employées en imagerie X et gamma. Nous décrivons aussi les éléments importants constituant la gamma caméra. En suite, nous abordons les algorithmes de reconstruction tomographique utilisés en imagerie médicale. Enfin, nous dégagons les sources de bruit et les artefacts influençant les images reconstruites.

II.1. L'état de l'art

II.1.1. Les techniques d'imagerie tomographique X et γ en médecine

L'imagerie médicale cherche à visualiser l'intérieur d'un organe par une cartographie qui trace les caractéristiques biologiques et physiques du corps humain. Le procédé qui permet de réaliser cette opération est la tomographie (du grec: tome = section et graphein= décrite). Cette technique a révolutionné l'imagerie médicale depuis son application aux diagnostics radiologiques en tomodensitométrie X en 1972 par Cormack et Hounsfield. Depuis, d'autres méthodes ont été développées pour étudier des structures anatomiques ou fonctionnelles du corps humain.

II.1.2. La tomographie par transmission X ou tomodensitométrie

La Tomographie par transmission X appelée aussi tomodensitométrie mesure l'atténuation par les tissus humains, des rayons X émis par une source externe, l'image obtenue présente des coupes morphologiques ou anatomiques du corps humain.

Le système de tomodensitométrie comprend une source de rayons X, un collimateur pour délimiter le faisceau des photons émis et un détecteur. L'ensemble du système est animé d'un mouvement de translation parallèle à l'axe de rotation au long du corps humain et un mouvement de rotation de l'ensemble source détecteur (voir Figure II.1).

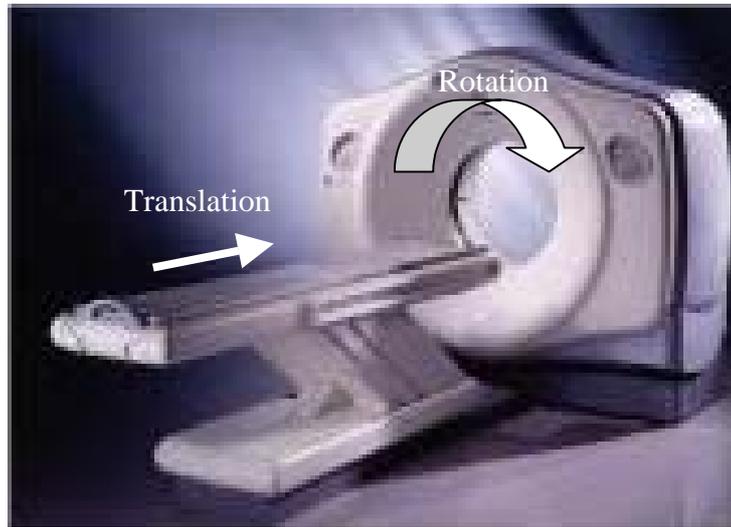


Figure II.1: Caméra de tomodensitométrie X.

II.1.3. Tomographie d'émission monophotonique ou SPECT

La tomographie d'émission monophotonique appelée système SPECT, pour "Single Photon Emission Computed Tomography" consiste à déterminer la concentration des molécules biologiquement associée à un traceur radioactif qui a été injecté dans le patient. L'isotope le plus souvent employé comme traceur radioactif est le technetium-99, qui émet des photons gamma d'énergie 140 KeV avec une demi-vie de 6 heures.

Le système d'acquisition comprend un collimateur en plomb percé de trous parallèles, et un détecteur de rayon gamma, qui est souvent de type Anger [1, 2]. Le système SPECT effectue des acquisitions tomographiques par rotation de la tête détectrice de 360° autour du patient. La Figure II.2 montre une photo d'un ensemble de tomographie d'émission monophotonique.

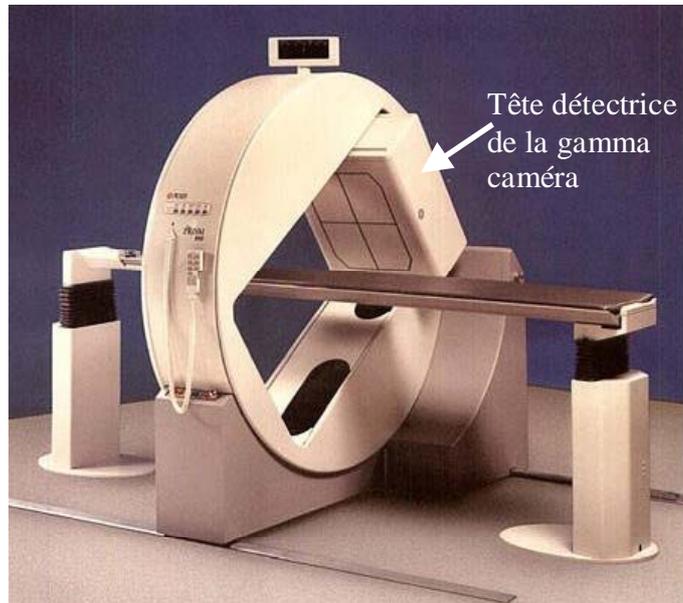


Figure II.2: Caméra SPECT

Il est important de noter que les images des radio-isotopes obtenues avec ce système ne sont pas des images anatomiques, leur résolution est de l'ordre du centimètre, alors que les images obtenues par le système CT sont résolues à moins de un millimètre. Malgré cela, les informations qui peuvent être déduites sont irremplaçables pour de nombreux diagnostics.

II.1.4. Tomographie par émission de positrons ou PET

Le système PET (Positron Emission Tomography) utilise des isotopes émetteurs de positrons, à demi-vie courte comme l'Oxygène-15, le Carbone-11, l'Azote-13 ou le Fluor-18. Le principe de ce système consiste à détecter en coïncidence, les 2 photons d'annihilation produits par la rencontre du positron émis par le radio élément avec un des électrons des tissus ayant fixé le radio élément. Ces 2 photons de 511 KeV sont émis en opposition ce qui permet d'obtenir une information directionnelle sans utiliser de collimateur (voir Figure II.3) .

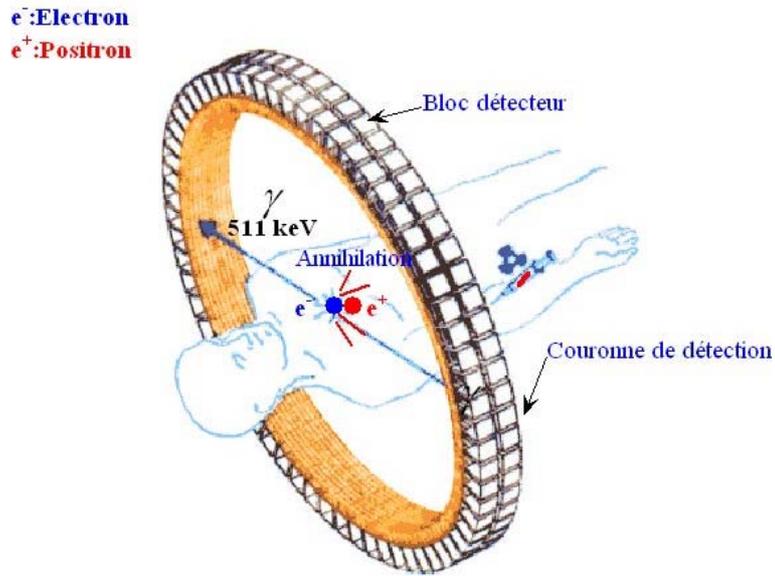


Figure II.3: Principe du système PET

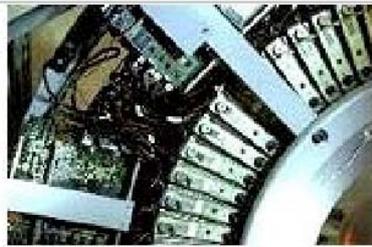
Il existe de nombreuses configurations de détecteurs qui permettent de compter les photons d'annihilation. La géométrie la plus populaire est un anneau circulaire fixe de détecteurs discrets, chacun travaillant en coïncidence avec plusieurs détecteurs opposés, la Figure II.4 montre une caméra à positrons avec ses caractéristiques techniques, ainsi que les détails du détecteur où l'on peut clairement distinguer leur disposition en anneau.

Caméra à positon enregistre les "désintégrations" de l'isotope injecté au patient



Caméra HR SIEMENS

- 32 couronnes de 576 cristaux
- 63 plans reconstruits
- Acquisition 2D/3D
- Résolution transverse : 4,5 mm
- Résolution axiale : 3,6 mm



Détail des détecteurs



Anneau d'acquisition supportant la couronne de détecteurs

Figure II.4: Caméra PET

II.2. La gamma caméra ou caméra d'Anger

II.2.1. Vue d'ensemble

La gamma caméra ou caméra d'Anger a été développée par Hal Anger [2]. La première caméra industrielle fut conçue par Nuclear Chicago (maintenant Siemens Médical) en 1962 et utilisée en pratique ordinaire dans les hôpitaux aux milieux des années 60. Le principe est basé sur l'utilisation d'un collimateur en plomb qui sélectionne les photons de direction perpendiculaire à la tête détectrice de la gamma caméra, un cristal scintillateur monobloc en NaI couplé à un ensemble de photomultiplicateurs (PM). La somme des signaux convertis par les PM fournit l'énergie des photons gamma émis par le patient. La localisation est donnée par codage de barycentre sur les réponses des photomultiplicateurs. Pour chaque photon interagissant avec le détecteur on obtient donc des coordonnées de localisation et une valeur de l'énergie cédée ou perdue dans le cristal. Une analyse d'amplitude permet de ne retenir que les photons possédant l'énergie caractéristique du radioélément injecté (par exemple 140 KeV pour le Tc^{99m}) et ayant perdu toute leur énergie dans le cristal. La Figure II.5 illustre les principaux éléments de la gamma caméra, ainsi que les étapes parcourues par un photon gamma de la détection à la visualisation.

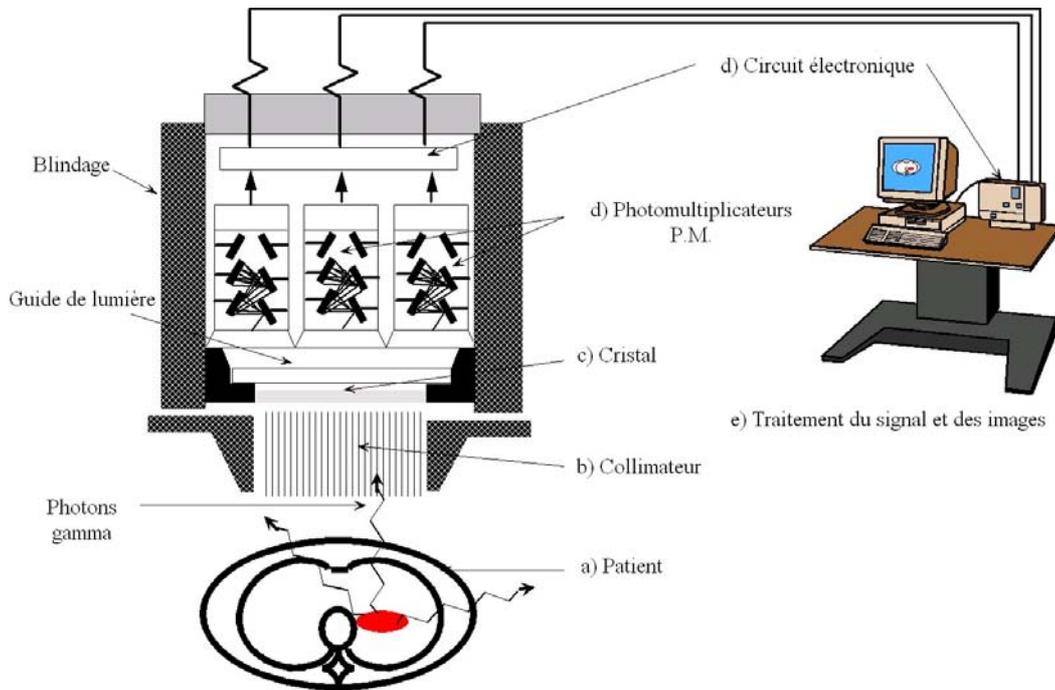


Figure II.5: schéma de principe de la caméra d'Anger: (a) émission des rayons γ par le patient. (b) limitation aux seuls rayons colinéaires par un collimateur (c) conversion, par un cristal scintillateur, de l'énergie gamma en rayonnement visible. (d) conversion de l'énergie lumineuse en énergie électrique et amplification par les photomultiplicateurs. (e) circuit électronique. (f) digitalisation, traitements et visualisation

II.2.2. Le collimateur

On utilise un matériel absorbant pour la fabrication des collimateurs, habituellement le plomb, dans lequel un ou plusieurs trous parallèles ou inclinés sont percés suivant un système d'axes déterminé. L'utilisation d'un collimateur permet de privilégier une direction qui correspond à la projection de la distribution de la radioactivité sur le cristal détecteur, la plus courante étant la perpendiculaire au cristal. Les photons γ dont le parcours n'emprunte pas ces directions sont absorbés par le collimateur avant d'atteindre le cristal. La cloison séparant deux trous voisins est appelée "septum". L'épaisseur de plomb est calculée pour entraîner une atténuation d'au moins 95% de l'énergie des photons traversant les septas. Le premier prototype de collimation pour la camera d'Anger était de géométrie "pinhole" (sténopé) [1]. Le collimateur "pinhole" est employé cliniquement pour l'imagerie des petites surfaces comme la thyroïde où un agrandissement important peut être réalisé. Pour des organes de dimensions larges, le collimateur à trous parallèles est plus souvent utilisé. D'autres géométries sont également disponibles pour des applications spécifiques [25], à titre d'exemple, les collimateurs convergents, divergents ou encore en éventail "Fanbeam". La Figure II.6 montre quelques exemples de géométries[99].

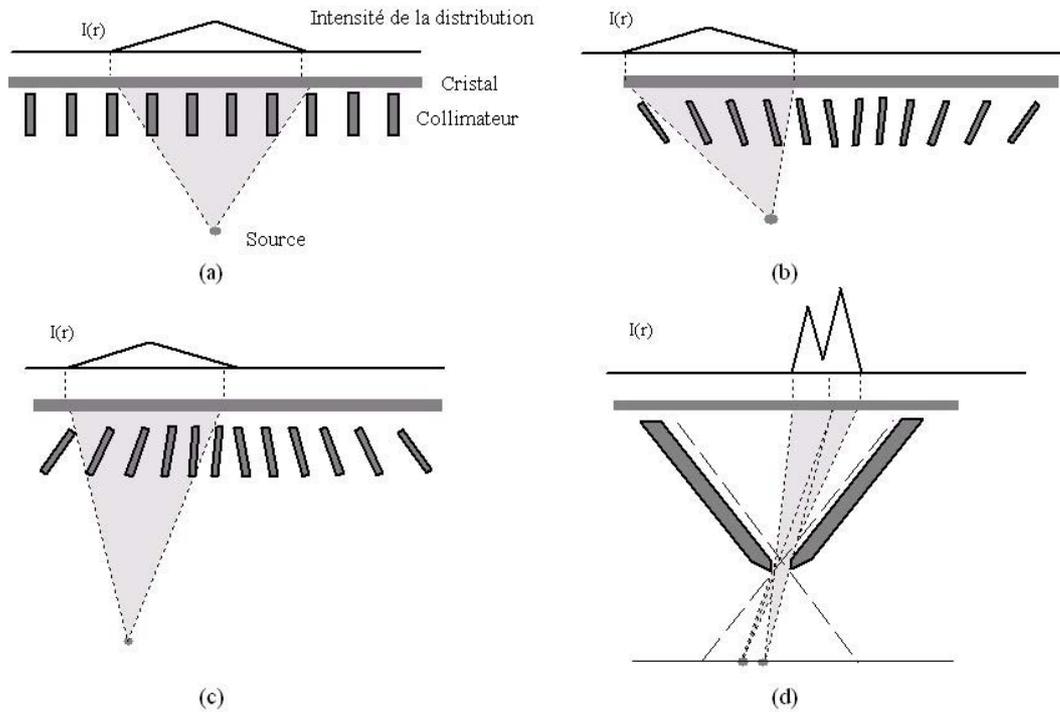


Figure II.6: Différents types de collimation pour la gamma caméra: (a) collimateur à trous parallèles. (b) collimateur à trous convergents. (c) collimateur à trous divergents. (d) collimateur pinhole (sténopé)

II.2.3. Le scintillateur

Un scintillateur est constitué d'un matériel qui émet des photons lumineux basse-énergie quand il absorbe des rayons X ou Gamma de haute énergie. Ces scintillateurs sont le plus souvent des cristaux semi-conducteurs ou isolants.

Dans un cristal pur, les états d'énergie des électrons faiblement liés sont déterminés par la structure du cristal. Les états d'énergie admissibles se répartissent en une structure de bande. Il y a deux bandes d'énergie continues: la bande de la valence et la bande la conduction, ces bandes sont séparées par un gap d'énergie interdit (voir Figure II.7). Quand l'électron dans la bande d'énergie basse absorbe assez d'énergie, il est excité dans la bande d'énergie supérieure. Lorsqu'il se désexcite, il retourne à la bande d'énergie inférieure, en dissipant une énergie égale à la largeur du gap d'énergie interdit. Cette énergie peut être dissipée de plusieurs manières (phonons, plasmons, photons). Si la différence d'énergie coïncide avec la gamme de lumière visible, le matériel est un scintillateur. Pour améliorer au plus cette caractéristique, on peut ajouter un dopant dans le cristal, par exemple du Thallium pour les cristaux d'iodure de sodium NaI.

La gamma caméra utilise le cristal scintillant de NaI dopé au thallium. La masse volumique du NaI est de $3,67 \text{ g/cm}^3$, son nombre atomique égal à 50. Son temps de scintillation est de 230 ns et le maximum

d'émission de lumière se situe à 415 nm. Son indice de réfraction est de 1,85; il est transparent à sa propre lumière et environ 30% de celle-ci est transmise à la chaîne de détection. La résolution en énergie peut atteindre 7 à 8% pour des photons de 1 MeV. L'efficacité de détection des rayons γ est assez importante, de l'ordre de 40 photons/KeV: un photon d'énergie 100 KeV cédant toute son énergie dans le cristal entraînera la création d'environ 4000 photons lumineux visibles. Ces photons seront collectés par le photomultiplicateur.

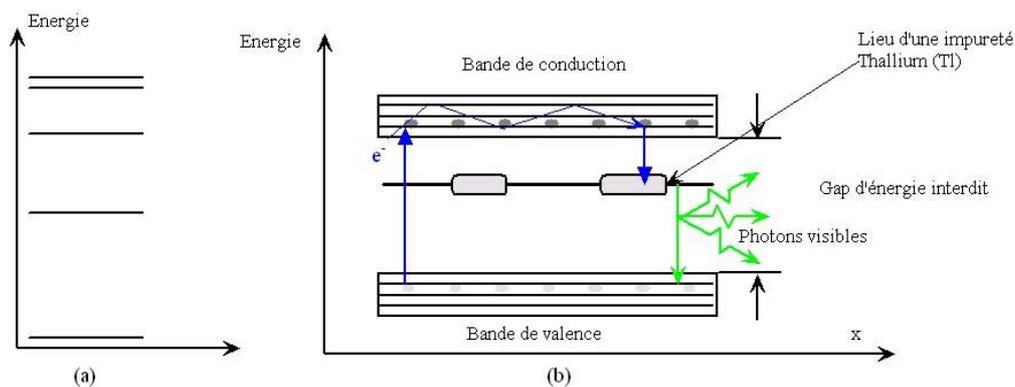


Figure II.7: Principe d'un cristal scintillant: (a) niveau d'énergie d'un atome. (b) les niveaux d'énergie pour chaque étape de la conversion des photons gamma en photons lumineux

II.2.4. Les photomultiplicateurs

Un photomultiplicateur consiste en un tube transparent avec une couche photoémissive (appelé photocathode) et une série d'électrodes connus sous le nom de dynodes. Dans une photocathode, les photons de scintillation libèrent les électrons qui sont accélérés par une différence de tension vers la première dynode rencontrée. L'énergie prise par les électrons est suffisante pour libérer des électrons additionnels quand ils heurtent la dynode. Ces électrons sont accélérés vers la dynode suivante et le processus est répété jusqu'à la dernière dynode (voir Figure II.8). Ainsi, l'amplitude des impulsions dépend de la tension appliquée au dynodes, de leur nombre et du nombre initial d'électrons libérés par la photocathode. Une amplification d'un facteur 10^{10} est couramment utilisé, il permet de détecter des photons de faible énergie (60KeV).

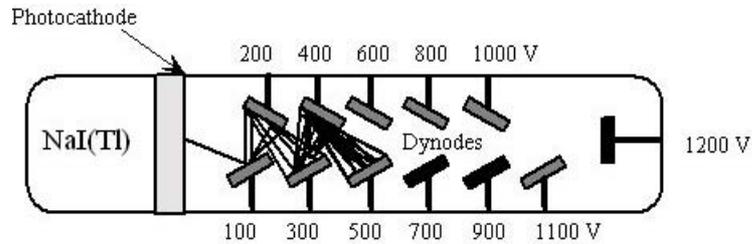


Figure II.8: Schéma du principe d'un photomultiplicateur

II.2.5. L'électronique

L'impulsion électronique produite par les photomultiplicateurs doit avoir assez de puissance pour transmettre sur le câble coaxial les informations aux autres procédés électroniques. Le dispositif électronique se compose des préamplificateurs, des amplificateurs et Analyseur d'amplitude (Figure II.9). Le signal de sortie du PM sera donc amplifié et ajusté. Une analyse numérique permet d'obtenir un spectre (nombre de photons détectés en fonction de leur énergie) caractéristique du rayonnement détecté. Les impulsions sélectionnées par l'analyseur d'amplitude sont dirigées sur une échelle de comptage comportant un intégrateur du temps qui délivre alors un taux de comptage en impulsions par seconde (ips) ou en coups/seconde (cps). A partir du comptage des photons détectés dans une fenêtre d'énergie choisi, il est possible de visualiser la répartition des sources émettrices de rayons γ .

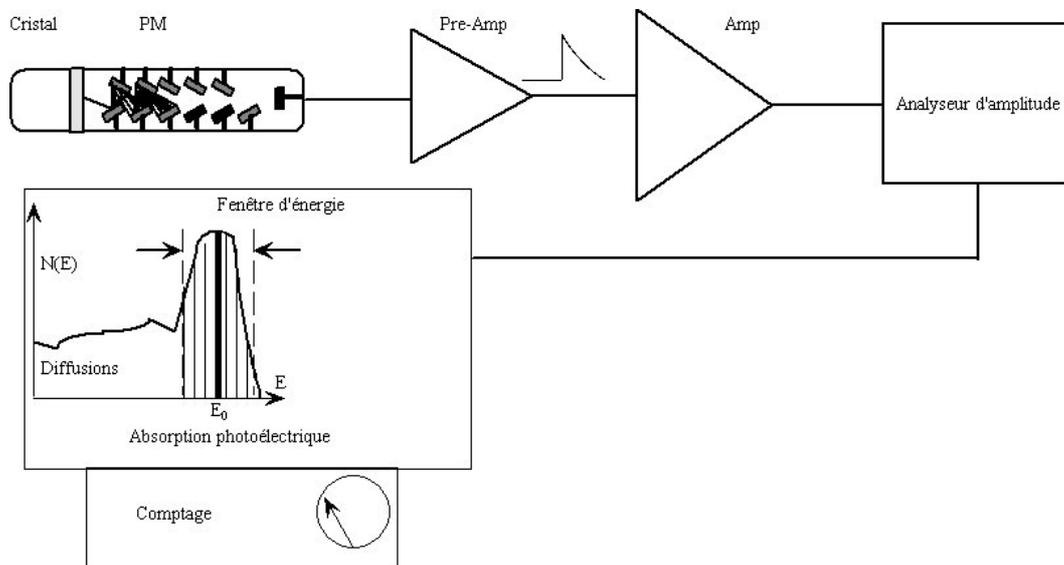


Figure II.9: électronique associée à la gamma caméra

II.2.6. Le statif

La tête de la gamma caméra est fixée sur un support mécanique appelé "statif" permettant sa mobilité autour du patient. Il comprend l'anneau au centre duquel passe le malade. Le plateau de table est commandé dans ses déplacements longitudinaux, il est asservi au pupitre de commande et au

calculateur. Ces déplacements doivent être d'une très grande précision en distance et en temps. La Figure II.10 montre un exemple d'un tel système. Le patient est presque toujours placé sur une table d'examen, notamment pour réaliser des scintigraphies corporelles totales. Pour ce dernier examen, la table et la caméra présentent un mouvement relatif de balayage.

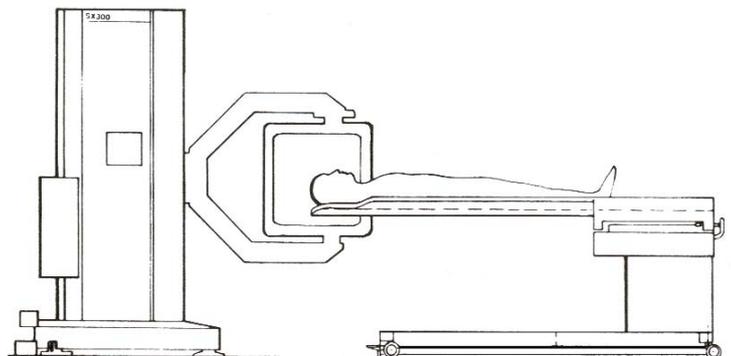


Figure II.10: représentation du statif

II.3. Performances des gamma caméras

Les images reconstruites à partir des signaux fournis par la gamma caméra sont imparfaites. Ces imperfections sont principalement dues au collimateur, mais aussi au détecteur et à l'électronique associée. Dans ce paragraphe, nous allons définir les caractéristiques et les performances des gamma caméras de type Anger équipé d'un collimateur à trous parallèles, la Figure II.11 présente les notations de la géométrie utilisées.

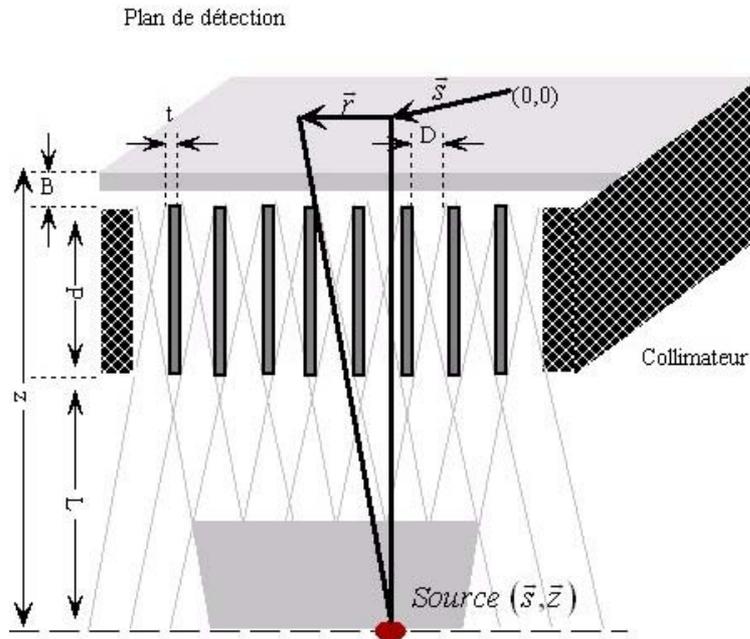


Figure II.11: Géométrie du collimateur à trous parallèles.

II.3.1. Sensibilité et résolution

II.3.1.1 La résolution spatiale

La résolution spatiale de l'ensemble collimateur détecteur est définie par deux paramètres: la résolution intrinsèque et la résolution extrinsèque:

La résolution intrinsèque:

Est définie par l'écart minimal entre deux photons détectés par le cristal. Elle correspond à la précision de la localisation du cristal et de son électronique. Elle est mesurée par la largeur à mi-hauteur FWHM de la fonction de dispersion linéique fournie par une source linéaire de largeur 1 mm. Elle est de l'ordre, pour les cristaux standard, de 3 à 4 mm [74].

La résolution extrinsèque ou résolution du collimateur:

Correspond à la résolution géométrique de l'ensemble collimateur-détecteur, elle est donnée par la relation suivante:

$$r_c = \frac{D(P + L + B)}{P} \quad \text{[II.1]}$$

B est généralement négligeable nous retiendrons dans la suite la formule suivante:

$$r_c = \frac{D(P+L)}{P} = \alpha(P+L) \quad [\text{II.2}]$$

Donc la résolution géométrique du collimateur est proportionnelle à $\alpha (= \frac{D}{P})$ [50].

La résolution du système:

La résolution r_s (du système ou utile) de l'ensemble collimateur/détecteur est donnée par:

$$r_s = \sqrt{r_i^2 + r_c^2} \quad [\text{II.3}]$$

La résolution extrinsèque à la surface (distance source collimateur $L=0$ mm) d'un collimateur LEHR (low-energy-high-resolution) de profondeur $P=50$ mm avec des trous de diamètre $D=2$ mm, séparés par des septa d'épaisseur $t=0,2$ mm, utilisé avec un détecteur dont la résolution intrinsèque est de 3mm. Cette résolution est comprise entre 8 et 12 mm si la source est à une distance $L=100$ mm (la distance standard entre source/collimateur) et la résolution du système est supérieure à 10 mm si $L=200$ mm. Ce phénomène est particulièrement gênant pour l'observation des organes profonds, comme le pancréas, le foie, le tube digestif ou l'examen de patients obèses.

II.3.1.2 La sensibilité

La sensibilité est définie par le rapport du nombre de photons γ incidents effectivement détectés par l'ensemble du détecteur sur le nombre de photons gamma émis par la source radioactive:

$$\text{Sensibilité} = \xi = \frac{[\text{Nombre de photons détectés}]}{[\text{Nombre de photons émis}]} \quad [\text{II.4}]$$

Pour des sources étendues, la largeur du champ de la caméra est également une caractéristique intéressante à étudier conjointement avec la sensibilité. Par exemple le collimateur convergent augmente la sensibilité, mais réduit le champ de la caméra.

II.3.1.3 Relation entre la sensibilité et la résolution: Compromis résolution-sensibilité:

La valeur moyenne de la sensibilité géométrique du collimateur est donnée par la formule simplifiée suivante [94, 109]:

$$\langle \xi \rangle \approx K^2 \left(\frac{D}{P} \right)^2 \left(\frac{D}{(D+t)} \right)^2 \quad [\text{II.5}]$$

Où K est un coefficient dépendant de la géométrie des trous (par exemple K=0,28 pour des trous rectangulaires). Le développement de cette formule est élémentaire, il se base sur la notion des flux et sur la probabilité que des photons traversent le collimateur [50]. Dans l'équation [II.5], le premier terme après K est proportionnel à l'angle solide d'acceptance du collimateur et le deuxième terme représente le rapport : surface utile du collimateur sur sa surface totale. Le compromis résolution-sensibilité très pénalisant pour les gamma caméras est donc gouverné par le rapport $\alpha (= \frac{D}{P})$.

La Figure II.12 montre sur un même graphe la sensibilité et la résolution de plusieurs gamma caméras commerciales couplées à divers collimateurs, la sensibilité est exprimé ici sans dimensions puisqu'il s'agit du rapport entre le nombre de photons détectés et le nombre de photons émis.

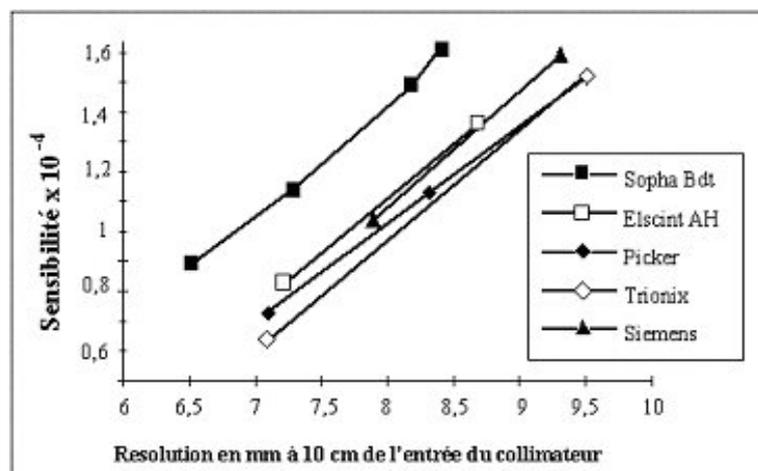


Figure II.12: Sensibilités et résolutions

Chaque ensemble (caméra + collimateur) est représenté par un point sur le graphe. On constate que la résolution et la sensibilité évoluent en sens inverse, c'est la raison pour laquelle on parle de compromis résolution-sensibilité. La meilleure résolution sera obtenue avec une mauvaise sensibilité et inversement. Il faut donc choisir le meilleur compromis pour une application donnée.

- L'application des équations [II.5] et [II.1] à des collimateurs usuels donne les résultats suivants :

	LEHR	LEAP
Profondeur P (mm)	50	22
Diamètre - section D (mm)	2	1.4
Épaisseur paroi t (mm)	0.2	0.15
$\partial d/\partial L \big _{L \rightarrow \infty}$	0.04	0.064
Résolution (mm à 10 cm)	6.7	8.3
Sensibilité	$0.89 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$

Tableau II-1: Comparaison résolution et sensibilité

Les données de deux types de collimateur sont présentées :

- LEHR = Basse énergie Haute résolution (Low energy high resolution)
- LEAP = Basse énergie tout usage (Low energy all purpose)
- $\partial d/\partial L \big|_{L \rightarrow \infty}$ mesure la perte de résolution avec la profondeur.

Ce tableau permet de fixer quelques ordres de grandeur. La résolution intrinsèque du détecteur est de l'ordre de 3 à 4 mm. La faible sensibilité des gamma caméras annoncée dans l'introduction est bien de l'ordre de 10^{-4} , la résolution utile d'une gamma caméra n'est pas meilleure que 7 à 8 mm! (comparé à la résolution millimétrique du Scanner X ou de l'IRM). Même au contact, le collimateur diminue la résolution du détecteur et ceci est dû à l'utilisation de trous plus petits que la résolution intrinsèque du détecteur et à l'isotropie de la résolution. En effet pour des trous de tailles équivalentes à la résolution, placés en face d'un détecteur à pixels, cette diminution de la résolution n'existerait pas. A une certaine distance du collimateur, la situation est pire, comme le montrent les équations [II.2] et [II.5]. La résolution du système se dégrade proportionnellement à D/P , on peut s'en convaincre en calculant la dérivée par rapport à L de cette résolution d . ($\partial d/\partial L \big|_{L \rightarrow \infty}$). Plus la valeur de cette dérivée est grande, plus la résolution se dégrade vite avec l'éloignement du détecteur.

Autre remarque importante un gain de 15% sur la résolution intrinsèque du détecteur augmenterait la résolution de système seulement de 1,5% [74]. Cette valeur aisément calculable avec les formules données, souligne bien l'importance de l'étranglement produit par le collimateur dans l'imagerie gamma. Elle explique aussi le peu d'enthousiasme qui règne actuellement chez les constructeurs de gamma caméras pour augmenter la résolution intrinsèque des détecteurs classiques.

II.3.2. Les autres performances du détecteur

La résolution en énergie: Elle est définie par le rapport de la largeur à mi hauteur du pic d'absorption totale à la valeur de l'énergie du rayonnement incident ($\Delta E/E$). Elle est dirigée par les fluctuations statistiques sur la détermination de l'absorption par effet photo-électrique des photons incidents dans le volume de détecteur.

Taux de comptage: Du fait de la durée finie de l'impulsion lumineuse émise par le cristal scintillateur (320 ns) et du caractère global de la mise en forme des impulsions électriques de détection, les performances de la gamma caméra se dégradent avec le taux de comptage. La possibilité de détecter une somme d'impulsions correspondant à deux interactions gamma est un phénomène parasite qui diminue en particulier la résolution spatiale du détecteur. Ces événements ne sont éliminés que partiellement par le circuit dit d'anti-empilements.

La linéarité spatiale: C'est l'aptitude à reproduire sans déformations une source linéaire. Les variations d'uniformité influencent directement le mécanisme de localisation et dégradent ainsi la linéarité. Là encore de gros progrès ont été amenés par la digitalisation des signaux électroniques des gamma caméras.

Uniformité: Elle est établie par l'étude de la réponse de la gamma caméra à une source étendue et homogène, placée contre le collimateur. Plusieurs facteurs contribuent à dégrader cette uniformité. Les variations de collection des photons émis par le scintillateur entre le centre et la périphérie des photomultiplicateurs en sont un exemple. L'uniformité n'est pas meilleure que quelques pour cent. L'apparition des gamma caméras digitales dans lesquelles les signaux électriques sont numérisés, a toutefois permis d'améliorer cette uniformité par l'application d'une matrice de corrections.

II.3.3. Les modes d'acquisitions

La gamma caméra peut effectuer des acquisitions selon deux modes: le mode planaire et le mode tomographique.

Une acquisition simple en mode planaire nous permet d'obtenir la projection plane de la densité des sources radioactives présentes (Figure II.13-a).

Le mode d'acquisition tomographique permet la visualisation de l'objet en coupe, comme cela est illustré sur la (Figure II.13-b). Cette coupe est reconstruite à partir d'acquisitions en mode planaire réalisées sous différents angles de vue.

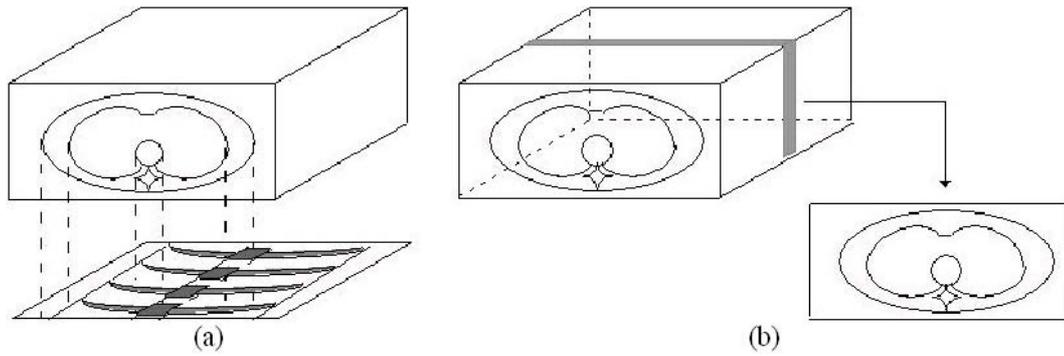


Figure II.13: Mode d'acquisition: (a) mode planaire. (b) mode tomographique

Une acquisition tomographique avec une gamma caméra d'Anger se compose d'une succession d'acquisition en mode de projection planaire. Cette étape n'est pas obligatoire, comme nous le verrons avec le Système CACAO.

II.3.4. Les limites de la caméra d'Anger

L'évolution technologique a permis une progression sensible des performances de la gamma caméra. Toutes les gamma caméras modernes visent à trouver un optimum entre résolution spatiale, sensibilité, résolution en énergie et capacité de comptage. Cependant on peut considérer aujourd'hui que la caméra d'Anger est arrivée à ses limites physiques [79].

Du coté des performances, une nouvelle génération de détecteurs semi-conducteurs de haute résolution spatiale autorise une précision de détection de l'ordre de 1 mm pour le CdTe (Tellure de Cadmium) [5] [52, 78, 79]. Pour suivre cette nouvelle technologie, une restructuration de la caméra d'Anger est certainement nécessaire.

II.4. Les méthodes de reconstruction tomographique

II.4.1. La transformée de Radon

II.4.1.1 Le modèle physique

La transformée de Radon d'une fonction $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, est définie par l'expression:

$$\mathfrak{R}f = \tilde{f}(\alpha, p) = \int_{l_{\alpha,p}} f(x) ds \quad [\text{II.6}]$$

Où $\alpha \in \mathcal{S}^{n-1}$, \mathcal{S}^{n-1} est la sphère unité dans \mathbb{R}^n , $p \in \mathbb{R}$, $l_{\alpha,p} = \{x \in \mathbb{R}^n / \alpha \cdot x = p\}$ est une équation d'un plan et ds est une mesure de Lebesgue dans ce plan. On suppose ici que la fonction $f(x)$ est intégrable sur les hyperplans de \mathbb{R}^n .

La reconstruction de $f(x)$ à partir de ses intégrales sur des hyperplans de \mathbb{R}^n figure parmi les premiers problèmes posés par la théorie de la géométrie intégrale. Dans le cas de $n=2$, ce problème a été posé et résolu par le mathématicien Radon en 1917 [86]. Dans le cas d'une dimension supérieure, cette transformée est appelé "X-ray transform".

Ce n'est qu'au début des années soixante dix que les applications en physique de la transformée de Radon se sont concrétisées. Une grande bibliographie pour ses applications en médecine, astronomie, microscopie, géophysique et autres applications sont présentées dans plusieurs références[7, 75].

En imagerie médicale, l'application de cette théorie a eu un impact technologique très important. Plusieurs auteurs ont contribué à l'avènement de l'imagerie par la tomographie [76] [27] [67]. Parmi les découvertes issues de ces travaux: la tomographie par transmission des raies X, la tomographie d'émission ou encore la tomographie par émission de positrons.

Le modèle physique de la propagation des photons X ou γ à travers un milieu peut être formulé par l'équation du transport. En effet, considérons un faisceau de particules se propageant dans un milieu (un objet: fluide ou solide). Supposons que la vitesse des particules est constante et égale à v , et négligeons toutes collisions entre les particules qui peuvent provoquer des effets d'absorption ou de dispersion.

Soit $\psi = \psi_t(x) = \psi(x, t)$ la densité des particules définie à partir de leur position spatiale x à l'instant t . Alors, l'équation de transport est donnée par la forme différentielle de conservation des lois de comportement des particules:

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + v \cdot \nabla \psi = -|v| \sigma(x) \psi + q(x, t) \quad [\text{II.7}]$$

Où $q(x, t)$ est le terme source, et $\sigma(x, t)$ est la probabilité de l'absorption des particules au point (x, t) .

Soient $v = |v|\alpha$, $h = \frac{q}{|v|}$ et $L = \{x / x = x_0 + s\alpha\}$, alors les particules caractérisées par leur position spatiale x se propageant le long de la ligne L (ligne entre x_0 et x).

Pour le cas où ψ est stationnaire, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ et $|v| = \text{const} > 0$, l'équation [II.7] s'écrit:

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial s} = -\sigma(x)\psi + h(x), \quad x \in L \quad \text{[II.8]}$$

A partir de cette équation, nous pouvons déduire la modélisation de plusieurs techniques de tomographie médicale:

Tomographie par transmission X:

Dans ce cas, on considère $\psi = I$, où I est l'intensité recueillie en un élément détecteur; $\sigma = \mu$ le coefficient d'atténuation des raies X et puisque l'objet ne contient aucune source radiative, on peut supposer que le terme h est nul ($h = 0$).

L'équation [II.8] s'écrit comme suit:

$$\frac{\partial I(x)}{\partial s} = -f(x)I(x), \quad x \in L \quad \text{[II.9]}$$

en intégrant cette égalité le long de la ligne L , on trouve le modèle de l'acquisition en tomographie par transmission X:

$$\frac{I}{I_0} = \exp\left(-\int_L f(x)dx\right) \quad \text{[II.10]}$$

Où I_0 est l'intensité des raies X avant la pénétration dans le corps et I est l'intensité après la transmission des mêmes raies (voir Figure II.14). Cette équation peut être écrite sous la forme:

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\int_L f(x)dx = g(x_0, \alpha) = \tilde{f}(\alpha^\perp, x_0 \cdot \alpha^\perp) \quad \text{[II.11]}$$

ou $\alpha \cdot \alpha^\perp = 0$

La quantité $\ln \frac{I}{I_0}$ donne la transformée de Radon de f pour le cas $n=2$.

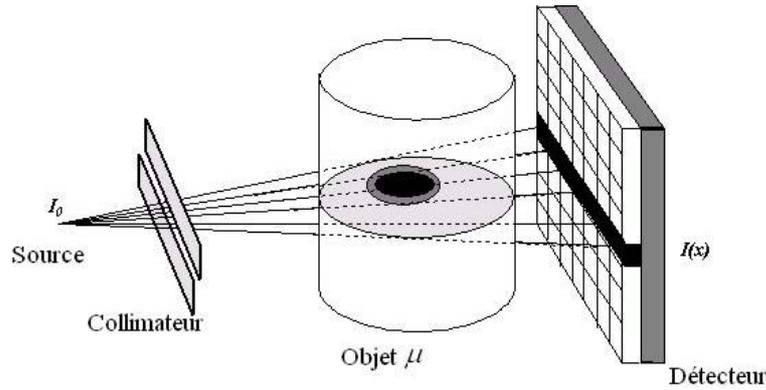


Figure II.14: Acquisition en tomographie par transmission X

tomographie d'émission mono photonique "SPECT":

Le système SPECT est aussi basé sur le modèle de l'équation [II.8]. En effet, le traceur injecté dans le corps émet des photons vers l'extérieur de l'organe. On suppose donc que chaque voxel (élément de volume) émet des particules tel que $h(x)ds$ représente le nombre des particules émises dans ce volume radioactif. Alors, l'équation [II.8] définie sur la ligne rectiligne L , représente une équation différentielle linéaire.

En supposant une collimation parfaite (trous du collimateur infiniment fins et profonds) et en tenant compte de l'auto-absorption subie par les photons émis, la solution de l'équation différentielle s'écrit:

$$I(L) = \int_L h(x) \exp\left(-\int_{L(x)} \sigma(y) dy\right) dx \quad [\text{II.12}]$$

Où $L(x)$ est le segment inclus dans L , il représente la distance entre le point x et le détecteur. En dimension deux ($n=2$) la formule [II.12] est appelée transformée de Radon atténuée.

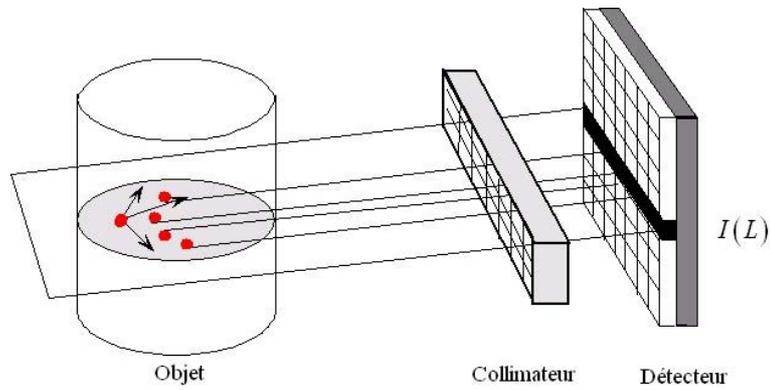


Figure II.15: Acquisition en tomographie d'émission mono photonique SPECT.

Le problème ici est de trouver la distribution h sachant que le coefficient d'absorption σ et l'intensité des raies $I(L)$ sont connus. Notons que l'atténuation des photons σ est généralement négligée dans la plupart des applications.

Tomographie d'émission de positron "PET" :

En PET, les sources émettent simultanément des photons dans deux directions opposées (voir Figure II.16) . Le terme exponentiel dans la formule [II.12] peut être remplacé par $\exp\left(-\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(y) dy\right)$. Le modèle physique en PET le long du segment L s'écrit:

$$\int_L h(x) dx = I(L) \exp\left(\int_L \sigma(y) dy\right) \quad \text{[II.13]}$$

Si le coefficient d'absorption σ est connu dans le segment L , alors l'équation [II.13] est la transformée de Radon de h .

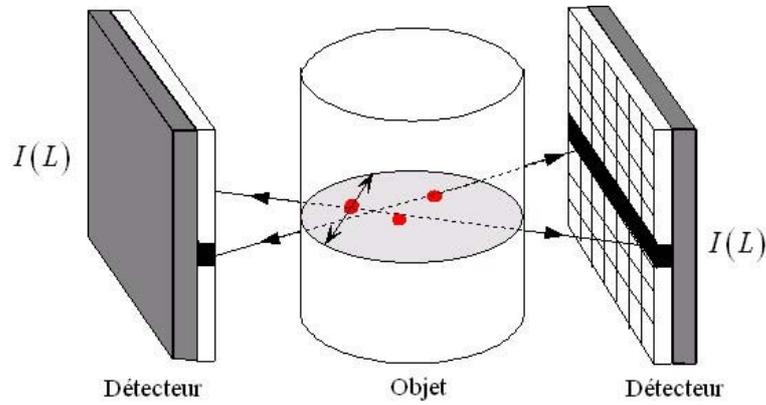


Figure II.16: Acquisition en tomographie d'émission à positron PET.

II.4.1.2 Reconstruction: Transformée de Radon inverse

Dans ce paragraphe, nous allons étudier la reconstruction à partir des acquisitions tomographiques du modèle de l'équation intégrale [II.6]. On prend le cas de la tomographie par transmission X comme exemple d'étude.

La coupe du corps étudié est une fonction bidimensionnelle $f(x, y)$ (voir Figure II.17). Sa projection selon l'angle θ est définie par:

$$g(t, \theta) = P_{\theta}(t) = \int_L f(x, y) ds \quad [\text{II.14}]$$

L'équation de la ligne intégrale L est:

$$\begin{aligned} L = l_{\omega, t} &= \left\{ (x, y) / (x, y) \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = t \right\} \\ &= \{ (x, y) / x \cos\theta + y \sin\theta = t \} \end{aligned}$$

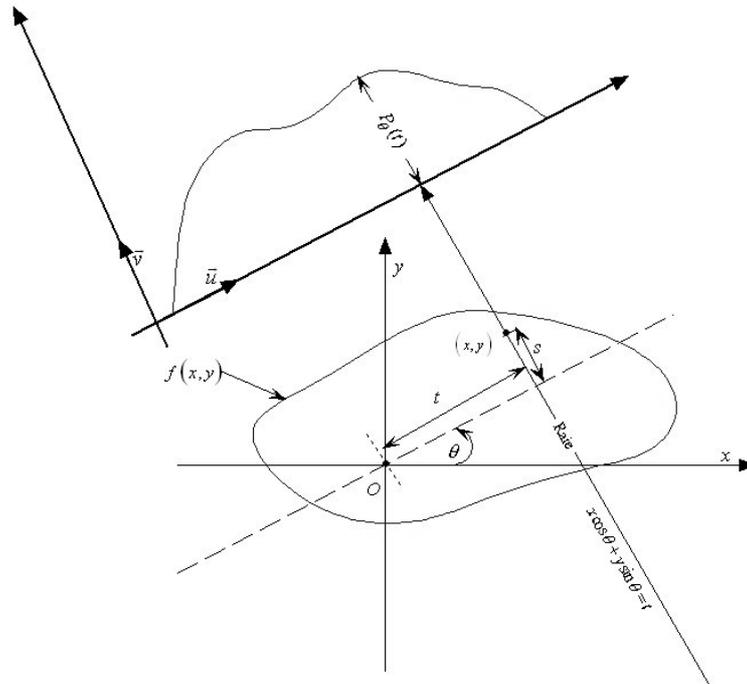


Figure II.17: Représentation de la distribution f et sa projection $P_\theta(t)$ à l'angle θ .

En utilisant la fonction delta, l'équation de la projection peut être mise sous la forme:

$$g(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \quad [\text{II.15}]$$

La transformée de Radon $f \rightarrow P_\theta(t) = g(t, \theta)$ relie le domaine réel (x, y) au plan (t, θ) encore appelé sinogramme. La valeur $g(t, \theta)$ est appelée rayon somme, puisqu'elle représente la somme de $f(x, y)$ selon un rayon écarté d'une distance t et tourné d'un angle θ .

Dans le repère (\vec{u}, \vec{v}) repère mobile lié à l'axe des projections, la transformée de Radon s'écrit encore sous la forme:

$$P_\theta(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t, s) ds$$

ou

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad [\text{II.16}]$$

Le problème de la reconstruction d'image est théoriquement équivalent à trouver la transformée de Radon inverse de la fonction $g(t, \theta)$. Cette inversion est intéressante sur le plan théorique [75]. Avant de donner la formule de la transformée de Radon inverse, nous allons introduire la notion de transformée de Hilbert.

La transformée de Hilbert (TH) d'une fonction $\phi(t)$ est définie comme :

$$\tilde{H} \phi = \phi(s) * \frac{1}{\pi s} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi t}{s-t} \quad [\text{II.17}]$$

\tilde{H} : l'opérateur de la transformée de Hilbert. $\tilde{g}(t, \theta)$ est donc la transformée de Hilbert de $\frac{1}{2\pi} \frac{\partial g(t, \theta)}{\partial t}$ pour chaque θ .

Si on note l'opérateur de la dérivée par : $D\phi = \frac{\partial \phi(t)}{\partial t}$, la transformée de Radon inverse (TR^{-1}) peut s'écrire comme:

$$f(x, y) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} B \tilde{H} D}_{TR^{-1}} g(t, \theta) \quad [\text{II.18}]$$

Soit:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\partial g / \partial t)(t, \theta)}{(x \cos \theta + y \sin \theta - t)} dt d\theta \quad [\text{II.19}]$$

Soit encore en coordonnées polaires :

$$f(x, y) = f(r \cos \phi, r \sin \phi) = f_p(r, \phi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\partial g / \partial t)(t, \theta)}{(r \cos(\theta - \phi) - t)} dt d\theta \quad [\text{II.20}]$$

La transformée de Radon inverse nécessite des intégrations autour de singularités par la méthode des résidus. La dérivation est connue pour augmenter le bruit, elle n'est donc pas d'utilisation pratique pour traiter des données réelles.

II.4.2. Les méthodes analytiques

II.4.2.1 La rétroprojection

L'opérateur de rétroprojection B est défini par:

$$B g = b(x, y) = \int_0^{\pi} g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad [\text{II.21}]$$

En coordonnées polaires, la rétroprojection s'écrit:

$$b_p(r, \phi) = \int_0^{\pi} g(r \cos(\theta - \phi), \theta) d\theta \quad [\text{II.22}]$$

Ainsi la rétroprojection au point (r, ϕ) est l'intégration de $g(t, \theta)$ selon une sinusoïde $\{s = r \cos(\theta - \phi)\}$ dans le plan (s, θ) .

Il est important de mentionner ici que l'opérateur de la rétroprojection n'est pas l'inverse de la transformée de Radon, mais il correspond à son opérateur adjoint. D'ailleurs, la forme analytique de la rétroprojection de la transformée de Radon de la fonction bidimensionnelle $f(x, y)$ est donné par:

$$[B\mathfrak{R}]f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} * f \quad [\text{II.23}]$$

En coordonnées polaires :

$$\tilde{f}(r, \phi) = \frac{1}{|r|} * f(r, \phi) \quad [\text{II.24}]$$

Sous forme matricielle, supposons que l'objet $f(x, y)$ et ses projections $g(t, \theta)$ sont représentés par des variables discrètes $f = (f_i), g = (g_i)$. Les vecteurs f et g sont reliés par la transformation matricielle $g = R \cdot f$, la matrice R est alors une approximation de l'opérateur \mathfrak{R} et la matrice R^T représentera une approximation de l'opérateur de rétroprojection B .

Il n'est pas possible d'obtenir une image correcte par la technique de la rétroprojection car la convolution par $(*1/r)$ étale trop les réponses (voir Figure II.20). Pour éviter ce problème, l'ajout d'un filtre de correction de $[B\mathfrak{R}]f(x, y)$ est indispensable.

II.4.2.2 Théorème de la coupe centrale

Nous avons vu qu'une acquisition s'écrit sous la forme:

$$\mathfrak{R}f = P_{\theta}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t, s) ds$$

La transformée de Fourier de cette acquisition est donnée par:

$$\hat{g}(\omega, \theta) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t, s) ds e^{-i2\pi\omega t} dt \quad [\text{II.25}]$$

Or,

$$\begin{aligned} \omega t &= \omega(x \cos\theta + y \sin\theta) \\ &= x(\omega \cos\theta) + y(\omega \sin\theta) \\ &= x\omega_x + y\omega_y \end{aligned}$$

Utilisant la relation [II.16] pour faire le changement de variable $(t, s) \rightarrow (x, y)$ et en remplaçant dans l'équation [II.25], on aura donc:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega, \theta) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) e^{-i2\pi(x\omega_x + y\omega_y)} dx dy \\ &= \hat{f}(\omega_x, \omega_y) \end{aligned} \quad [\text{II.26}]$$

Ce résultat est appelé théorème de la coupe centrale :

Théorème:

La transformée de Fourier à une dimension d'une projection correspond à une ligne de la transformée de Fourier à deux dimensions de l'image qui passe par l'origine et fait un angle θ avec l'axe des abscisses.

Cette méthode permet de reconstruire la coupe tomographique. On calcule la transformée de Fourier de chaque projection. On reporte les valeurs dans le plan fréquentiel et une transformée de Fourier inverse donne la coupe tomographique (voir Figure II.18). Toutefois, pour un nombre de projections réduit, le remplissage du plan fréquentiel ne recouvre pas toute l'image. Il persiste des vides qu'il faut remplir par une interpolation.

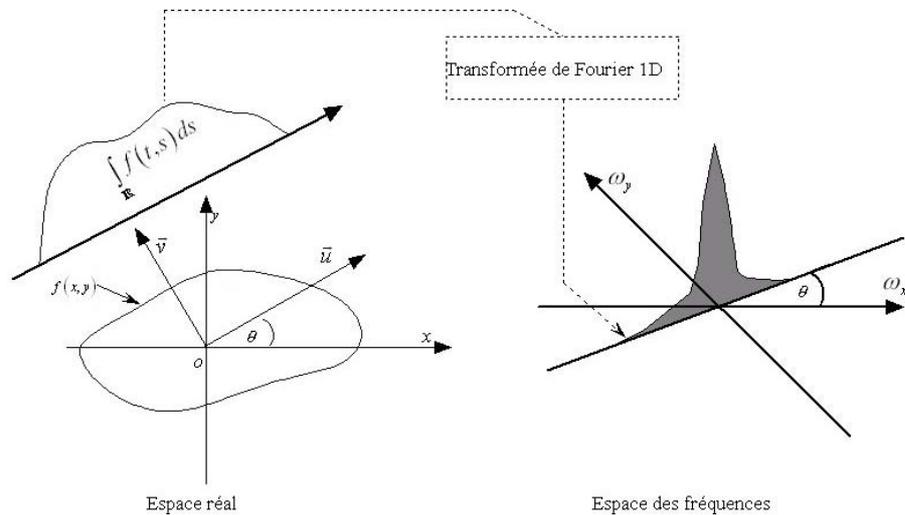


Figure II.18: le théorème de la coupe centrale

II.4.2.3 La rétroprojection filtrée

Le principe de la rétroprojection filtrée est de multiplier la transformée de Fourier des projections par la valeur absolue de ω que l'on appelle filtre rampe (voir Figure II.19). Ce filtre amplifie les fréquences élevées et donc détériore le rapport signal sur bruit. Il est donc rarement utilisé seul, mais toujours associé à un filtre d'apodisation.

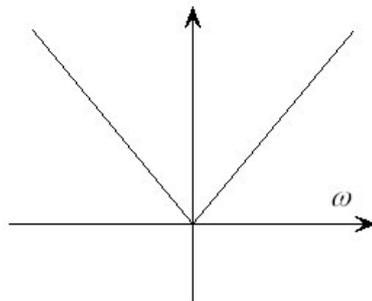


Figure II.19: Filtre de Rampe

En pratique, le filtrage rampe introduit de part et d'autre de l'objet filtré des valeurs négatives. Le rôle de ces valeurs négatives est d'effacer progressivement l'étalement des données laissés par les autres projections lors de l'opération de rétroprojection.

L'algorithme général de la rétroprojection filtrée est donné par:

$$1 \rightarrow \text{Projection : } P_{\theta}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t, s) ds$$

$$2 \rightarrow \text{Transformé de Fourier : } S_{\theta}(\omega) = \text{Fourier}(P_{\theta}(t))$$

$$3 \rightarrow \text{Filtre de Rampe : } Q_{\theta}(t) = \int S_{\theta}(\omega) |\omega| \exp(i2\pi\omega t) d\omega$$

$$4 \rightarrow \text{Reconstruction : } f(x, y) = \int Q_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta$$

Dans la Figure II.20, nous illustrons les différentes étapes de la reconstruction avec des simulations effectuées à partir d'un programme écrit dans l'environnement Matlab©.

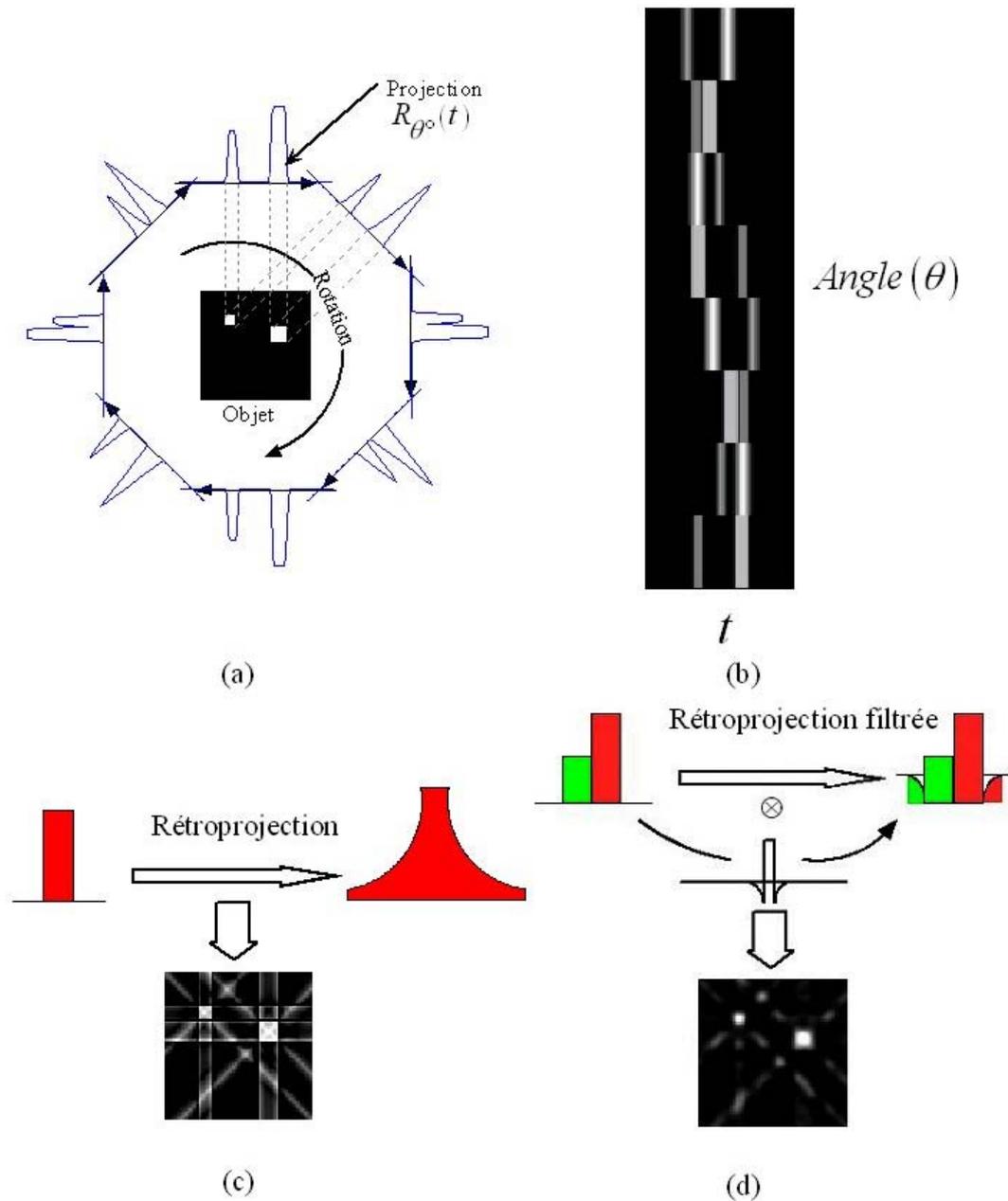


Figure II.20: Différents étapes de la reconstruction par rétroprojection filtrée (a) Projections sous 8 angles.(b) Sinogramme des 8 projections.(c) Reconstruction par rétroprojection.(d) Reconstruction par rétroprojection filtrée.

La reconstruction des coupes tomographiques par rétroprojection filtrée reste la méthode la plus utilisée dans plusieurs applications pratiques. Elle a pour principal avantage sa rapidité. L'utilisation conjointe de filtres lissant ou contrastant permet d'avoir une bonne qualité d'image. Toutefois, la méthode ne permet pas l'élimination complète d'artefacts de reconstruction qui peuvent parfois être gênants.

II.4.3. Les méthodes Algébriques

Dans cette partie, on considère le problème sous forme discrète où f et g sont des vecteurs de dimensions N et M , et ils représentent respectivement l'objet original et ses projections. Comme on l'a vu précédemment, ces deux vecteurs sont liés par la transformation matricielle $g = R \cdot f$, où R est la matrice de transfert du processus d'acquisition de dimensions (N, M) . La matrice R présente alors une approximation matricielle de l'opérateur de Radon \mathfrak{R} .

II.4.3.1 Méthodes ART et MART: (Algébrique Reconstruction Techniques)

La méthode ART est une méthode itérative de résolution de systèmes linéaires introduite par Gordon en 1970 [43]. Cette technique a été utilisée dans le premier Scanner EMI (Hounsfield).

La résolution s'effectue en projetant l'objet f^k (objet reconstruit à l'itération de rang k) sur le sous-espace $\left[[R]_i f = g(i) \right]$ où $[R]_i$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice R et $g(i)$ la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur g .

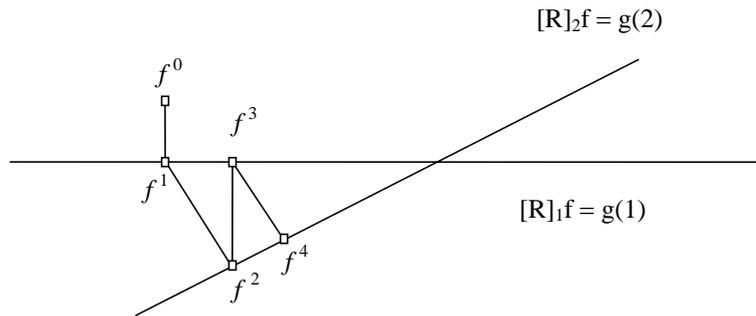


Figure II.21: Interprétation géométrique en dimension 2 de la méthode ART

L'algorithme est le suivant[64]:

$$\begin{cases} f^0 = 0 \\ f^{k+1} = f^k + \frac{1}{\| [R]_i \|_2} \lambda^k [R]_i^T (g(i) - [R]_i f^k) \end{cases} \quad [\text{II.27}]$$

λ^k est un coefficient de relaxation qui peut être fixe, ou au contraire évoluer au cours de la reconstruction. Son rôle est de régulariser la méthode de reconstruction et de diminuer le bruit. L'algorithme s'applique ligne par ligne ou en traitant chaque acquisition successivement. L'ordre dans lequel on prend ces acquisitions s'avère en fait très important pour la vitesse de convergence de la

méthode. En alternant le traitement pour des données espacées d'un angle voisin de 90° , l'algorithme présente une vitesse maximale. Ce choix dans la séquence des lignes est également important pour les algorithmes accélérés comme RAMLA (row action maximum likelihood algorithm) [19] [29].

La méthode MART (Multiplicative Algébrique Reconstruction Techniques) utilise une correction multiplicative et non pas additive comme dans la méthode ART. L'algorithme est donné par:

$$\left\{ \begin{array}{l} f^0 = \exp(-1)(1,1,\dots,1) \\ f_j^{k+1} = \left(\frac{g(i)}{[R]_i f^k} \right)^{R_{i,j} \lambda^k} \times f_j^k, \quad j = 1, \dots, NM \end{array} \right. \quad \text{[II.28]}$$

II.4.3.2 Méthode SIRT MSIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique)

La méthode SIRT a été introduite en radioastronomie par Bracewell [18]. Elle a aussi été utilisée en microscopie électronique et en imagerie de positrons. C'est une méthode de correction point par point, alors que la méthode de ART procédait ligne par ligne. La correction n'est pas appliquée à un ensemble de variables issues d'une acquisition mais à une variable correspondant à plusieurs acquisitions. De même que pour l'ART, deux schémas de correction peuvent être utilisés: une correction additive ou une correction multiplicative. Pour le cas additif, l'algorithme est donné par:

$$\left\{ \begin{array}{l} f^0 = 0 \\ f^{k+1} = f^k + \left(\text{diag}(R^T R) \right)^{-1} R^T (g - Rf^k) \end{array} \right. \quad \text{[II.29]}$$

En pratique, les méthodes SIRT et ART sont des algorithmes itératifs non exacts, c'est-à-dire que l'on est jamais sûr d'être près de la solution même après un grand nombre d'itérations. Elles se révèlent de plus particulièrement lentes.

II.4.4. Les méthodes de reconstruction utilisant une approche probabiliste

Ces méthodes tiennent compte de la nature stochastique des projections mesurées. Elles dérivent de la relation de densité de probabilité conditionnelle appelée théorème de Bayes:

$$p(f|g) = \frac{p(g|f)p(f)}{p(g)} \quad \text{[II.30]}$$

$p(g|f)$ est la densité de probabilité conditionnelle d'obtenir les données des acquisitions g connaissant l'objet original. Cette probabilité est calculée à partir du modèle physique du système. La fonction $p(f)$ est la densité de probabilité de f . Le paramètre $p(g)$ est indépendant du signal f , il est souvent considéré comme une constante ce qui conduit à la formule:

$$p(f|g) \approx p(g|f)p(f) \quad [\text{II.31}]$$

II.4.4.1 MAP (Maximum A Posteriori estimation)

L'algorithme de Maximum a posteriori (MAP) consiste à maximiser la probabilité conditionnelle dans [II.31]:

$$\begin{aligned} f_{MAP} &= \arg \max p(f|g) \\ &= \arg \max p(g|f)p(f) \end{aligned} \quad [\text{II.32}]$$

La méthode MAP nécessite donc une information sur la distribution du bruit lié aux système d'acquisitions $p(g|f)$ et une information a priori sur l'objet $p(f)$. La détermination de cette probabilité a priori n'est pas triviale et constitue un des points faible de la méthode [48].

II.4.4.2 Maximum de vraisemblance ou (EM-ML: Expectation Maximisation- Maximum Likelihood)

Pour l'algorithme du Maximum de vraisemblance, le paramètre f est considéré comme un signal non aléatoire. L'estimation du maximum de vraisemblance f_{EM-ML} est donné par:

$$f_{EM-ML} = \arg \max p(g|f) \quad [\text{II.33}]$$

Dans le cas de la tomographie d'émission, la mesure g est donnée par le nombre de photons détectés et la loi de probabilité est donnée par une loi de poisson [88] :

$$\begin{aligned} p(n = g|f) &= p(n_k = g(k)|f) = \prod_{k=1}^M e^{-\mu_k} \frac{\mu_k^{n_k}}{n_k!} \\ \text{ou } \mu_k &= [Rf](k) = E\{g(k)\} \end{aligned} \quad [\text{II.34}]$$

Les premiers algorithmes de reconstruction par maximum de vraisemblance dans le domaine médical ont été introduits par Shepp [93]. L'algorithme est du type itératif avec correction multiplicative

cherchant à maximiser le log de la vraisemblance. Récemment (1994), Hudson et Larkin ont développé une version accélérée appelé OSEM (Ordered-Subsets Expectation Maximization) [53]. La différence entre l'algorithme EM-ML et OSEM est le partage de l'ensemble de projections du sinogramme en un nombre N_{SE} de sous-ensembles. Les sous-ensembles sont ordonnés et utilisés séquentiellement dans l'algorithme de reconstruction en essayant de former des sous-ensembles les plus orthogonaux possible. Pour un seul sous-ensemble ($N_{SE} = 1$) les deux algorithmes OSEM et EM-ML sont identiques. Lors d'une itération OSEM, chaque sous-ensemble va être utilisé séparément et reproduire une image de correction qui servira comme itération initiale de l'algorithme EM-ML pour le deuxième sous-ensemble.

II.5. Bruits influençant les reconstructions tomographiques

II.5.1. bruit de comptage

L'utilisation de faibles activités injectées (pour réduire l'irradiation du patient) joint au très mauvais rendement des collimateurs limite le nombre de photons détectés en scintigraphie (de qq 10^5 à qq 10^6 photons). L'analyse de plaies contaminées pourrait détecter encore moins de photons. Pour ces raisons, le bruit prépondérant dans notre problème est le bruit de poisson.

II.5.2. Bruit de poisson

La décroissance radioactive est un processus statistique. En effet, considérons N atomes susceptibles d'être le siège d'un événement d'émission d'une particule radioactif. Soit P la probabilité pour qu'un évènement ait lieu dans le détecteur pendant une unité de temps. Le nombre moyen d'évènements réalisé par unité de temps est:

$$\mu = NP \tag{II.35}$$

La probabilité pour que le nombre total X d'évènements réalisé pendant l'unité de temps soit égal à x est donnée par la loi binomiale:

$$P(X = x) = C_N^x P^x (1 - P)^{N-x} \tag{II.36}$$

Où C_N^x est le nombre de combinaisons de x objets dans un lot de N objets ou atomes :

$$C_N^x = \frac{N!}{x!(N-x)!} \tag{II.37}$$

Or, le nombre d'évènements x est très faible, même négligeable par rapport aux nombres d'atomes N ($x \ll N$). Cela caractérise habituellement le modèle physique d'une acquisition par un système d'émission tomographique (ET). Dans ce cas, le nombre moyen d'évènements observés par unité de temps μ est négligeable devant N .

$$C_N^x \simeq \frac{N^x}{x!}$$

$$\ln \left[(1-P)^{N-x} \right] = (N-x) \ln(1-P) \simeq -NP = -\mu$$
[II.38]

La valeur limite $P(X = x)$ s'écrit donc:

$$P(X = x) \simeq \frac{N^x}{x!} P^x e^{-\mu} = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$
[II.39]

Qui est une loi de poisson de paramètre μ .

Il est important de noter que lorsque le paramètre μ augmente, la loi de poisson peut être confondue avec une loi normale de moyenne et de variance μ , $N(\mu, \sqrt{\mu})$.

Dans ce travail de thèse, nous nous occuperons essentiellement du bruit poissonien, les autres sources de bruits (interactions de la matière Photon/milieu) moins importantes seront ignorées. Pour mémoire, on peut citer: l'atténuation et la diffusion des photons dans le sujet, le collimateur et le détecteur, le mouvement propre du détecteur (courant d'obscurité), l'inhomogénéité de champ, la non linéarité, les pertes dues au circuit d'anti-empilement, la décroissance radioactive, le mouvement du patient, les fluctuations métabolique, etc.

Pour conclure la plupart de ces sources de bruit ont fait l'objet de nombreuses études, et des techniques physiques de correction existent pour diminuer leurs effets. L'incertitude due au bruit poissonien, paradoxalement la plus importante, n'a été que très peu abordée et presque jamais combattue.

III. LE SYSTEME CACAO

Le système CACAO est une gamma caméra avec une collimation à grand trous. Il a été introduit par Christian Jeanguillaume [58] [60] pour améliorer la qualité des images des systèmes "SPECT". Ce système est caractérisé par des trous avec une ouverture plus grande que la résolution intrinsèque du détecteur. Cela permet d'obtenir une sensibilité géométrique bien meilleure par rapport aux autres systèmes scintigraphiques. Une valeur de l'ordre de 10^{-2} est tout à fait accessible, c'est à dire, pour 10^4 photons on détectera 100 photons avec le système CACAO contre 1 seul pour les systèmes classiques de type Anger équipé d'un collimateur à trous fins. Ce chapitre est consacré à la description du système CACAO. Nous commençons tout d'abord par une vue d'ensemble du projet. Ensuite, nous modélisons géométriquement l'acquisition physique du système. Pour simplifier l'étude et les représentations, cette théorie est appliquée à un système réduit à deux dimensions; le cas tridimensionnel est traité séparément dans un chapitre ultérieur. Enfin, nous présentons l'algorithme de reconstruction CACAO qui implique les trois étapes suivantes: 1) sommation et décalage 2) déconvolution et filtrage 3) rotation et sommation. Nous terminons le chapitre par la définition des critères d'évaluation de la qualité des images reconstruites permettant la comparaison des algorithmes de reconstructions.

III.1. Description du système CACAO

III.1.1. Principe

Le projet de gamma Caméra A Collimation Assistée par Ordinateur (CACAO) a été développé pour réaliser l'image d'un ensemble d'émetteur gamma avec une sensibilité augmentée par rapport à celle des gamma Caméras classiques.

Le collimateur de la gamma caméra est l'élément crucial qui détermine la sensibilité, la résolution et la qualité de l'image reconstruite. Cependant, les collimateurs classiques à trous fins et parallèles utilisés avec les gamma caméras usuelles (CPHC: conventional parallel holes collimator) ont actuellement plusieurs limitations. Spécifiquement, leur sensibilité est extrêmement faible: pour 10^4 photons émis par le patient seulement un photon passera par un trou du collimateur et arrivera au cristal de la caméra.

La gamma Caméra A Collimation Assistée par Ordinateur (CACAO) a été introduite pour éviter ces inconvénients et améliorer les performances de la gamma caméra [57-59, 61]. Le système se caractérise par un collimateur à trous plus larges que ceux des gamma caméras classiques (voir Figure III.1). Cette

large collection permet d'augmenter la sensibilité du système, et ainsi d'obtenir plus d'informations sur l'objet étudié. Pour permettre une bonne discrimination spatiale des photons détectés, le système CACAO utilise un balayage en translation de l'ensemble collimateur-détecteur au cours de l'acquisition tomographique. Enfin, un algorithme de reconstruction, spécifique au système CACAO, permet de reconstruire des images tomographiques.

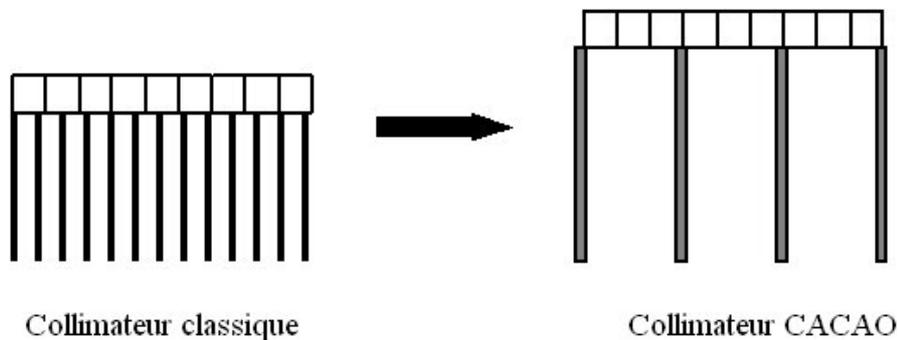


Figure III.1: schéma illustrant la différence entre le collimateur classique et le collimateur CACAO.

III.1.2. Description du Système CACAO [60]

Le projet du système CACAO se compose d'un détecteur à localisation, d'un collimateur dont le diamètre des trous est supérieur à la résolution intrinsèque du détecteur et d'un mouvement de rotation, auquel s'ajoute un déplacement linéaire tangentiel. L'ensemble du système est illustré sur la Figure III.2.

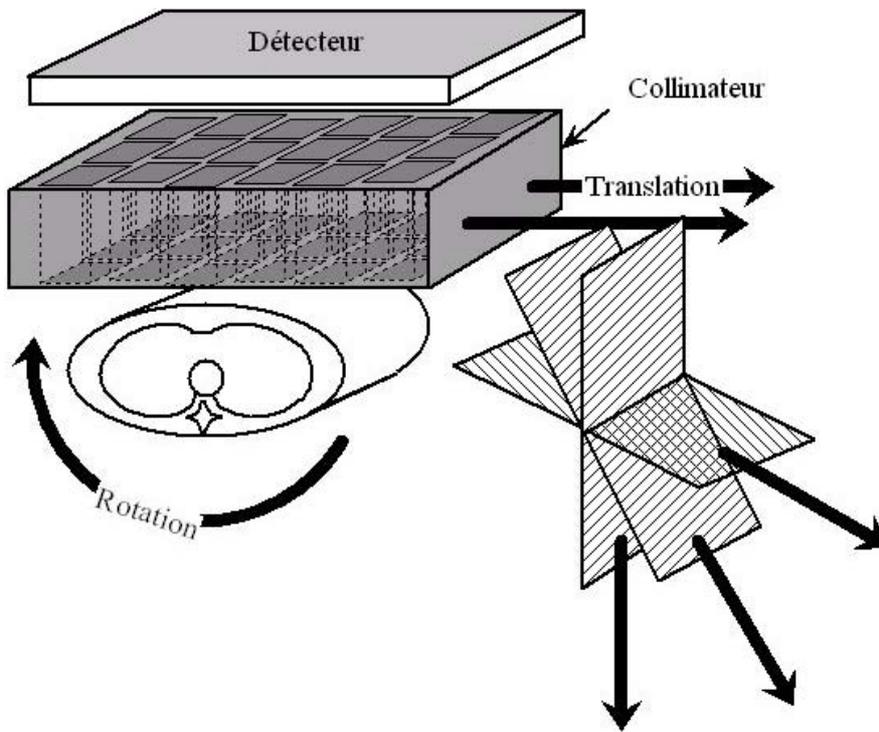


Figure III.2: Schéma de principe du système CAAO.

L'acquisition CAAO se présentera comme une succession de translations et de rotations décrites sur la Figure III.3. Le trajet des translations doit être suffisamment ample pour permettre une étude complète de la distribution des sources radioactives. Les positions extrêmes des détecteurs, sont choisies de manière qu'aucun signal soit recueilli.

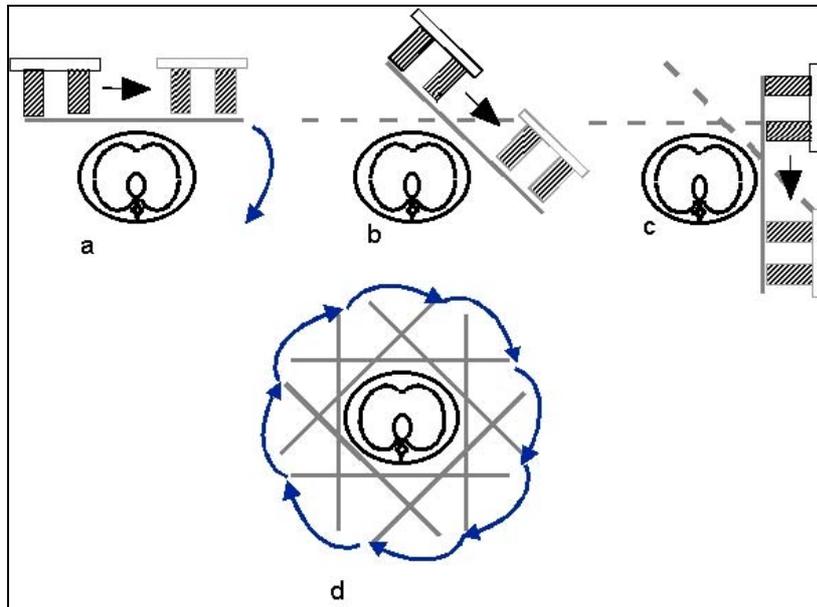


Figure III.3: Schéma illustrant les étapes de l'acquisition CACAO.

Après le premier balayage en translation, on effectue une rotation comme pour une tomographie transaxiale classique (Figure III.3-a). Puis une nouvelle translation est effectuée en sens contraire de la première pour éviter un mouvement inutile de la tête de la caméra (Figure III.3-b). Les mouvements de translation et de rotation sont ainsi répétés afin de réaliser une orbite complète autour du patient (Figure III.3 (c) et (d)).

III.2. Le problème de la reconstruction CACAO à 2D

III.2.1. Formulation bidimensionnelle de l'acquisition CACAO

Afin d'accélérer l'étude du système CACAO et suite aux travaux de I. Elloumi, S. Bégot et M. Quartuccio [9, 37, 84], nous avons travaillé sur un système réduit à deux dimensions. C'est à dire que l'on ne considère qu'une seule coupe de l'objet, isolé, étudié grâce à un détecteur réduit à une dimension qui se déplace dans le plan contenant la coupe. Le collimateur à un seul trou limite la propagation des photons dans le seul plan de l'étude. Pour alléger l'étude et pour des raisons de symétrie, le traitement mathématique ne sera parfois étudié que dans le cas de l'angle zéro qui correspond aux acquisitions à l'angle initial ($\phi = 0$).

Le système d'axes et les notations utilisées pour la reconstruction tomographique en 2D sont définis dans la Figure III.4:

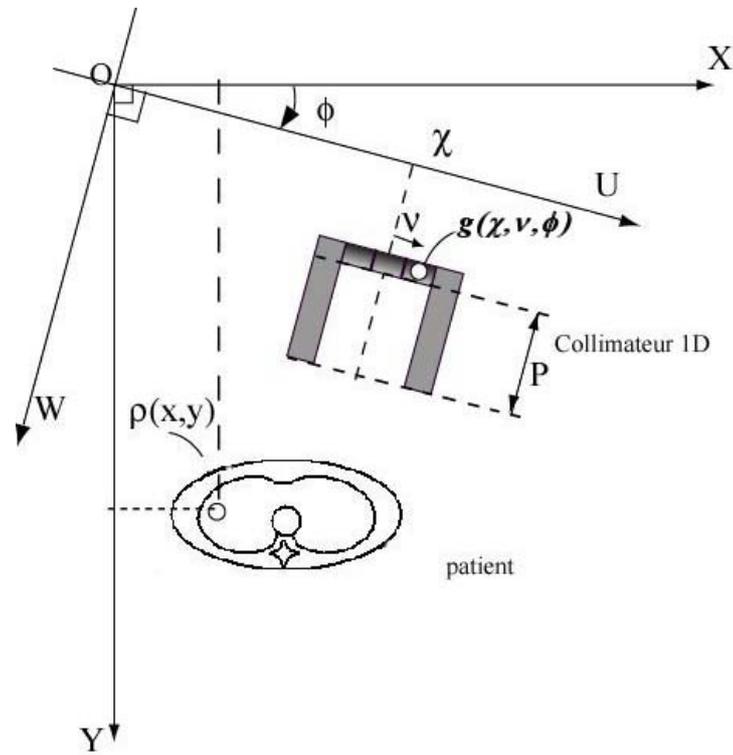


Figure III.4: Notations et référentiels utilisés en 2D

D est le diamètre du trou du collimateur et P sa profondeur.

$\rho(x, y)$ est la densité plane de sources radioactives que l'on souhaite reconstruire.

Le système d'axe OXY représente le repère fixe dans le plan transaxial du patient, y est la profondeur de la source et x son abscisse.

Le système d'axe OUW est un repère mobile associé à l'ensemble collimateur-détecteur, l'axe U est choisi parallèle au plan du détecteur et l'axe W lui est perpendiculaire.

La position du détecteur au cours de son mouvement est repérée par la variable χ mesurant la position du centre du détecteur sur l'axe U et par l'angle ϕ . La position d'arrivée des photons sur le détecteur est repérée par la variable ν choisie parallèlement à l'axe U , mais mesurée par rapport au centre du détecteur. Cette variable ν correspond donc à un repère en mouvement, suivant la translation.

$g(\chi, \nu, \phi)$ correspond à la densité des photons détectés à l'abscisse ν quand le détecteur est à la position χ .

La procédure d'acquisition répète les mouvements suivants par l'intermédiaire de trois repères selon la direction suivante:

$$(\chi, \vec{U}, \vec{W}) \xrightarrow[\substack{\text{Translation} \\ t_{o\chi} = o\vec{\chi}}]{\quad} (O, \vec{U}, \vec{W}) \xrightarrow[\substack{\text{Rotation} \\ R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}}]{\quad} (O, \vec{X}, \vec{Y}) \quad (\text{III.1})$$

III.2.2. Modélisation de l'acquisition à l'angle zéro

La relation qui relie l'objet $\rho(x, y)$ au signal acquis par le détecteur $g(\chi, \nu, \phi)$ s'écrit:

$$g(\chi, \nu, \phi) = \int_P \int_{\chi_i}^{\chi_f} \frac{\cos\theta}{d^2(x, y)} \rho(x, y) dx dy \quad (\text{III.2})$$

Les bornes de l'intégration sont délimitées par la zone triangulaire vue par un élément du détecteur (volume multiplex voir Figure III.5), le terme $\frac{\cos\theta}{d^2(x, y)}$ est donné par la loi de Lambert.

P est la profondeur du collimateur, θ est l'angle d'éclairement du détecteur, $d(x, y)$ est la distance entre la source et le détecteur, τ est l'éloignement maximum des sources.

Le passage des coordonnées (x, y) aux coordonnées (u, w) correspond à une transformation de rotation.

$$g(\chi, \nu, \phi) = \int_P \int_{\chi_i}^{\chi_f} \frac{\cos(\theta)}{d^2(u, w)} \rho(u \cos(\phi) + w \sin(\phi), -u \sin(\phi) + w \cos(\phi)) dudw \quad (\text{III.3})$$

Et pour l'angle $\phi = 0$, la relation s'écrit:

$$g(\chi, \nu) = \int_P \int_{\chi_i}^{\chi_f} \frac{\cos(\theta)}{d^2(u, w)} \rho(u, w) dudw \quad (\text{III.4})$$

Calcul des bornes de l'intégration:

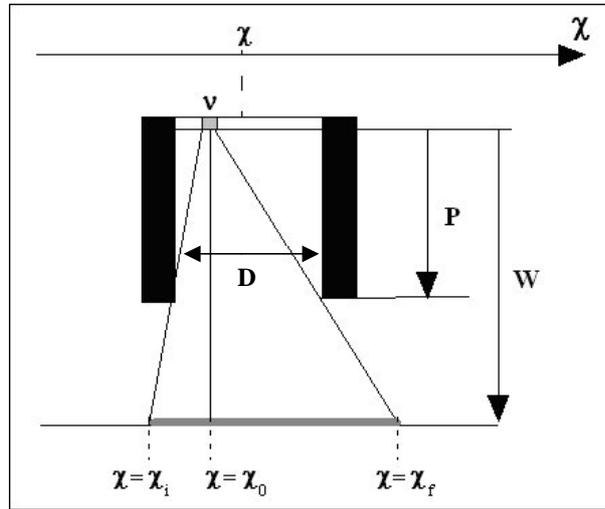


Figure III.5: Représentation des limites des abscisses de zone vue par un detcel.

Le domaine d'éclairage est décrit dans la Figure III.5. À la profondeur w , seuls les éléments de volume de l'objet (ou voxels) compris entre χ_i et χ_f contribuent au signal recueilli.

L'abscisse du voxel en face de l'élément de détecteur est : $\chi_0 = \chi + v$.

Les abscisses des voxels extrêmes (à gauche et à droite) vus par le détecteur sont :

$$\begin{cases} \chi_i = -\left(\frac{w}{P}\right)\left(v + \frac{D}{2}\right) + \chi + v \\ \chi_f = -\left(\frac{w}{P}\right)\left(v - \frac{D}{2}\right) + \chi + v \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

La loi de Lambert :

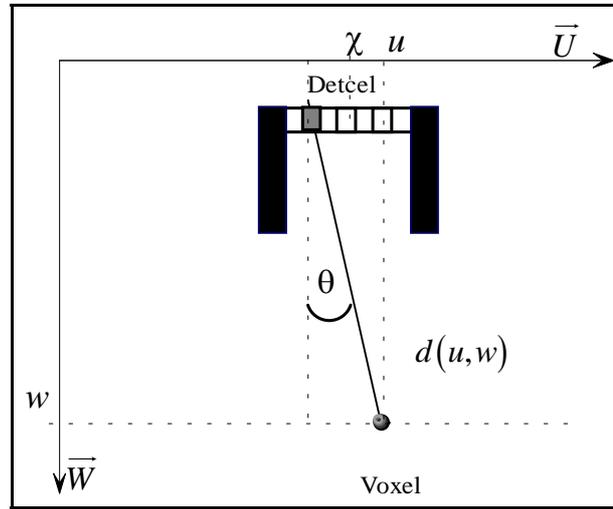


Figure III.6: Illustration pour la loi de Lambert

La loi de Lambert exprime le flux de photons arrivant sur le détecteur en fonction de l'angle d'éclairement θ et de la distance entre la source et le détecteur $d(u, w)$. L'angle θ est défini par la normale au plan de détection et la direction du plan (voir Figure III.6).

Le paramètre $d(u, w)$ est la distance entre le point situé sur le détecteur d'abscisse $\chi + v$ et d'ordonnée $w = 0$ et le point source de coordonnées (u, w) . θ est l'angle compris entre la direction de ces deux points et l'axe des W :

$$\begin{cases} d(u, w) = (\chi + v - u)^2 + w^2 \\ \cos\theta = \frac{w}{d(u, w)} \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Pour des sources assez éloignées du détecteur et pour des angles θ pas trop importants, le terme de la loi de Lambert peut être en première approximation considéré comme constant dans l'équation intégrale (III.2). Cette situation est notamment rencontrée lorsque P est grand devant D .

La relation (III.4) prend alors la forme simplifiée suivante:

$$g(\chi, v) = \int_P^r \int_{\chi_i}^{\chi_f} \rho(u, w) dudw \quad (\text{III.7})$$

III.2.3. Réponse à une source ponctuelle

Pour calculer la réponse à une source ponctuelle dans le cas simple précédent (formule [III.7]), il suffit de remplacer la fonction $\rho(u, w)$ par une fonction delta de Dirac $\delta(u - u_0, w - w_0)$:

$$g(\chi, v) = \int_P \int_{\chi_i}^{\chi_f} \delta(u - u_0, w - w_0) dudw \quad (\text{III.8})$$

L'intégrale d'une fonction delta de Dirac répond à:

$$\begin{cases} \int_a^b \delta(x) dx = 1 & \text{si } x \in [a, b] \\ \int_a^b \delta(x) dx = 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}, \quad (\text{III.9})$$

On peut donc calculer les valeurs limites χ_{\min} et χ_{\max} pour lesquelles l'intégrale de l'équation (III.8) sera différente de zéro.

$$\begin{cases} \chi_{\min} = u_0 + v \left(\frac{w_0}{P} - 1 \right) - \frac{w_0}{P} \frac{D}{2} \\ \chi_{\max} = u_0 + v \left(\frac{w_0}{P} - 1 \right) + \frac{w_0}{P} \frac{D}{2} \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Le point central des valeurs non nulles aura pour abscisse :

$$\frac{\chi_{\min} + \chi_{\max}}{2} = u_0 + v \left(\frac{w_0}{P} - 1 \right) \quad (\text{III.11})$$

Si on introduit maintenant la fonction rectangle Π_L définie par:

$$\begin{cases} \Pi_L(x) = 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right] \\ \Pi_L(x) = 0 & \text{si } x \notin \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right] \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

L'intégrale de l'équation (III.8) étant considéré comme constante entre les valeurs limites χ_{\min} et χ_{\max} on peut remplacer le résultat de cette intégration par une fonction rectangle de largeur $\frac{Dw_0}{P}$:

$$g_{\delta}(\chi, \nu) = \prod_{\frac{D w_0}{P}} \left(\chi - u_0 + \nu \left(\frac{w_0}{P} - 1 \right) \right) \quad (\text{III.13})$$

Ceci est bien l'équation d'un prisme à base parallélogramme, et à base rectangulaire pour une profondeur $w_0 = P$.

Les figures Figure III.7 et Figure III.8 illustrent schématiquement deux situations correspondant à une source ponctuelle placée à l'ordonnée $w_1 = P$ et $w_2 > P$.

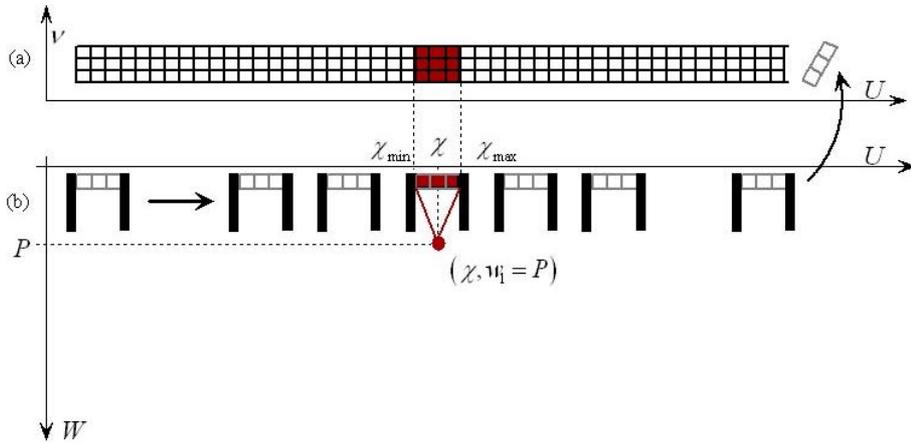


Figure III.7: Acquisition pour une source proche du collimateur $w_1 = P$

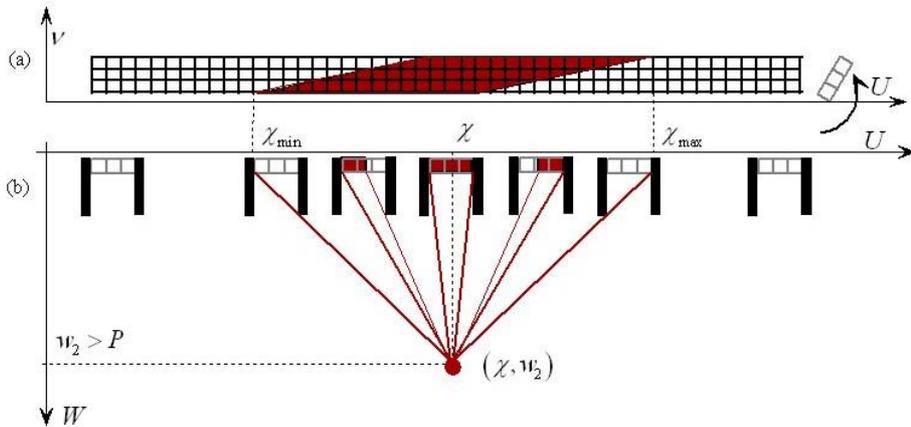


Figure III.8: Acquisition pour une source éloignée du collimateur $w_2 > P$

La Figure III.7 représente la réponse du système pour une source située à la face d'entrée du collimateur $w_1 = P$. Le support de $g_{\delta}(\chi, \nu)$ dans ce cas est un rectangle dans le plan (χ, ν) . Le

support de $g_{\delta}(\chi, \nu)$ pour une source éloignée de la face d'entrée du collimateur (voir Figure III.8) est un parallélogramme. Plus la source est éloignée, plus la réponse du détecteur s'étale sur l'axe \vec{U} .

III.3. L'algorithme de reconstruction CACAO à 2D

III.3.1. Description générale

Le problème de la reconstruction CACAO consiste à résoudre l'équation intégrale vue dans le paragraphe précédent:

$$g(\chi, \nu) = \int_P \int_{\chi_i}^{\chi_f} \rho(u, w) du dw \quad (\text{III.14})$$

Une des difficultés à résoudre cette équation intégrale réside dans le fait que le volume des données acquises par le concept CACAO est énorme. L'ajout des translations et comme nous le verrons plus loin, la multiplication des types de trous en sont la cause. Nos premiers essais utilisant un algorithme de résolution de moindres carrés avec contraintes [15] se sont révélées trop lents. Pour reconstruire une simple coupe de dimension 64x64 pixels, une semaine de traitement était nécessaire.

A la suite des travaux précédents [9, 37, 84], nous avons développé un algorithme de traitement rapide pour résoudre ce modèle, spécifique à la configuration CACAO. Il se compose des trois phases suivantes:

1. Sommation-décalage.
2. Déconvolution-filtrage
3. Rotation-sommation.

La sommation-décalage consiste à réajuster les données des projections pour obtenir un système sous forme d'un produit de convolution. On réalise ensuite une approximation de type diagonale dominante et on effectue l'opération de déconvolution-filtrage. La dernière étape de rotation-sommation permet d'additionner les contributions provenant des différents angles d'acquisition pour avoir un seul tomographe, l'objet reconstruit.

III.3.2. Sommation et décalage

L'étape de la "sommation-décalage" comme son nom l'indique se compose d'un décalage puis d'une sommation des données décalées. Le "décalage" est un réarrangement des données des projections qui permet de trouver une relation de convolution. Il introduit une variable supplémentaire "la profondeur

de reconstruction" qui transforme l'espace de $g(\chi, \nu)$, à un angle donné ϕ , dans l'espace réel de l'objet (u, w) . La sommation est une intégration sur la variable ν . Après ces deux opérations, le problème est ramené à un système de convolution soit une matrice bloc Toeplitz en terme discret.

Décalage:

Le décalage consiste en une inclinaison des données selon un angle $-\psi$. Cette inclinaison des données est calculée de façon à transformer les parallélogrammes décrits précédemment en rectangles à l'emplacement exact des sources. Nous avons donc :

$$tg(\psi) = \left(\frac{w}{P} - 1 \right) \quad (\text{III.15})$$

La matrice de transformation dans l'espace (χ, ν) faisant passer $(\chi, \nu) \rightarrow (u, \nu)$ est donnée par:

$$\begin{bmatrix} 1 & tg(\psi) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

La fonction à deux dimensions $g(\chi, \nu)$ est transformée en une fonction à 3 dimensions $G(u, w, \nu)$ par le changement de variable suivant:

$$\begin{aligned} \chi &\rightarrow u = \chi + \nu \left(\frac{w}{P} - 1 \right) \\ \nu &\rightarrow \nu \\ (\chi, \nu) &\rightarrow (u, w, \nu) \\ g(\chi, \nu) &\rightarrow G(u, w, \nu) \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Une partie de ce travail a été consacré à mettre au point un algorithme qui effectue ce décalage tous en conservant l'homogénéité et l'intensité entre les projections après le changement des variables $(\chi, \nu) \rightarrow (u, w, \nu)$.

Sommation:

La sommation est l'intégration des données décalées $G(u, w, v)$ sur la variable v entre les bornes $\frac{-D}{2}$ à $\frac{+D}{2}$, où D est le diamètre de trou. Cela nous ramène à la dimension de l'espace à reconstruire (U, W) . La sommation s'écrit:

$$S(u, w) = \int_{-D/2}^{D/2} G(u, w, v) dv \quad (\text{III.18})$$

Le résultat de cette sommation-décalage est une fonction rectangle lorsque la profondeur de la reconstruction correspond à l'emplacement de la source ponctuelle initiale.

Les deux étapes dans la sommation-décalage peuvent être combinées mathématiquement pour réaliser une transformation intégrale, décrit par l'opérateur \mathfrak{R} suivant :

$$\mathfrak{R} g = S(u, w) = \underbrace{\int_{-D/2}^{D/2} g(\chi, v) \delta \left(u - \left(\chi + v \left(\frac{w}{P} - 1 \right) \right) \right) dv}_{\text{Somme}} \quad (\text{III.19})$$

Où l'intégration dans le plan (χ, v) se fait sur des droites inclinées d'un angle ψ comme précédemment décrit.

La Figure III.9 illustre l'application de la sommation décalage pour un objet composé de deux sources ponctuelles. Les coordonnées des deux sources sont respectivement $w_1 = P$ et $w_2 = P + 64$. Pour chaque profondeur w , nous présentons la projection décalée de l'objet par $v \left(\frac{w}{P} - 1 \right)$ en haut et sa sommation juste au-dessous. Le profil des projections sommées décalées $S(u, w)$ est généralement de forme trapézoïdale. Par ailleurs, on constate à la profondeur $w_1 = P$ que la réponse $S(u, w_1)$ de la source situé à $w = P$ est rectangulaire, de largeur $\frac{w_1 D}{P} = D$. De même pour la deuxième source, elle produit une réponse rectangulaire de largeur $\frac{w_2 D}{P}$ à la profondeur qui correspond à sa position $w_2 = P + 64$.

Ainsi toute source ponctuelle de coordonnées (u_0, w_0) produit après la sommation décalage une réponse rectangulaire de largeur $\frac{w_0 D}{P}$. Nous verrons plus loin que ces réponses rectangulaires représentent les blocs diagonaux de la matrice de transfert du système CAAO.

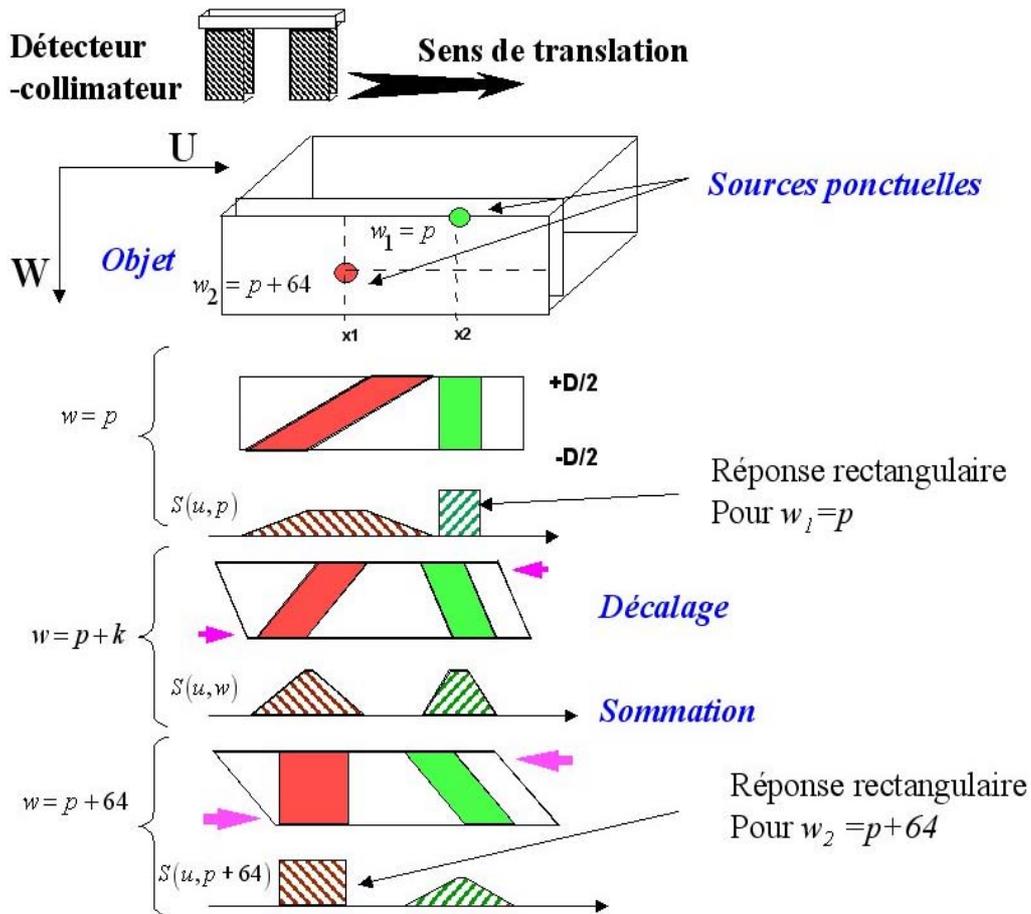


Figure III.9: Illustration de l'étape de la sommation décalage pour un objet composé de deux sources ponctuelles.

III.3.3. Déconvolution et filtrage

III.3.3.1 Calculs des réponses du système (Noyau de convolution)

Reprenons maintenant l'équation (III.13) des projections obtenue pour une source impulsionnelle placée en (u_0, w_0) :

$$g_{\delta}(\chi, \nu) \Big|_{(u_0, w_0)} = \prod_{\frac{Dw_0}{P}} \left(\chi - u_0 + \nu \left(\frac{w_0}{P} - 1 \right) \right)$$

La réponse du système de la source ponctuelle après l'étape de sommation décalage est donnée par la relation (III.19) appliqué à la projection $g_{\delta}(\chi, \nu) \Big|_{(u_0, w_0)}$. On a donc:

$$S_{\delta}(u, w) = \int_{-D/2}^{D/2} g_{\delta}(\chi, \nu) \Big|_{(u_0, w_0)} \delta \left(u - \left(\chi + \nu \left(\frac{w}{P} - 1 \right) \right) \right) d\nu \quad (\text{III.20})$$

En simplifiant la formule, nous obtenons la relation suivante:

$$S_{\delta}(u, w) = \int_{-D/2}^{+D/2} \prod_{\frac{Dw_0}{P}} \left(u - u_0 + \nu \left(\frac{w}{P} - \frac{w_0}{P} \right) \right) d\nu \quad (\text{III.21})$$

Comme les équations présentées dans les chapitres précédents représentent exclusivement des transformations linéaires, nous pouvons, à partir de la réponse à une source ponctuelle, calculer la réponse d'un objet complexe. En effet, un objet quelconque pourra toujours être représenté par une décomposition des fonctions Dirac. Ainsi la réponse à un objet complexe pourra être représentée par un produit de convolution.

$$S(u, w) = \int_{P-D/2}^{\tau+D/2} \int_{-D/2}^{D/2} \prod_{\frac{Dw_0}{P}} \left(u - u_0 + \nu \left(\frac{w}{P} - \frac{w_0}{P} \right) \right) * \rho(u_0, w_0) d\nu dw_0 \quad (\text{III.22})$$

Où $\rho(u_0, w_0)$ représente la densité des sources formant l'objet, * représente le produit de convolution sur la variable u_0 . Les intégrales peuvent être représentées sous forme de sommes discrètes, en introduisant les indices w_j pour w et w_i pour w_0 :

$$S_j(u) = \sum_i \sum_{\nu=-D/2}^{\nu=+D/2} \prod_{\frac{Dw_i}{P}} \left(u - u_0 + \nu \left(\frac{w_j}{P} - \frac{w_i}{P} \right) \right) * \rho_i(u_0) \quad (\text{III.23})$$

De façon équivalente, le système peut être écrit sous la forme d'une matrice représentant un système de produit de convolution. Chaque élément de la matrice correspondant à une section $S(u)$ notée R_{ij} où les indices i et j représentent les positions w de la profondeur reconstruite (j) et de l'emplacement initial de la source (i). On définit les réponses par :

$$R_{ij} = \sum_{v=-D/2}^{v=+D/2} \prod_{\frac{D w_i}{P}} \left(v \left(\frac{w_j}{P} - \frac{w_i}{P} \right) \right) \quad (\text{III.24})$$

Notons ici que ces réponses R_{ij} ne dépendent que de la géométrie du collimateur, de la profondeur P et de diamètre du trou D .

En se rappelant qu'il s'agit de fonctions centrées selon la variable u , le système devient:

$$S_j(u) = \sum_i R_{ij} * \rho_i(u) \quad (\text{III.25})$$

Pour $i=j$, l'équation (III.24) se réduit à :

$$R_{ii} = D \prod_{\frac{D w_i}{P}} \quad (\text{III.26})$$

Cela nous montre le caractère rectangulaire des réponses diagonales dans cette approximation. On peut remarquer ici que le traitement des acquisitions CACAO, contrairement à la transformée de Radon réalise un bon codage avec la profondeur, pour chaque angle de projection. Selon la classification de S. Webb [109], le projet CACAO a donc bien un caractère de "tomographie longitudinale" quand on limite l'étude à un seul angle de projection. En fait le projet CACAO combine les avantages des tomographies longitudinales et transverses. On remarque également que les paramètres du collimateur, et notamment son profondeur P , sont tout à fait pris en compte, de manière exacte et directe.

La Figure III.10 montre 25 éléments de la matrice des réponses R_{ij} qui comporte 64x64 éléments pour reconstruire 64 ordonnées.

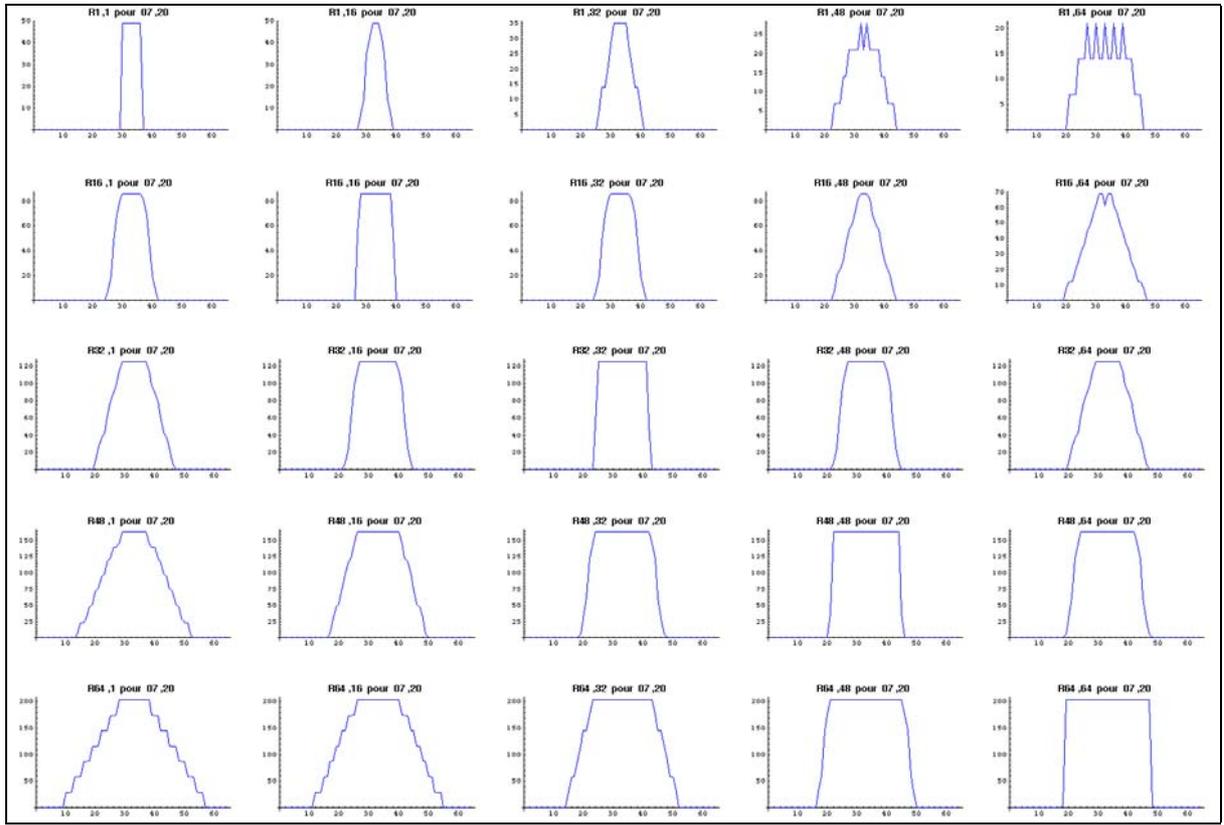


Figure III.10: Allure de la matrice de $R_{i,j}$

III.3.3.2 Approximation de type diagonale dominante

Le système d'équations (III.25) est un problème de déconvolution qui peut se résoudre soit sous forme matricielle puisque le produit de convolution est équivalent à une multiplication par une matrice de type Toeplitz, soit en utilisant la technique des transformée de Fourier. Or, les données des acquisitions CACAO (Translation et rotation) sont de grande taille. Cela nous incite à favoriser la technique de la transformée de Fourier pour diminuer la complexité de la résolution de ce système linéaire. En effet, une résolution par la méthode matricielle avec une matrice $N \times N$ a une complexité au moins de $O(N^2)$ tandis que la complexité du même problème avec la méthode d'analyse de Fourier est de l'ordre de $O(N \log N)$.

Dans l'espace de Fourier, l'équation (III.25) s'écrit:

$$\hat{S}_j(\omega) = \sum_i \hat{R}_{ij}(\omega) \times \hat{\rho}_i(\omega) \quad (\text{III.27})$$

Où $\hat{\rho}_i$, \hat{R}_{ij} et \hat{S}_j sont les transformées de Fourier respectivement de ρ_i , R_{ij} et S_j .

ω est la variable des fréquences dans l'espace de Fourier.

En mettant \hat{R}_{ij} en facteur dans le deuxième membre de l'équation précédente, on trouve:

$$\hat{S}_j(\omega) = \hat{R}_{jj}(\omega) \times \left(\hat{\rho}_j(\omega) + \sum_{i \neq j} \left(\frac{\hat{R}_{ij}(\omega)}{\hat{R}_{jj}(\omega)} \right) \times \hat{\rho}_i(\omega) \right) \quad (\text{III.28})$$

Par ailleurs, il a été démontré par simulation dans des travaux précédents [9] [63] que la matrice R est une matrice à diagonale dominante pour la déconvolution. Bien que le terme $\sum_{i \neq j} \left(\frac{|\hat{R}_{ij}(\omega)|}{|\hat{R}_{jj}(\omega)|} \right)$ ne soit

pas inférieur à 1, les résultats de la déconvolution par R_{jj} nous ont permis d'obtenir des résultats satisfaisants. Ces résultats étaient toutefois très dépendants de l'algorithme choisi pour la déconvolution.

Nous avons donc procédé dans ce travail à une étude approfondie des algorithmes de déconvolutions adéquats à notre modèle CAAO en nous intéressant à leurs robustesses et leur rapidité.

III.3.3.3 Résolution de la déconvolution et filtrage

Déconvolution:

L'approximation de la diagonale dominante réduit le problème après la sommation décalage à un produit de convolution par une réponse rectangulaire pour chaque profondeur j . En négligeant dans

le système linéaire (III.28) le terme $\sum_{i \neq j} \left(\frac{|\hat{R}_{ij}(\omega)|}{|\hat{R}_{jj}(\omega)|} \right)$, on a:

$$\hat{S}_j(\omega) = \hat{R}_{jj}(\omega) \times \hat{\rho}_j(\omega) \quad (\text{III.29})$$

Soit encore en produit de déconvolution:

$$S_j = R_{jj} * \rho_j \quad (\text{III.30})$$

Où R_{jj} est la réponse rectangulaire à la profondeur j .

Filtre parabolique et rampe:

Les termes négligés dans l'approximation de la diagonale dominante étalent la réponse du système le long de l'axe W . En effet pour i voisin de j , la réponse R_{ij} est morphologiquement très voisine de R_{jj} . La Figure III.14 qui montre toutes les étapes de la reconstruction, illustre bien ce phénomène. L'étalement est toutefois beaucoup moins important que dans le cas d'une rétroprojection classique.

Un filtre parabolique a été utilisé pour limiter cet effet d'étalement des données. L'expression mathématique de ce filtre est:

$$w(f) = |f - f^2| \quad (\text{III.31})$$

La présentation de ce filtre est présentée sur la Figure III.11:

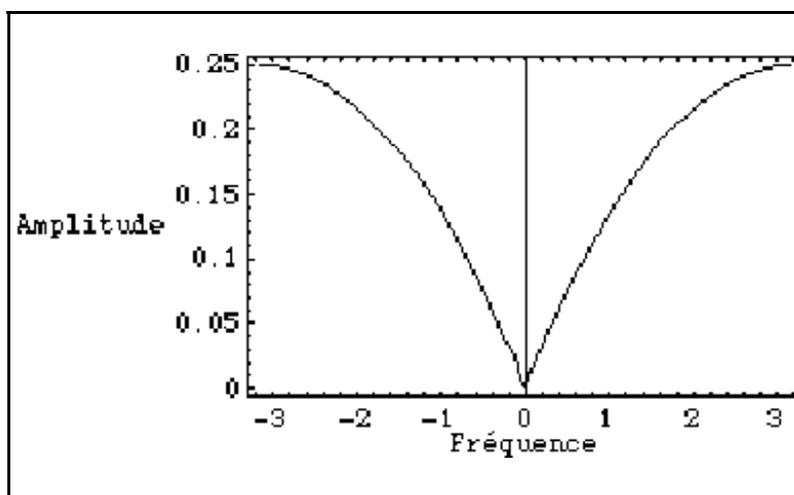


Figure III.11: Allure de filtre parabolique dans l'espace des fréquences.

Pour ajuster le poids du filtre dans la reconstruction, S. Bégot [9] a introduit une rampe de pente faible mais variable:

$$\tilde{w}(f)(\omega) = w(f)(\omega)(a\omega + b) \quad (\text{III.32})$$

La rampe $a\omega + b$ est définie par deux points: A la fréquence 0 elle vaut (1/nombre de point de la transformée de Fourier) et à la fréquence la plus élevée, elle est égale au paramètre variable **Alpha**.

Apodisation:

Dans la zoologie, le mot grec "Apodal ou Apodous" signifie dépourvu des pieds (a=sans et pou=pieds). Dans le cadre de filtrage des signaux, le spectre du bruit est grossièrement constant dans

le domaine de Fourier (bruit blanc). Alors que le signal à un spectre constamment décroissant au-delà d'une certaine fréquence, le bruit devient prépondérant. On a donc intérêt à couper ou "apodiser" toute transmission au-delà d'une valeur appelée fréquence de coupure " f_c ", c'est l'apodisation.

Afin d'éviter une coupure brutale dans le domaine de Fourier qui introduirait des oscillations dans le domaine réel, divers filtres peuvent être utilisés. Nous avons choisis ici le filtre de Hanning pour sa simplicité et son efficacité:

$$\begin{aligned} w(f) &= 0.5 + 0.5 \cos[\pi f / f_c]; & f \leq f_c \\ w(f) &= 0.; & f > f_c \end{aligned} \tag{III.33}$$

L'allure de filtre est représentée sur la Figure III.12, la fréquence de coupure dans cet exemple est de $f_c = 1$.

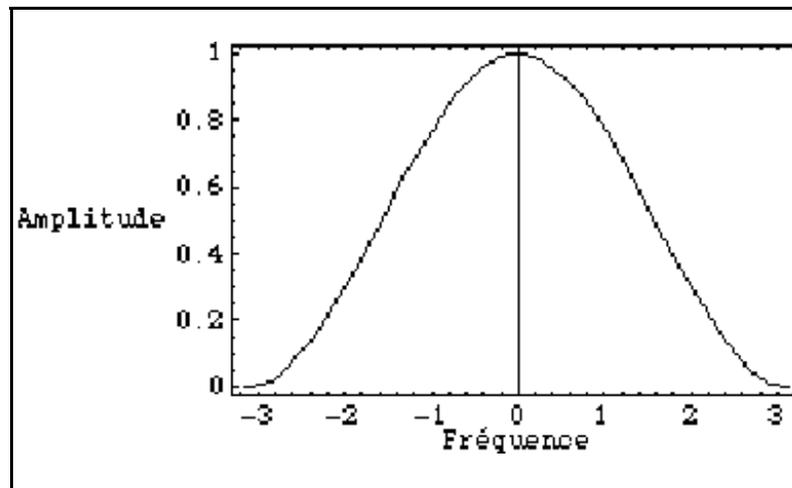


Figure III.12: Le filtre de Hanning.

Vues opposées:

Comme dans le cas SPECT, le rapport signal sur bruit des images reconstruites se dégrade avec la profondeur. Pour diminuer cette dégradation, nous avons appliqué un algorithme qui moyenne les lignes provenant de deux acquisitions opposées en ajustant ces contributions par un coefficient de pondération appelé **Bé**ta (voir Figure III.13).

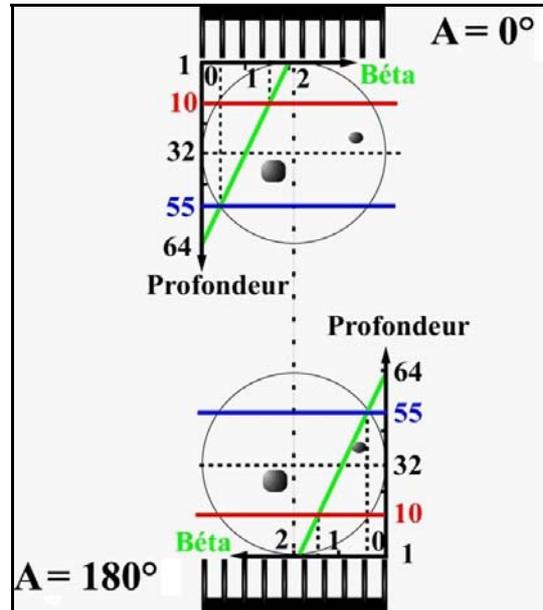


Figure III.13: Illustration de la pondération Béta

Après avoir réalisé la déconvolution, nous appliquons le coefficient de pondération ($Coeff_{\beta,w}$) qui dépend de la ligne reconstruite w et de l'angle d'acquisition θ . Pour un couple (θ, w) donné, on réalise la somme $S_{\theta,w}$ suivante :

$$S_{\theta,w} = Coeff_{\beta,w} \times P_{\theta,w} + (2 - Coeff_{\beta,w}) \times P_{\theta+180,m-w+1} \quad (\text{III.34})$$

Avec $P_{\theta,w}$ le vecteur correspondant à la ligne w et m le nombre total de lignes déconvolués.

III.3.4. Rotation et somation

Les données obtenues après la déconvolution-filtrage pour chaque angle d'acquisition devraient représenter l'objet initial tourné de l'angle ϕ . Ces données sont donc redressées par une rotation d'angle $-\phi$ avant d'être additionné pour former la reconstruction finale.

Les programmes de reconstruction précédant ce travail, utilisaient un algorithme de rotation, basé sur le calcul des surfaces résultant de l'intersection de deux réseaux carrés. Cet algorithme conservait la somme du signal mais étalait les signaux impulsionnels.

Pendant ce travail, nous avons remplacé cet algorithme par un algorithme robuste qui conserve la résolution, l'homogénéité et l'intensité de l'image après rotation.

III.3.5. La relation entre le système CACAO et la transformée de Radon

En tomographie classique, la collimation est caractérisée par un collimateur à trous fins et longs $\left(\frac{D}{P} \ll 1\right)$. Or la largeur des réponses $R_{ij}(u)$ est proportionnelle au rapport de la largeur des trous

D sur leur profondeur P . Par conséquent, la formule des réponses (III.24), lorsque $\frac{D}{P} \rightarrow 0$, peut être approchée par la fonction δ de Dirac:

$$R_{ij} = \delta \quad (\text{III.35})$$

Alors, le problème de déconvolution devient:

$$S_j(u) = \sum_i \rho_i(u) \quad (\text{III.36})$$

Cette formule est bien la transformée de Radon de l'objet ρ .

III.3.6. Exemple de reconstruction

La Figure III.14 récapitule les différentes phases de l'algorithme pour un objet composé d'une source ponctuelle. L'étalement des réponses selon les w , après déconvolution est limité.

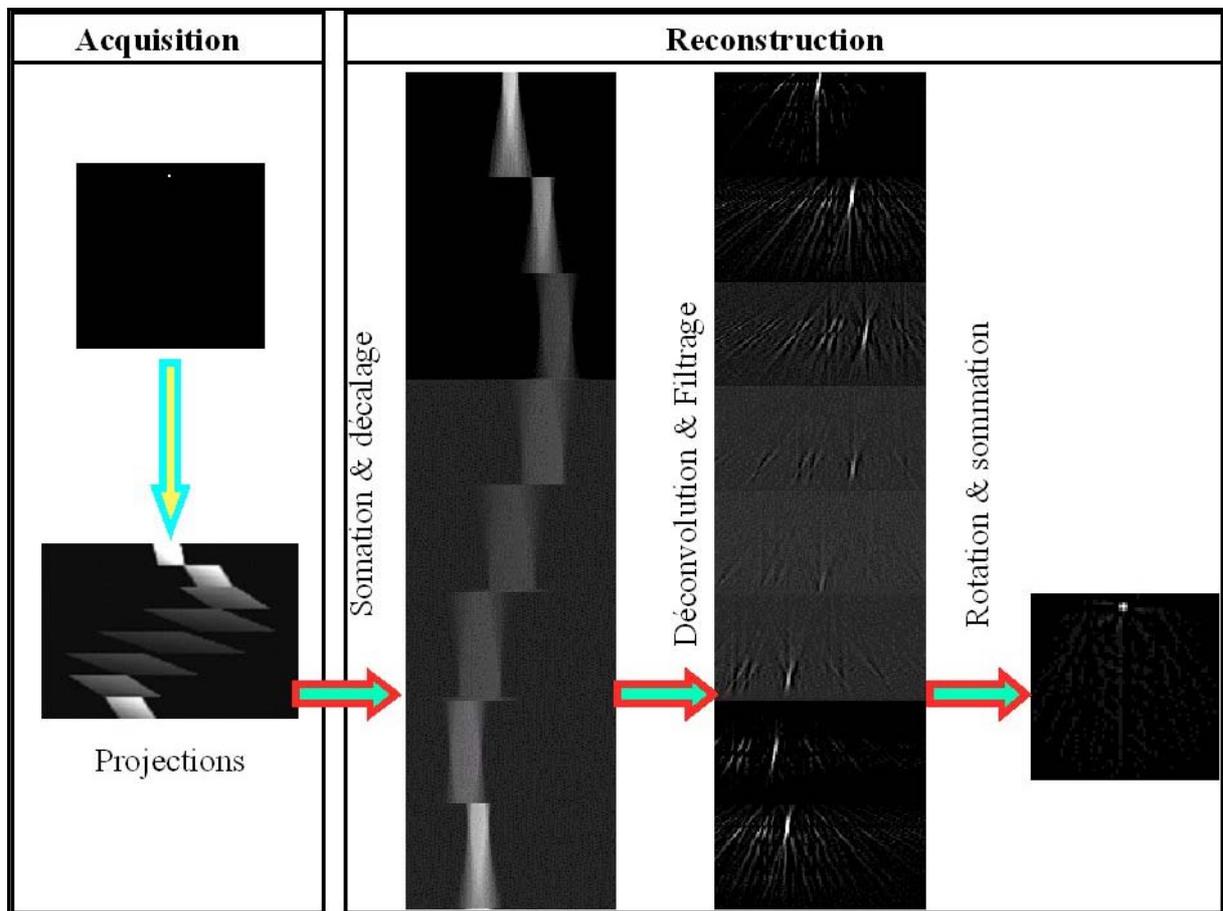


Figure III.14: Récapitulation des étapes de reconstruction pour un objet source ponctuelle.

Les variations d'intensité du fond pour certains angles sont la conséquence de changement d'échelles de gris. En effet si nous avons illustré les projections sommées décalées (PSD) pour chaque angle avec la même normalisation par rapport aux intensités maximum et minimum, certains PSD seraient tout noirs.

III.4. Critères d'évaluation de la qualité des images reconstruites

L'étude des algorithmes de reconstruction numérique nécessite la définition d'une fonction qui mesure analytiquement la qualité et la fidélité des images reconstruites par rapport à l'objet original. Bien que l'œil humain permette de différencier entre une bonne et une mauvaise reconstruction, l'utilisation d'un critère quantitatif simplifie le développement et l'optimisation des algorithmes de reconstruction et permet d'être plus objectif. Dans la littérature, plusieurs critères ont été proposés [8] [56] [37] [14] [108]. Dans ce paragraphe, nous définirons le rapport signal sur bruit (RSB) que nous avons choisi. Le second critère utilisé, appelé gain en rapport signal sur bruit "GainRSB", est très utile pour évaluer l'efficacité des différents algorithmes de déconvolution.

III.4.1. Le rapport signal sur bruit

Le calcul du RSB est toujours possible en simulation numérique puisque l'on dispose de l'objet de départ. De multiples définitions ont été proposées pour le calcul du RSB et notamment pour le calcul du terme signal (Moyenne, variance, somme,...etc.). Nous avons choisi la définition suivante[56]:

Soit A l'image originale de dimensions $M \times N$ et \tilde{A} l'image reconstruite, la quantité σ_{ls}^2 est la valeur moyenne des erreurs quadratiques entre A et \tilde{A} , elle représente le terme de **bruit**:

$$\sigma_{ls}^2 = \frac{1}{M N} \times \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |A_{m,n} - \tilde{A}_{m,n}|^2 \quad (\text{III.37})$$

Le terme **signal** est représenté par la variance de l'image originale A donné par:

$$\sigma^2 = \frac{1}{M N} \times \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |A_{m,n} - \bar{A}|^2 \quad (\text{III.38})$$

Où \bar{A} : la valeur moyenne de l'image originale A :

$$\bar{A} = \frac{1}{MN} \times \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{m,n} \quad (\text{III.39})$$

Le rapport signal sur bruit **RSB** de la reconstruction exprimé en décibels (dB) par:

$$RSB(dB) = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_{ls}^2} \right) \quad (\text{III.40})$$

III.4.2. Le gain en signal sur bruit

Le gain en signal sur bruit " GainRSB " a été introduit afin d'évaluer la robustesse des algorithmes de déconvolution. Il a été appliqué dans l'étude des méthodes de déconvolution dans le chapitre 4.

Le GainRSB est défini par:

$$GainRSB = \frac{RSB_{sortie}}{RSB_{entrée}} \quad (\text{III.41})$$

Où RSB_{sortie} est le rapport du signal sur bruit entre l'image originale A et l'image reconstruite \tilde{A} , et $RSB_{entrée}$ est le rapport du signal sur bruit entre l'image convoluée et bruitée $R * A + N$ et l'image convoluée sans bruit $R * A$.

Le $GainRSB$ est donc le rapport entre le RSB à la sortie sur le RSB à l'entrée de la déconvolution tel que nous le définissons sur La Figure III.15.

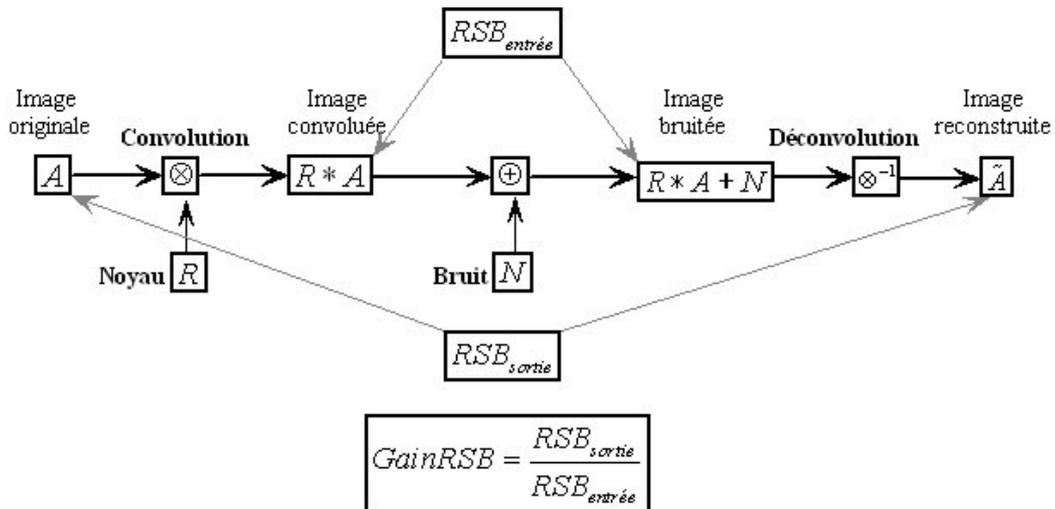


Figure III.15: Méthode de calcul du Gain en rapport signal sur bruit

IV. ACQUISITION ET DECONVOLUTION

Dans la deuxième moitié du XX^{ème} siècle, stimulé par les progrès des traitements optiques puis de l'informatique, quelques chercheurs ont essayé d'améliorer les systèmes d'acquisition de spectre à travers une fente fine. Cette situation d'acquisition à travers une fente étroite était courante à l'époque dans tous les systèmes d'optique photonique ou corpusculaire. La conclusion de ces études fut malheureusement assez décevante : l'idée d'augmenter la sensibilité du système en élargissant la fente d'acquisition puis de rétablir le signal original par déconvolution n'était pas efficace. La dégradation du rapport signal sur bruit causée par la déconvolution était plus importante que l'amélioration du rapport signal sur bruit due à l'élargissement de la fente en présence d'un bruit de comptage (ou de photons), répondant à la loi de poisson [41] [71] [4]. Nous examinerons dans ce chapitre les raisons de la mauvaise réputation de la déconvolution. Après, nous exposerons notre approche statistique d'étude de la déconvolution à une dimension. Pour finir, nous analyserons quelques méthodes de déconvolution adaptées à notre problème afin de choisir la méthode de déconvolution la plus convenable à notre système CACAO.

IV.1. Rappel sur la déconvolution

IV.1.1. Notation

La déconvolution est un cas particulier de problème inverse fréquemment rencontré en traitement du signal. C'est à dire que l'on cherche à trouver un objet ρ à partir des données mesurées S , et on modélise la relation reliant ρ à S par une équation de type $S = R(\rho)$. S est l'image produite par l'objet ρ à travers l'instrument de mesure, et R est un opérateur qui dépend des caractéristiques du système d'acquisition (voir Figure IV.1). Cette équation, dite aussi relation directe, sera pour tous nos problèmes une relation intégrale, donc linéaire. Nous verrons que même dans le cas où la relation directe est parfaitement définie et facile à calculer, le problème inverse pose des difficultés majeures.

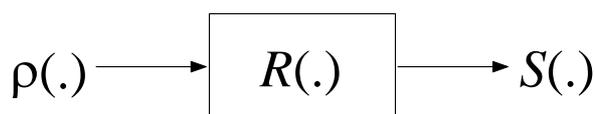


Figure IV.1: Diagramme d'un système d'acquisition

Le problème de la déconvolution consiste à inverser la relation directe de convolution:

$$s(x) = \int r(x-\tau)\rho(\tau)d\tau = r * \rho(x) \quad [\text{IV.1}]$$

Où $r(x)$ est le noyau de convolution; Il représente la réponse impulsionnelle de l'instrument. En pratique, l'acquisition réelle mesure des variables discrètes. Alors, l'équation de convolution [IV.1] peut être échantillonnée dans l'espace direct sous la forme :

$$s(i) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r(i-k)\rho(k) = r * \rho(i) \quad [\text{IV.2}]$$

Dans notre problème, le signal discret $\rho(k)$ est défini sur un support fini ($0 < k \leq n$), les mesures s'étendant alors sur m points $m > n$ par périodisation sur n échantillons.

$$s(i) = \sum_{1 \leq k \leq n} r(i-k)\rho(k) \quad 1 \leq i \leq m \quad [\text{IV.3}]$$

En forme vectorielle :

$$s = R \rho \quad [\text{IV.4}]$$

R est une matrice de Toeplitz de dimension (m,n) avec $m > n$ sous la forme:

$$\begin{pmatrix} r(1) & 0 & \dots & 0 \\ r(2) & r(1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & r(2) & \ddots & 0 \\ r(p) & \vdots & \ddots & r(1) \\ 0 & r(p) & \ddots & r(2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & r(p) \end{pmatrix} \quad [\text{IV.5}]$$

Où m est déterminé par la relation $m=n+p-1$, si la réponse impulsionnelle de l'instrument a une largeur p . Par ailleurs, il est important de noter que la matrice R est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont donnés par la transformée discrète de Fourier d'une colonne de la matrice [17, 26, 33, 73].

Par extension séparable des algorithmes mono dimensionnels [73], la convolution en dimension deux répond à l'équation:

$$s(i, j) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq I \\ 1 \leq l \leq I}} r(i-k, j-l)\rho(k, l) \quad 1 \leq i, j \leq J \quad [\text{IV.6}]$$

Et la matrice associée à ce système linéaire est de la forme block Toeplitz :

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ R_2 & R_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & R_2 & \ddots & 0 \\ R_I & \vdots & \ddots & R_1 \\ 0 & R_I & \ddots & R_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & R_I \end{pmatrix} \text{ avec } R_i = \begin{pmatrix} r(i,1) & 0 & \cdots & 0 \\ r(i,2) & r(i,1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & r(i,2) & \ddots & 0 \\ r(i,J) & \vdots & \ddots & r(i,1) \\ 0 & r(i,J) & \ddots & r(i,2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r(i,J) \end{pmatrix} \quad [\text{IV.7}]$$

IV.1.2. La déconvolution un problème mal posé.

La déconvolution est l'opération qui consiste à inverser l'équation de convolution [IV.1] pour estimer le signal le plus proche de $\rho(x)$ à partir de son image $S(x)$. Ce problème d'inversion est simple en apparence, mais n'est absolument pas trivial à résoudre. Il correspond à un problème mal posé au sens de Hadamard[47] [33, 46] [14] car il ne satisfait pas les trois conditions suivantes:

- Existence d'une solution.
- Unicité de la solution.
- Stabilité de la solution par rapport aux données.

Les difficultés posées par les deux premières conditions sont classiques pour la résolution d'équations. Par contre, la stabilité est une propriété non respectée dans les problèmes inverses, elle signifie qu'une petite perturbation dans les mesures $S(x)$ n'introduit qu'une petite perturbation dans la solution $\rho(x)$. Dans les problèmes inverses par définition une petite perturbation des données S peut entraîner d'énormes variations de la solution ρ . Ce phénomène est du au fait que l'image de l'ensemble de départ par l'opérateur R n'est pas un ensemble fermé [33]. Ainsi une petite perturbation dans cet ensemble peut nous amener en dehors de l'image de cette application, le S ne correspondant alors à aucun ρ possible.

L'équation de convolution [IV.1] peut être modifiée pour tenir compte du bruit. Dans l'hypothèse d'un bruit additif, elle s'exprime par:

$$s(x) = r * \rho(x) + n(x) \quad [\text{IV.8}]$$

Soit encore dans l'espace de Fourier :

$$\hat{s}(\omega) = \hat{r}(\omega) \hat{\rho}(\omega) + \hat{n}(\omega) \quad [\text{IV.9}]$$

L'existence et l'unicité de l'objet ρ sont assurées si le spectre de la transformée de Fourier du noyau de la convolution \hat{r} est non nul. La solution peut être calculée par une simple division :

$$\frac{\hat{s}(\omega)}{\hat{r}(\omega)} = \hat{\rho}(\omega) + \frac{\hat{n}(\omega)}{\hat{r}(\omega)} \quad [\text{IV.10}]$$

Même dans ce cas, au voisinage des fréquences critiques ω_c , où $\hat{r}(\omega)$ est proche de zéro, le terme $\frac{\hat{n}(\omega)}{\hat{r}(\omega)}$ domine l'équation. Ce qui explique l'amplification du bruit pour ces fréquences, cela même si

le bruit initial $n(x)$ est faible.

Le problème de la stabilité fait intervenir une notion fondamentale et importante pour la résolution de tout système linéaire. Il s'agit du nombre de conditionnement de la matrice associée au système linéaire défini par :

$$\text{Cond}(R) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad [\text{IV.11}]$$

Les σ_k sont les valeurs singulières de la matrice R . Elles correspondent aux valeurs propres de la matrice $R^T R$. Puisque les vecteurs propres de R sont les vecteurs de base de la transformée de Fourier discrète (TFD), et ses valeurs propres sont données par la TFD du noyau de convolution $\hat{r}(\omega)$, alors, le conditionnement dépend du comportement du spectre de R . Numériquement, le conditionnement est relié au problème de la sensibilité de la solution $\rho(x)$ aux variations des acquisitions $s(x)$ avec le bruit. En effet, supposons que les données sont représentées avec une perturbation due au bruit : $s + \Delta s$, la solution associée est elle-même calculée avec une imprécision $\rho + \Delta \rho$ qui vérifie:

$$R(\rho + \Delta \rho) = s + \Delta s \quad [\text{IV.12}]$$

Alors la perturbation Δs sur la solution vérifie :

$$\frac{\|\Delta\rho\|}{\|\rho\|} \leq \text{Cond}(R) \frac{\|\Delta s\|}{\|s\|} \quad [\text{IV.13}]$$

De manière analogue, on peut prévoir les effets d'une erreur sur la matrice R qui peut provenir d'une erreur sur le modèle ou de l'approximation utilisée pour traiter ce modèle:

$$(R + \Delta R)(\rho + \Delta\rho) = s \quad [\text{IV.14}]$$

et on tire une relation similaire :

$$\frac{\|\Delta\rho\|}{\|\rho + \Delta\rho\|} \leq \text{Cond}(R) \frac{\|\Delta R\|}{\|R\|} \quad [\text{IV.15}]$$

Ainsi si R est bien conditionné ($\text{Cond}(R)$ voisin de 1), la résolution du problème est aisée. Par contre, lorsque le conditionnement est mauvais ($\text{Cond}(R)$ est grand) les erreurs vont être amplifiées.

Le nombre de conditionnement est une notion intéressante à préciser si l'on ne veut pas être surpris par la mauvaise qualité d'un résultat numérique ou par le mauvais comportement de l'algorithme. Malheureusement cette valeur est parfois difficile à calculer pour des matrices de grande taille, communes en imagerie.

IV.1.3. Régularisation.

La méthode de déconvolution la plus simple consiste à inverser la matrice du problème, mais nous l'avons vu ceci n'est possible qu'en l'absence de valeurs propres nulles (conditionnement finis). La décomposition en valeurs singulières tronquées (DVST) permet d'éviter l'écueil précédent tout en restant dans la même optique c'est à dire en minimisant l'écart de l'image de la solution par rapport aux données mesurées. Le critère le plus couramment utilisé est le critère des moindres carrés:

$$\rho_{\text{solution}} = \arg \min \left\{ E \left\{ \|r * \rho(x) - s(x)\| \right\} \right\} \quad [\text{IV.16}]$$

Il est convenable dans le cas de bruit Gaussien et peut être remplacé par des critères statistiques plus évolués. Le critère du maximum de vraisemblance comme nous le verrons permet d'améliorer la liaison entre les données et l'image de la solution, notamment en cas de faible rapport signal sur bruit.

Par opposition à ces méthodes traditionnelles qui tentent de coller au mieux aux données, les méthodes de régularisation introduisent un nouveau concept. Thikonov et Arsénine [98] introduisent des contraintes supplémentaires sur la solution afin de réduire l'ensemble des solutions possibles, et éviter des écarts trop importants avec la vraie solution du problème. Paradoxalement la relation qui relie l'image de ces nouvelles solutions aux données peut se révéler plus lâche. On classera les méthodes régularisées en citant explicitement les contraintes imposées. Nous nous limiterons dans ce travail aux contraintes les plus réalistes sur notre objet:

- Solution à support borné
- Solution positive
- Douceur de la solution

IV.2. Méthodes d'étude

IV.2.1. Problème simplifié

L'étape clé de la reconstruction CACAO avec une approximation diagonale dominante est un problème de déconvolution donnée par l'équation suivant:

$$s(i) = r * \rho(i) + n(i) \quad 1 \leq i \leq m \quad [\text{IV.17}]$$

Où r est le noyau de convolution de forme rectangulaire, ρ est l'objet idéal (désiré), s représente les données après sommation décalage et n représente le bruit. Ce bruit provient, par ordre d'importance décroissante: du bruit poissonien dû au nombre limité de photons détectés, des autres lignes de la matrice de transfert et d'autres causes précédemment citées. Dans ce chapitre étudiant la déconvolution, nous nous limiterons à un bruit purement poissonien. Le problème traité dans ici est donc similaire à celui de l'acquisition photonique à partir d'une fente, représentée mathématiquement par le noyau de convolution rectangulaire.

En termes matriciels, l'équation [IV.17] s'écrit sous la forme :

$$s = R\rho + n \quad [\text{IV.18}]$$

Où R est défini comme dans l'équation [IV.5].

IV.2.2. Simulations

IV.2.2.1 Description

Afin de s'affranchir au mieux de la dépendance des résultats de la déconvolution en fonction du bruit et du signal, nous avons réalisé une grande quantité de tests (typiquement plus de 100 tests). Le signal choisi variant aléatoirement à chaque test et le bruit également.

Afin d'augmenter la fiabilité statistique, les simulations sont appairées: c'est à dire que pour chaque choix, signal-bruit, deux méthodes de déconvolution sont analysées. Par suite, chaque méthode consiste à résoudre les mêmes problèmes et la même variété statistique.

Le signal est échantillonné sur un nombre de points égal à 64, les 18 premiers et derniers points sont nuls afin de simuler un objet initial à support borné de largeur 28 (Figure IV.2-a). Les points centraux sont en premier lieu formés par tirage pseudo-aléatoire réel de probabilité uniforme (signal blanc) entre 0 et 1 (signal positif) Ce signal est pour certains tests, convolué une première fois par un signal rectangulaire de largeur 3 pour s'approcher des signaux réels qui présentent une relative douceur. A partir de cet objet, on effectue un produit de convolution avec un noyau de forme rectangulaire d'une largeur donnée, ce qui nous donne l'image sans bruit(Figure IV.2-c). Enfin l'intégrale du signal est mise à l'échelle par multiplication par une constante afin de simuler une grande gamme de photons émis et différents rapports signal sur bruit en entrée.

Le bruit est ensuite appliqué à cette image qui représente les espérances mathématiques (à valeurs réelles) par simulation pseudo-aléatoire de bruit poissonien. Plusieurs niveaux de bruit ont été simulés correspondant à différents nombres de coups dans l'image typiquement de 10 à 10^{10} photons(Figure IV.2-d,e,f,g,h).

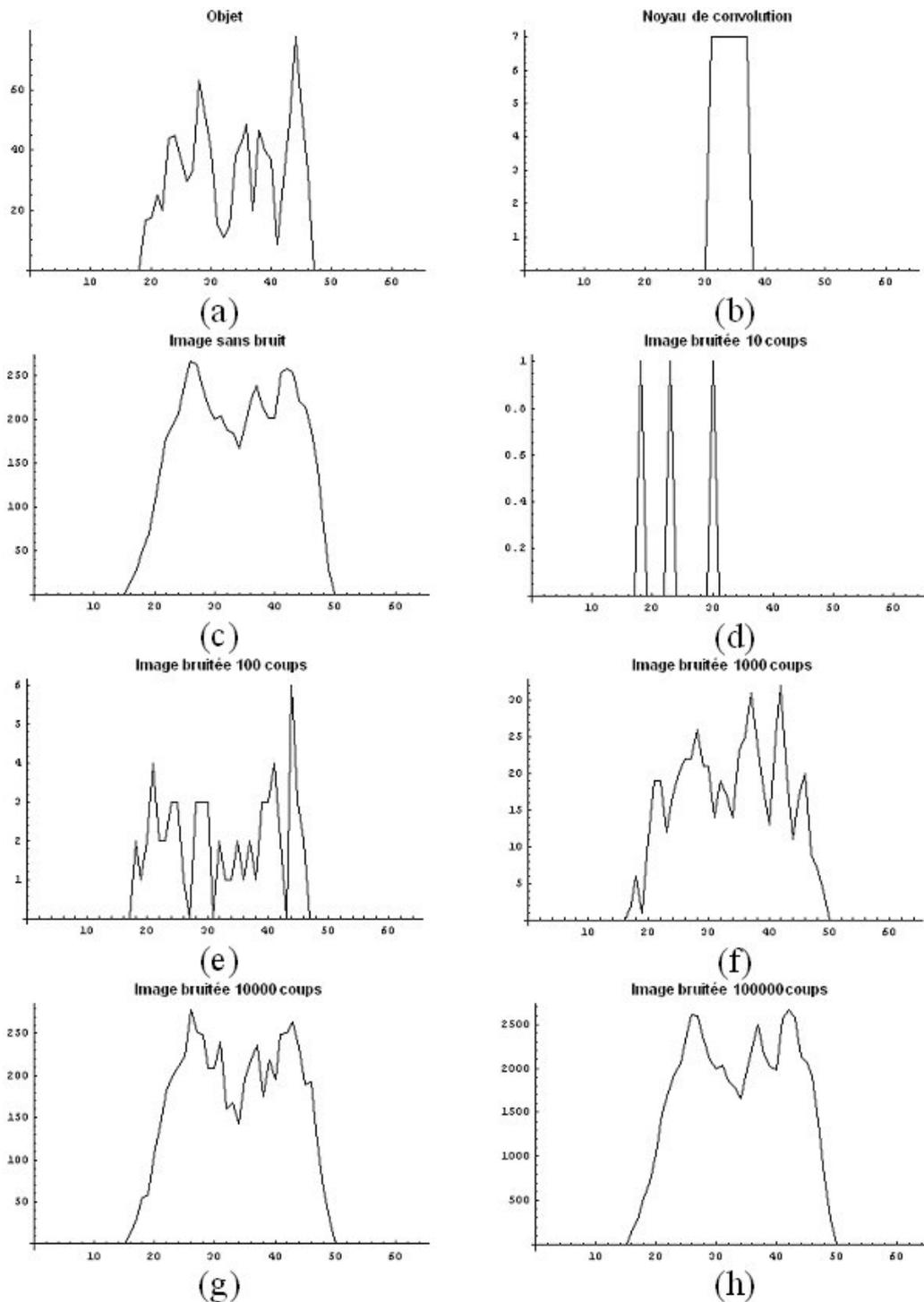


Figure IV.2: Les différentes étapes de la simulation: (a) L'objet initial. (b) Le noyau de convolution (largeur 7). (c) L'image obtenue après la convolution de l'objet par le noyau. (d-e-f-g-h) L'image bruitée par un bruit poissonnien pour différentes espérance de nombre de coups (10,100,1000,10000,100000).

La simulation est réalisée selon une technique de Monte-Carlo classique. C'est à dire, à partir de l'espérance μ , on simule la distribution de répartition exponentielle des intervalles de temps séparant l'arrivée des photons sur le détecteur. La somme de ces intervalles de temps est comparée au temps de

la mesure et le nombre d'intervalles donne la valeur du signal bruité. La Figure IV.2 représente différentes images sans bruit dont les intégrales ont été mises à l'échelle des différentes espérances de nombres de coups détectés (10,100,1000,10000) les signaux bruités correspondants sont également représentés.

IV.2.2.2 Calcul du rapport signal sur bruit et du gain en rapport signal sur bruit.

A titre d'exemple la figure ci-dessous donne le résultat d'une déconvolution par la méthode de décomposition en valeurs singulières tronquées (DVST) de l'objet de la Figure IV.2 pour 1000 photons détectés. Nous verrons dans le paragraphe suivant l'analyse détaillée de cette méthode.

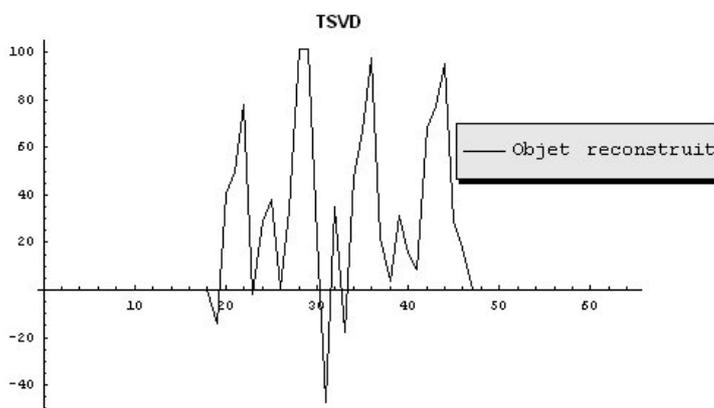


Figure IV.3: La déconvolution par la méthode de déconvolution par valeurs singulières tronquées (DVST)

Le gain en rapport signal sur bruit (GainRSB) a été défini précédemment. Les résultats des études de déconvolutions seront représentés dans la suite de ce chapitre, sur des graphes comportant en ordonné les GainRSB et en abscisse les rapports signal sur bruit (RSB) en entrée. Sur ces graphes, chaque point correspond à une simulation de signal et de bruit et à un calcul de déconvolution. La Figure IV.4 montre les résultats obtenus avec la méthode DVST pour un noyau de déconvolution rectangulaire de largeur 7. Cette représentation montre que le GainRSB est pratiquement constant sur une grande gamme de rapport signal sur bruit (10^{10}). Cette étude nous permettra de comparer facilement les différentes méthodes de déconvolution.

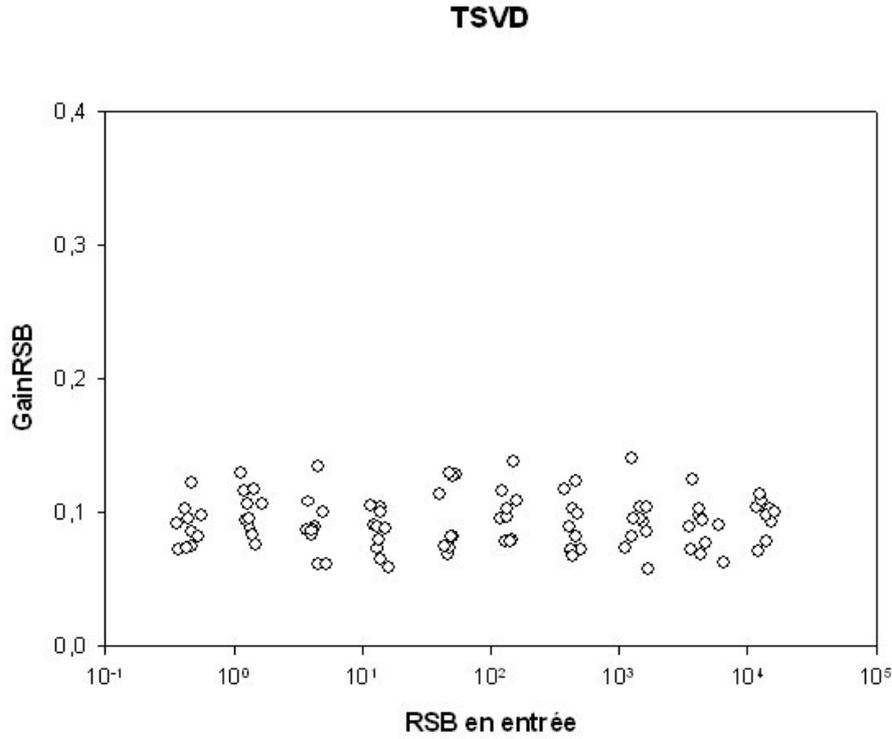


Figure IV.4: GainRSB en fonction du RSB en entrée pour la méthode de déconvolution par valeur singulière tronquée (TSVD)

IV.3. Étude des différentes méthodes de Déconvolution avec un noyau rectangulaire

IV.3.1. Décomposition en valeurs singulières tronquées (DVST)

La méthode de troncature de décomposition en valeurs singulières utilise des bases formées des vecteurs singuliers de R . La décomposition en valeurs singulières (DVS) d'une matrice R est :

$$R = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^k u_i \sigma_i v_i^T \quad \text{avec } k = \text{Max}(n, m) \quad [\text{IV.19}]$$

Où $U = (U_1, \dots, U_m)$ et $V = (V_1, \dots, V_n)$ sont des matrices orthogonales (i.e. $U^T U = V^T V = I_m$), les scalaires σ_i sont les valeurs singulières de R classées dans l'ordre décroissant $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$, tel que u_i et v_i sont vecteurs singuliers respectivement à gauche et à droite de R et $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Une méthode de calcul de problème mal posé consiste à tronquer les valeurs singulières nulle dans la DVS de R . Alors la décomposition [IV.19] devient :

$$R = R_p = \sum_{i=1}^p u_i \sigma_i v_i^T \quad \text{où} \quad p = \text{rang}(R) \leq k \quad [\text{IV.20}]$$

Une solution du problème [IV.18] à partir de la restriction au rang de la matrice R est donnée par :

$$\tilde{\rho} = \sum_{i=1}^p \frac{u_i^T s}{\sigma_i} v_i \quad [\text{IV.21}]$$

Si le problème a été remplacé par une matrice circulante, on peut également appliquer la méthode DVST dans l'espace de Fourier.

En effet, reprenant l'équation [IV.10] :

$$\frac{\hat{s}(\omega)}{\hat{r}(\omega)} = \hat{\rho}(\omega) + \frac{\hat{n}(\omega)}{\hat{r}(\omega)}$$

Le noyau de convolution du problème est rectangulaire, par conséquent, sa transformée de Fourier

(TF) est un sinus cardinal $\frac{\sin(D\pi\omega)}{D\pi\omega}$ si D est la largeur de noyau, c'est à dire le diamètre de la fente.

Les fréquences critiques ω_c qui annulent la transformé de Fourier du noyau, sont des fréquences multiples de $1/D$. Ces fréquences correspondent aux valeurs propres nulles en terme matriciel. Ceci est illustré dans la Figure IV.5:

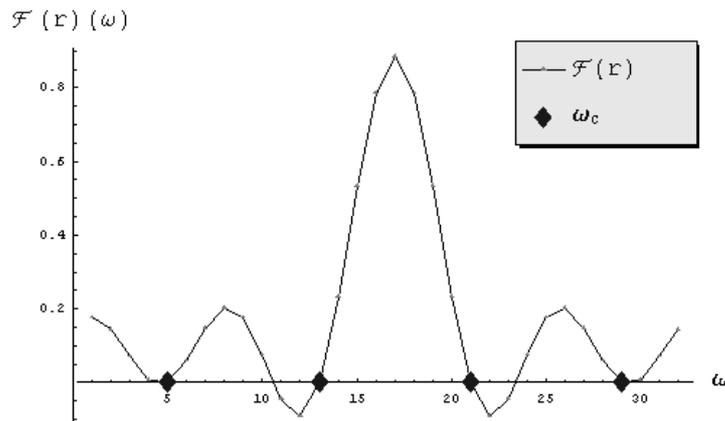


Figure IV.5: Transformé de Fourier de noyau rectangulaire.

La solution donnée par la DSVT consiste donc à annuler ρ pour cette fréquence, on a :

$$\tilde{\rho} = \begin{cases} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\hat{s}(\omega)}{\hat{r}(\omega)} \right) & \text{si } \hat{r}(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \omega = \omega_c \end{cases} \quad [\text{IV.22}]$$

Comme seules les valeurs singulières non nulle de la matrice R sont prises en compte, le calcul du nombre de conditionnement pour le système par la méthode TSVD devient fini. La régularisation par troncature est donc un moyen pour éviter les ambiguïtés liées aux valeurs propres nulles du système.

La Figure IV.4 donnée au chapitre précédent montre les valeurs typiques du GainRSB que l'on peut obtenir par la méthode DVST.

Quand la dimension de l'objet augmente ou que le pas de l'échantillonnage diminue, les plus petites valeurs singulières tendent vers zéro, et le conditionnement se dégrade (voir Figure IV.6):

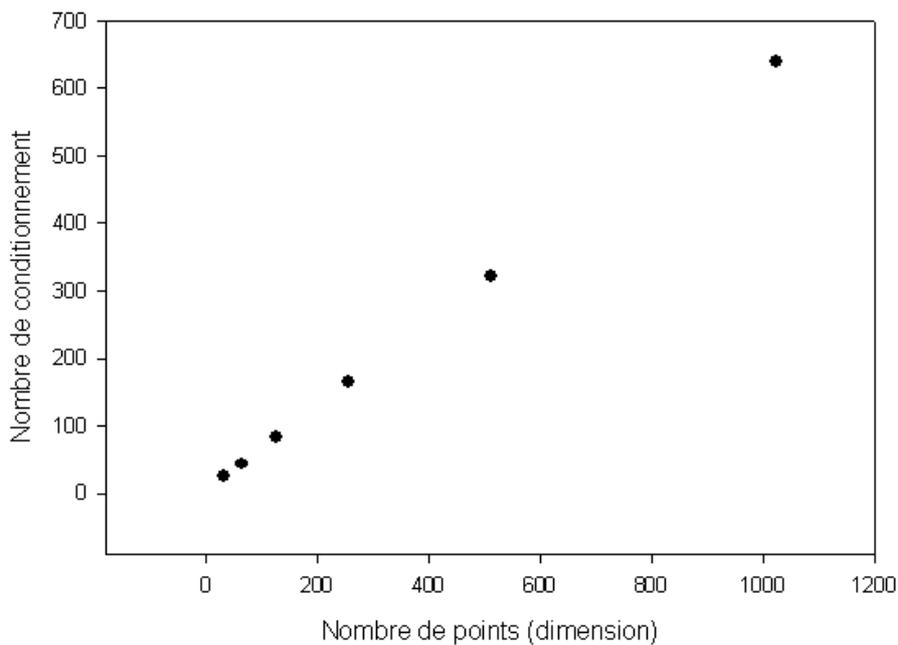


Figure IV.6: Variation du nombre de conditionnement avec le nombre de points pour un système de convolution linéaire à un seul noyau de largeur 7.

Lorsque le noyau de convolution s'élargit, le conditionnement augmente également. [33]. Le graphe ci-dessous illustre cette situation pour un nombre de points égale à 64 et des noyaux rectangulaires. Ce comportement explique que l'élargissement de la fente d'acquisition n'apporte aucun bénéfice en présence de bruit photonique, du moins pour la déconvolution par DVST.

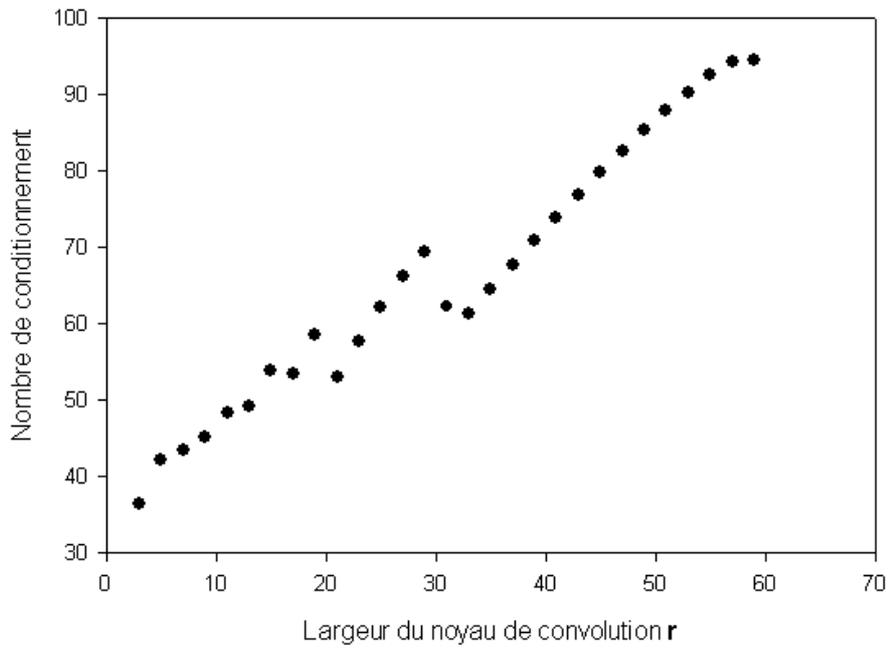


Figure IV.7: Variation du nombre de conditionnement pour un système de convolution linéaire avec la largeur du noyau de convolution.

IV.3.2. Maximum de vraisemblance (Maximum Likelihood - Expectation Maximisation (ML-EM))

IV.3.2.1 ML-EM avec bruit de Poisson

Description:

C'est la méthode la plus utilisée dans les reconstructions d'images en tomographie d'émission [22, 29, 34, 35, 38, 88, 93, 106, 110]. Cette technique est itérative, elle utilise le fait que le bruit de comptage obéit à une statistique de Poisson [voir Ch2]. La solution de l'équation [IV.17] est remplacée par la recherche d'un estimateur de l'équation suivante:

$$\mu_i = E\{s(i)\} = r * \rho(i) \quad 1 \leq i \leq m \quad [\text{IV.23}]$$

μ_i est l'espérance de mesure de s_i . Chaque mesure individuelle obéit à une loi de Poisson, qui a été rappelé précédemment.

Pour m mesures indépendantes, la probabilité totale est donnée par :

$$P(n_1, \dots, n_N) = \prod_{k=1}^m e^{-\mu_k} \frac{\mu_k^{n_k}}{n_k!} \quad [\text{IV.24}]$$

Les espérances de détection $\{\mu_k\}$ représentent la moyenne du processus de Poisson mais aussi la variance individuelle des mesures par l'instrument. La fonction logarithme de la vraisemblance [68, 93], est donnée par :

$$\begin{aligned}
 L(n | \mu) &= \text{Log} (p(S/\rho)) \\
 &= \text{Log} \left(\prod_{k=1}^m e^{-\mu_k} \frac{\mu_k^{n_k}}{n_k!} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^m (-\mu_k + n_k \text{Log}(\mu_k) - \text{Log}(n_k!))
 \end{aligned}
 \tag{IV.25}$$

L'Estimateur du Maximum de Likelihood est défini par le paramètre objet ρ qui maximise la fonction de la densité de probabilité des mesures. Alors, en l'absence d'une information a priori sur l'objet initial ρ [Voir introduction ch1], l'estimateur du maximum de vraisemblance est donné par :

$$\tilde{\rho} = \underset{\rho}{\text{Max}} \text{Log} (p(S/\rho))
 \tag{IV.26}$$

La solution vérifie donc :

$$\frac{\partial \text{Log} (p(S/\rho))}{\partial \rho} = 0
 \tag{IV.27}$$

Cela conduit à résoudre l'équation linéaire suivante:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \text{Log} (p(S/\rho))}{\partial \rho} &= R^T \frac{\partial \text{Log} (L(S | \mu))}{\partial \mu} \\
 &= -R^T \left[\left(1 - \frac{s(1)}{\mu(1)} \right), \dots, \left(1 - \frac{s(m)}{\mu(m)} \right) \right]^T = 0
 \end{aligned}
 \tag{IV.28}$$

Par suite on a :

$$\begin{cases} \left(\frac{R^T s}{\mu} \right)_i = \alpha & 1 \leq i \leq m, i \in \text{Support des mesures} \\ \text{avec } \alpha = \alpha_i = \sum_{l=1}^m R_{l,i} \end{cases}
 \tag{IV.29}$$

La résolution de ce type de problème peut se faire par plusieurs méthodes numériques[42, 69, 90, 104]. Nous étudierons seulement la méthode de Picard (ML-P) et la méthode de gradient conjugué (ML-CG).

ML-P:

La méthode la plus simple à implémenter et la plus utilisée dans l'imagerie médicale est celle de Picard [53, 54]. En effet, en multipliant par ρ les deux cotés de l'équation [IV.29], on trouve le schéma itératif par ajustement multiplicatif suivant :

$$\begin{cases} \rho^0 = s \\ \alpha \rho^{k+1} = \frac{R^T s}{R \rho^k} \rho^k \end{cases} \quad \text{[IV.30]}$$

Où α est le paramètre défini précédemment dans l'équation [IV.29], il exprime la normalisation des colonnes de la matrice R. Pour l'itération initiale ρ^0 , on peut choisir un objet constant ou la solution donnée par la méthode de DVST. Si le choix de la première itération est proche de la solution du problème, l'algorithme converge très rapidement.

D'une façon similaire, l'algorithme de ML-EM peut être exprimé en utilisant le produit de convolution :

$$\begin{cases} \rho^0 = s \\ \alpha \rho^{k+1} = \left[\frac{s}{r * \rho^k} * r^* \right] \rho^k \end{cases} \quad \text{[IV.31]}$$

r^* est le conjugué complexe de r . Le paramètre α est exprimé par :

$$\alpha = \hat{r}(0) \quad \text{[IV.32]}$$

Notons que cet algorithme coïncide avec celui qu'avaient développé Richardson et Lucy séparément [72, 87]. L'ajustement multiplicatif présente de plus l'avantage, si la fonction initiale est positive, de maintenir facilement une contrainte de positivité de la solution.

ML-CG

La méthode du gradient conjugué a été proposée pour résoudre itérativement les équations [IV.29] [104]. ce qui conduit à l'algorithme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\rho^0 = (RR^t)^{-1} R^t s \\
\rho^{k+1} = \rho^k + \alpha^k R^t e^k \\
\mu^{k+1} = \mu^k + \alpha^k (RR^t) e^k \\
\text{ou} \\
e_k = \left[\left(1 - \frac{s(1)}{\mu^k(1)} \right), \dots, \left(1 - \frac{s(m)}{\mu^k(m)} \right) \right]^T \\
\alpha^k = \frac{\langle R^t e^k, R^t e^k \rangle}{(RR^t e^k)^T \text{diag} \left\{ \frac{1}{\mu^k} \right\} (RR^t e^k)}
\end{array} \right. \quad [\text{IV.33}]$$

IV.3.2.2 Déconvolution avec la méthode de ML-EM

Les conditions choisies pour tous les exemples de déconvolution de ce paragraphe sont identiques. On déconvolue un signal contaminé avec un bruit poissonien par un noyau de déconvolution de largeur 7 en utilisant les deux méthodes itératives développées précédemment ML-P et ML-GC. Le nombre d'itération choisi est vingt itérations pour les deux méthodes. Les Figure IV.9 et Figure IV.10 donnent des exemples de solution reconstruite.. La Figure IV.11 donne le GainRSB en fonction du RSB à l'entrée pour les deux méthodes: ML-P et ML-CG.

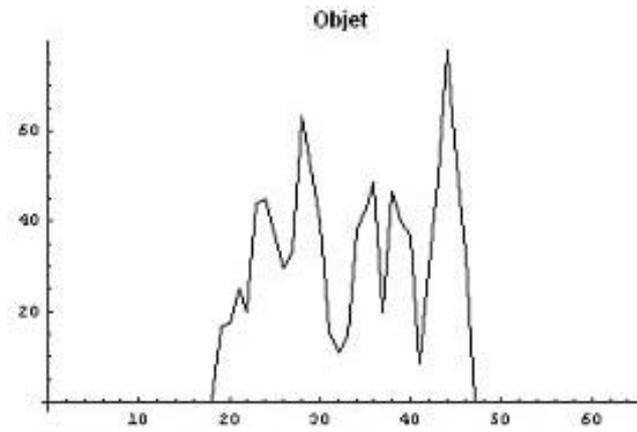


Figure IV.8: Objet de départ

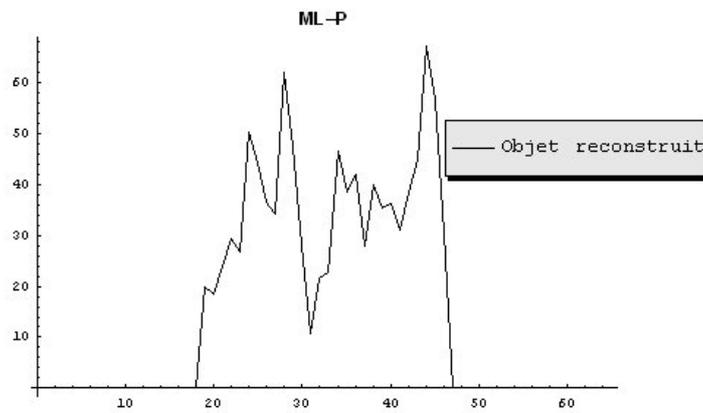


Figure IV.9: La déconvolution par la méthode de Maximum de Likelihood en utilisant l'itération de Picard.

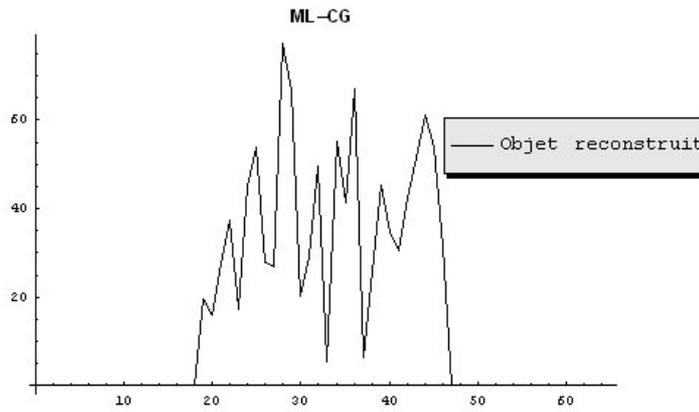


Figure IV.10 La déconvolution par la méthode de Maximum de Likelihood en utilisant l'itération de Gradient Conjugué.

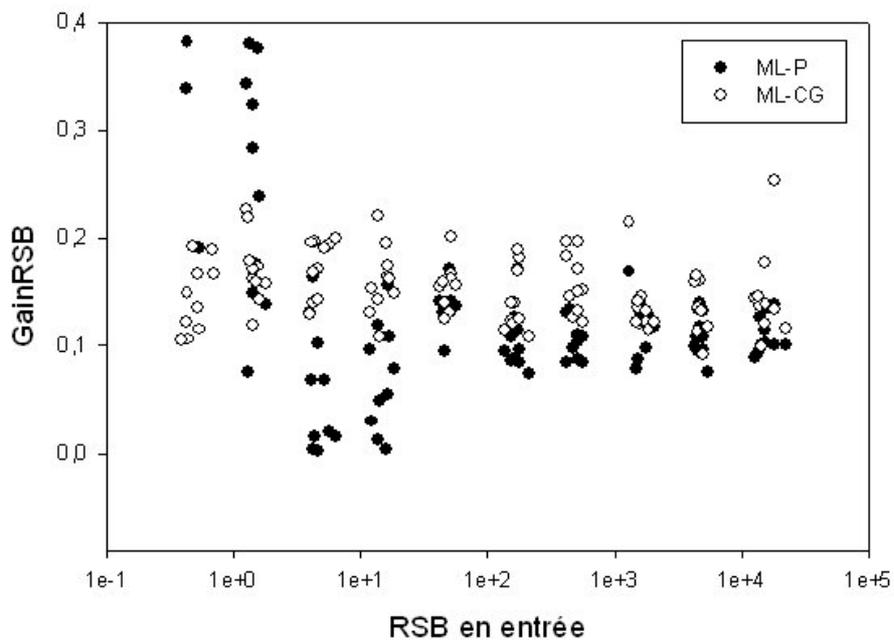


Figure IV.11: Gain en RSB en fonction du RSB en entrée. Les cercles pleins correspondent à la méthode du ML-CG. Les autres cercles représentent les résultats obtenus par la méthode ML-P.

D'après cette simulation, nous constatons que la reconstruction à partir de la méthode "ML-CG" est moins bonne que la méthode de Picard (ML-P) pour un faible nombre de photons. Dans les autres cas, la méthode de "ML-CG" est meilleur que la méthode de "ML-P". Cela peut être expliquer par la vitesse de convergence de la méthode de la méthode "ML-CG" par rapport à "ML-P". Cependant, la méthode de "ML-P" reste une technique très intéressante car elle est très simple à implémenter et aussi à utiliser.

IV.4. Acquisition-déconvolution avec des noyaux rectangulaires : intérêt d'une acquisition supplémentaire.

IV.4.1. Remplacement du problème à l'acquisition

Il est possible lors de l'acquisition de remplacer Le problème de la déconvolution [IV.17] à un seul noyau par un double problème de déconvolution suivant deux réponses impulsionnelles R_1 et R_2 [10, 11][Bégot, 1998 #89][36, 60]. On est alors en présence d'un système d'équations de convolution, surdimensionné :

$$\begin{cases} s_1(i) = r_1 * \rho(i) + n_1(i) \\ s_2(i) = r_2 * \rho(i) + n_2(i) \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{[IV.34]}$$

Physiquement, on peut facilement réaliser deux acquisitions du même objet à travers deux fentes de largeurs différentes. Pour une acquisition par un ensemble de détecteurs pixellisés, on peut, par exemple, changer le grandissement de l'image avant le détecteur. Pour le projet CACAO on utilisera des trous de largeurs différentes.

IV.4.2. Résolution de la double équation de déconvolution par la méthode dite du Noyau composite (NC).

La méthode du noyau composite a été introduite pour réduire le nombre de conditionnement du système [60][Bégot, 1998 #89] [85]. Elle consiste à éviter les valeurs faibles de la fonction de transfert liées aux fréquences qui annulent le sinus cardinal (Cf: paragraphe précédent). Ces fréquences critiques n'apparaissent pas pour les mêmes valeurs si les deux noyaux ont des largeurs différentes L_1 et L_2 dont les valeurs sont premières entre elles [10, 11, 24].

La méthode suit l'algorithme suivant:

$$\text{Pour tout } \omega : \hat{\rho}(\omega) = \begin{cases} \frac{\hat{r}_1^*(\omega) \hat{s}_1(\omega)}{|\hat{r}_1(\omega)|^2} & \text{si } |\hat{r}_1(\omega)| \geq |\hat{r}_2(\omega)| \\ \frac{\hat{r}_2^*(\omega) \hat{s}_2(\omega)}{|\hat{r}_2(\omega)|^2} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{[IV.35]}$$

Elle utilise alternativement l'un ou l'autre des noyaux en choisissant toujours le noyau dont le module est maximal (Figure IV.12).

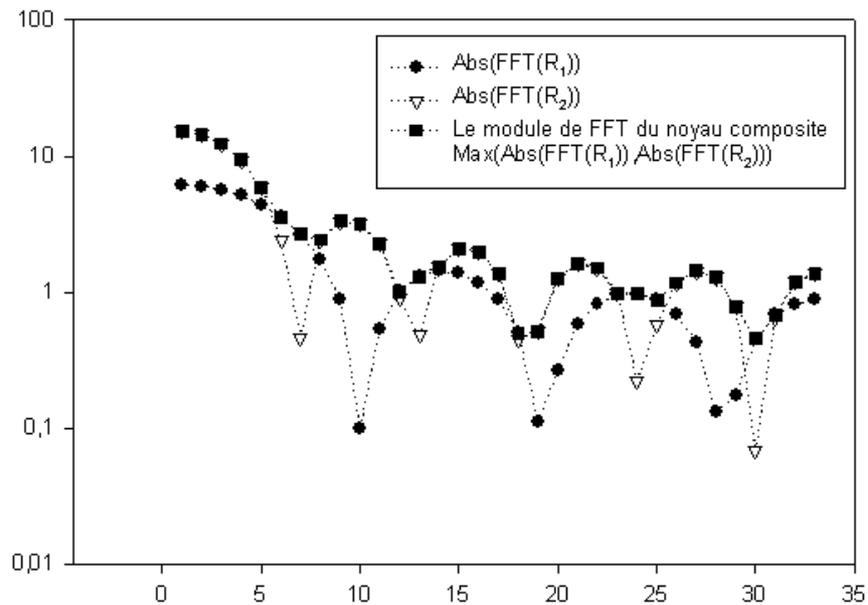


Figure IV.12: Schéma montrant les modules des transformées de Fourier de deux noyaux rectangulaires de largeurs différentes, 7 pixels et 11 pixels. L'algorithme décrit utilise le maximum de ces deux courbes représenté par des carrés sur la figure.

Il est important de noter qu'aucun phénomène de raccordement néfaste ne survient au changement de noyau puisque les deux équations donnent la même solution en l'absence de bruit. Seul le bruit résiduel, provenant d'un mélange des transformées de Fourier des bruits est morcelé.

V. Comparaison et résultats

IV.4.3. Comparaison de la méthode du NC avec la DVST

La Figure IV.13 montre les résultats obtenus en termes de gain en signal sur bruit pour différentes valeurs de RSB en entrée. Les résultats de la déconvolution par DVST en utilisant le noyau le plus étroit (qui donne théoriquement le meilleur résultat) sont représentés par des cercles. Les résultats de la déconvolution par noyau composite sont représentés par des disques noirs. Les deux noyaux utilisés ont respectivement 7 et 9 pixels de large.

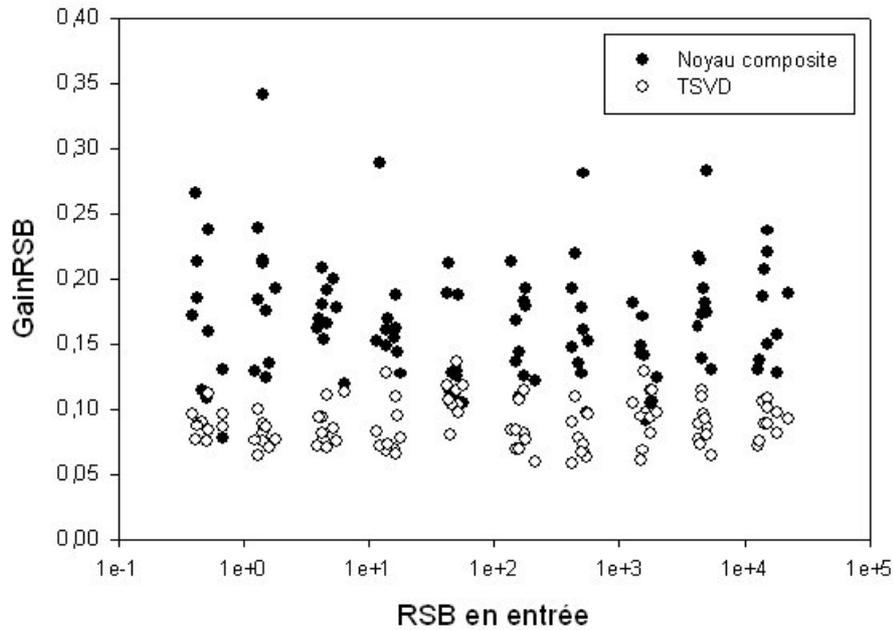


Figure IV.13: Représentation du GainRSB (quotient du rapport signal sur bruit en sortie sur le rapport signal sur bruit en entrée) en fonction du RSB en entrée. 100 simulations différentes sont représentées.

IV.4.4. Comparaison de la méthode du NC à 2 Noyaux avec ML-CG à un seul noyau.

La Figure IV.14 montre les gains en rapport signal sur bruit, obtenus par la méthode du Maximum de vraisemblance avec l'itération de gradient conjugué à un seul noyau et comparés à ceux obtenus par la méthode du noyau composite. Un examen de ces résultats confirme la robustesse de la méthode de noyau composite. De plus, la méthode du NC reste la méthode la plus rapide puisque les méthodes de ML sont des méthodes itératives et leurs complexités est d'ordre $o(N^3)$.

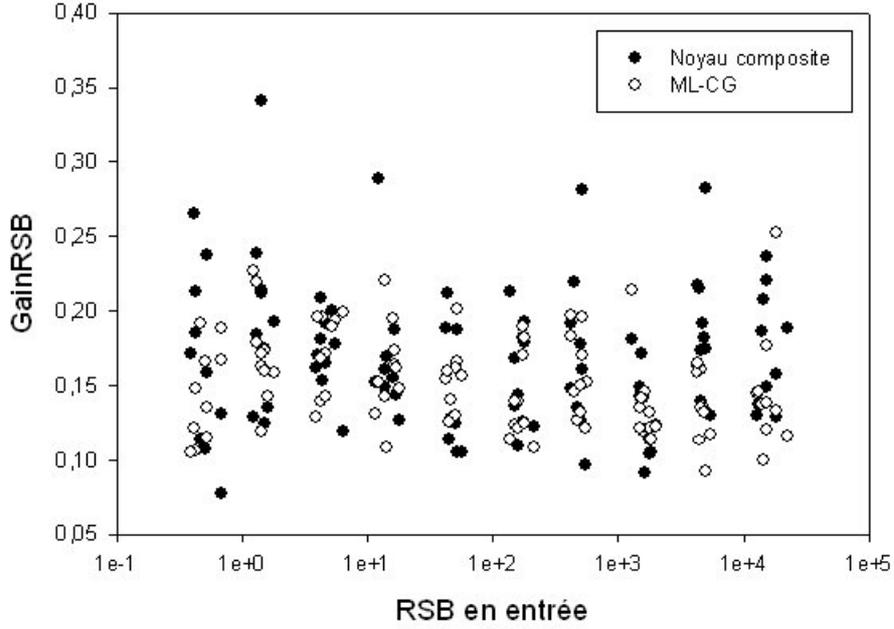


Figure IV.14: GainRSB en fonction du RSB en entrée. Les cercles pleins correspondent à la méthode du noyau composite. Les autres cercles représentent les résultats obtenus par la méthode ML-CG à 20 itérations.

IV.5. Étude des différentes méthodes de Déconvolution avec deux noyaux rectangulaires

Le choix d'un deuxième noyau pour le système CACAO nous a permis d'avoir des résultats satisfaisants avec la méthode de noyau composite. Cependant, l'optimisation des performances de ce type de problèmes a été un des nos objectifs pour améliorer les solutions ou les images reconstruites. Dans ce paragraphe, nous adaptons un ensemble des méthodes de reconstruction à notre problème à double acquisition afin de choisir la méthode la plus stable et rapide pour le système CACAO. Les noyaux de déconvolution utilisés dans cette étude sont des noyaux rectangulaires de largeur respectivement 7 et 9.

IV.5.1. Multi-kernel optimisation

La méthode multi-kernel optimisation consiste à résoudre le système de produits de convolution [IV.34] par un critère d'optimisation fonctionnelle [10, 12, 24]. Le critère que nous avons utilisé pour cette étude est de la minimisation de l'erreur quadratique de l'équation [IV.34] :

$$\rho_{solution} = \arg \min \left\{ \|s_1 - r_1 * \rho\|^2 + \|s_2 - r_2 * \rho\|^2 \right\} \quad [IV.36]$$

C. Berenstein et E.V. Patrick ont montré que ce système admet une solution optimale lorsque le rapport des largeurs des deux noyaux rectangulaires r_1 et r_2 est irrationnelle $\left(\frac{r_1}{r_2} \notin \mathbb{Q}\right)$ [10].

Pour notre problème CACAO, les largeurs des réponses impulsionnelles (noyaux) varient suivant la profondeur de l'image. Nous avons ajouté une contrainte a priori de douceur $(\lambda \|h * \rho\|^2)$ sur les solutions [36]. L'introduction de cette régularisation ne complique pas l'algorithme mais impose une règle empirique sur le poids de l'a priori λ que l'on souhaite. L'algorithme proposé devient donc:

$$\rho_{solution} = \arg \min \left\{ \|s_1 - r_1 * \rho\|^2 + \|s_2 - r_2 * \rho\|^2 + \lambda \|h * \rho\|^2 \right\} \quad [IV.37]$$

Utilisant l'égalité de Plancherel, le problème devient:

$$\rho_{solution} = \arg \min \left\{ \|\hat{s}_1 - \hat{r}_1 \cdot \hat{\rho}\|^2 + \|\hat{s}_2 - \hat{r}_2 \cdot \hat{\rho}\|^2 + \lambda \|\hat{h} \cdot \hat{\rho}\|^2 \right\} \quad [IV.38]$$

Donc, la solution peut être donnée par

$$\hat{\rho}_{solution}(\omega) = \frac{(\hat{r}_1^*(\omega)\hat{s}_1(\omega) + \hat{r}_2^*(\omega)\hat{s}_2(\omega))}{|\hat{r}_1(\omega)|^2 + |\hat{r}_2(\omega)|^2 + \lambda |\hat{h}(\omega)|^2} \quad [IV.39]$$

La Figure IV.15 représente Les gains en rapport signal sur bruit (GainRSB) en fonction du rapport signal sur bruit RSB en entrée de la méthode de MKO. Dans cette simulation, Le paramètre de régularisation λ est optimisé, en fonction du nombre d'événements (photons) détectés N ($\lambda = 100/N$).

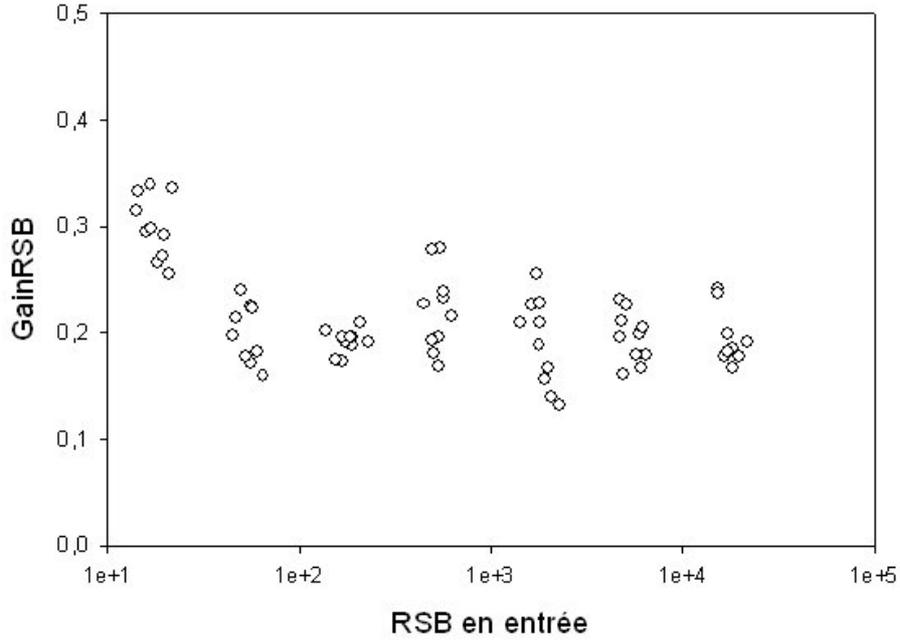


Figure IV.15: GainRSB en fonction du RSB en entrée pour la méthode de MKO avec $\lambda = 100/N$

IV.5.2. Méthode de Wiener à deux noyaux

Le filtre de Wiener consiste à minimiser au sens des moindres carrés la différence entre l'espérance mathématique de la solution et l'image reconstruite, [49, 80, 81].

Reprenant le système [IV.34] :

$$\begin{cases} s_1(i) = \rho * r_1(i) + n_1(i) \\ s_2(i) = \rho * r_2(i) + n_2(i) \end{cases}$$

Considérons $h = (h_1, h_2)$ un filtre linéaire invariant par translation. On cherche une estimation $\tilde{\rho}$ de la solution idéale ρ , définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(i) &= s_1 * h_1(i) + s_2 * h_2(i) \\ &= \sum_l h_1(l) s_1(i-l) + \sum_l h_2(l) s_2(i-l) \end{aligned} \quad [\text{IV.40}]$$

On suppose que le filtre h n'est pas causal et que ses coefficients minimisent l'estimation de l'écart quadratique moyen, noté ξ :

$$\xi = E\left(|e(i)|^2\right) \quad \text{[IV.41]}$$

$$\text{Où } e(i) = \rho(i) - \tilde{\rho}(i)$$

On applique le principe de filtrage statistique de Wiener, c'est à dire, trouver la solution du problème de minimisation de système [IV.41] afin d'estimer la solution ρ :

$$\frac{\partial \xi}{\partial h^*(k)} = E\left\{e(n) \frac{\partial e^*(n)}{\partial h^*(k)}\right\} \quad \text{[IV.42]}$$

Où E représente l'espérance mathématique. Pour deux noyaux on obtient:

$$\begin{cases} \frac{\partial e^*(i)}{\partial h_1^*(k)} = -s_1^*(i-k) \\ \frac{\partial e^*(i)}{\partial h_2^*(k)} = -s_2^*(i-k) \end{cases} \quad \text{[IV.43]}$$

En remplaçant dans [IV.42], on aura:

$$\begin{cases} E\{e(i) s_1^*(i-k)\} = 0 \\ E\{e(i) s_2^*(i-k)\} = 0 \end{cases} \quad \text{[IV.44]}$$

Ce qui est équivalent à:

$$\begin{cases} \rho(n) s_1^*(i-k) - \sum_l h_1(l) s_1(i-l) s_1^*(i-k) - \sum_l h_2(l) s_2(i-l) s_1^*(i-k) = 0 \\ \rho(n) s_2^*(i-k) - \sum_l h_2(l) s_2(i-l) s_2^*(i-k) - \sum_l h_1(l) s_1(i-l) s_2^*(i-k) = 0 \end{cases} \quad \text{[IV.45]}$$

Donc:

$$\begin{cases} r_{\rho s_1}(k) - \sum_l h_1(l) r_{s_1}(k-l) - \sum_l h_2(l) r_{s_2 s_1}(k-l) = 0 \\ r_{\rho s_2}(k) - \sum_l h_2(l) r_{s_2}(k-l) - \sum_l h_1(l) r_{s_1 s_2}(k-l) = 0 \end{cases} \quad \text{[IV.46]}$$

Où \mathbf{r}_s est l'autocorrélation de \mathbf{s} , et \mathbf{r}_{xy} la corrélation croisée de \mathbf{x} et \mathbf{y} .

En prenant en compte le bruit aditif, ceci se transforme dans l'espace des fréquences en:

$$\begin{cases} P_\rho R_1^* - H_1 \{ P_\rho |R_1|^2 + P_{n_1} \} - H_B P_{s_2 s_1} = 0 \\ P_\rho R_2^* - H_2 \{ P_\rho |R_2|^2 + P_{n_2} \} - H_1 P_{s_1 s_2} = 0 \end{cases} \quad [\text{IV.47}]$$

Où \mathbf{P}_x est l'énergie spectrale de \mathbf{x} qui est équivalente ici à une transformé de Fourier discrète d'autocovariance de \mathbf{x} .

Si l'on suppose que les bruits sont non-corrélés entre eux et avec le signal, on trouve :

$$\begin{cases} H_1 = \frac{\alpha_2 R_1^*}{\{ \alpha_1 |R_2|^2 + \alpha_2 |R_1|^2 \} + \alpha_1 \alpha_2} \\ H_B = \frac{\alpha_1 R_2^*}{\{ \alpha_1 |R_2|^2 + \alpha_2 |R_1|^2 \} + \alpha_1 \alpha_2} \end{cases} \quad [\text{IV.48}]$$

$$\text{Où : } \alpha_1 = \frac{P_{N_1}}{P_\rho} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{P_{N_2}}{P_\rho}$$

la Figure IV.16 montre les gains en rapport signal sur bruit (GainRSB) en fonction du rapport signal sur bruit RSB en entrée de la méthode de Wiener. Les paramètres α_1 et α_2 sont optimisés préalablement en fonction de nombre d'évènements détectés N ($\alpha_1 = 1/\sqrt{N}$ et $\alpha_2 = 1/N$).

Wiener 2N

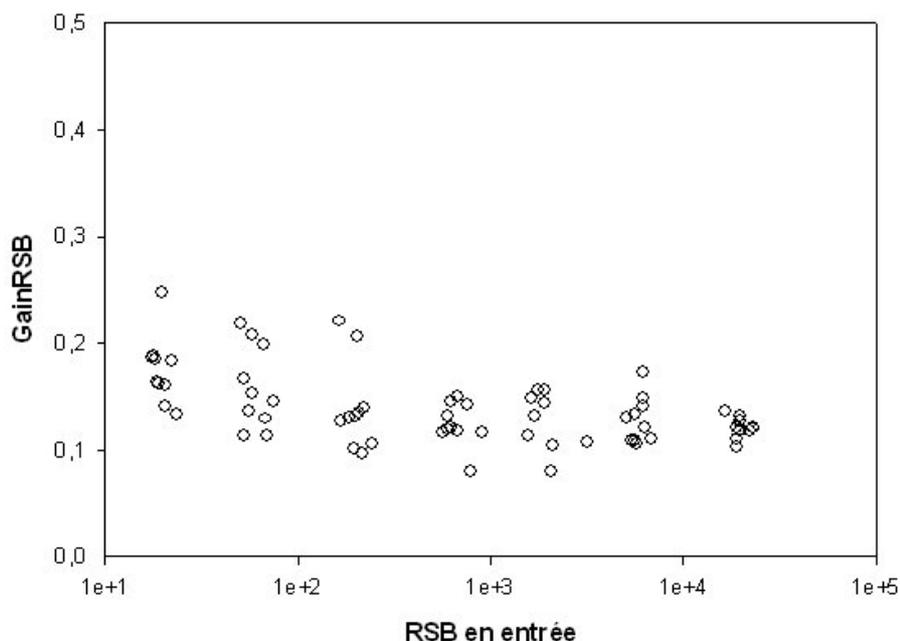


Figure IV.16: GainRSB en fonction du RSB en entrée pour la méthode de Wiener à deux noyaux avec $\alpha_1 = 1/\sqrt{N}$ et $\alpha_2 = 1/N$.

IV.5.3. Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Soient R une matrice définie par la fusion des deux matrices selon les colonnes $R = ([R_1], [R_2])^T$ et S un vecteur colonne dont les composantes $S = (S_1, S_2)^T$. Alors, le problème à double décomposition [IV.34] devient:

$$\begin{cases} S = (S_1, S_2)^T \\ R = ([R_1], [R_2])^T \\ R\rho + N = S \end{cases} \quad \text{[IV.49]}$$

La résolution de ce système linéaire peut se ramener à un problème de minimisation de fonctionnelle suivant:

$$J(\rho) = \frac{1}{2}(R\rho + S)^T (R\rho + S) \quad \text{[IV.50]}$$

En ajoutant une condition de douceur sur la solution de type Hunt [55] [3], la fonctionnelle devient:

$$f(\rho) = \frac{1}{2}(R\rho - S)^T(R\rho - S) + \alpha\rho^T H\rho \quad [\text{IV.51}]$$

Où α est le coefficient de régularisation et H est la matrice représentant la condition de douceur de Type Hunt:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & 0 \\ 0 & -1 & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & -1 & 0 \\ 0 & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad [\text{IV.52}]$$

On se ramène donc à résoudre le problème de minimisation suivant:

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(\rho) \\ R\rho - S = N \end{cases} \quad [\text{IV.53}]$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange nous permettent d'augmenter arbitrairement le nombre de variables et de connecter ces variables par des contraintes [95].

En utilisant les multiplicateurs de Lagrange y , on est amené à résoudre le système linéaire suivant:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & I \\ 0 & \alpha H & R^T \\ I & R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ \rho \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S \end{bmatrix} \quad [\text{IV.54}]$$

Une solution de ce système est donnée par la méthode du pseudo-inverse.

Les gains en rapport signal sur bruit GainRSB en fonction du rapport signal sur bruit RSB en entrée pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange sont représentés dans la Figure IV.17.

Cette méthode matricielle à l'avantage de faire apparaître dans la formulation, à la fois le bruit N et le signal ρ . Le paramètre α permet de pondérer l'importance du terme de douceur relativement à la fidélité aux données.

Lagrange 2N

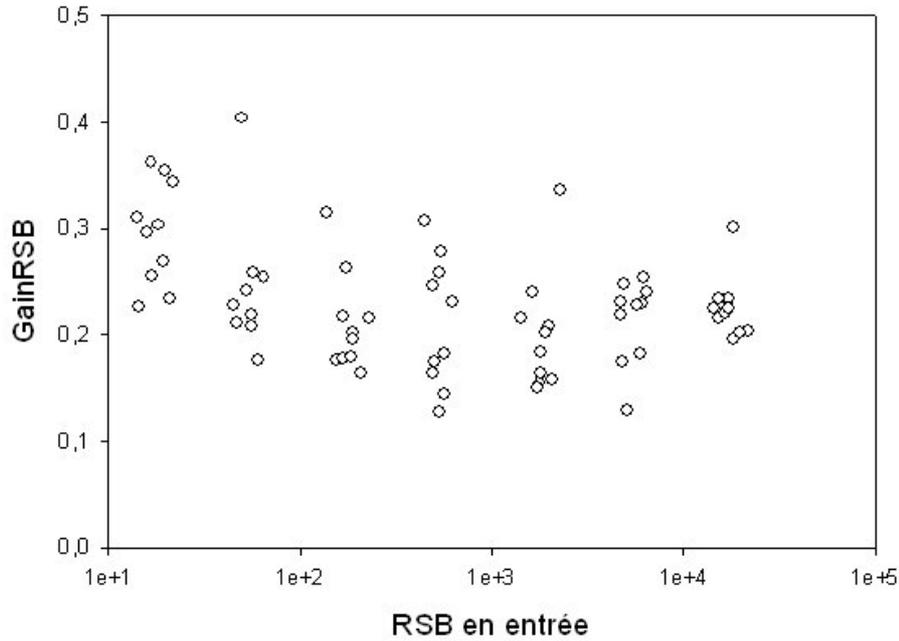


Figure IV.17: GainRSB en fonction du RSB en entrée pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange avec $\alpha = 1/N$.

IV.5.4. Maximum de vraisemblance à deux noyaux

Le principe de la méthode de EM-ML est décrit dans le paragraphe [IV.34]. L'extension de cette méthode à deux noyaux consiste à maximiser la vraisemblance pour les deux acquisitions conjointement. En effet, soient R une matrice définie par la fusion des deux matrices selon les colonnes

$R = ([R_1], [R_2])^T$ et S un vecteur colonne dont les composantes $S = (S_1, S_2)^T$. On se ramène donc à un système simple:

$$\begin{cases} S = (S_1, S_2)^T \\ R = ([R_1], [R_2])^T \\ R\rho = S \end{cases} \quad \text{[IV.55]}$$

On peut donc résoudre ce système de déconvolution avec la même technique décrite dans le paragraphe IV.3.2 pour la méthode de ML-P à un seul noyau. Après les calculs, on aura le schéma récursif suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l}
1) \textit{initialisation} : \\
\rho^0 = \textit{solution initiale} = s_1 \textit{ (par exemple)} \\
\alpha = \sum_{p=1}^2 \alpha_p \\
2) \textit{iterations} : \textit{pour } k = 0, 1, \dots \textit{ faire} \\
\alpha \rho^{k+1} = \left[\sum_{p=1}^2 R^T \frac{S_p}{R_p \rho^k} \right] \rho^k
\end{array} \right. \quad [\text{IV.56}]$$

Soit encore en utilisant le système avec le produit de convolution:

$$\left\{ \begin{array}{l}
1) \textit{initialisation} : \\
\rho^0 = \textit{solution initiale} = s_1 \textit{ (par exemple)} \\
\alpha = \sum_{p=1}^2 \hat{r}_p(0) \\
2) \textit{iterations} : \textit{pour } k = 0, 1, \dots \textit{ faire} \\
\alpha \rho^{k+1} = \left[\sum_{p=1}^2 \frac{S_p}{r_p * \rho^k} * r_p^* \right] \rho^k
\end{array} \right. \quad [\text{IV.57}]$$

Pour accélérer la convergence de la solution, on peut s'inspirer de la technique OSEM (Ordered Subsets Expectation Maximization)[53] [13] utilisée pour l'ensemble des acquisitions tomographiques. Cela revient aussi à résoudre le système de déconvolutions en maximisant la vraisemblance pour les deux acquisitions séparément et effectuant un schéma à double décomposition:

$$\begin{aligned}
& 1) \textit{initialisation} : \\
& \rho^0 = \textit{solution initiale} \\
& \alpha_p = \hat{r}_p(0), \quad p=1,2 \\
& 2) \textit{iterations} : \textit{pour } k=0,1,\dots \textit{ faire} \\
& \mu^0 = \rho^k \\
& \rightarrow \textit{iterations} : \textit{pour } p=1,2 \textit{ faire} \\
& \alpha_p \mu^p = \left[\frac{S_p}{r_p * \mu^{p-1}} * r_p^* \right] \mu^{p-1} \\
& \rho^{k+1} = \mu^2
\end{aligned}
\tag{IV.58}$$

Cette méthode sera notée dans la suite par ML-PA 2N. Les gains en rapport signal sur bruit GainRSB en fonction du rapport signal sur bruit RSB en entrée de la méthode de EM-PA 2N à 20 itérations sont représentés dans la Figure IV.18.

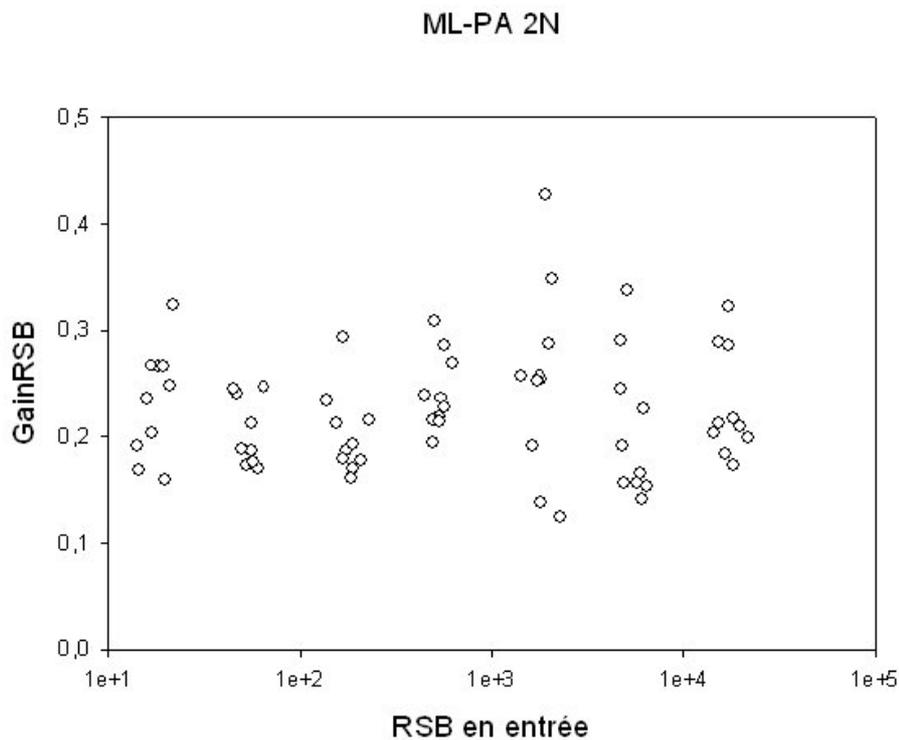


Figure IV.18: GainRSB en fonction du RSB en entrée pour la méthode de maximum de vraisemblance accélérée à deux noyaux ML-PA 2N et à 20 itérations

IV.5.5. RAMLA

La méthode de RAMLA (Row Action Maximum Likelihood Algorithm) a été Développé par Brown et Pierro [19]. Cette technique est inspirée à la fois de la méthode ART et de la méthode OSEM. Elle a

été introduite en tomographie d'émission pour accélérer le processus itératif qui consiste à maximiser la fonction de vraisemblance. Le schéma récursif de cette méthode est donné par:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1) \textit{initialisation} : \\
 \rho^0 = \textit{solution initiale} \\
 \alpha_p = \hat{r}_p(0), \quad p = 1, 2 \\
 2) \textit{iterations} : \textit{pour } k = 0, 1, \dots \textit{ faire} \\
 \mu^0 = \rho^k \\
 \rightarrow \textit{iterations} : \textit{pour } p = 1, 2 \textit{ faire} \\
 \mu^p = (1 - \lambda_k \alpha_p) \mu^{p-1} + \left[\frac{s_p}{r_p * \mu^{p-1}} * r_p^* \right] \lambda_k \mu^{p-1} \\
 0 < \lambda_k \alpha_p \leq 1 \\
 \rho^{k+1} = \mu^2
 \end{array} \right. \quad [\text{IV.59}]$$

λ_k est un paramètre de relaxation de la méthode qui est choisi de façon empirique mais il vérifie quelques hypothèses, en particulier il doit tendre vers zéro lorsque k tend vers l'infini. Dans nos simulations, nous avons choisi $\lambda_k = 1/k$. Notons aussi que si $\lambda_k = 1/\alpha_p$, l'algorithme coïncide avec le schéma [IV.58] de la méthode de maximum de vraisemblance à double décomposition.

Les gains en rapport signal sur bruit GainRSB en fonction du rapport signal sur bruit RSB en entrée pour la méthode de RAMLA sont représentés dans la Figure IV.19.

RAMLA 2N

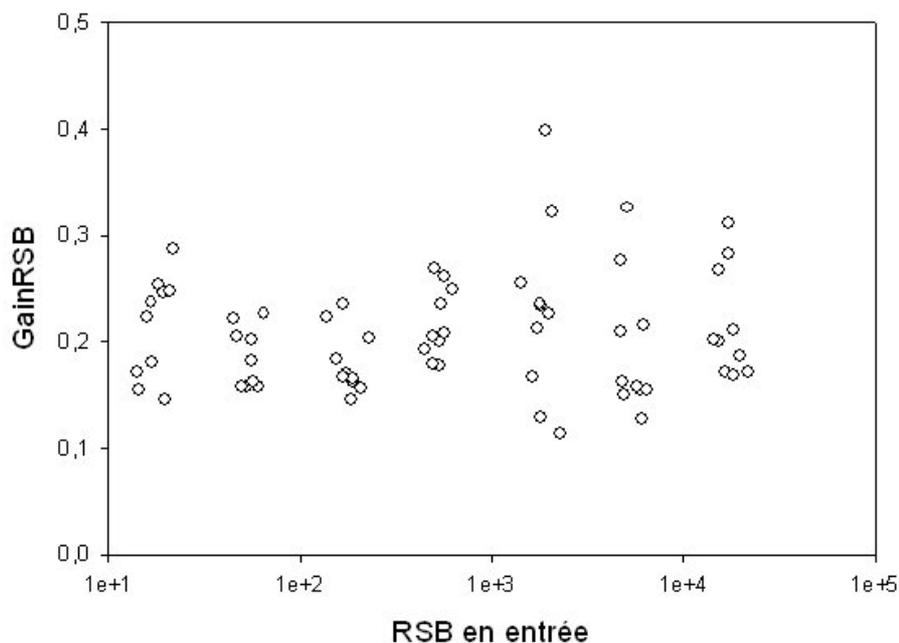


Figure IV.19: GainRSB en fonction du RSB en entrée pour la méthode de RAMLA à 20 itérations

IV.5.6. Cross Burg Entropy CBE

La méthode consiste à résoudre le système de minimisation de la distance dite "cross burg entropy" ou distance de "Itakura-Saito" suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad L(x) = \sum_{i=1}^n -\log \frac{S_i}{[R\rho]_i} + \frac{S_i}{[R\rho]_i} \\ \text{ou} \quad \rho \geq 0. \end{array} \right. \quad [\text{IV.60}]$$

CBE a été proposé par Herman [51] en tomographie. Un schéma itératif est donné par [23] dans le domaine de l'imagerie infrarouge en astronomie afin de minimiser les artefacts des voisinages de sources ponctuelles. Ce schéma s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = \text{solution initiale} \\ \rho_j^{k+1} = \rho_j^k \cdot \sqrt{\frac{[R^T p^k]_j}{[R^T q^k]_j}}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \\ \text{Ou} \\ p_i^k = \frac{S_i}{([R \rho^k]_i)^2}, \quad q_i = \frac{1}{[R \rho^k]_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ R = ([R_1], [R_2])^T, \quad S = (S_1, S_2)^T \end{array} \right. \quad [\text{IV.61}]$$

Les gains en rapport signal sur bruit GainRSB en fonction du rapport signal sur bruit RSB en entrée de la méthode de CBE 2N à 20 itérations sont représentés dans la Figure IV.20.

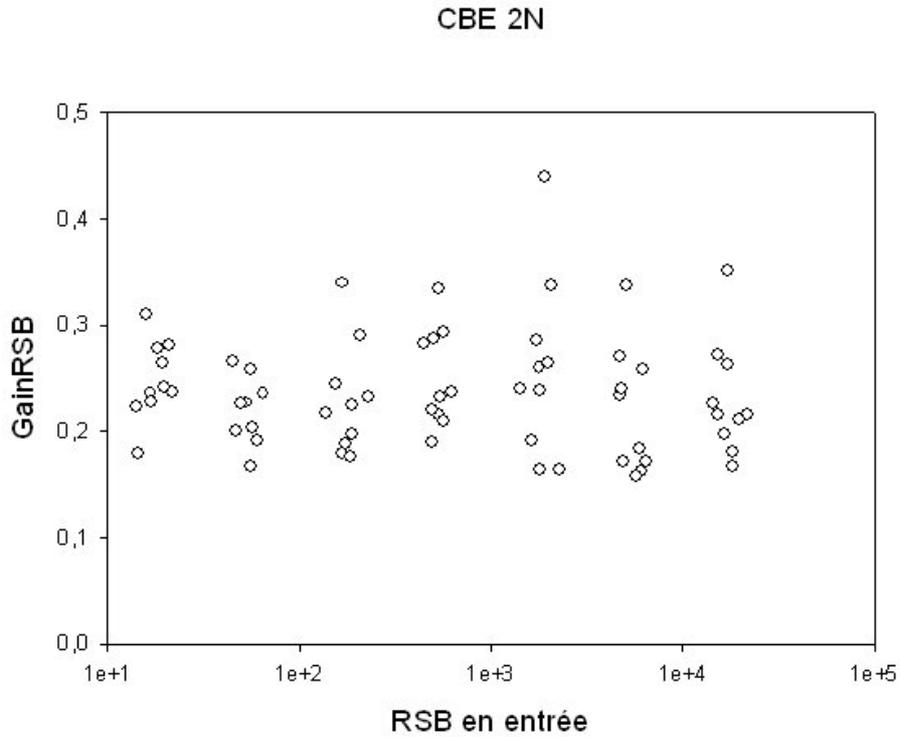


Figure IV.20: GainRSB en fonction du RSB en entrée pour la méthode de CBE 2N à 20 itérations

IV.6. Discussion et conclusion

IV.6.1. Choix de l'algorithme de déconvolution

Le Tableau IV-1 compare les valeurs moyennes des gains en RSB pour les méthodes de déconvolution étudiés précédemment. Ces moyennes sont calculées sur les GainRSB correspondant à un nombre de

coups émis supérieur à 1000 (RSB en entrée > 1000). En effet, au-dessous de cette valeur c'est le terme de douceur qui devient prépondérant, ou la contrainte de positivité (ML-P).

Méthodes de déconvolution	Moyenne de Gain en RSB
TSVD 1N	0.08
ML-P 1N	0.10
ML-GC 1N	0.15
Wiener 2N	0.14
NC 2N	0.17
RAMLA 2N	0.22
ML-PA 2N	0.24
CBE 2N	0.25
MKO 2N	0.25
Lagrange 2N	0.29

Tableau IV-1 : La moyenne des gains en RSB des méthodes de déconvolution étudiées.

Un examen rapide de ce tableau montre que l'adjonction d'une deuxième fente au moment de l'acquisition apporte une augmentation des GainRSB pour les méthodes de déconvolution étudiées. D'ailleurs, les méthodes de déconvolutions RAMLA 2N, ML-PA 2N, CBE 2N, MKO 2N et Lagrange 2N permettent d'améliorer le gain en rapport signal sur bruit d'une façon considérable (GainRSB > 0.22). En outre, ces méthodes de déconvolution donnent des résultats plus performants que ceux obtenus par la méthode de noyau composite.

Pour pouvoir choisir une méthode bien adaptée à notre application, nous avons effectué une autre étude sur le temps de calcul nécessaire pour chaque algorithme. La Figure IV.21 montre les valeurs moyennes des GainRSB en fonction du temps de calcul des méthodes de déconvolution étudiées précédemment. Cette étude nous incite à choisir la méthode de MKO comme méthode de déconvolution pour le projet CACAO. Ce choix est fondé sur plusieurs raisons. Tout d'abord, cette méthode donne lieu à une amélioration du gain en rapport signal sur bruit (0,25). De plus, la méthode de MKO possède des avantages appréciables pour notre application : un temps de calcul court, complexité de l'ordre de $N \log(N)$ et facilité d'implémentation. Cependant, la méthode Lagrange se caractérise par un GainRSB plus important, mais le prix à payer est la complexité de l'algorithme et un temps de calculs plus important.

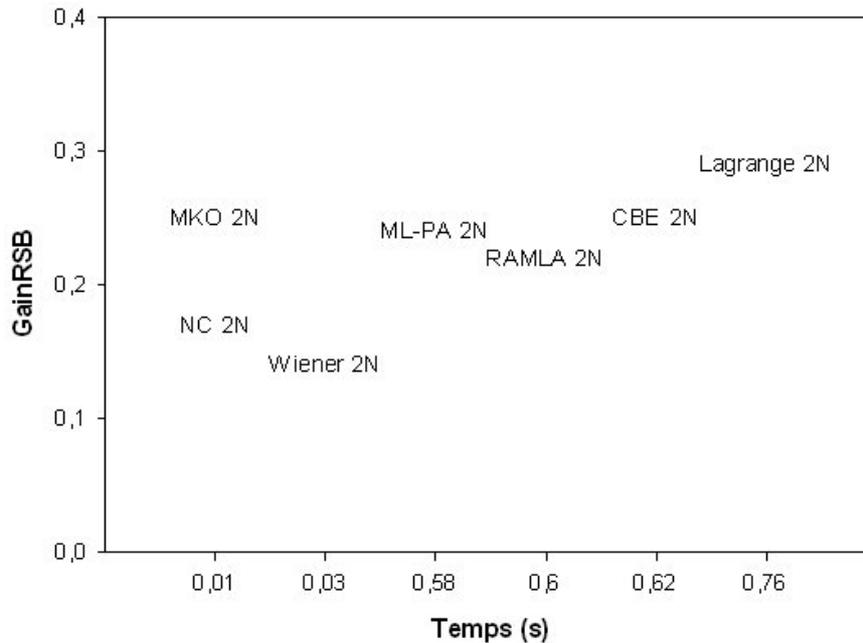


Figure IV.21: GainRSB en fonction du temps de calculs des méthodes de déconvolution étudiées.

IV.6.2. Conclusion

Les résultats présentés dans le paragraphe précédent montrent que l'adjonction d'une deuxième fente au moment de l'acquisition apporte une augmentation du rapport RSB en sortie, quel que soit le niveau de bruit des acquisitions et pour toutes les méthodes de déconvolution étudiées. Ce résultat doit toutefois être pondéré par le fait que l'acquisition supplémentaire engendrée par le deuxième noyau, nécessite de réduire le temps correspondant à chacune des acquisitions élémentaires ou d'élargir la surface du détecteur. Le rapport signal sur bruit en entrée serait donc réduit d'un facteur $\sqrt{2}$ si le bruit dans les acquisitions obéit à une loi de Poisson.

Si le nombre de photons augmente linéairement avec la largeur de la fente, comme c'est le cas d'une image radiante parfaitement définie il n'y a donc aucun intérêt à réaliser une acquisition déconvolution par 1 ou 2 fentes pour essayer de réduire le bruit de photons[41]. Par contre, l'adjonction d'une deuxième fente, même plus large que la première, augmente le rapport signal sur bruit, dans les cas où la déconvolution est nécessaire pour compenser une faible résolution spatiale du détecteur par exemple.

Enfin, l'étude réalisée sur les méthodes de déconvolutions à deux noyaux nous encourage à privilégier la méthode de MKO comme méthode de traitement dans la suite de ce travail. C'est une méthode de déconvolution simple et rapide qui donne de bons résultats. Elle représente de plus une sécurité de traitement en cas de manque de connaissance a priori d'information sur l'objet.

V. RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE CACAO À 2D

Nous envisagerons dans ce chapitre la simulation et la reconstruction d'images tomographiques selon la méthode CACAO dans un espace limité à deux dimensions. Après une représentation des paramètres définissant la géométrie du système, nous présentons les deux améliorations algorithmiques effectuées dans ce travail de thèse. Une étude sur l'influence des paramètres du collimateur et des paramètres d'acquisitions sera également présentée. Le chapitre termine par une comparaison avec le procédé de collimation classique et une simulation de ce que pourrait apporter la réalisation de détecteurs pixelisés au pas de 1,5mm, pour les deux systèmes de collimation.

V.1. Description des simulations

V.1.1. Paramètres liés à l'acquisition CACAO

Considérons la géométrie de l'acquisition représentée dans la Figure V-1. Une source ponctuelle est placée dans un disque de rayon r , appelé rayon de cache. Ce disque servira de support à l'objet reconstruit. Le détecteur, équipé d'un collimateur à trous large, est placé perpendiculairement à l'objet source, la distance entre le collimateur et le centre de rotation représente le rayon de giration ou le rayon tomographique du système. La distinction entre ces deux rayons est rendue nécessaire pour coller au mieux avec la réalité où il est impossible de faire tourner une tête de caméra en frôlant le nez d'un patient. D'autre part le projet CACAO nécessite de tenir compte expressément de la distance source collimateur. Enfin ce choix, comportant deux paramètres, permet de limiter l'espace possible des données reconstruites et de ne pas trop ralentir les programmes de reconstruction.

La tête de la caméra (collimateur détecteur) réalise deux mouvements de balayage autour de l'objet : 1- balayages en translation 2- balayages en rotation comme précédemment décrit.

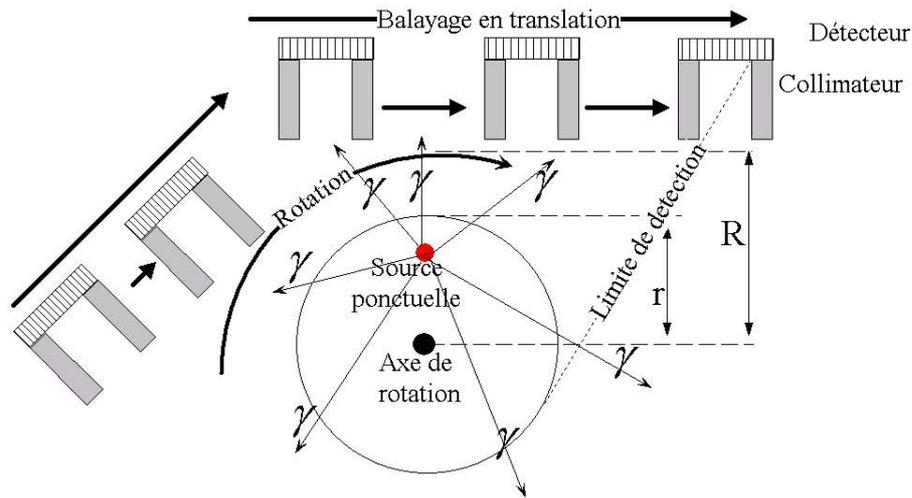


Figure V-1: Configuration des acquisitions

En profitant du fait que lors des études de simulation, nous disposons de l'objet initial, il nous a été possible d'optimiser directement les paramètres du système. Ces paramètres peuvent être classés en deux grand groupe : les paramètres de la reconstruction et les paramètres physiques de l'appareil. Les paramètres de la reconstruction ont pour leur part été optimisé à tous coups, afin d'obtenir dans chaque configuration la meilleure reconstruction possible.

Le groupe des paramètres physiques se divise en deux blocs: le premier bloc concerne les données relatives à la géométrie de l'ensemble collimateur- détecteur et le 2^{ème} bloc concerne les données relatives à l'acquisition et à l'objet étudié.

Configuration de la géométrie de l'ensemble collimateur détecteur CACAO:

La collimation du système CACAO est purement géométrique, le choix des dimensions du collimateur et du nombre de type de trous utilisé pour la simulation est un critère très important pour définir la sensibilité.. La configuration du collimateur type choisi, pour les calculs présentés dans ce chapitre est donnée dans le Tableau V-1 (bloc 1: collimateur détecteur).

	Pixels	mm
Résolution intrinsèque du détecteur	1	3
Profondeur du trou t1	20	60
Profondeur du trou t2	20	60
Largeur du trou t1	7	21
Largeur du trou t2	9	27
Épaisseur des parois du collimateur	0.5	1,5
Sensibilité du collimateur	0,011	

Tableau V-1: Paramètres collimateur-détecteur

Notons que la résolution intrinsèque des détecteurs pour les systèmes actuels en imagerie médicale est d'environ 3 mm. Pour le système CACAO, cette valeur sera limitée par le pas des pixels choisis, ici 4 mm. Remarque : dans le schéma théorique du problème réduit à 2 Dimensions le détecteur se trouve réduit à une dimension ce qui pose quelque problème pour le calcul de sensibilité. Nous avons donc choisit d'utiliser la sensibilité d'un collimateur réel multi-trous équivalent possédant des trous carrés dont les dimensions en coupe correspondent à la réduction 2D.

Configuration de la géométrie de l'acquisition CACAO:

Le tableau suivant résume les paramètres les plus couramment utilisés dans les simulations de ce chapitre (bloc 2 : paramètre relatif à l'acquisition)

	Pixel	mm
Dimension du fantôme	64x64	192x192
Rayon de cache	32	96
Rayon de giration	34	102
Nb de déplacements	16	48
Pas de balayage	1	3
Nombre d'angles	20, 40 et 72	

Tableau V-2: Paramètres géométriques des acquisitions

Le nombre de déplacements présenté dans le tableau est le nombre minimum correspondant à un collimateur multi-trous alternant les trous de types t1 et t2. Il correspond donc à la somme de la largeur de ces trous, exprimée en pixel ($t1+t2$). Si l'on ne disposait que de deux trous, un déplacement sur tout le champ étudié comprendrait grossièrement 256 pixels. En fait la largeur du champ doit être

égale ou supérieure à la distance pendant laquelle le détecteur voit l'objet. Cette distance varie en fonction de tous les paramètres concernant le collimateur et l'objet.

Le calcul de cette distance est illustré dans le schéma de la Figure V-2.

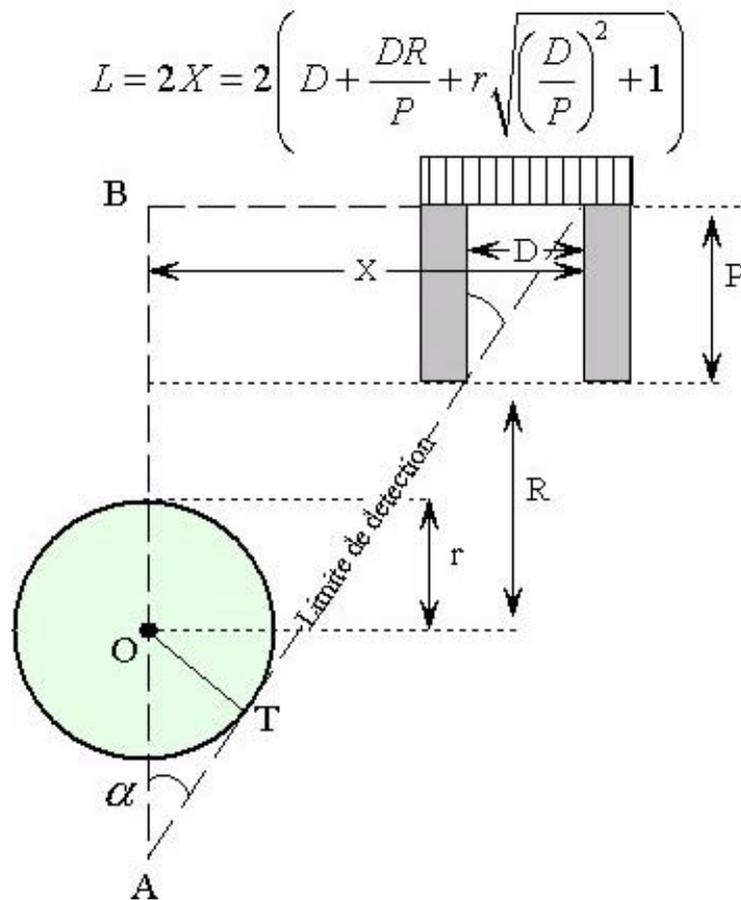


Figure V-2: Calcul de la largeur du champ de balayage minimale

V.1.2. Les objets d'études pour les simulations (Fantôme):

Trois fantômes numériques ont été utilisés dans cette étude : appelés respectivement "Disques", "Jaszczak" et "Brain". Les reconstructions présentées dans ce qui suit ont été effectuées avec des matrices de dimensions 64x64 pixels (pour la plupart) et 128x128 pixels.

L'objet "Disques" correspond à huit sphères en coupe, remplis d'une activité homogène, arrangées d'une manière simple (Figure V-3). Les diamètres de ces disques sont croissants, il varie entre 9 mm et 30 mm.

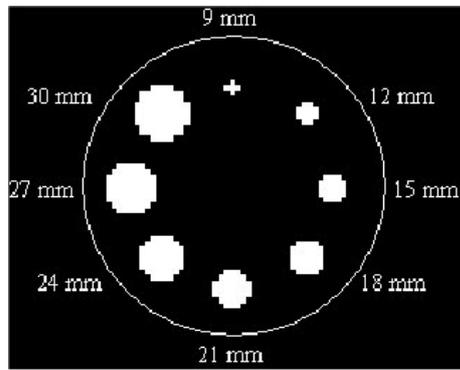


Figure V-3: Fantôme "Disques"

L'objet "Jaszczak" est constitué de six secteurs angulaires, contenant chacun des disques de tailles différentes, entre 3 mm et 18 mm (Figure V-4). La distance minimale entre les disques est de 9 mm. Cet ensemble constitue une mire classique de résolution.

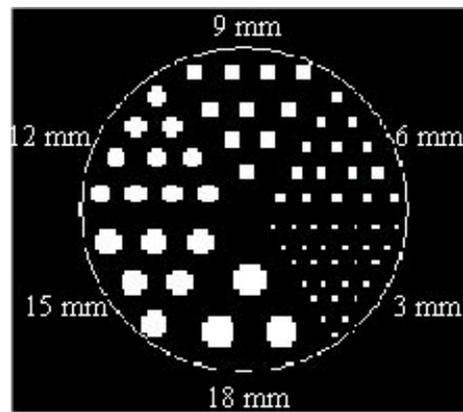


Figure V-4 Fantôme "Jaszczak"

Objet "Brain": Représente une coupe de cerveau de haute définition réalisée à partir d'une image IRM (Figure V-5).



Figure V-5: Fantôme "Brain"

V.1.3. Simulation de l'acquisition CAAO

Une fois la géométrie de l'acquisition et du collimateur choisit, un programme calcul les projections de façon analytiques en intégrant la formule III.3 avec les données concernant l'objet choisit. On obtient ainsi les données formant la projection simulée de façon exacte de l'objet étudié. Dans un deuxième temps un bruit poissonien est appliqué à ces données suivant le nombre de photons émis choisit, réduit proportionnellement par la sensibilité du collimateur réel équivalent. La figure 6 représente ces étapes.

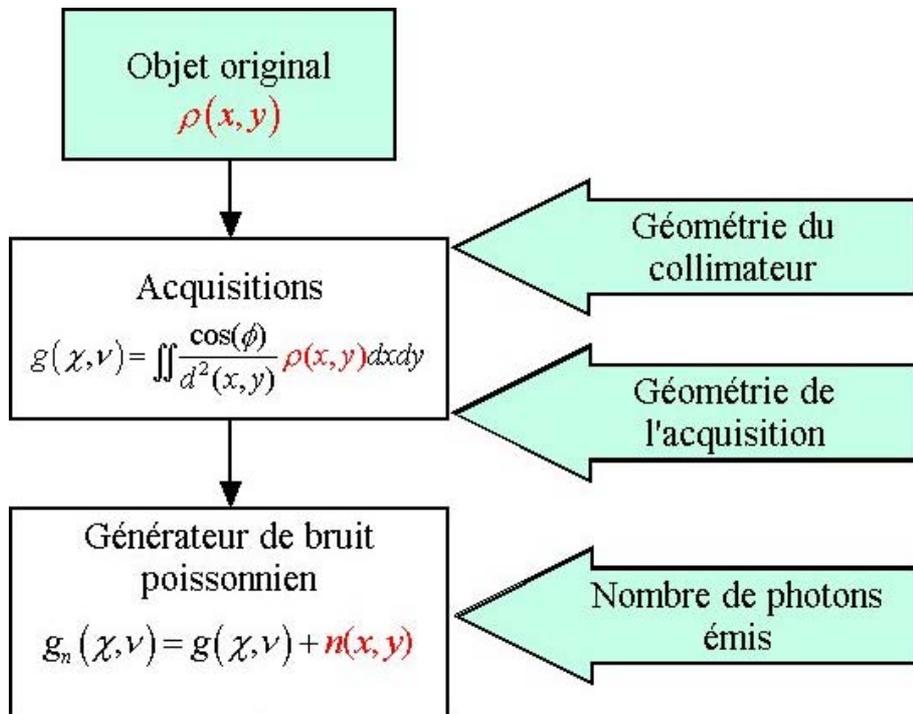


Figure V-6: Diagramme de simulation des acquisitions

Comme dans le cas pratique, les données de la mesure sont souvent bruitées par plusieurs type de bruit comme par exemple, l'atténuation, l'effet Compton, les imperfections du détecteur, le mouvement propre, la décroissance radioactive, les mouvements du patient... etc. . Les calculs présentés ici, ne concerneront que le bruit dominant, à savoir, le bruit de Poisson. Nous supposons, entre autre, que l'activité des sources est invariante au cours du temps et que les sources sont indépendantes.. La Figure V-7 montre un exemple de projections bruitées du même objet (source ponctuelle positionné aux coordonnées (5,32)) et pour différent nombre de photons détectés, 1K, 100K, 10M, et 1G.

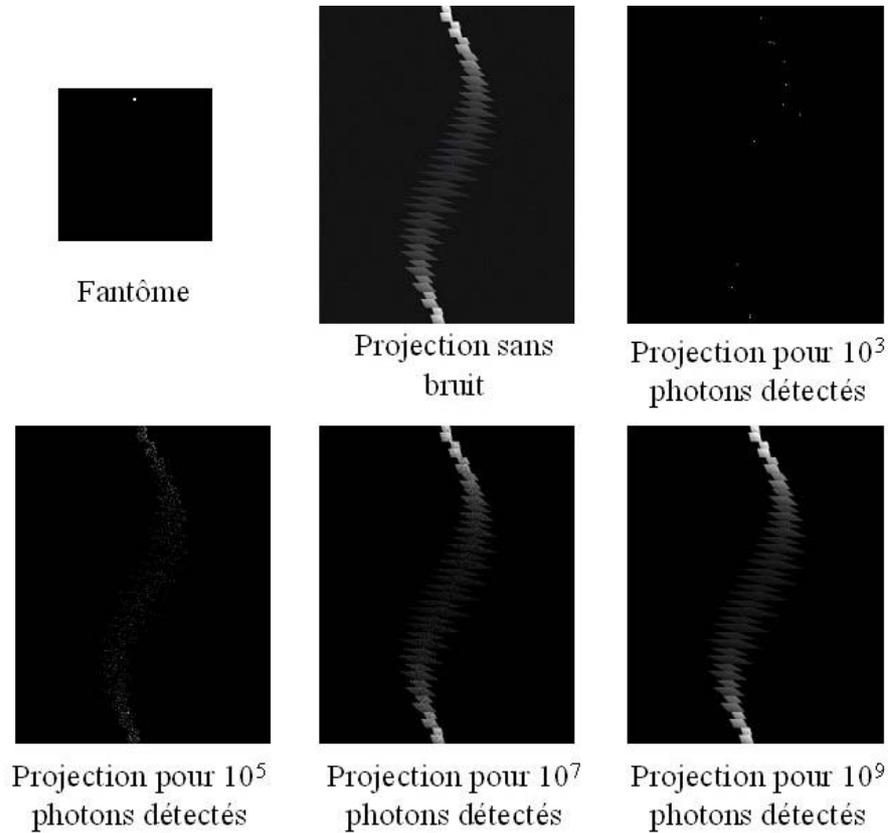


Figure V-7: Exemple de projections bruitées

V.2. Amélioration des programmes de reconstruction CACAO

V.2.1. Choix de l'algorithme de déconvolution

Deux méthodes ont été retenues pour les simulations à deux dimensions (2D) : La méthode "Multi-Kernel optimisation" (MKO) et la méthode du noyau composite (NC).

La méthode du noyau composite, et la première méthode utilisée pour la reconstruction CACAO. Elle a d'abord été développée dans la thèse de S. Begot puis de M. Quartuccio [9, 84].

V.2.2. Implémentation de la méthode MKO dans l'algorithme de reconstruction CACAO

Notons R_A et R_B les réponses impulsionnelles du système CACAO. Les données simulées S_A et S_B obtenues après l'étape de la sommation décalage (voir chap. 3) pour les noyaux A et B sont donc déconvolués par les réponses impulsionnelles R_A et R_B . Le diagramme dans la Figure V-8 représente l'implémentation de la méthode Multi-kernel optimisation dans les reconstructions tomographiques CACAO.

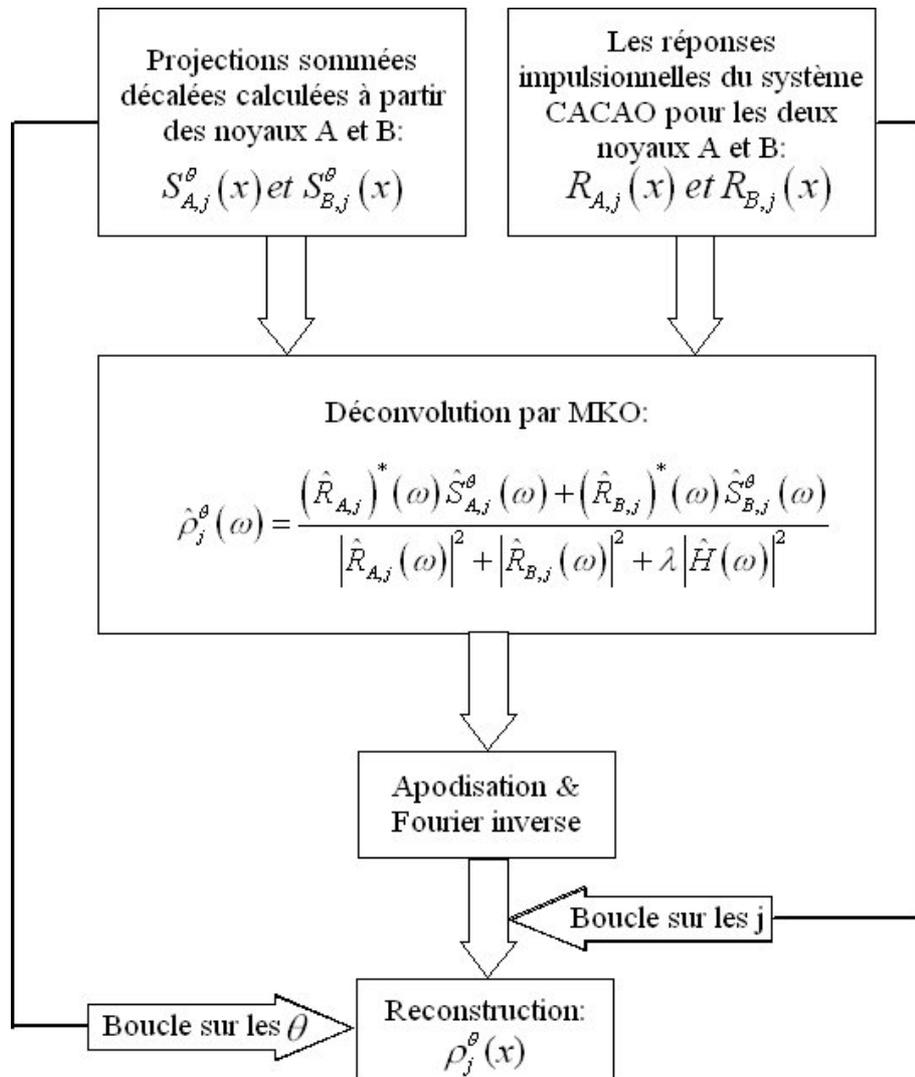


Figure V-8: Diagramme de l'algorithme de reconstruction tomographique par la méthode de MKO

V.2.3. Choix de l'algorithme d'Interpolation

Tout programme de reconstruction tomographique utilise des algorithmes qui réalisent des transformations géométriques des données dans les diverses étapes du traitement, par exemple: les rotations. Le traitement d'une telle transformation s'effectue en général dans l'espace continu. En effet, Une représentation continue des données d'une image (2D/3D) est indispensable pour effectuer des opérations qui implique des interpolations entre les intensités des pixels de l'image [77, 96].

Dans ce travail, nous avons implémenté un algorithme d'interpolation qui se base sur les fonctions B-splines [91] [16, 28, 97, 100]. Cette technique nous a permis, comme nous le verrons plus loin, d'améliorer le rapport signal sur bruit des images reconstruites CAAO.

V.2.3.1 Interpolation B-splines

Une fonction interpolante Spline $S(x)$ de degré n est constituée des morceaux de polynômes de degré n dont les dérivées se raccordent, jusqu'à ordre $p=n-1$, aux points d'interpolation.

Soit (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, K$, des points d'interpolation. Alors, sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, la restriction d'une spline $S(x)$ de degré n est un polynôme $P_i(x)$ de degré n tel que:

$$\left[\begin{array}{l} P_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \\ P_i(x_i) = y_i \\ P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i) \\ P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i) \\ \vdots \\ P_i^{(n-1)}(x_i) = P_{i+1}^{(n-1)}(x_i) \end{array} \right. \quad [\text{V.1}]$$

Dans la terminologie des fonctions Splines, les points x_i sont appelés des nœuds.

Toute fonction Spline $s(x)$ est représentée d'une façon unique dans la base des fonctions B-Spline $\beta(x)$ (B pour base) [91].

$$s(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \beta^n(x-k) \quad [\text{V.2}]$$

Où $c(k)$ est le coefficient de la B-spline et β^n est une B-spline d'ordre n . β^n est reconstruite à partir de $(n+1)$ auto-convolution de la B-spline d'ordre 0, (β^0) :

$$\beta^0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } |x| = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad [\text{V.3}]$$

$$\beta^n(x) = \underbrace{\beta^0 * \beta^0 * \dots * \beta^0}_{n+1 \text{ fois}}(x)$$

La Figure V-9 représente l'allure des B-spline d'ordre 0,1,2 et 3.

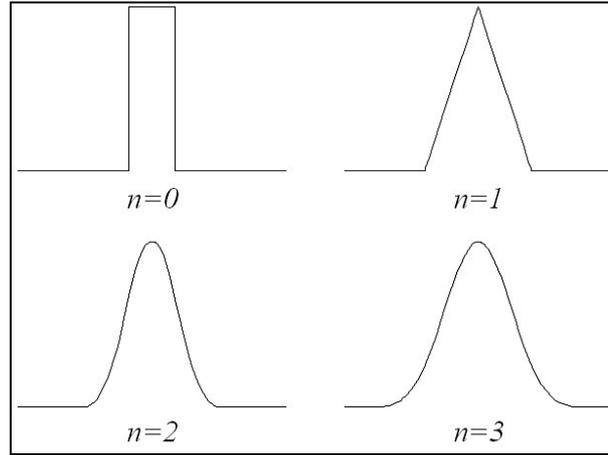


Figure V-9: Illustration des B-splines d'ordre 0,1,2 et 3

La difficulté de l'interpolation d'un signal d'entrée donné $s(k)$ consiste en la détermination des coefficients $c(k)$ du modèle B-spline choisi. Toutefois, pour les splines de degré 0 et les splines de degré 1, le problème devient trivial puisque les coefficients B-spline sont identiques aux échantillons de signal $c(k) = s(k)$. Cependant, la situation est plus complexe pour un degré de la spline supérieur à 1. Traditionnellement, la détermination des coefficients d'interpolation spline utilise des techniques fondées sur la résolution d'une matrice bande diagonale par des algorithmes numériques standard, comme, la décomposition LU [83]. Au début des années 1990, il a été montré que ce problème peut être résolu avec des techniques de filtrage numérique plus simples et surtout plus rapide [44, 101-103].

En effet, la représentation discrète de [V.2] peut être formulée sous la forme d'un produit de convolution:

$$s(k) = b^n * c(k) \quad [V.4]$$

Où b^n est la B-spline discrète de β^n telle que:

$$b^n(k) = \beta^n(x)|_{x=k} \xleftrightarrow{z} B^n(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b^n(k) z^{-k} \quad [V.5]$$

Les coefficients $c(k)$ sont donc résolus par une déconvolution simple:

$$c(k) = (b^n)^{-1} * s(k) \quad [V.6]$$

Le calcul de cette déconvolution peut être effectué en utilisant la technique de transformée en z . Or, les fonctions B-splines sont toujours symétriques et définies sur un nombre de points finis dans le contexte du traitement des images. Alors, la transformée de l'inverse $(b^n)^{-1}$ s'écrit:

$$(b^n)^{-1}(k) \xleftarrow{z} \frac{1}{B^n(z)} = z^n \prod_{i=1}^n (z - z_i)^{-1} (z - z_i^{-1})^{-1} \quad [V.7]$$

Où les $\{z_i, z_i^{-1}\}$ sont les pôles de $(B^n)^{-1}$. Ces pôles sont réels, négatifs et aucun d'entre eux n'est égal à 1 [97]. Alors, l'algorithme pour inverser $(b^n)^{-1}$ peut être mis en œuvre par une cascade de n filtres paires, chacun de ces filtres étant constitué d'un filtre causal (avec le pôle z_i) et un filtre anti-causal (avec le pôle z_i^{-1}) [103] [102].

Cet algorithme est numériquement stable, plus rapide et plus facile de mettre en œuvre qu'une autre technique numérique.

Dans le cas d'un B-Spline de degré 3, la Spline choisie dans ce travail de thèse, on a:

$$\beta^3(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - |x|^2 + \frac{|x|^3}{2}, & \text{si } 0 \leq |x| < 1 \\ \frac{(2 - |x|)^3}{6}, & \text{si } 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & \text{si } 2 \leq |x| \end{cases} \quad [V.8]$$

La transformée en z de la B-spline discrète de degré 3 est donné par:

$$B^3 = \frac{z + 4 + z^{-1}}{6} \quad [V.9]$$

Ainsi le filtre pour mettre en œuvre est:

$$(b^3)^{-1}(k) \xleftarrow{z} \frac{1}{B^3(z)} = 6 \left(\frac{1}{1 - z_1 z^{-1}} \right) \left(\frac{-z_1}{1 - z_1 z} \right) \quad [V.10]$$

Où $z_1 = -2 + \sqrt{3}$. La factorisation du terme à droite de l'équation [V.10] conduit à un algorithme récursif causal et anti-causal suivant:

$$\begin{cases} c^+(k) = s(k) + z_1 c^+(k-1), & k = 2, \dots, K \\ c^-(k) = z_1 (c^-(k+1) - c^+(k)), & k = K-1, \dots, 1 \\ c(k) = 6 \cdot c^-(k) \end{cases} \quad [V.11]$$

Les conditions initiales sont évaluées en tenant compte de la continuité du signal sur les bords et en prolongeant le signal par périodicité en dehors du support (voir chap. 4). Dans ces condition, nous avons les valeurs suivante[100, 103]:

$$\begin{cases} c^+(1) = \sum_{k=1}^{k_0} s(k) z_1^{k-1} \\ c^-(K) = \frac{z_1}{(1-z_1^2)} (c^+(K) + z_1 c^+(K-1)) \end{cases} \quad [V.12]$$

Où k_0 est choisi tel que $k_0 > \log \varepsilon / \log |z_1|$, le terme ε exprime la précision du calcul désiré[100].

La Figure V-10 illustre le processus du filtre récursif causal et anti-causal pour une base B-spline de degré 3.

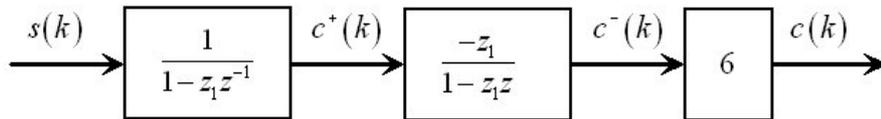


Figure V-10: Filtre récursif causal et anti-causal de la B-spline de degré 3.

L'extension des splines en dimensions supérieures est réalisée par des produits tensoriels des bases B-splines 1D :

$$\Phi^n(x_1, x_2, \dots, x_q) = \beta^n(x_1) \times \dots \times \beta^n(x_q) \quad [V.13]$$

En effet, le modèle B-spline pour un voisinage de (x, y) d'une image 2D ou une matrice $\{c(i, j)\}_{i,j}$ est donné par:

$$f(x, y) = \sum_{k=k_1}^{(k_1+K-1)} \sum_{l=l_1}^{(l_1+K-1)} c(k, l) \beta^n(x-k) \beta^n(y-l) \quad [\text{V.14}]$$

Où: $k_1 = x - \frac{n+1}{2}$; $l_1 = y - \frac{n+1}{2}$ et $K = \text{support}\{\beta^n\} = n+1$. Dans cette représentation, nous avons exigé que les contributions dans la sommation soient non nuls au voisinage de (x, y) .

L'intérêt de cette interpolation est que l'on dispose alors d'une fonction continue $f(x, y)$ pour représenter l'image avec l'assurance que $f(x, y)$ coïncide bien avec l'image aux points de coordonnées entières. On peut alors calculer facilement des intensités des coordonnées réelles, des gradients et des laplaciens en dérivant simplement cette fonction. Cette interpolation permet aussi de changer facilement la taille d'une image et faire des analyses en multirésolution.

V.2.4. Implémentation des B-splines dans l'algorithme de reconstruction CACAO

V.2.4.1 La rotation dans l'étape de la rotation-sommation de l'algorithme CACAO:

La rotation d'une image est donnée par la matrice de transformation des coordonnées suivante:

$$\left\| \begin{array}{l} (x, y) = G(u, v) \end{array} \right. \quad \text{telque } G = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad [\text{V.15}]$$

Ou, (u, v) sont les coordonnées de l'image rotée.

Les coordonnées (x, y) sont réelles. Le problème est de trouver les intensités équivalentes à ces coordonnées afin de reconstruire l'image rotée..

L'algorithme de rotation par transformation B-spline est donnée par:

1) Calcul des coefficients $c(k, l)$ de la B-spline par un filtrage séparable des pixels $f(k, l)$, c'est à dire, en appliquant l'algorithme de filtrage récursif causal et anti-causal du processus [V.11] en 1D, successivement le long les lignes et les colonnes de l'image.

2) Reconstruction de la fonction interpolante B-spline:

$$f_{spline}(G(u,v)) = f_{spline}(x,y) = \sum_{k,l} c(k,l) \beta^n(x-k) \beta^n(y-l)$$

3) Enfin, pour chaque emplacement (u,v) de la destination, déterminer la position correspondant (x,y) de l'image de départ et calculer l'intensité équivalente selon la formule précédente.

La Figure V-11 représente les résultats obtenus après avoir tourné de 360° l'objet "Brain" en 72 étapes de 5° . Deux algorithmes ont été testés: L'algorithme de l'intersection des réseaux carrés (voir le chapitre 3) et l'algorithme de l'interpolation spline de degré 3. La méthode de l'interpolation spline 3 s'avère plus performante.

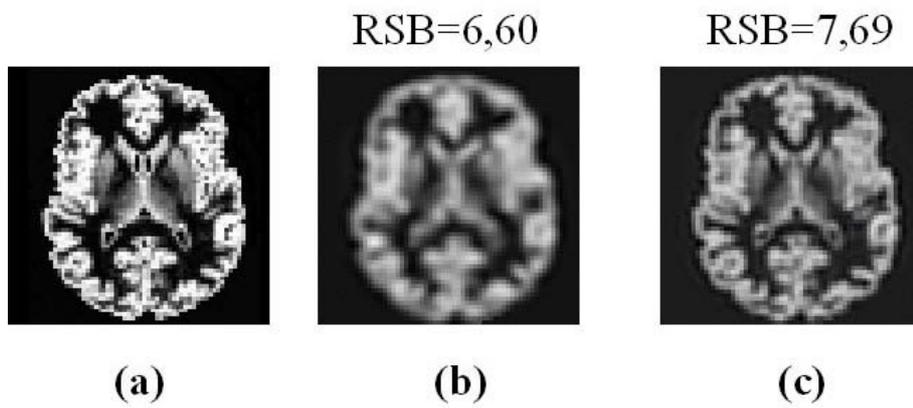


Figure V-11: Résultat d'une série de rotations de degré 5° effectué 72 fois. (a) Objet original "Brain". (b) Résultat des rotations avec la méthode de l'intersection des réseaux carrés RSB=6,6 db. (c) Résultat des rotations avec la méthode de l'interpolation spline de degré 3 RSB=7.7 db.

V.2.4.2 Le décalage des projections dans l'étape de la sommation-décalage de l'algorithme CACAO:

Comme on a vu dans le chapitre précédent, l'étape de la sommation-décalage nécessite un décalage des données qui consiste en un changement de variable des coordonnées formulé par la matrice de transformation suivante:

$$\left\| \begin{array}{l} (\chi, \nu) = G(u, v) \end{array} \right. \quad \text{telque } G = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{w}{P} - 1 \right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [V.16]$$

Nous avons également remplacé dans cette étape du traitement l'interpolation linéaire existante par une interpolation B-spline de degré 3.

Pour illustrer les performances de cette méthode, l'image "Brain" est inclinée de 20° vers la gauche, puis redressée par un décalage inverse et ceci pour les deux méthodes d'interpolations étudiées.

La Figure V-12 montre les résultats de comparaison. La méthode d'interpolation spline est la plus fidèle, le rapport signal sur bruit est de 23,7 au lieu de 21,32.

D'autres tests viendront encore confirmer la supériorité de l'algorithme d'interpolation Spline dans ce qui va suivre. Néanmoins, c'est aujourd'hui notre technique de référence, et sauf précision contraire, elle sera utilisée dans les chapitres suivant.

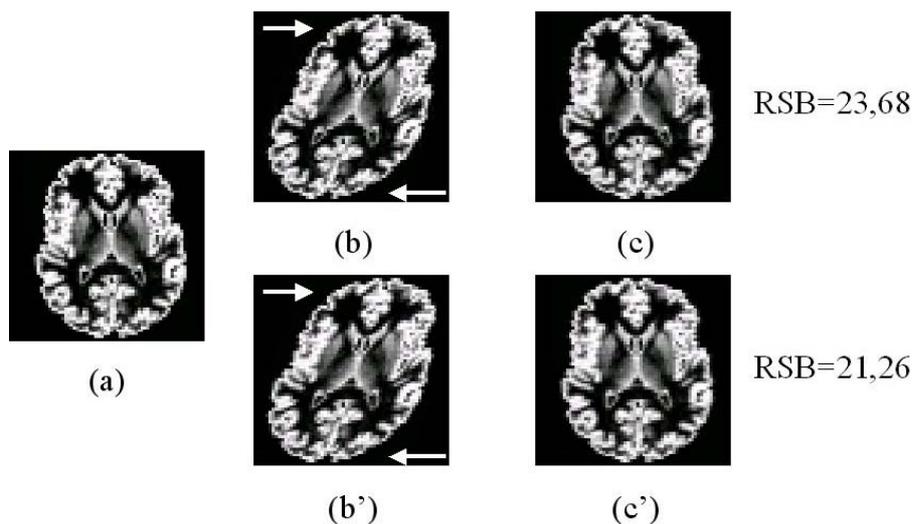


Figure V-12: Résultat des décalages par la méthode de l'interpolation linéaire et la méthode de l'interpolation spline de degré 3 sur l'objet "Brain"

V.3. Optimisation des paramètres du système CACAO

V.3.1. Optimisation des paramètres de reconstruction: alpha, bêta, lambda, fc

Nous avons vu aux chapitres 3 et 4 que la reconstruction tomographique CACAO nécessite le choix de 3 paramètres: alpha, bêta et fréquence de coupure "fc", ainsi que, le paramètre de la régularisation lambda de la méthode de la déconvolution "MKO". Ces paramètres alpha, bêta, lambda et "fc" ont été ajustés pour obtenir un rapport signal sur bruit maximum. Cette étude a été effectuée en fonctions du nombre de coups émis à l'acquisition et du nombre d'angles. Grâce à un script écrit en langage "Bash/Linux", nous avons automatisé la recherche de l'optimum pour les quatre paramètres par l'exploitation de quatre boucles:

Boucle sur les Lambdas: Elle varie de 10^{-1} à 10^{-8} par puissances successives de 10 ($\times 10$).

Boucle sur les Alphas: Elle varie de 0.01 à 5. par pas de 0.01.

Boucle sur les Bêtas: Elle varie de 0.1 à 2. par pas de 0.1.

Boucle sur les fréquences de coupures: Elle varie de 0.1 à 2. par pas de 0.1.

V.3.1.1 Résultat de l'optimisation du paramètre lambda:

La Figure V-13 montre les valeurs du paramètre lambda à l'optimum et son évolution en fonction du nombre de photons émis.

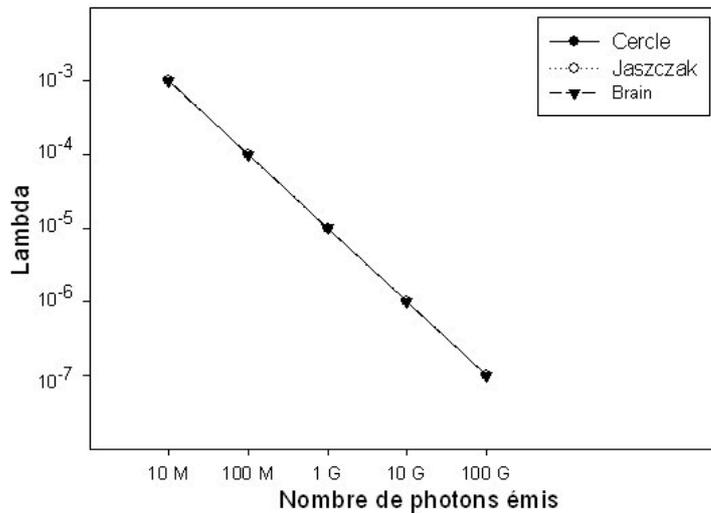


Figure V-13: Etude de la variation du paramètre Lambda en fonction de nombre de coups émis pour les objets de test: Cercles, Jaszczak et Brain (64x64 pixels)

La variation du paramètre lambda à l'optimum est linéaire en fonction du nombre de coups émis et ne dépend pas du nombre d'angles de la tomographie. Toutefois, on remarque également que lorsque le nombre de photons émis est très grand, la valeur de lambda à l'optimum devient informatiquement négligeable (10⁻⁷ pour 100G photons émis).

V.3.1.2 Résultat de l'optimisation du paramètre bêta:

La Figure V-14 donne les valeurs du paramètre bêta à l'optimum pour différent objet de dimension 64x64 pixels. Comme on peut le voir, ce paramètre n'influence que peu sur le résultat. Il pourra être fixé dans les programmes futurs.

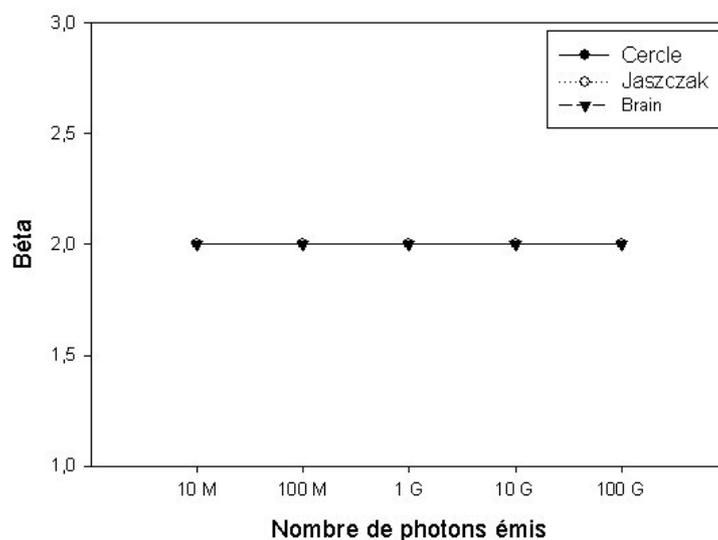


Figure V-14: Etude de la variation du paramètre Bêta en fonction de nombre de coups émis pour les objets de test: Cercles, Jaszczak et Brain (64x64 pixels).

V.3.1.3 Résultat de l'optimisation du paramètre alpha:

La Figure V-15 montre les courbes du paramètre alpha obtenues à l'optimum pour différent objet de dimension (64x64 pixels). Pour l'objet Brain, le paramètre alpha ne varie pratiquement pas avec le nombre de photons émis. Pour les autres objets qui présentent un fort contraste, on note de forte variation du paramètre alpha.

Globalement alpha décroît quand le nombre de photons augmente. Vraisemblablement, la variation de la valeur alpha à l'optimum compense les changements de la pente du filtre causée par la variation de la fréquence de coupure et de lambda.

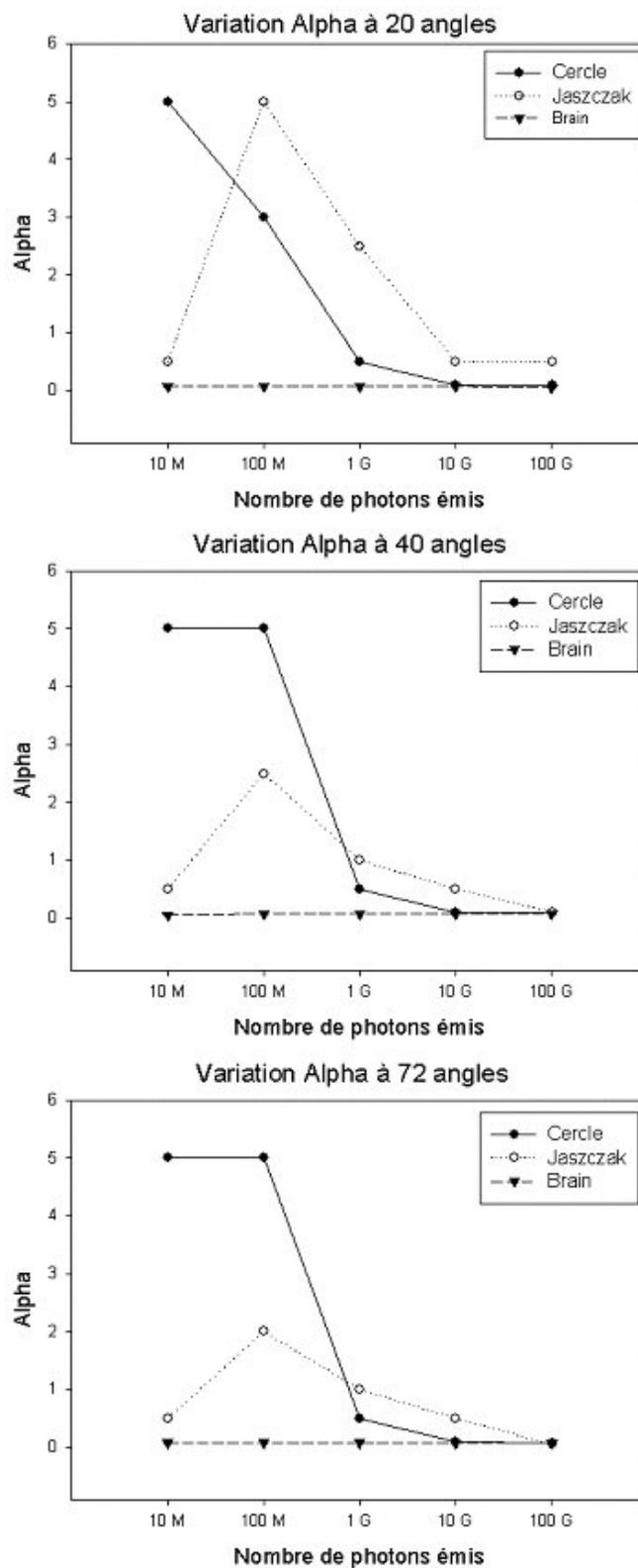


Figure V-15: Etude de la variation du paramètre Alpha en fonction de nombre de coups émis pour les objets de test: Cercles, Jaszczak et Brain (64x64 pixels).

V.3.1.4 Résultat de l'optimisation du paramètre "fc":

Les graphiques de la Figure V-16 présente les valeurs des fréquences de coupures à l'optimum pour différent objet et pour différents angles. On constate que la valeur "fc" à l'optimum dépend du nombre de photons émis. Globalement à faible nombre de coups, l'optimum de "fc" est à 1 et il tend vers la valeur 1,3 à fort taux de comptage.

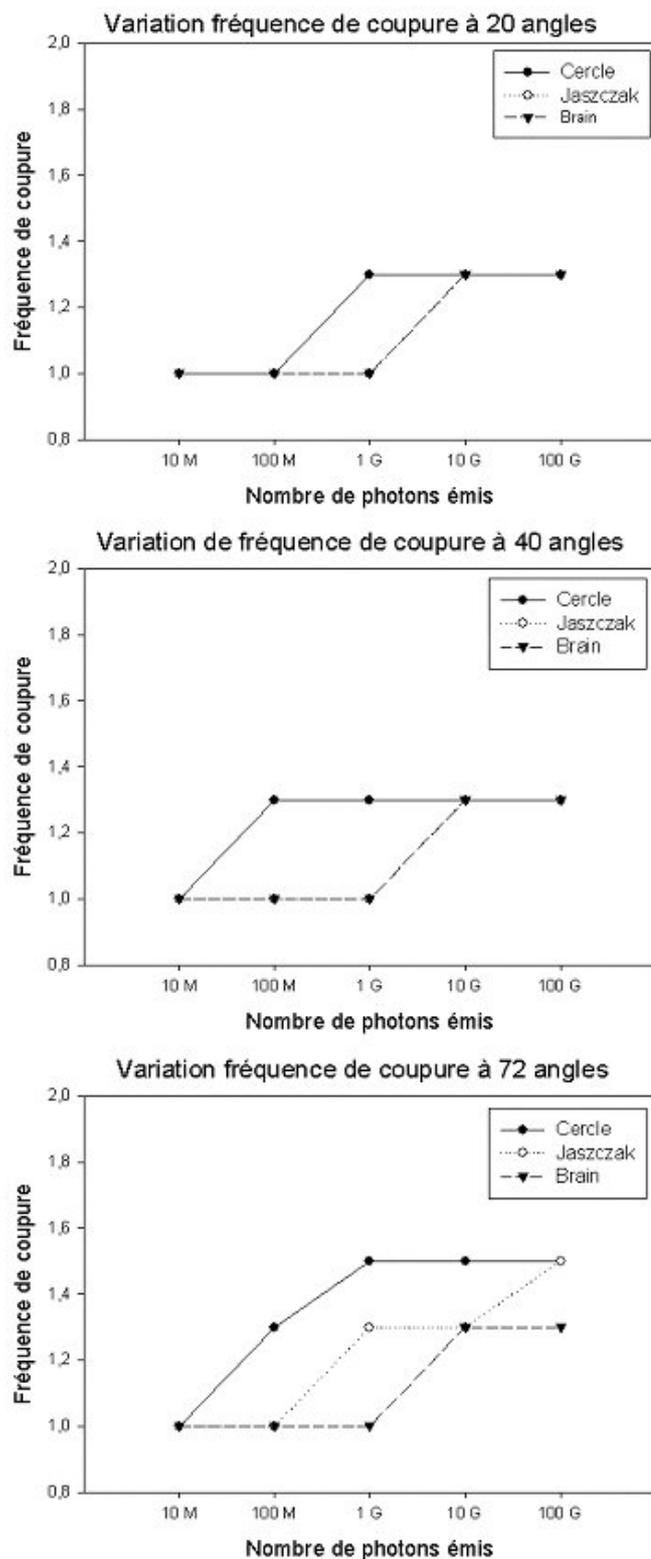


Figure V-16: Étude de la variation du paramètre de fréquence de coupure en fonction de nombre de coups émis pour les objets de test: Cercles, Jaszczak et Brain (64x64 pixels).

V.3.2. Optimisation des dimensions physique du collimateur et des paramètres de l'acquisition

V.3.2.1 Etude de l'influence de la profondeur du collimateur sur la qualité des images

Nous avons utilisé les mêmes largeurs du collimateur que précédemment décrites: largeur 28 mm pour le premier type de trous et largeur 36 mm pour le deuxième. Nous avons fait varier la profondeur du collimateur, commun pour les deux types de trous. Pour chaque profondeur, la sensibilité du collimateur est calculée suivant la relation de la sensibilité donnée au chapitre 2, puis le nombre de photons détecté équivalent est bruité par le générateur de bruit de Poisson, ce qui permet de réaliser les acquisitions bruitées. Une optimisation des paramètres Alpha, bêta, fréquence de coupure et lambda idéal est effectuée pour chaque profondeur. La Figure V-17 représente le graphe de la variation du rapport signal sur bruit en fonction de la profondeur du collimateur pour l'objet de départ "Brain", avec 10M de photons émis et une acquisition à 20 angles. La profondeur optimum pour les largeurs du collimateur donnée précédemment est 80 mm. Avant cette valeur la résolution est le facteur limitant, au-delà c'est la sensibilité et le bruit de comptage qui limite le rapport signal sur bruit "RSB".

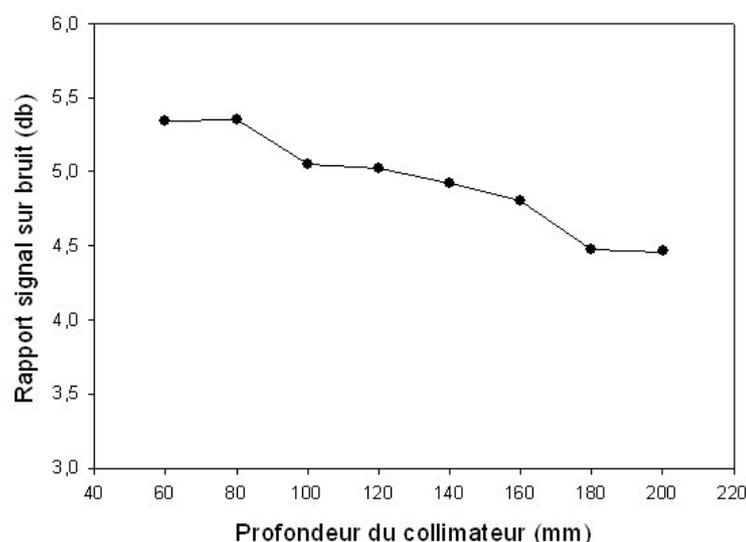


Figure V-17: Étude de la variation du rapport signal sur bruit en fonction de la profondeur du collimateur.

V.3.3. Étude de l'influence de la Largeur de trous du collimateur sur le rapport signal sur bruit

Nous avons étudié l'évolution de la qualité de l'image reconstruite en fonction des largeurs des trous du collimateur pour un collimateur à deux types de trous (deux noyaux). Nous avons fait varier la largeur des trous du collimateur pour les deux noyaux entre 8 et 60 mm avec une profondeur constante fixée à 80 mm.

Comme précédemment pour chaque couple de valeur de largeur des deux types trous, la sensibilité du système est calculée, le nombre de photons détectés est réajusté et les paramètres de la reconstruction α , β , f_c et λ sont optimisés.

La Figure V-18 présente les résultats de l'objet "Brain" de dimension 64x64 pixels. Un nombre de photons émis de 10M et des acquisitions sous 20 angles. Ces simulations montrent l'intérêt d'une collimation large avec deux types de trous. En effet, Plus les noyaux sont larges plus on détecte de photons et meilleur est le rapport signal sur bruit. Le choix d'un seul type de trous donne un rapport signal sur bruit médiocre, visualisé dans la figure par les faibles valeurs rencontrées sur la diagonal du graphe.

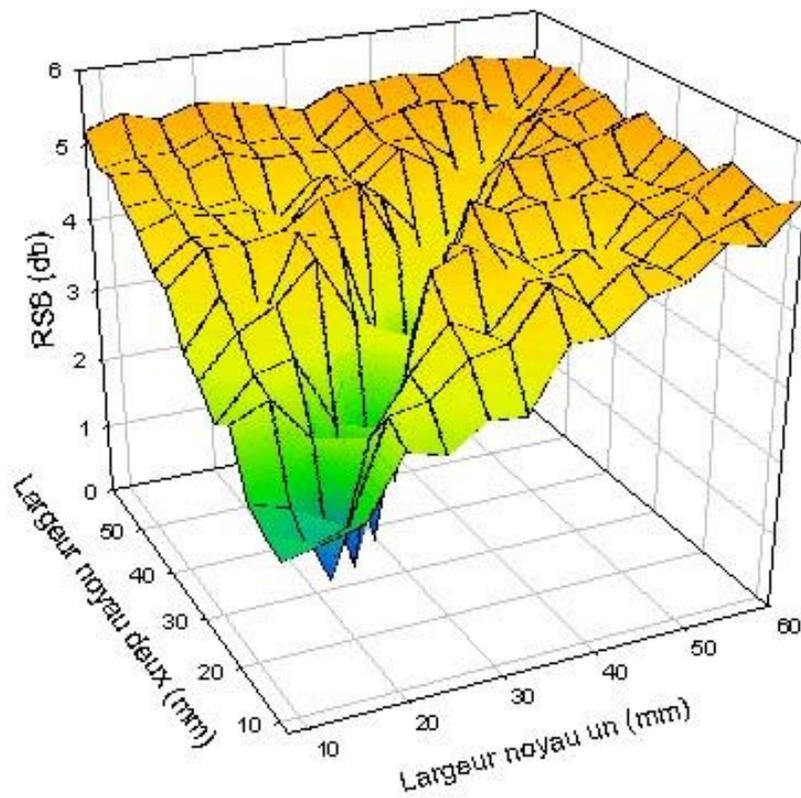
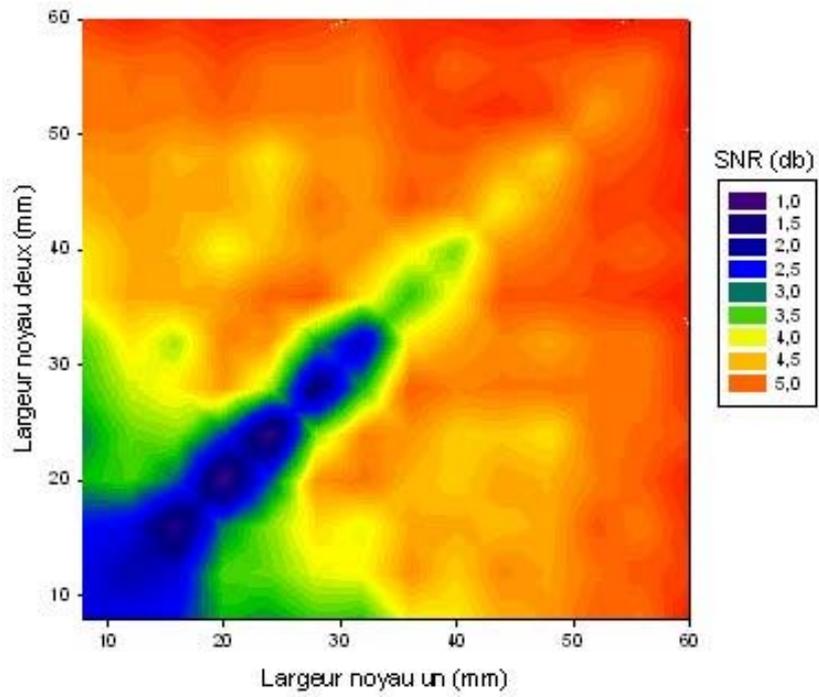


Figure V-18: Etude de la variation du rapport signal sur bruit en fonction de la largeur des trous du collimateur pour les deux noyaux.

V.3.4. Optimisation de Nombre d'angles

La Figure V-19 présente la variation du rapport signal sur bruit en fonction du nombre d'angles pour un nombre de photons émis égale à 10^9 avec l'objet "Brain" (64x64 pixels). La figure montre que les meilleures valeurs sont entre 20 et 72 angles d'acquisition. Au-dessous de 20 angles les informations spatiales sont insuffisantes, au-dessus de 72 angles le nombre de photons acquis par projections, devient le facteur limitant.

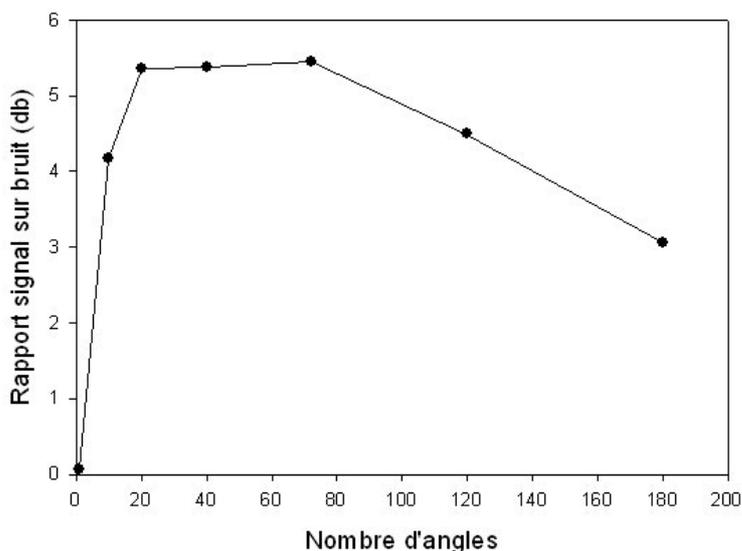


Figure V-19: Variation du rapport signal sur bruit en fonction du nombre d'angles, pour 10^9 photons émis avec le fantôme "Brain" (64x64 pixels).

V.4. Études de l'algorithme de reconstruction

V.4.1. Résultat des reconstructions optimisées avec la méthode MKO

Les Figure V-20, Figure V-21 et Figure V-22 montrent les images reconstruites par l'algorithme Multi-kernel optimisation, en utilisant l'algorithme d'interpolation Splines de degré 3 pour l'étape de sommation-décalage et l'étape de rotation-sommation. Nous avons effectué pour toutes les images présentées une optimisation des paramètres de reconstruction alpha, bêta, fc, et lambda.

On constate que les meilleures valeurs de rapport signal sur bruit sont généralement obtenues pour 72 angles d'acquisitions. On remarque aussi que pour un nombre de photons émis supérieur à 100M, les images reconstruites sont significatives.

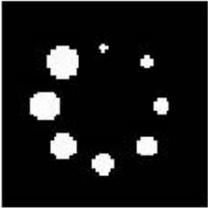
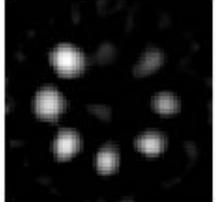
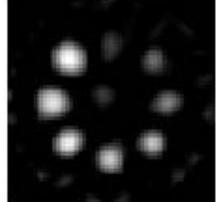
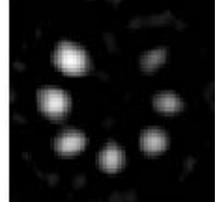
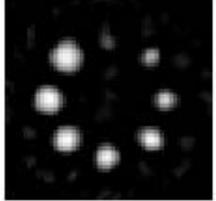
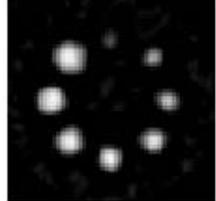
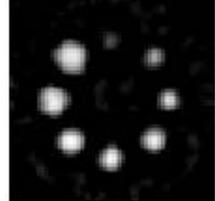
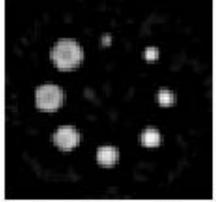
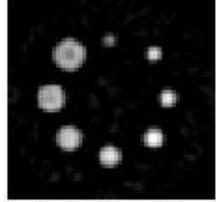
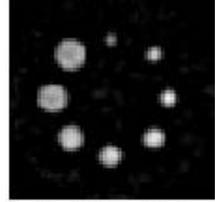
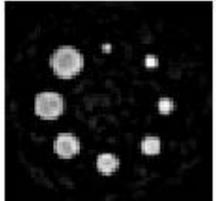
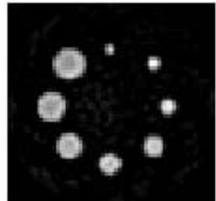
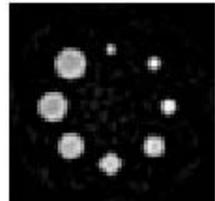
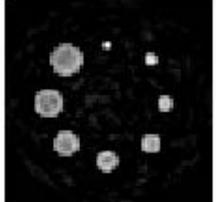
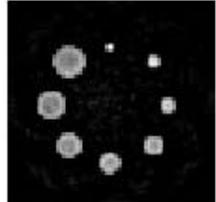
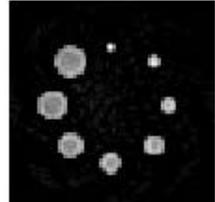
Nombre de photons émis	 Objet Original (64x64 pixels)		
	20 Angles	40 Angles	72 Angles
10 M	 RSB=6.01	 RSB=6.04	 RSB=6.09
100 M	 RSB=7.06	 RSB=7.18	 RSB=7.27
1 G	 RSB=8.54	 RSB=8.62	 RSB=8.77
10 G	 RSB=9.55	 RSB=10.26	 RSB=10.29
100 G	 RSB=10.49	 RSB=11.81	 RSB=12.00

Figure V-20: Résultat de la reconstruction par la méthode de Multi-kernel optimisation sur un fantôme de cercles 64x64 pixels

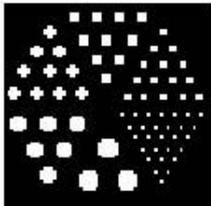
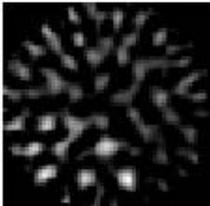
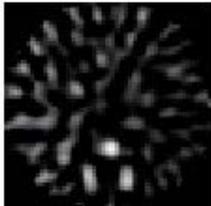
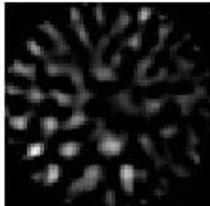
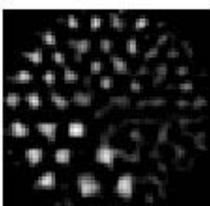
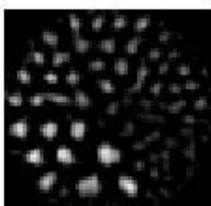
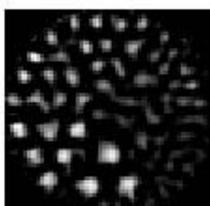
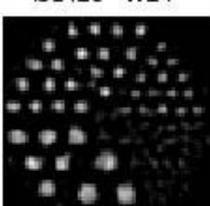
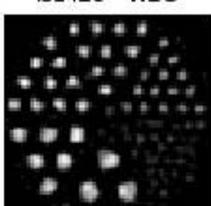
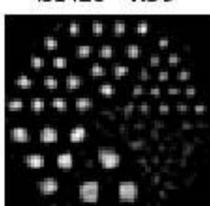
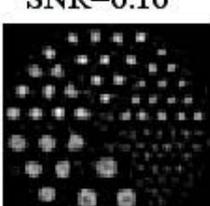
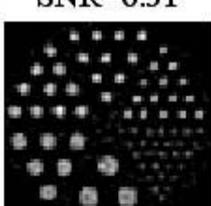
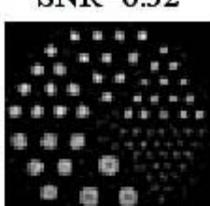
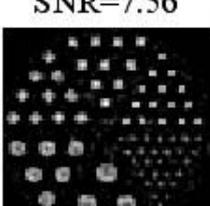
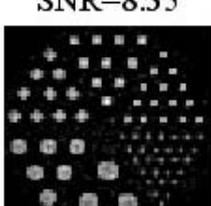
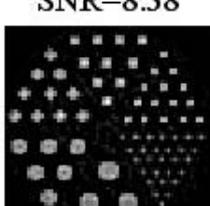
Nombre de photons émis	 Objet Original (64x64 pixels)		
	20 Angles	40 Angles	72 Angles
10 M	 SNR=1.62	 SNR=1.72	 SNR=1.75
100 M	 SNR=4.17	 SNR=4.18	 SNR=4.39
1 G	 SNR=6.16	 SNR=6.31	 SNR=6.32
10 G	 SNR=7.56	 SNR=8.35	 SNR=8.38
100 G	 SNR=8.88	 SNR=10.29	 SNR=10.80

Figure V-21: Résultat de la reconstruction par la méthode de Multi-kernel optimisation sur un fantôme de Jaszczak 64x64 pixel

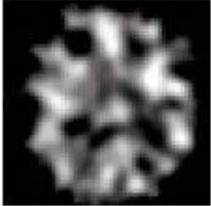
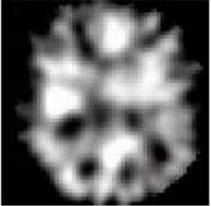
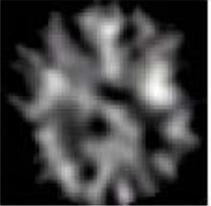
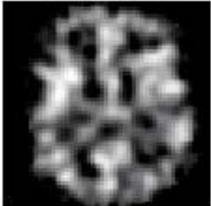
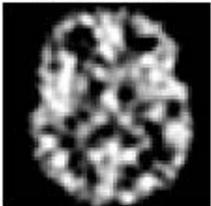
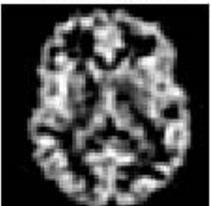
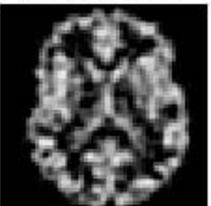
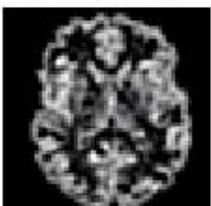
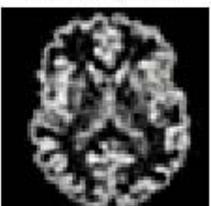
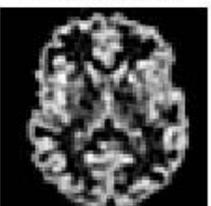
Nombre de photons émis	 Objet Original (64x64 pixels)		
	20 Angles	40 Angles	72 Angles
10 M	 RSB=1.74	 RSB=1.92	 RSB=1.75
100 M	 RSB=3.44	 RSB=3.45	 RSB=3.63
1 G	 RSB=5.35	 RSB=5.36	 RSB=5.46
10 G	 RSB=7.03	 RSB=7.30	 RSB=7.30
100 G	 RSB=8.35	 RSB=9.29	 RSB=9.49

Figure V-22: Résultat de la reconstruction par la méthode de Multi-kernel optimisation sur un fantôme de Brain 64x64 pixels

V.4.2. Étude comparative avec les autres techniques

Pour montrer les améliorations apportées par les nouveaux algorithmes développées et implémentées dans les programmes de reconstruction CAAO. Nous avons réalisé d'une part une étude comparative et optimisée entre la méthode du noyau composite, la méthode MKO en utilisant une interpolation classique (voir chapitre 3) dans l'étape de sommation-décalage et l'étape de rotation-sommation. D'autre part, nous avons comparé ces résultats avec la méthode de MKO en remplaçant l'algorithme d'interpolation classique par la technique d'interpolation splines de degré 3.

Les Figure V-23, Figure V-24 et Figure V-25 représente les résultats des images reconstruites obtenus en utilisant différentes techniques de reconstructions, avec le fantôme "Brain" à 64x64 pixels, et sous trois modes d'acquisitions: 20, 40 et 72 angles. Toutes ces images sont reconstruites avec des paramètres alpha, bêta, fc, et lambda optimisées.

Les résultats des comparaisons avec la méthode du noyau composite, montrent que nous avons amélioré la qualité des images reconstruites en moyenne de 1.3 décibels (db) de rapport signal sur bruit (RSB). Cette amélioration est grossièrement due, pour 1 db par l'introduction de la méthode de déconvolution MKO et pour 0,3 db par l'implémentation de l'algorithme d'interpolation spline dans l'étape de rotation et de décalage.

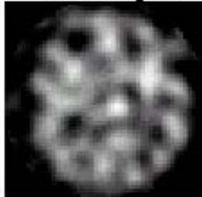
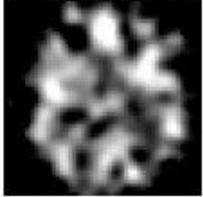
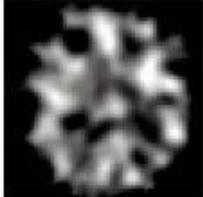
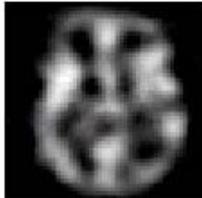
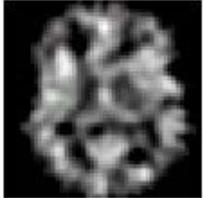
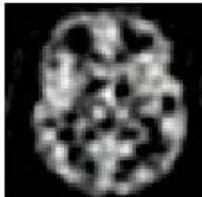
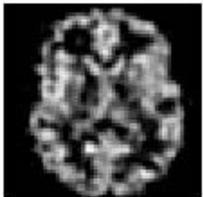
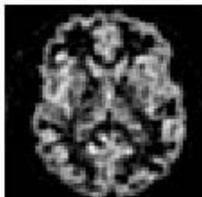
Nombre de photons émis	CACAO		Objet Original (64x64 pixels)
	NC	MKO	
10 M	Interpolation classique  RSB=1.80	Interpolation classique  RSB=1.71	Interpolation Spline 3  RSB=1.74
	100 M	 RSB=2.35	 RSB=3.35
1 G	 RSB=4.00	 RSB=5.04	 RSB=5.35
10 G	 RSB=5.92	 RSB=6.96	 RSB=7.03
100 G	 RSB=7.53	 RSB=8.10	 RSB=8.35

Figure V-23: Comparaison des images reconstruites à 20 angles sur un fantôme de Brain 64x64 pixels.

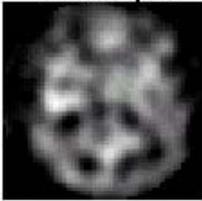
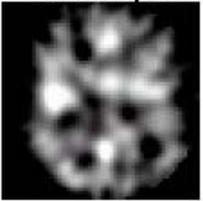
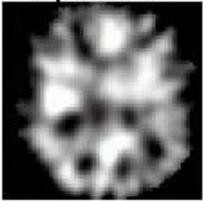
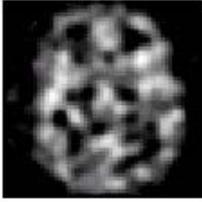
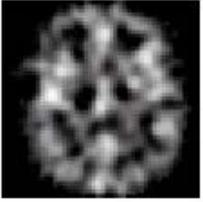
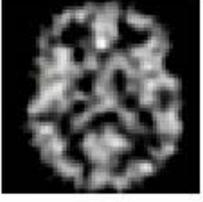
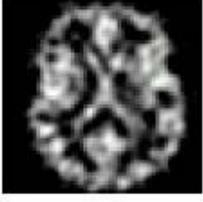
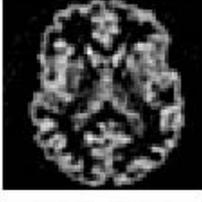
Nombre de photons émis	CACAO		Objet Original (64x64 pixels)
	NC	MKO	
10 M	Interpolation classique  RSB=1.48	Interpolation classique  RSB=1.94	Interpolation Spline 3  RSB=1.92
	100 M	 RSB=2.96	 RSB=3.38
1 G	 RSB=4.55	 RSB=5.11	 RSB=5.36
10 G	 RSB=6.18	 RSB=6.98	 RSB=7.30
100 G	 RSB=7.84	 RSB=8.78	 RSB=9.29

Figure V-24: Comparaison des images reconstruites à 40 angles sur un fantôme de Brain 64x64 pixels.

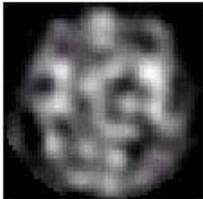
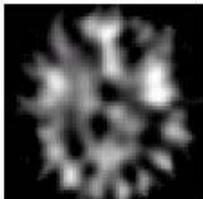
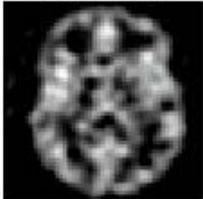
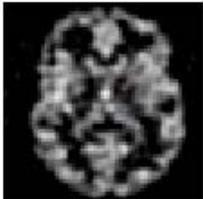
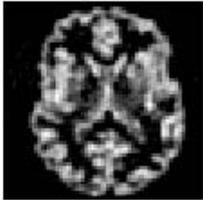
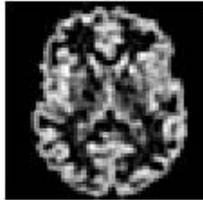
Nombre de photons émis	CACAO		Objet Original (64x64 pixels)
	NC	MKO	
10 M	Interpolation classique  RSB=1.37	Interpolation classique  RSB=1.94	Interpolation Spline 3  RSB=1.75
	100 M	 RSB=2.97	 RSB=3.58
1 G	 RSB=4.61	 RSB=5.04	 RSB=5.46
	10 G	 RSB=6.25	 RSB=7.02
100 G	 RSB=8.08	 RSB=8.89	 RSB=9.49

Figure V-25: Comparaison des images reconstruites à 72 angles sur un fantôme de Brain 64x64 pixels.

V.5. Comparaison avec le système classique (CPHC)

V.5.1. Méthodologie

Afin de comparer les performances du système CACAO avec le système classique à tous parallèles et fins (CPHC). Nous avons simulé des acquisitions dans des conditions identiques pour les deux systèmes avec des configurations différentes. L'objet "Brain" a été choisi comme image de test pour cette étude et les comparaisons ont été évaluées pour une acquisition de 72 angles et pour des nombres de photons émis variant entre 10^7 (10M) et 10^{11} (100 G). Deux configurations pour CACAO, et quatre pour le système classique ont été développées.

Pour effectuer une comparaison objective des méthodes de collimation, nous avons cherché dans chaque voie (CACAO et classique (CPHC)) la meilleure reconstruction que cette approche pouvait produire. C'est à dire que dans chaque voie, la reconstruction est optimisée en s'aidant de la connaissance de l'objet initial. Cette optimisation recouvre les paramètres alpha, bêta, fc, et lambda pour les configurations CACAO et le nombre d'itérations pour les configurations classiques. Ce principe de comparaison est représenté schématiquement dans la Figure V-26.

Cette comparaison, sera effectuée en deux parties. La première avec des images au format 64x64 pixels et avec une résolution intrinsèque de l'ordre de 3mm. Puis deuxième avec des images au format 128x128 pixels correspondant à une résolution intrinsèque moitié de l'ordre de 1,5mm pour évaluer l'impact d'une telle amélioration de la résolution intrinsèque sur les images de médecine nucléaire.

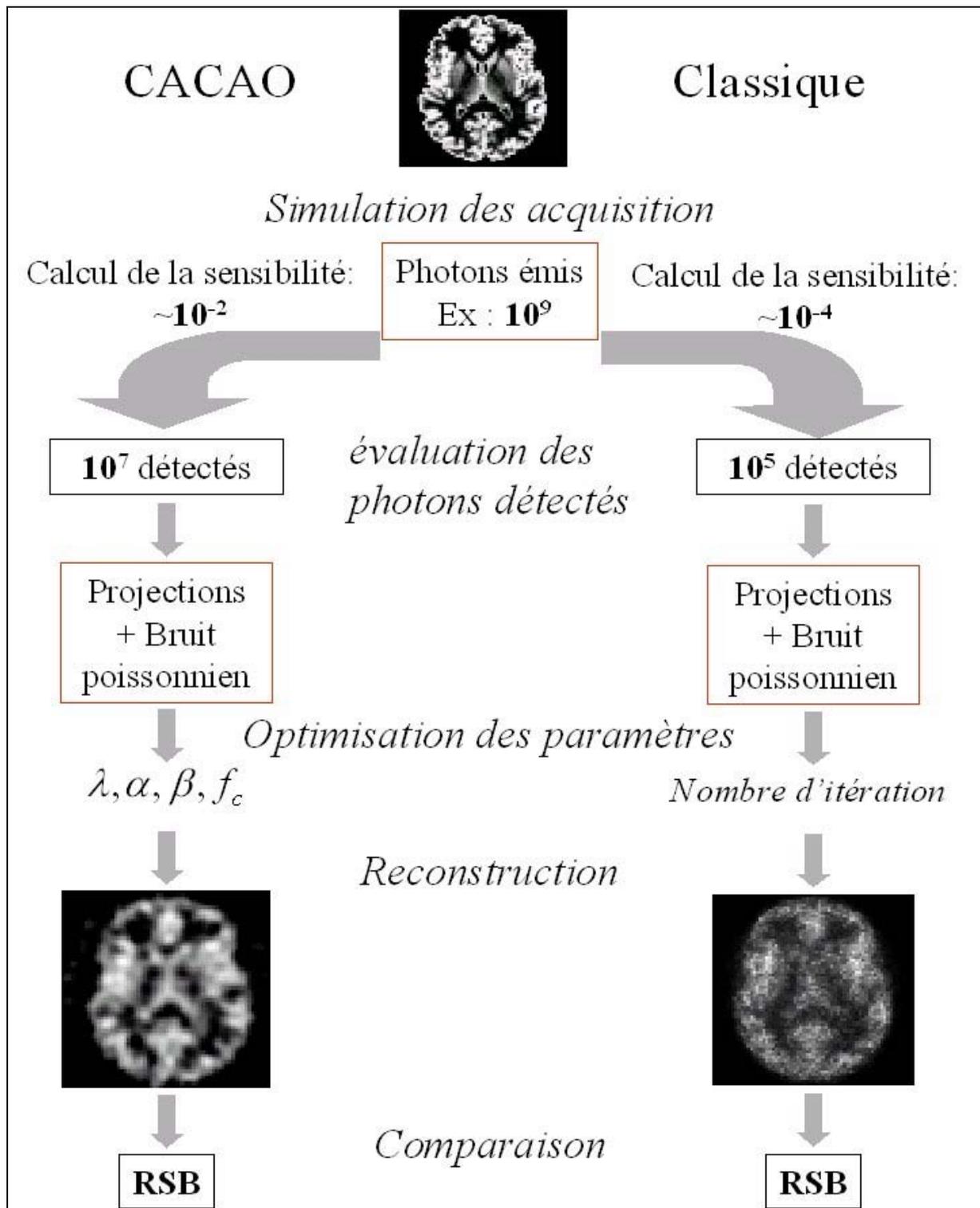


Figure V-26: Méthodologie de comparaison pour le système CACAO et le système classique (CPHC)

V.5.2. Système classique (CPHC)

V.5.2.1 Les configurations des paramètres du système:

Quatre configurations de collimateur ont été étudiées dans le cas classique: La première est simulée avec un objet "Brain" échantillonné sur 64x64 pixels et les trois autres avec le même objet en 128x128 pixels. Les paramètres de ces acquisitions sont illustrés dans le Tableau V-3 .

Les calculs de la sensibilité et la résolution du système ont été calculés suivant la formule du chapitre 2. La sensibilité nous permet de calculer le nombre de photons détectés comme précédemment décrit pour chaque configuration.

La configuration "A" correspond à un collimateur LEHR de la société Sopha Médical Vision (SMV). La configuration "B" est obtenu en réduisant proportionnellement les dimensions du collimateur la configuration "A" par 2. La configuration "C" est obtenu avec le même collimateur que le cas "A". La configuration "D" est similaire que la configuration "B" mais avec une épaisseur de parois identique à la configuration "A".

Classique	A	B	C	D
Dimension de l'objet de test (pixels)	64x64 pixels	128x128 pixels	128x128 pixels	128x128 pixels
Taille de Pixel (mm)	3 mm	1.5 mm	1.5 mm	1.5 mm
D (mm)	2.8 mm	1.4 mm	2.8 mm	1.3 mm
P (mm)	50 mm	25 mm	50 mm	25 mm
T (mm)	0.2 mm	0.1 mm	0.2 mm	0.2 mm
L (mm)	100	100	100	100
Résolution (mm)	8,9 mm	7.1 mm	8.5 mm	6.7 mm
Sensibilité	0.00076	0.00076	0.00076	0.00056
Nombre d'angle	72	72	72	72

Tableau V-3: Paramètres du système classique: D: Diamètres des trous du collimateur, P: Profondeur du collimateur, T: Épaisseur des parois du collimateur, L: Distance source-collimateur pour le calcul de la résolution

La deuxième configuration "B" doit augmenter la résolution de 20 % mais ce calcul néglige la pénétration septale. Comme l'épaisseur de cloison est partagée en deux, la pénétration septale sera augmentée par un facteur de 4, et l'amélioration de résolution sera faible dans ce cas.

La troisième configuration "C" peut conserver la plupart des particularités du collimateur "A", mais avec un faible rendement dans la résolution spatiale du système. En effet, l'amélioration de 50 % de la taille du pixel aboutit seulement à une amélioration de 4 % de la résolution de système.

La troisième configuration "D", cas intermédiaire entre "B" et "C", mène à une amélioration de résolution du système de 25 % accompagné par une diminution de 25 % de la sensibilité.

Il est important de noter que pour une taille de pixel plus petite la situation se détériore d'avantage. Un compromis entre la pénétration septale et la faible sensibilité est donc très difficile avec un système de type classique (CPHC).

V.5.2.2 La méthode de reconstruction:

Le programme permettant de simuler les acquisitions classiques pour un objet donné, réalise les étapes suivantes pour chacun des angles de l'acquisition:

- Rotation de l'image pour isoler les lignes de l'image détectée avec la même résolution.
- Application de la résolution en fonction de la distance source-détecteur (voir chapitre 2), c'est à dire que chaque ligne de l'image est convoluée à une fonction gaussienne de largeur à mi-hauteur (FWHM) égal à la résolution spatiale du système.
- Réalisation de la projection, c'est-à-dire sommation selon la direction perpendiculaire au détecteur des résultats des convolutions précédentes, limité à la demi-image la plus proche du collimateur.

Le programme de reconstruction utilisé pour le système classique est du type " maximisation de vraisemblance" EM-ML [68]. Ce programme a été développé par le groupe MIPG à l'université de Philadelphie [20]. D'autres algorithmes de cet ensemble ont été essayés mais ils n'ont pas produit de meilleurs résultats. Les itérations de l'algorithme EM-ML ont été arrêtées au maximum du RSB (alentour de 40 itérations pour chaque simulation).

V.5.3. Système CACAO

Deux configurations ont été simulées pour le système CACAO. La première acquisition correspond à une configuration à basse résolution (CACAO-LR) avec une taille de pixel de 3mm, des largeurs de trous de 7 et 9 pixels et une profondeur de 20 pixels. L'acquisition à haute résolution (CACAO-HR) correspond à une taille de pixel de 1,5 mm, des largeurs de trous de 17 et 19 pixels et une profondeur de trous de 20 pixels. 40 angles d'acquisitions ont été choisis, pour l'acquisition CACAO, 16 (CACAO-LR) et 36 (CACAO-HR) pas ont été nécessaires pour les balayages linéaires. Cela mène à un total de 640 acquisitions élémentaires pour CACAO-LR et 1440 pour CACAO-HR.

Le Tableau V-4 représente les paramètres du système CACAO des deux types d'acquisitions étudiées.

CACAO	CACAO-LR	CACAO-HR
Dimension de l'objet de test(pixels)	64x64 pixels	128x128 pixels
Taille de Pixel (mm)	3 mm	1.5 mm
D1 (mm)	21 mm	25,5 mm
D2 (mm)	27 mm	28,5 mm
P (mm)	60 mm	60 mm
T (mm)	3 mm	1.5 mm
Sensibilité	0.011	0.011
Nombre d'angle	40	40

Tableau V-4: Paramètres du système CACAO: D1 et D2: Diamètre des trous du collimateur, P: Profondeur du collimateur, T: Épaisseur des parois du collimateur.

V.5.4. Résultats

La Figure V-27 montre les résultats de comparaison entre le système CACAO à basse résolution (CACAO-LR) et le système classique pour la configuration "A". Un examen visuel des images reconstruites des deux simulations montre déjà un avantage des images produites par le système CACAO et elles permettent d'avoir plus d'informations. Le calcul des rapports signal sur bruit "SNR" confirme cet avantage.

La Figure V-28 représente les résultats de comparaison entre le système CACAO à haute résolution (CACAO-HR) et le système classique pour la configuration "B". On constate que l'amélioration de la résolution intrinsèque de détecteur (1,5mm) n'apparaît pas clairement dans les simulations du système classique. En revanche, dans la reconstruction CACAO-HR la résolution s'approche d'un pixel. Les ventricules cérébraux peuvent par exemple être nettement identifiés dans les images CACAO-HR.

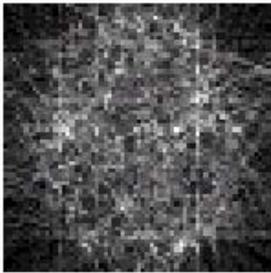
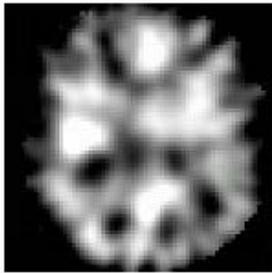
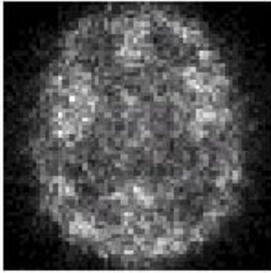
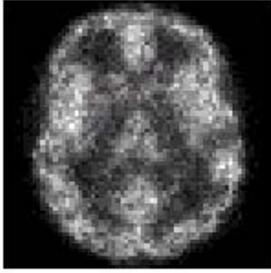
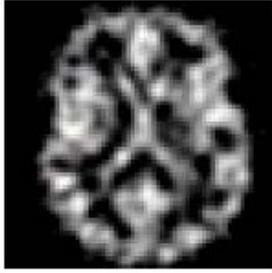
Nombre de photons émis	Classique-A, à 72 angles 64x64 pixels	CACAO-LR, à 40 angles 64x64 pixels
10 M	RSB=0.03 	RSB=1.92 
100 M	RSB=1.48 	RSB=3.45 
1 G	RSB=3.69 	RSB=5.36 
10 G	RSB=5.06 	RSB=7.30 
100 G	RSB=5.25 	RSB=9.29 

Figure V-27: Comparaisons entre le système CACAO-LR et le système classique-A avec des images au format 64x64 pixels.

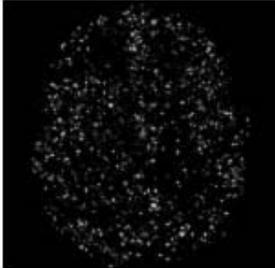
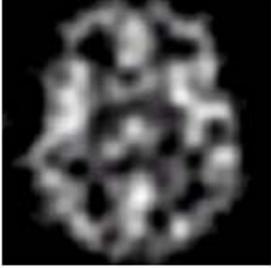
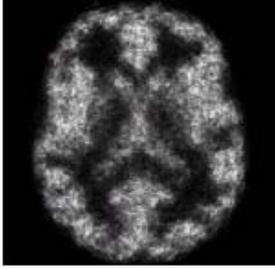
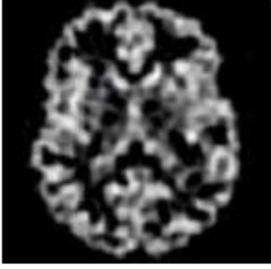
Nombre de photons émis	Classique-B, à 72 angles 128x128 pixels	CACAO-HR, à 40 angles 128x128 pixels
10 M	RSB=0.00 	 RSB=2.61
100 M	RSB=0.00 	 RSB=3.77
1 G	RSB=5.39 	 RSB=5.4
10 G	RSB=6.71 	 RSB=7.30
100 G	RSB=6.90 	 RSB=9.44

Figure V-28: Comparaisons entre le système CACAO-HR et le système classique-B avec des images au format 128x128 pixels.

La Figure V-29 montre le bilan de comparaison des différentes techniques de reconstruction sous forme d'un graphe des rapports signal sur bruit à l'optimum en fonction de nombre de coups émis.

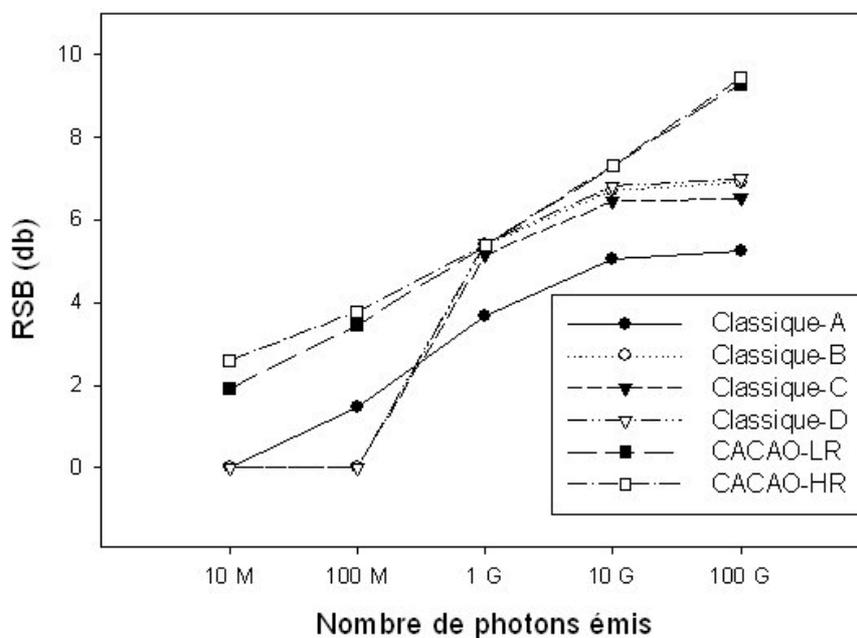


Figure V-29: Résultats des comparaisons des différentes méthodes étudiées

V.6. Conclusion

L'analyse des images reconstruites pour CACAO et pour le système classique (CPHC) nous permet de conclure que les résultats obtenus en 2D avec le collimateur CACAO permettent de réaliser des images de qualité au moins équivalente au système classique. La supériorité du système CACAO provient du fait que la collimation avec des trous plus large augmente la sensibilité du système. Le système classique caractérisé par ces trous fins a une sensibilité plus faible: il collecte moins de photons et par conséquent, il dispose d'une information qui n'est pas suffisante pour reconstruire des images de haute qualité. En outre, le système CACAO s'avère bien adapté aux progrès actuels qui visent à améliorer la résolution intrinsèque des détecteurs.

VI. RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE À 3D

Dans le chapitre précédent nous avons étudié la collimation à trous large dans un système réduit à un seul plan en position transverse. Nous envisageons dans ce chapitre l'extension à trois dimensions du système CACAO. Cette extension nécessaire car plus réaliste, complique un petit peu le problème. Tout d'abord le balayage linéaire est dépendant cette fois de la surface du détecteur et conditionne l'arrangement des trous du collimateur. La déconvolution ensuite donne des résultats un peu différents suivant la dimension des trous du collimateur. Comme dans le chapitre précédent, une comparaison avec la collimation classique, clos ce chapitre.

VI.1. Description générale du système CACAO à 3 Dimension

VI.1.1. Le système CACAO en 3D

L'étude du système CACAO en 3D est bien sûr beaucoup plus réaliste que la simplification faite au chapitre précédent. Elle est par contre plus complexe à mettre en œuvre. En plus du volume plus important des données, le déplacement linéaire en 1D doit être remplacé par un balayage sur une surface 2D. Toutefois, comme nous pouvons disposer de détecteurs de grande taille, nous verrons comment un arrangement particulier des trous du collimateur permet de réduire les mouvements mécaniques de l'ensemble. Une fois l'objet reconstruit celui est représenté en coupes. Ces coupes peuvent être orientées selon trois plans (voir Figure VI-1) : transversale, sagittale ou coronal selon son orientation dans le repère lié à l'objet. L'acquisition se fait par un détecteur bidimensionnelle situé dans un plan longitudinal, c'est à dire, parallèle au grand axe du patient (en face du patient). L'axe de rotation de la tête de la gamma caméra est confondu à ce dernier.

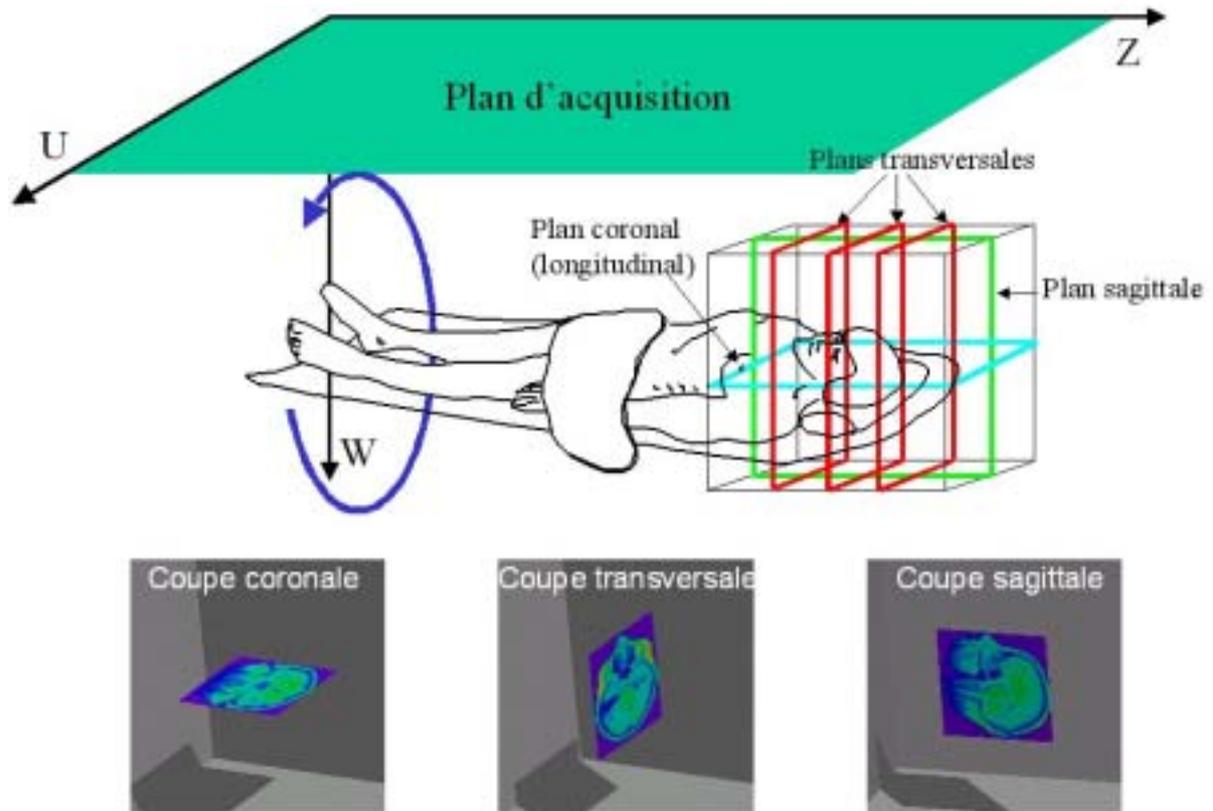


Figure VI-1: Le système d'acquisition 3D

Comme nous l'avons décrit dans le chapitre 3, les acquisitions du système CACAO sont scindées en deux moments: 1) mouvement de translation. 2) mouvement de rotation.

VI.1.2. Mouvement de rotation:

La Figure VI-2 représente le mouvement de rotation pour une caméra double têtes. Ce mouvement utilisé seul en "SPECT" sera dans le système CACAO entrecoupé d'un mouvement de translation, pour chaque angle d'acquisition.

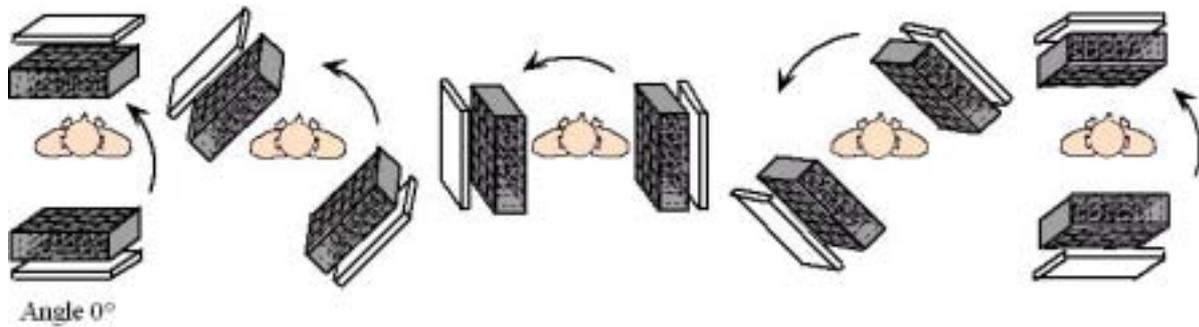


Figure VI-2: Mouvements de rotation

VI.1.3. Mouvement de translation:

En acquisition 3D. Les translations CACAO peuvent être réalisées selon deux modalités: tangentielle au cercle de rotation ou axial dans la direction de l'axe de rotation. La translation tangentielle est illustrée dans la Figure VI-3. Ce mode de balayage est préférable pour l'étude d'une petite région d'intérêt, comme par exemple, la scintigraphie du cerveau ou du cœur.

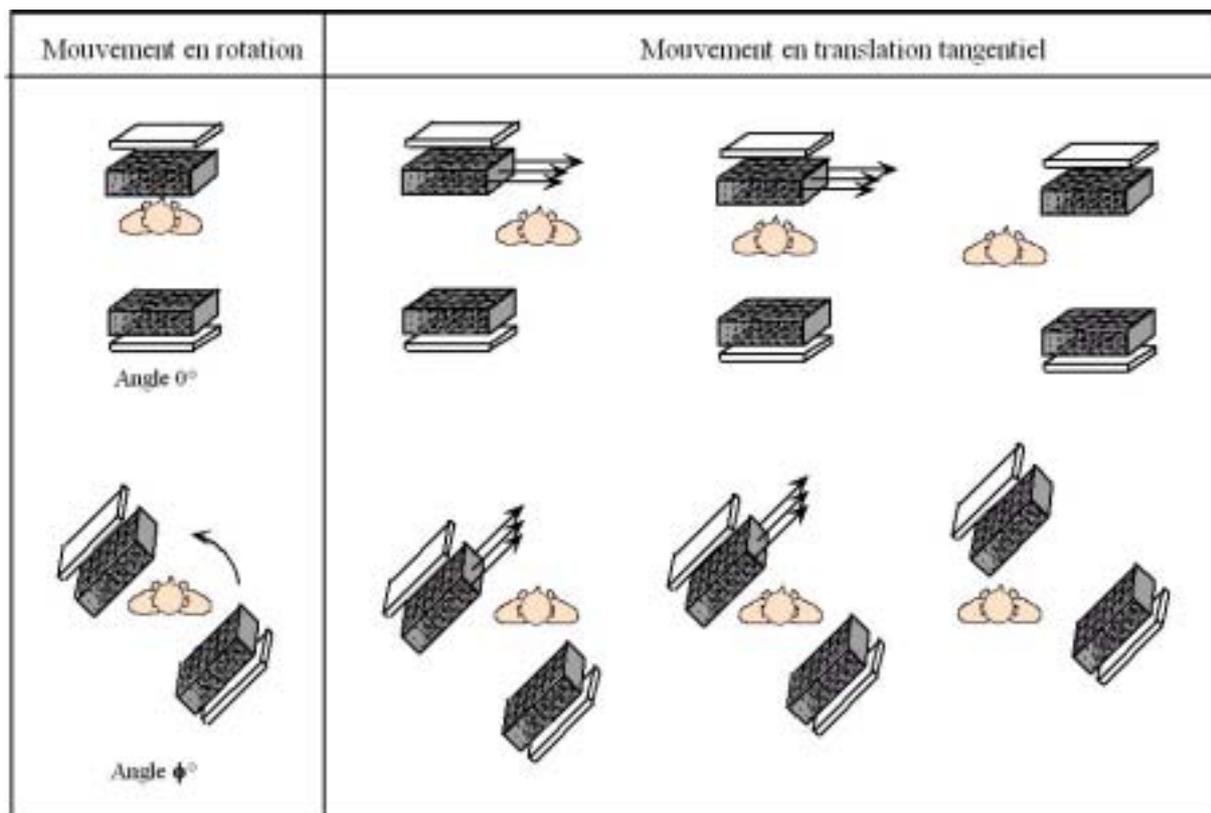


Figure VI-3: Balayage tangentiel

La Figure VI-4 présente la deuxième possibilité de translation, le balayage axial. Ce mouvement peut être effectué par un déplacement en translation de la table du patient ou bien de la tête détectrice de la gamma caméra. Ce procédé est recommandé pour une scintigraphie corporelle totale.

Une rotation complète des têtes détectrices doit bien sur être réalisée pour chaque pas du balayage linéaire.

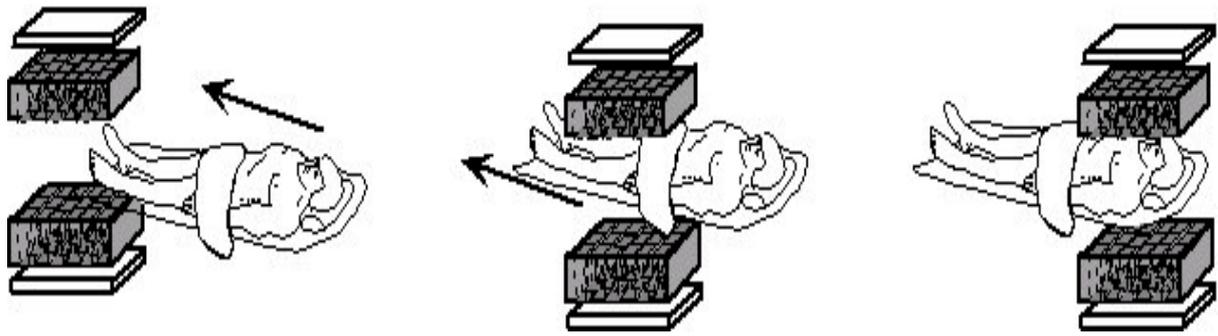


Figure VI-4: Balayage linéaire axial

VI.1.4. Système d'axes

Comme en 2D, le traitement en 3 dimensions utilise plusieurs repère:

Les objets étudiés sont décrit dans le repère fixe $R(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$. Ou O est l'origine du repère et \vec{Z} est la direction de l'axe de rotation.

Le repère $R(O, \vec{U}, \vec{W}, \vec{Z})$ est le repère lié au plan du détecteur bidimensionnelle de la caméra. Le plan d'acquisition est défini par le plan $P(\vec{U}, \vec{Z})$. \vec{W} est la direction perpendiculaire à ce dernier.

Le repère $R(O, \vec{U}, \vec{W}, \vec{Z})$ est en mouvement de rotation autour de l'axe \vec{OZ} (voir Figure VI-5). La matrice de passage de $R(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ à $R(O, \vec{U}, \vec{W}, \vec{Z})$ est définie par:

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{[VI.1]}$$

Le repère $R(\chi, \vec{U}, \vec{W}, \vec{Z})$ représente le repère associé à la tête directrice de la gamma caméra (détecteur/collimateur) ou $\chi = (\chi_U, \chi_W, \chi_Z)$ est le centre du collimateur suivant le balayage en translation tangentiel ou axial. Les codages des acquisitions pour chaque trou de collimateur seront estimés dans ce repère $R(\chi, \vec{U}, \vec{W}, \vec{Z})$. Ensuite, on se ramène par un changement de repère à $R(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$. La Figure VI-5 représente l'ensemble des systèmes d'axes utilisé dans ce chapitre.

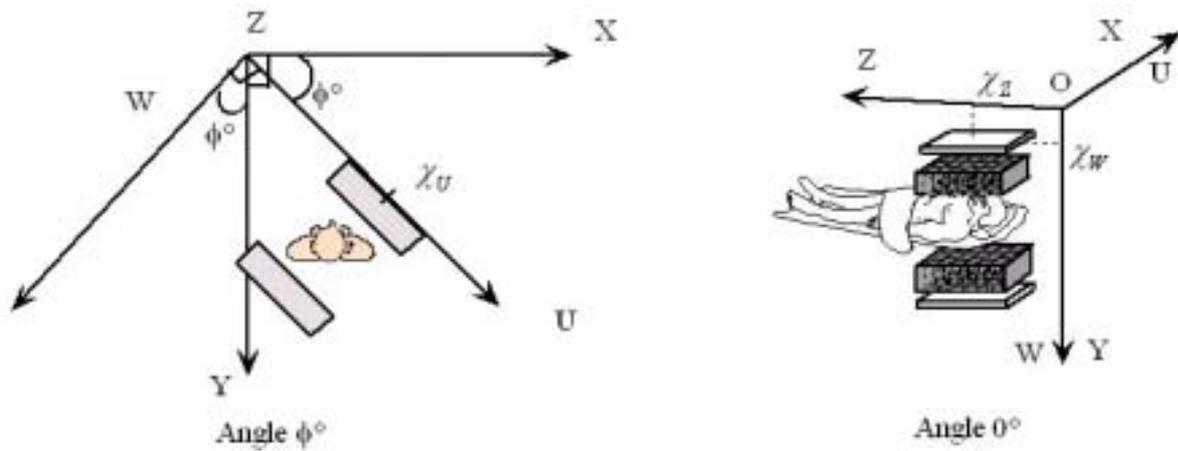


Figure VI-5: Définition des repères

VI.2. Description des acquisitions

VI.2.1. Arrangement des trous du collimateur

La Figure VI-6 illustre l'arrangement des trous du collimateur dans le cas où un seul type de trou est utilisé. Les trous sont alignés en colonnes, perpendiculairement à la direction du sens de translation. Chaque colonne est décalée par rapport à sa voisine d'une distance égale au pas du balayage. Ainsi, un balayage linéaire de ce collimateur est équivalent à un balayage à deux dimensions d'un collimateur ne comportant qu'un seul trou.

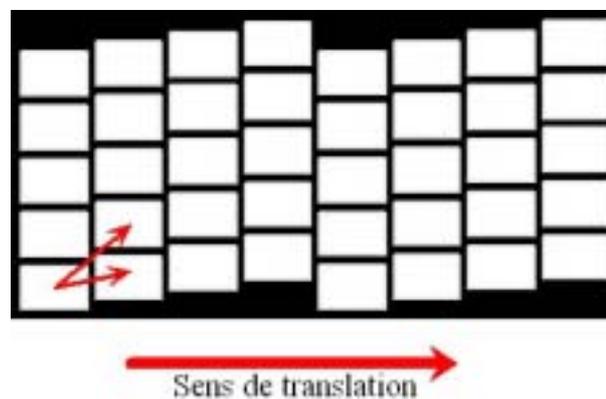


Figure VI-6: Arrangement des trous de collimateur CACAO

VI.2.2. Mouvement en translation du collimateur

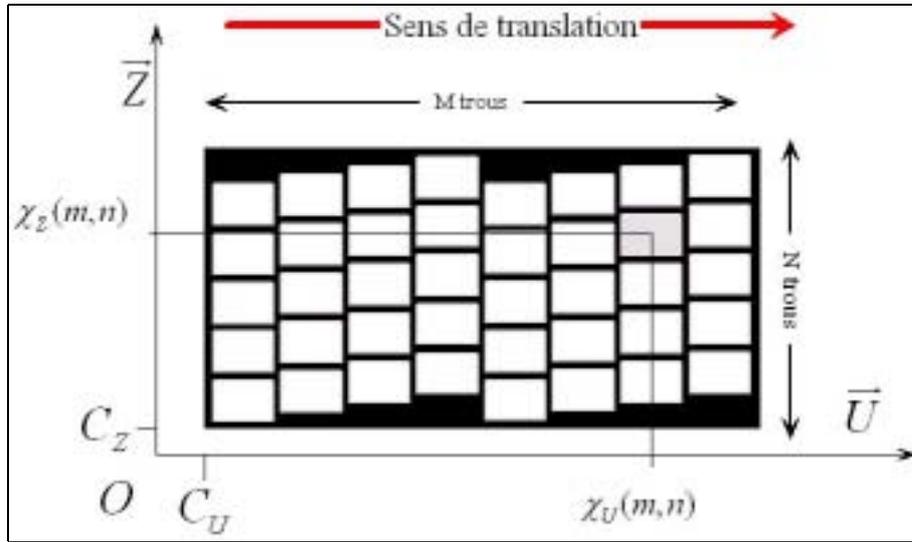


Figure VI-7: Codage des centres des trous du collimateur

La Figure VI-7 représente géométriquement l'arrangement des trous de collimateur. $R(O, \vec{U}, \vec{W}, \vec{Z})$ est le repère associé à l'ensemble collimateur/détecteur. L'axe \vec{U} est la direction du balayage en translation (Balayage tangentiel). M et N sont les nombres de lignes et de colonnes de la matrice des trous dans le collimateur. Les indices m et n représentent l'indice de ligne et de colonne du trou. D_U et D_Z représentent les largeurs des cotées du trou suivant la direction U et Z mesurées en pixel. L'épaisseur des cloisons est supposée égale à un pixel.

Le codage des centres des trous est déterminé avec le système paramétrique suivant (toujours exprimé en nombre de pixel):

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_U(m, n) = m(D_U + 1) - \frac{D_U}{2} + C_U \\ \chi_W(m, n) = 0 \\ \chi_Z(m, n) = n(D_Z + 1) + (r - 1) - \frac{D_Z}{2} + C_Z \\ \text{ou } m = r \bmod [D_Z + 1] \\ n = 1, \dots, N \text{ et } m = 1, \dots, M \end{array} \right. \quad [\text{VI.2}]$$

Ou $(C_U, C_W = 0, C_Z)$ sont les coordonnées du point C situé dans le premier trou en bas à gauche de la Figure VI-7. Le terme $r - 1$ correspond au décalage des colonnes dans le sens de déplacement. Les termes $D_U + 1$ et $D_Z + 1$ sont les distances entre deux trous voisins respectivement suivant les

directions \vec{U} et \vec{Z} (le terme unité correspond à l'épaisseur de la cloison séparant les trous). Sur les deux axes \vec{U} et \vec{Z} l'arrangement des trous dans le collimateur est périodique. La périodicité sur l'axe \vec{Z} de chaque colonne est $D_Z + 1$, lorsque m vaut cette valeur, la colonne est identique à la première colonne. Ainsi au bout de $D_Z + 1$ colonnes, le schéma se répète à l'identique, la période sera donc de $(D_U + 1)(D_Z + 1)$.

La périodicité suivant l'axe \vec{U} nous définit également la distance du balayage nécessaire pour recouvrir une surface régulière de maille rectangulaire de largeur équivalente à la largeur du collimateur. D'ailleurs, on peut retrouver analytiquement le balayage nécessaire au déplacement du collimateur pour un arrangement des trous de type [VI.2]. En effet si on considère un trou A à la position $\chi(m, n) = (\chi_U(m, n), 0, \chi_Z(m, n))$, après un balayage complet il sera positionné à l'emplacement du trou $B = (\chi_U(m + k, n), 0, \chi_Z(m + k, n))$ situé à une période du trou A , on aura donc:

$$\begin{cases} P_U(B) = P_U(A) + N_t \\ P_Z(B) = P_Z(A) \end{cases} \quad [\text{VI.3}]$$

Ou P_U est la projection selon l'axe \vec{U} , P_Z est la projection selon l'axe \vec{Z} et N_t est le balayage nécessaire qu'on cherche à déterminer. En utilisons l'équation paramétrique [VI.2], l'équation devient:

$$\begin{cases} \chi_U(m + k, n) = \chi_U(m, n) + N_t \\ \chi_Z(m + k, n) = \chi_Z(m, n) \end{cases} \quad [\text{VI.4}]$$

Cette équation est équivalente à:

$$\begin{cases} (m + k)(D_U + 1) = m(D_U + 1) + N_t \\ n(D_Z + 1) + r_{m+k} - 1 = n(D_Z + 1) + r_m - 1 \\ \text{ou } m = r_m \bmod [D_Z + 1] \\ \text{et } m + k = r_{m+k} \bmod [D_Z + 1] \end{cases} \quad [\text{VI.5}]$$

D'une part, La première équation du système nous donne la formule suivante:

$$N_t = k(D_U + 1) \quad [VI.6]$$

D'autre part, La deuxième équation du système admet une solution si et seulement si:

$$k = 0 \text{ mod}[D_Z + 1] \quad [VI.7]$$

Or, k est un nombre entier non nul. Donc le balayage minimum pour cet arrangement de trous périodique est :

$$N_t = (D_Z + 1)(D_U + 1) \quad [VI.8]$$

Par ailleurs, les formules [VI.6] et [VI.7] sont importantes pour ne pas avoir des acquisitions redondantes dans le cas d'un collimateur à plusieurs périodes. En effet, pour un collimateur qui contient un nombre de période égale à K , on peut effectuer un saut d'une distance $(K - 1)(D_Z + 1)(D_U + 1)$ avant la reprise des pas élémentaires de translation. On peut ainsi réaliser des balayages de surface importante. On pourrait aussi réaliser un ensemble de détection de grande dimension à partir de plusieurs scintillateurs. Cette découpe de la surface de détection n'est pas envisageable avec un collimateur classique.

Pour un collimateur avec plusieurs type de trous, Le nombre N_t de déplacements élémentaires nécessaires au balayage est donné par :

$$N_t = \sum_{i=1}^{\text{Nombre de type des trous}} \left((D_U^i + 1) \times (D_Z^i + 1) \right) \quad [VI.9]$$

Où D_U^i et D_Z^i sont respectivement les longueurs (selon l'axe \vec{U}) et les largeurs (selon l'axe \vec{Z}) des trous du collimateur de type "i".

VI.2.3. Étude de la surface balayée par translation.

Dans cet exemple nous allons étudier la surface balayée par les éléments de surface du détecteur en prenant comme exemple le pixel en bas à gauche de trou du collimateur noté: pixel n°1 (voir Figure VI-8). Le collimateur est choisi avec un seul type de trous de géométrie rectangulaire de dimensions 7x5 pixels et avec un arrangement à deux périodes ($K = 2$).

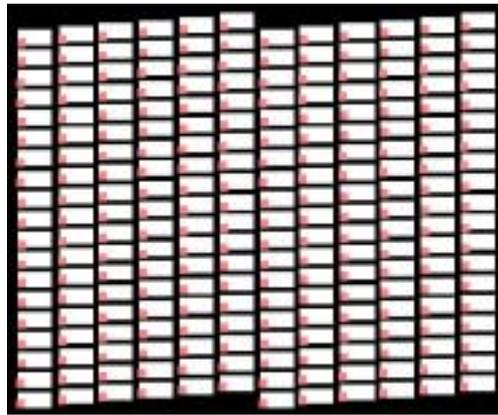


Figure VI-8: position de pixel n°1

Le nombre de déplacement nécessaire pour recouvrir une surface dense de forme rectangulaire de largeur équivalente à la largeur d'une période est:

$$N_t = (7 + 1) \times (5 + 1) = 48$$

La Figure VI-9 représente les surfaces balayées par les pixels n°1 en blanc dans un fond noir. La (Figure VI-9 -a) présente la position initiale des pixels n°1, la (Figure VI-9 -b-c) montre la surface balayée par les pixels n°1 pour des translations de 6 et 12 pas. Après plusieurs décalages, la surface balayée devient de plus en plus dense. La (Figure VI-9 -d) présente la première surface continue, elle correspond au balayage avec $N_t = 48$ pas. Après cette étape il est nécessaire de faire un saut de distance N_t avant de reprendre le balayage pas par pas.

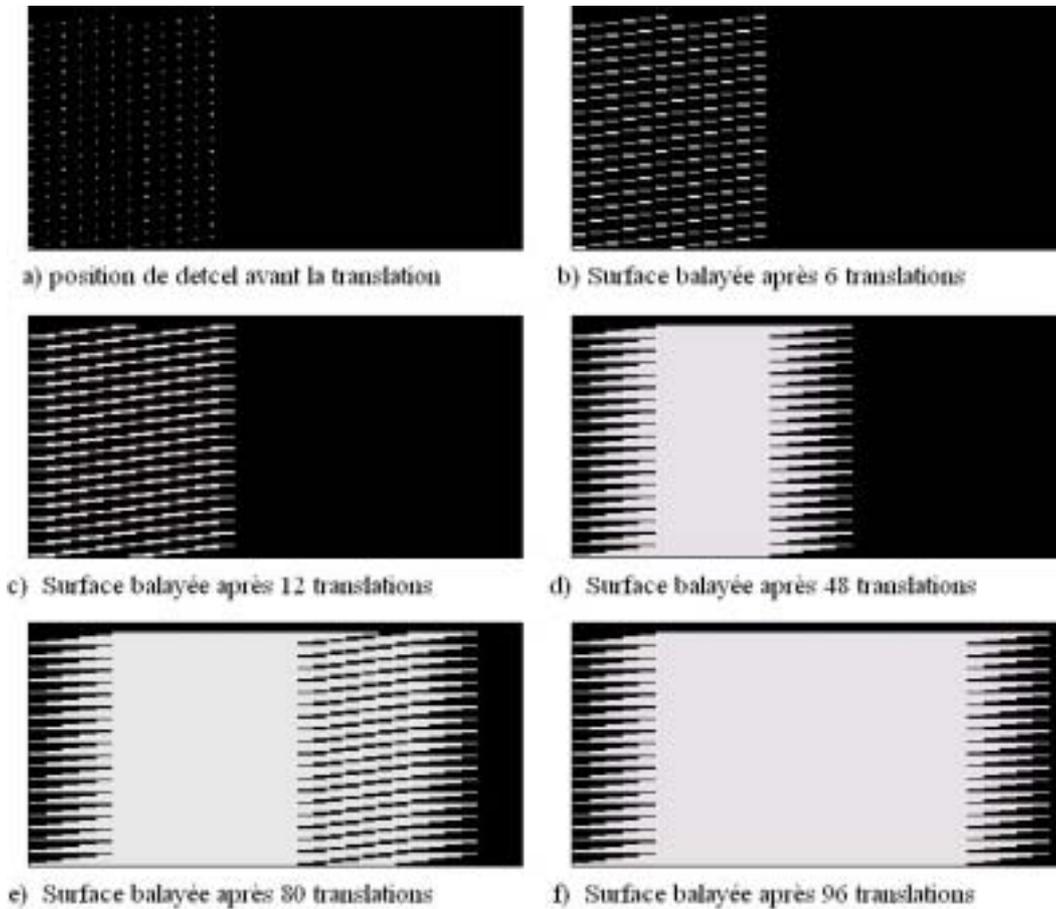


Figure VI-9: Surface balayée par les pixels au cours de déplacements de 96 pas de translation.

VI.2.4. Acquisitions 3D

Le formalisme mathématique des acquisitions 3D reste le même que dans le cas bidimensionnel décrit au chapitre 3. Le passage du cas 2D au 3D consiste à adapter les principes suivants:

- a. Changer les pixels (picture element) par les voxels (volume element) qui exprime un volume élémentaire d'un objet 3D.
- b. Prendre en compte la troisième dimension Z dans toutes les étapes du programme de reconstruction.

En effet, la distribution des sources radioactives est caractérisée par une fonction tridimensionnelle $\rho(x, y, z)$ dans le repère $R(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$. Les projections de l'objet d'étude ρ sont repérées sur le plan (\vec{U}, \vec{Z}) associé au détecteur. Alors, les acquisitions $g_{(\vec{U}, \vec{Z})}$ de la distribution ρ à l'angle ϕ sont obtenues par une intégration sur le plan de détecteur (\vec{U}, \vec{Z}) :

$$\begin{aligned}
g_{(\vec{U}, \vec{Z})}(\chi, \nu, \phi) &= g(\chi_u, \chi_z, \nu_u, \nu_z, \phi) \\
&= \int_p^\tau \int_{\chi_i^U}^{\chi_f^U} \int_{\chi_i^Z}^{\chi_f^Z} \frac{\cos \theta}{d^2(x, y, z)} \rho(u \cos \phi + w \sin \phi, -u \sin \phi + w \cos \phi, z) dz dudw
\end{aligned} \tag{VI.10}$$

Où $\chi = (\chi_u, \chi_w = 0, \chi_z)$, et le couple $\chi = (\chi_u, \chi_z)$ repère les positions des centres des trous dans le plan (\vec{U}, \vec{Z}) . À l'angle zéro l'équation [VI.10] s'écrit:

$$g(\chi_u, \chi_z, \nu_u, \nu_z) = \int_p^\tau \int_{\chi_i^U}^{\chi_f^U} \int_{\chi_i^Z}^{\chi_f^Z} \frac{\cos \theta}{d^2(x, y, z)} \rho(u, w, z) dz dudw \tag{VI.11}$$

On peut déterminer les bornes de l'intégrale suivant l'axe U et l'axe Z de la même façon que dans le cas bidimensionnel, ils sont donnés par:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\chi_i^Z = \chi_z + \nu_z - \frac{w}{p} \nu_z + \frac{D_z}{2} \\
\chi_f^Z = \chi_z + \nu_z - \frac{w}{p} \nu_z - \frac{D_z}{2} \\
\chi_i^U = \chi_u + \nu_u - \frac{w}{p} \nu_u + \frac{D_u}{2} \\
\chi_f^U = \chi_u + \nu_u - \frac{w}{p} \nu_u - \frac{D_u}{2}
\end{array} \right. \tag{VI.12}$$

Le couple $\nu = (\nu_u, \nu_z)$ repère les points sur la surface du détecteur par rapport au centre du trou. Les acquisitions des volumes à 3 dimensions sont donc enregistrées sous forme des données bidimensionnelles pour chaque élément détecteur (detcels) indexé par le couple $\nu = (\nu_u, \nu_z)$.

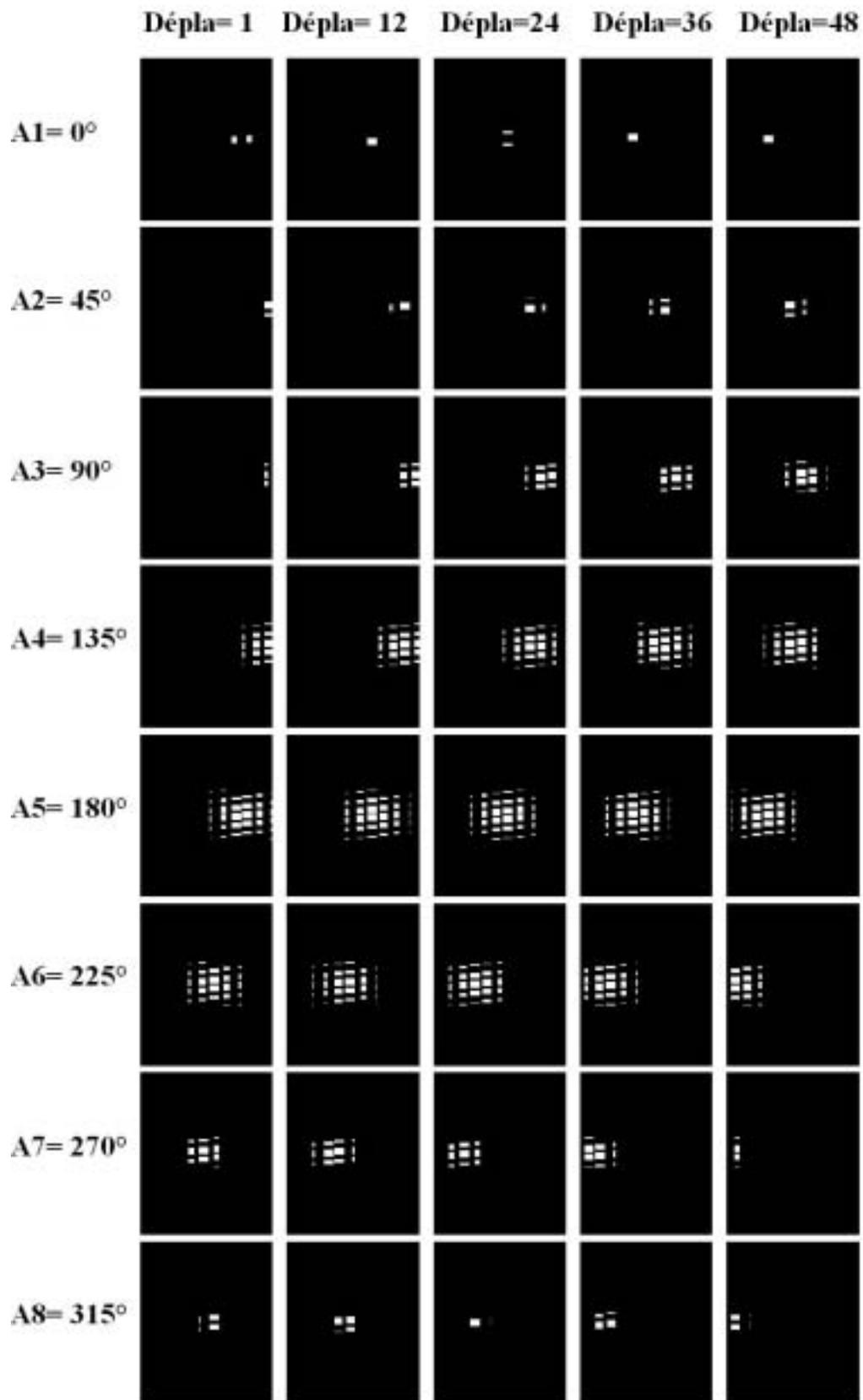


Figure VI-10: Projection 3D d'une source ponctuelle pour une acquisition à 8 angles.

La Figure VI-10 représente les projections d'une source ponctuelle située au point $(x=32,y=3,z=6)$ pour une acquisition sous 8 angles avec le premier collimateur de largeur des trous 7×5 pixels. Comme

la source est proche du collimateur à l'angle zéro, les réponses sont focalisées sur une petite surface du détecteur. Cependant, les réponses s'étendent sur une surface plus large quand la source est loin du détecteur, c'est le cas pour l'angle 180°. Ainsi, on retrouve le comportement décrit dans le chapitre 3. Plus la source est éloignée, plus les réponses s'étalent sur une large surface du détecteur.

VI.3. L'algorithme de reconstruction CAAO en 3D

Nous rappelons que le programme de reconstruction CAAO est constitué des trois étapes suivantes:

1) sommation décalage. 2) Déconvolution et Filtrage. 3) rotation et sommation

VI.3.1. sommation décalage

Comme dans le cas bidimensionnel, la sommation décalage en 3 dimensions consiste en une inclinaison des données de projections, respectivement de $tg(\psi)$ dans le plan (χ_u, ν_u) et de $tg(\psi)$ dans le plan (χ_z, ν_z) . Ceci permet d'introduire la variable de profondeur w :

$$tg(\psi) = \left(\frac{w}{P} - 1 \right)$$

Où P la profondeur du collimateur. Ce décalage assure le changement de variable des $(\chi_u, \chi_z, \nu_u, \nu_z)$ aux variables (u, z, ν_u, ν_z) , la matrice de transformation est donnée par:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & tg(\psi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & tg(\psi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [VI.13]$$

Pour effectuer ce changement de variable, nous avons utilisé l'interpolation splines de degré 3, développée dans le chapitre précédent. La sommation est réalisée par une double intégration suivant (ν_u, ν_z) pour retrouver les coordonnées dans le repère $(O, \vec{U}, \vec{W}, \vec{Z})$:

$$S(u, z, w) = \underbrace{\int_{\frac{D_u}{2}}^{\frac{D_u}{2}} \int_{\frac{D_z}{2}}^{\frac{D_z}{2}} g(\chi_u, \chi_z, \nu_u, \nu_z) \delta \left(u - \left(\chi_u + \nu_u \left(\frac{w}{P} - 1 \right) \right), z - \left(\chi_z + \nu_z \left(\frac{w}{P} - 1 \right) \right) \right) d\nu_z d\nu_u}_{\text{Sommaton}} \quad [VI.14]$$

La Figure VI-11 montre les réponses du système après sommation décalage pour une source ponctuelle situé au point (32,3,6). Comme pour une tomographie classique, le centre des réponses se déplace sur une sinusoïde (sinogramme). Les réponses convergent vers une fonction rectangle de largeur $\frac{D_u W}{p} \times \frac{D_z W}{p}$ pixels lorsque la profondeur W est proche de la position initiale de la source.

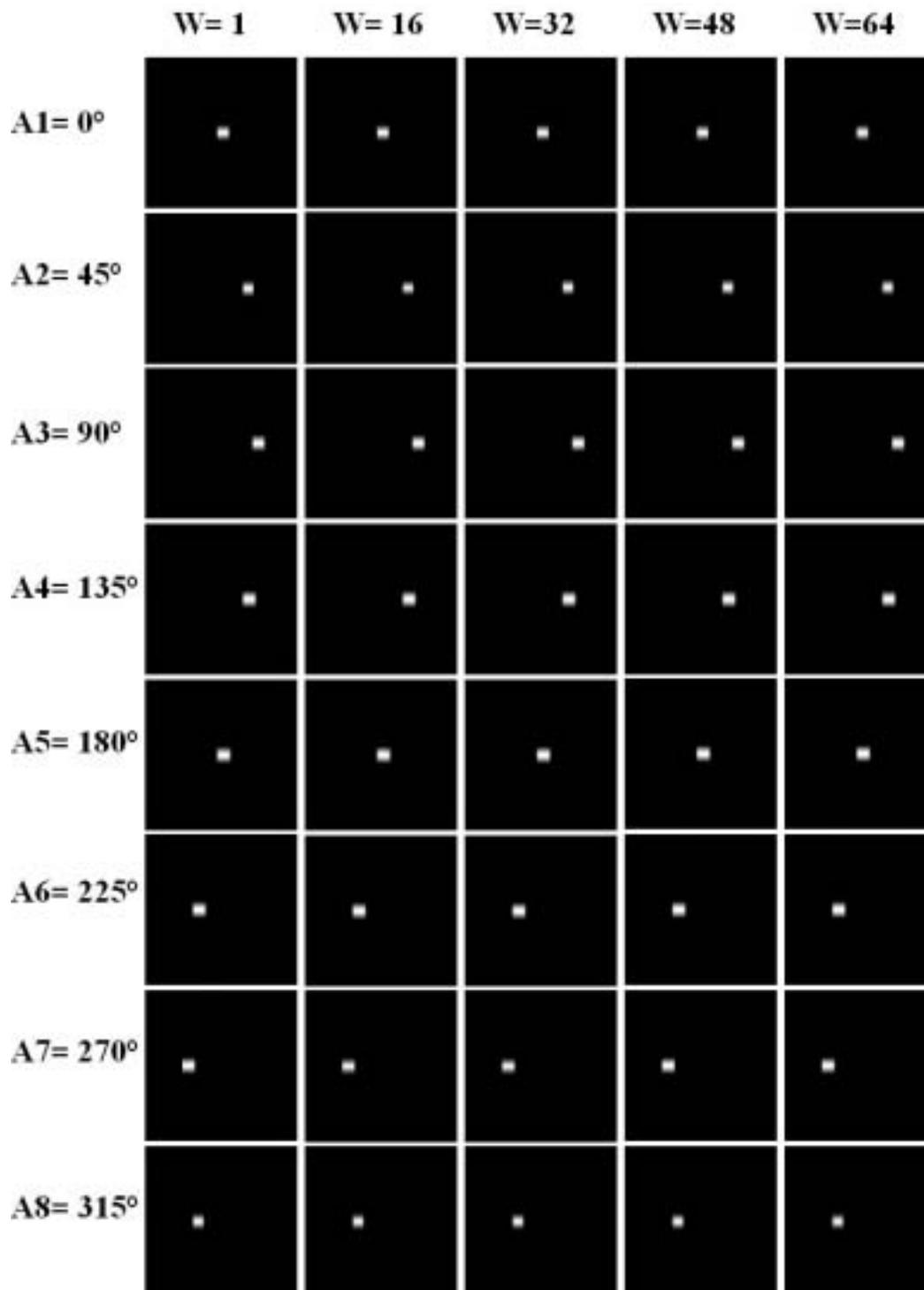


Figure VI-11: Somations décalage à 3D

VI.3.2. Déconvolution et Filtrage

L'analyse de la formule de la sommation décalage conduit à une équation de convolution avec des réponses en deux dimensions. Les calculs des réponses se font de la même façon qu'en 2D.

Introduisons la fonction rectangle à 2D par la fonction suivante :

$$\begin{cases} \Pi_{L_x, L_y}(x, y) = 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{L_x}{2}, \frac{L_x}{2}\right] \text{ et } y \in \left[-\frac{L_y}{2}, \frac{L_y}{2}\right] \\ \Pi_{L_x, L_y}(x, y) = 0 & \text{si } x \notin \left[-\frac{L_x}{2}, \frac{L_x}{2}\right] \text{ ou } y \notin \left[-\frac{L_y}{2}, \frac{L_y}{2}\right] \end{cases} \quad [\text{VI.15}]$$

Le système de déconvolution est donné par:

$$S_j(u, z) = \sum_i R_{ij} * \rho_i(u, z) \quad [\text{VI.16}]$$

Où * est un produit de convolution à deux dimensions, les réponses impulsionnelle du système CACAO s'écrivent sous la formule suivante:

$$R_{ij} = \sum_{v_u = -\frac{D_u}{2}}^{\frac{D_u}{2}} \sum_{v_z = -\frac{D_z}{2}}^{\frac{D_z}{2}} \prod_{\frac{D_z w_i}{P}} \left(v_z \left(\frac{w_j}{P} - \frac{w_i}{P} \right) \right) \prod_{\frac{D_u w_i}{P}} \left(v_u \left(\frac{w_j}{P} - \frac{w_i}{P} \right) \right) \quad [\text{VI.17}]$$

les réponses diagonales du système sont données par:

$$R_{ii} = D_u D_z \times \prod_{\frac{D_u w}{P}, \frac{D_z w}{P}} \quad [\text{VI.18}]$$

Comme dans le cas bidimensionnel, nous avons considéré l'approximation diagonale dominante. La déconvolution a été effectuée par la méthode de multi-kernel optimisation (MKO). Chaque projection sommée décalée étant déconvoluée par la fonction rectangle à deux dimensions de largeur $\frac{D_u w}{P} \times \frac{D_z w}{P}$. Notons que cette approximation nous a permis de réduire énormément la complexité du système de notre problème inverse dans le cas tridimensionnel.

VI.3.3. Extension de la déconvolution à deux dimensions.

Etant donné que les acquisitions sur le plan détecteur d'un objet en trois dimensions donnent des signaux à déconvoluer sous forme digitale en deux dimensions, l'étude de l'extension des méthodes étudiées précédemment en deux dimensions est très importante pour comprendre le comportement de chaque algorithme et pour pouvoir estimer les allures des images dans la reconstruction tomographique pour chaque angle. Cette étude nous permet d'examiner la fiabilité des travaux effectués en une seule dimension. On considère un objet à deux dimensions, par exemple un objet qui représente une tête en IRM (Imagerie par résonance magnétique nucléaire) de dimension 128x128 pixels, le nombre de photons acquis est simulé à 10^9 , le noyau de la convolution est un rectangle de 7 et 9 pixels de coté .

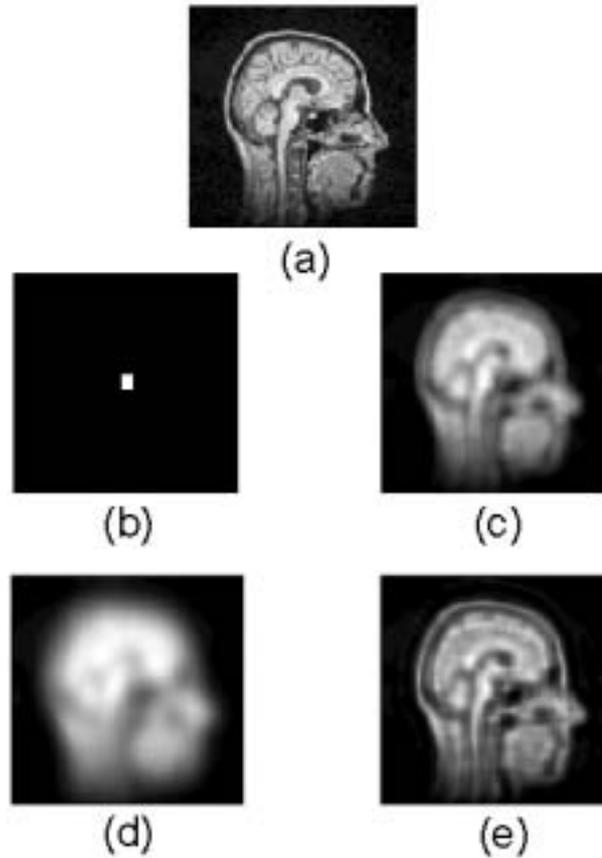


Figure VI.12: Reconstruction avec un seul noyau de l'objet "cerveau" par la méthode de TSVD et EM-P pour un nombre de photons émis de 10^9 : (a) Objet initial "tête". (b) Noyau de convolution rectangulaire de largeur 7 et longueur 9. (c) Image convoluée et bruitée. (d) Reconstruction avec la méthode de TSVD. (e) Reconstruction avec la méthode ML-P à 20 itérations.

La Figure VI.12 montre un exemple de reconstruction par les méthodes invoquées précédemment pour un seul noyau. On remarque, comme à une dimension la fiabilité de la méthode du maximum de vraisemblance à un seul noyau par rapport à la méthode de DVST. Les oscillations du signal reconstruit par la méthode de DVST se traduisent par un flou de l'image. La résolution de la reconstruction par la méthode de ML bien que meilleure que la DVST est également faible. L'utilisation d'un deuxième noyau avec une reconstruction à l'aide de la méthode de MKO améliore la résolution de l'image avec une qualité bien supérieure. La Figure VI.13 illustre clairement cette amélioration.

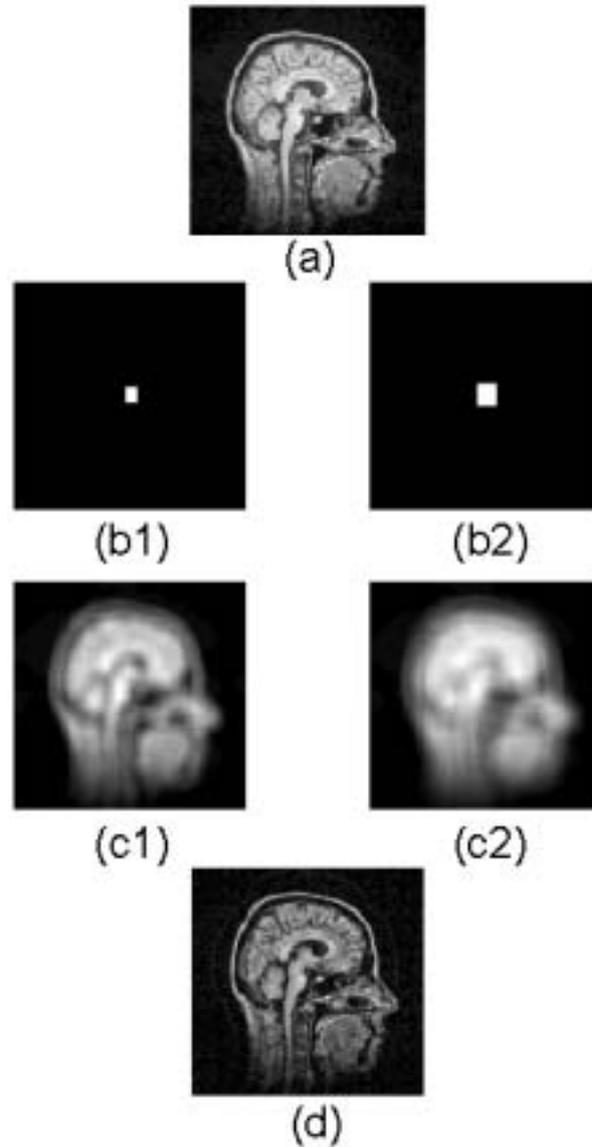


Figure VI.13: Reconstruction avec deux noyaux par la méthode de MKO pour un nombre de photons émis de 10^9 : (a) Objet initial. (b1 & b2) Noyaux de convolution de largeur respectivement 7x9 et 11x13 Images convoluées et bruitées. (d) Objet reconstruit.

VI.4. Reconstructions 3D

VI.4.1. Configuration de la géométrie du collimateur CACAO et de l'acquisition

Les simulations réalisées dans ce chapitre sont effectuées pour une configuration CACAO sur une gamma caméra à deux têtes, donc deux collimateurs. Les acquisitions des deux têtes sont réalisées simultanément par les deux collimateurs. Les dimensions des paramètres liées à l'ensemble d'acquisition sont présentées dans le tableau suivant:

Caractéristiques	mm	pixels
Résolution intrinsèque du détecteur	3 mm	1
Longueur du collimateur	360 mm	120
Largeur du collimateur	291 mm	97
Dimension du premier trou	9 x 33 mm	3x11
Dimension du deuxième trou	21 x 15 mm	7x5
Profondeur des collimateurs	120 mm	40
Épaisseur des parois du collimateur	3 mm	1
Pas de balayage	3 mm	1
Rayon de cache	93 mm	31
Rayon de giration	102 mm	34
Nombre de déplacement du premier collimateur N_t	144 mm	48
Nombre de déplacement du deuxième collimateur N_t	144 mm	48
Sensibilité du premier collimateur	0.00112763	
Sensibilité du deuxième collimateur	0.00126845	
Sensibilité moyenne du collimateur	0.0012	

Tableau VI-1: Paramètres du collimateur et d'acquisition

Les valeurs faibles de la sensibilité, sont due à une profondeur importante, comparée aux études précédentes, à deux dimensions. Cette valeur de profondeur a été choisie afin de limiter le balayage et donner au système une haute résolution.

La Figure VI-14 représente les deux collimateurs utilisés:

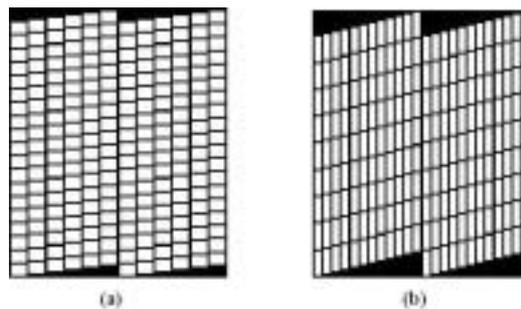


Figure VI-14: Face d'entrée des deux collimateurs utilisés: (a) collimateur à largeur des trous 7x5 pixels. (b) collimateur à largeur des trous 3x11 pixels.

VI.4.2. L'objet d'étude

L'objet de test destiné à cette étude à 3D est le fantôme mire classique de résolution, obtenu par un empilement de cinq coupes transverses de l'objet 2D "Jaszczak". Cet objet est donc composé de cylindres de diamètres varient de 1 à 6 pixels (1 pixel=3mm) (voir chapitre précédent), remplis d'une

source radioactive (voir Figure VI-15). Pour accélérer les calculs, les simulations ont été effectuées sur un volume de donnée de dimension 64x64x11 voxels (1 voxels= 3³ mm), dont les trois premières et dernières coupes comportent des activités nulles et les cinq coupes du milieu constituent l'objet de test.

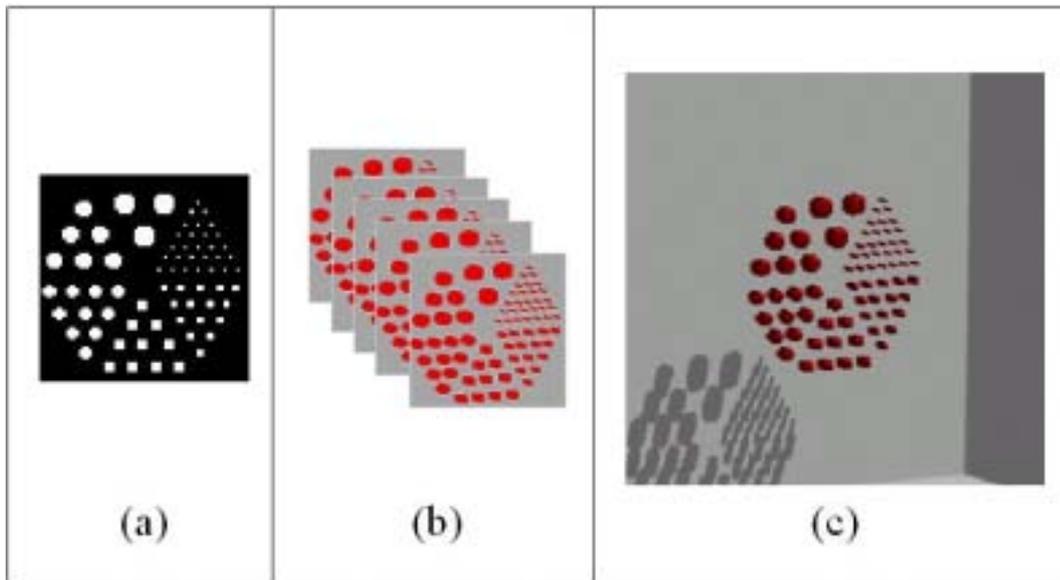


Figure VI-15: Objet mire 3D: (a) Objet Jaszczak en 2D. (b) Empilement de l'objet 2D en 5 coupes transverses. (c) Objet mire 3D en perspective.

VI.4.3. Résultats des reconstructions

Comme pour les reconstructions à 2D nous avons optimisé les paramètres de la reconstruction (alpha, bêta, lambda, "fc") pour le système CACAO et le nombre d'itération pour le cas classique. Le tableau suivant indique les valeurs de ces paramètres nécessaires à l'obtention du RSB maximum. Le nombre de photons émis choisi est de 5×10^5 , soit 10^9 photons par coupe.

Simulations	lambda	alpha	bêta	fc	itérations	RSB
CACAO à 20 angles	10-5	40	2	0,3	---	2,28
CACAO à 40 angles	10-5	30	2	0,5	---	3,90
CACAO à 72 angles	10-5	30	2	0,7	---	4,59
Classique à 72 angles	---	---	---	---	40	1,62

Tableau VI-2: paramètres de la reconstruction à l'optimum

Pour illustrer les avantages du système CACAO par rapport aux autres systèmes, nous avons effectué une reconstruction avec le système classique dont la configuration est exposée dans le chapitre précédent noté par "A". La représentation tridimensionnelle dans ce cas a été effectuée en empilant la coupe 2D reconstruite pour une acquisition sous 72 angles de l'objet d'étude (voir Figure VI-1).

La Figure VI-16 montre une reconstruction coupe par coupe avec le système classique à une acquisition sous 72 angles.

Les montages des images reconstruites suivantes (Figure VI-17, Figure VI-18 et Figure VI-19) présentent les reconstructions avec le système CACAO pour les différents nombres d'angles à l'acquisition 20,40 et 72.

Les bonnes valeurs de RSB obtenus avec la méthode CACAO (surtout pour 72 angles) contraste avec la disparition de deux secteurs de résolution pour CACAO, alors que le système classique n'en atténue qu'un. Ceci est dû à un meilleur contraste des images CACAO comme on peut l'observer sur la Figure VI-20 qui représente une comparaison des profils de la reconstruction classique et de la reconstruction CACAO sous 72 angles.

Les résultats obtenus sont encourageants et semblent conforter les bons résultats obtenus à 2D. L'amélioration des performances du système CACAO est certainement possible. En effet, la configuration géométrique des collimateurs choisie dans cette étude n'est certainement pas optimale. Les études à 2D nous ayant montré que le nombre de photons était un facteur important dans la qualité des images, une diminution de la profondeur du collimateur est à envisager. Étant donné la lourdeur des calculs (1 reconstruction \sim 4 mn, 1 optimisation \sim 3200 reconstructions), nous n'avons pas pu tester autre configuration de collimation pour le système CACAO.

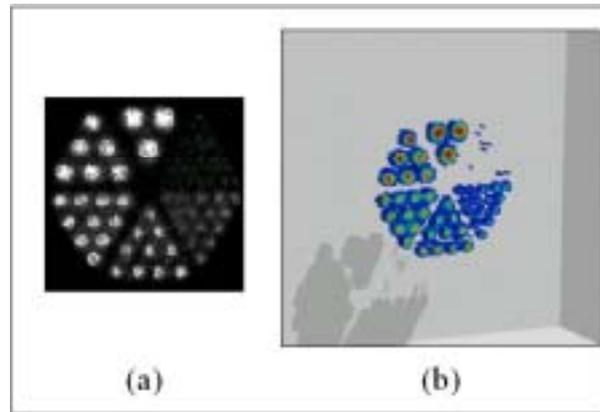


Figure VI-16: Reconstruction pour le cas classique (RSB=1,62 db): (a) Objet reconstruit en 2D avec le collimateur classique. (b) Empilement de l'objet reconstruit en 5 coupes transverses pour obtenir un objet 3D

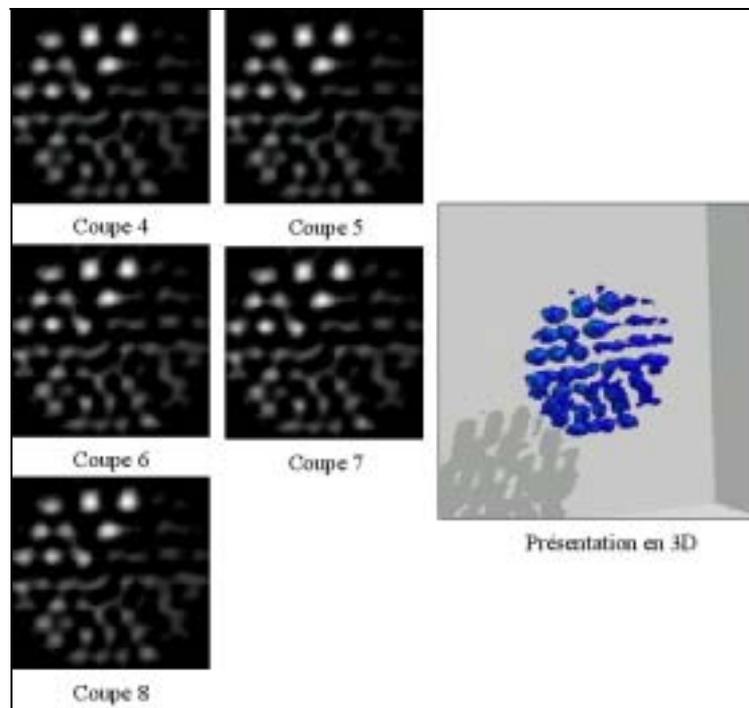


Figure VI-17: Reconstruction 3D à 20 angles et pour 10^9 photons émis (RSB= 2.28 db).

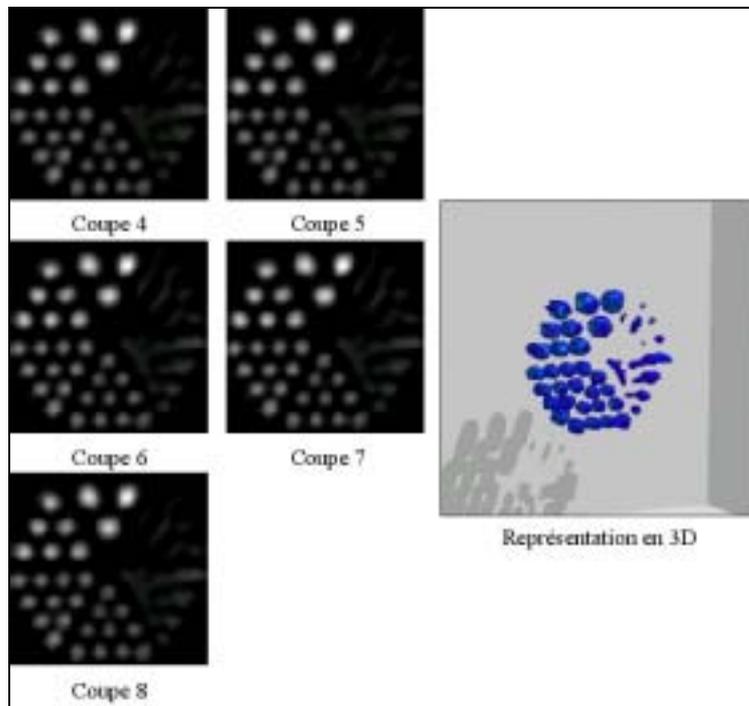


Figure VI-18: Reconstruction 3D à 40 angles et pour 10^9 photons émis (RSB= 3.90 db).

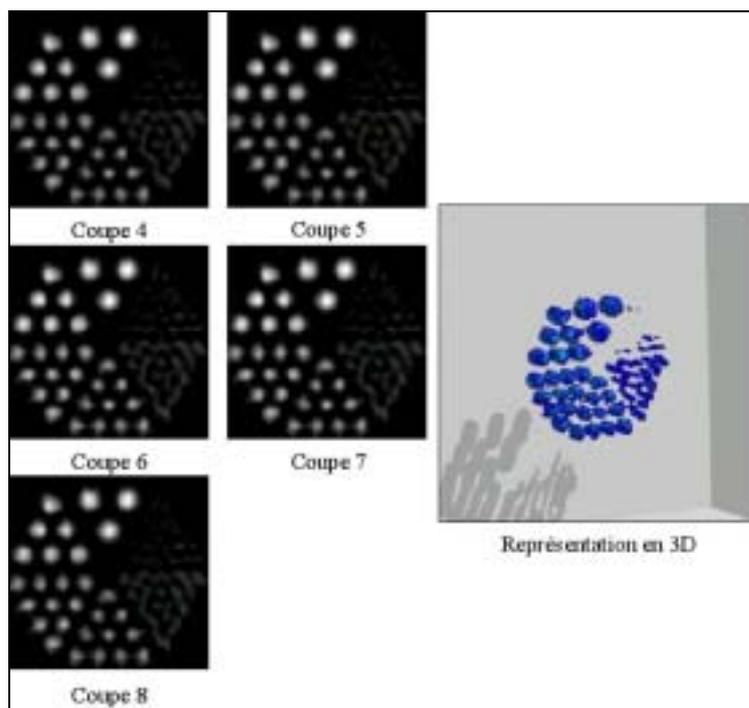


Figure VI-19: Reconstruction 3D à 72 angles et pour 10^9 photons émis (RSB= 4.59 db).

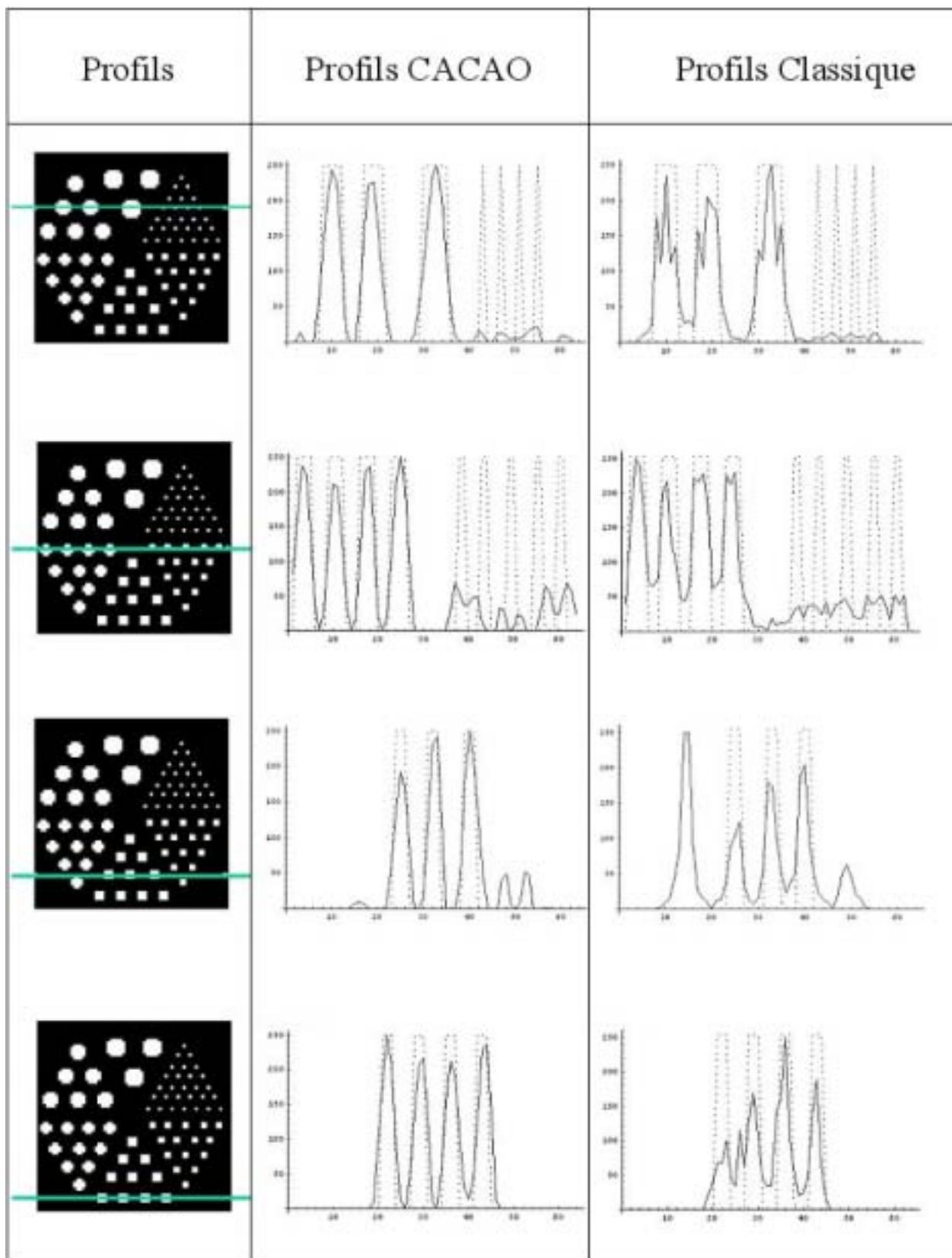


Figure VI-20: Comparaison des Profils des images reconstruites CACAO et classique.

VII. APPROCHE EXPERIMENTALE

En cas d'accident radiologique, en particulier de plaie contaminée, il apparaît intéressant d'évaluer au mieux l'étendue de la contamination pour guider l'équipe médicale et chirurgicale prenant en charge la personne accidentée. En effet, l'existence de blessures exposant l'individu à l'incorporation de radioéléments peut justifier d'un parage chirurgical si certaines régions de la plaie sont contaminées par des isotopes de forte radiotoxicité, à condition bien sûr que l'ablation ne mette pas en jeu la santé de la personne. Il y a donc lieu dans ce cas de comparer l'importance biologique du tissu à enlever, au risque radiologique lié à la contamination. Cette évaluation ne peut être réalisée qu'à l'aide d'une cartographie précise des radioéléments présents et des tissus altérés.

L'anthroporadiométrie, utilisée actuellement pour la surveillance des personnels en contact avec du matériel nucléaire et pour la mesure de contaminations internes accidentelles, ne permet pas de réaliser la cartographie précise des composés radioactifs dans l'organisme. En cas d'accident nucléaire majeur, on recommande de s'adresser au service de scintigraphie de l'hôpital mais les gamma caméras utilisées dans ces services ne seront utiles qu'en face d'activités très importantes. On rappelle que la sensibilité de ces appareils n'est pas supérieure à 0.0001. Cette très faible sensibilité de détection limite actuellement l'utilisation de cette technique en radioprotection, à des accidents majeurs.

Le système CACAO a été proposé pour améliorer la sensibilité des gamma caméras en élargissant les trous du collimateur. D'ailleurs, la large collimation du système permettra d'augmenter l'information transmise par le collimateur. Pour conserver les informations pertinentes sur la distribution des sources radioactives, un déplacement linéaire est ajouté à la séquence de l'acquisition. Ce système à haute sensibilité pourrait donc être tout à fait adapté à l'étude des contaminations accidentelles[40, 62].

Cadre de l'étude:

Le LEMDI a mis en place depuis quelques années, un projet destiné à améliorer la mesure des contaminations internes par les actinides. Dans ce cadre il a été développé un nouveau type de système de détection en collaboration avec l'industriel Canberra Électronique et le laboratoire d'études des détecteurs et d'électronique (CEA). Ce projet a été baptisé Anthro-Si. Ce système utilise des détecteurs en silicium de type PIPS [21, 82] et une électronique associée prévue pour l'anthroporadiométrie des plaies contaminées [31, 32]. Le développement de ces types de détecteurs a été l'objet de la thèse de L. De Carlan [30].

Afin de réaliser une validation expérimentale du procédé CACAO dans le cas des plaies contaminées et de démontrer la fiabilité des méthodes de reconstructions étudiées dans cette thèse, le système développé dans le cadre d'Anthro-Si a été modifié pour répondre à la problématique de l'imagerie des plaies contaminées et des impératifs techniques mis au point auparavant au sein du groupe LEMDI [40, 82]. Les premières expériences comportant des acquisitions planes 2D ont été réalisées par M. Quartuccio qui avaient déjà montré une résolution acceptable des images réalisées selon le mode CACAO en utilisant comme nous l'avons vu précédemment, une reconstruction basée sur la méthode NC [85] [84]

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord présenter le banc d'essai utilisé pour tester les méthodes de reconstruction développées au cours de cette thèse. Deux configurations pour le collimateur ont été réalisées, un collimateur classique et un collimateur CACAO. Pour CACAO, nous avons appliqué les deux types de méthodes étudiées en détail dans des chapitres précédents (chapitres 4,5,6) : la méthode de multi-kernel optimisation (MKO), que nous avons et la méthode de maximum de vraisemblance à double décomposition (ML-P 2N). Nous présenterons ensuite, les résultats des mesures effectuées avec ces nouvelles techniques de reconstruction en effectuant deux types d'acquisitions : des acquisitions plane 2D et des acquisitions tomographiques 3D. Pour finir, nous évaluerons l'aptitude du procédé CACAO à estimer les distances entre les sources en caractérisant les paramètres de linéarité et de résolution spatiale.

VII.1. Matériel et méthode

VII.1.1. Matériel utilisé

VII.1.1.1 Le banc expérimental

La Figure VII.1 représente schématiquement le banc d'acquisition utilisé pour l'application CACAO. Un système mécanique équivalent à un système tomographique a été développé, sur lequel a été adapté un détecteur pixelisé muni d'une électronique assurant la spectrométrie énergétique. Ce banc d'acquisition est doté de trois mouvements mécaniques :

1. Un mouvement en translation selon l'axe OX : Sur cet axe, on a une possibilité de balayer sur une distance de 36,2 cm avec une précision au 1/10 de mm.
2. Un mouvement en translation selon l'axe OY : La distance des translations au long de cet axe est de 19 cm avec une précision au 1/10 de mm.
3. Un mouvement de rotation : permet de réaliser des rotations de 360° de l'objet avec une précision de 1/10 de degré.

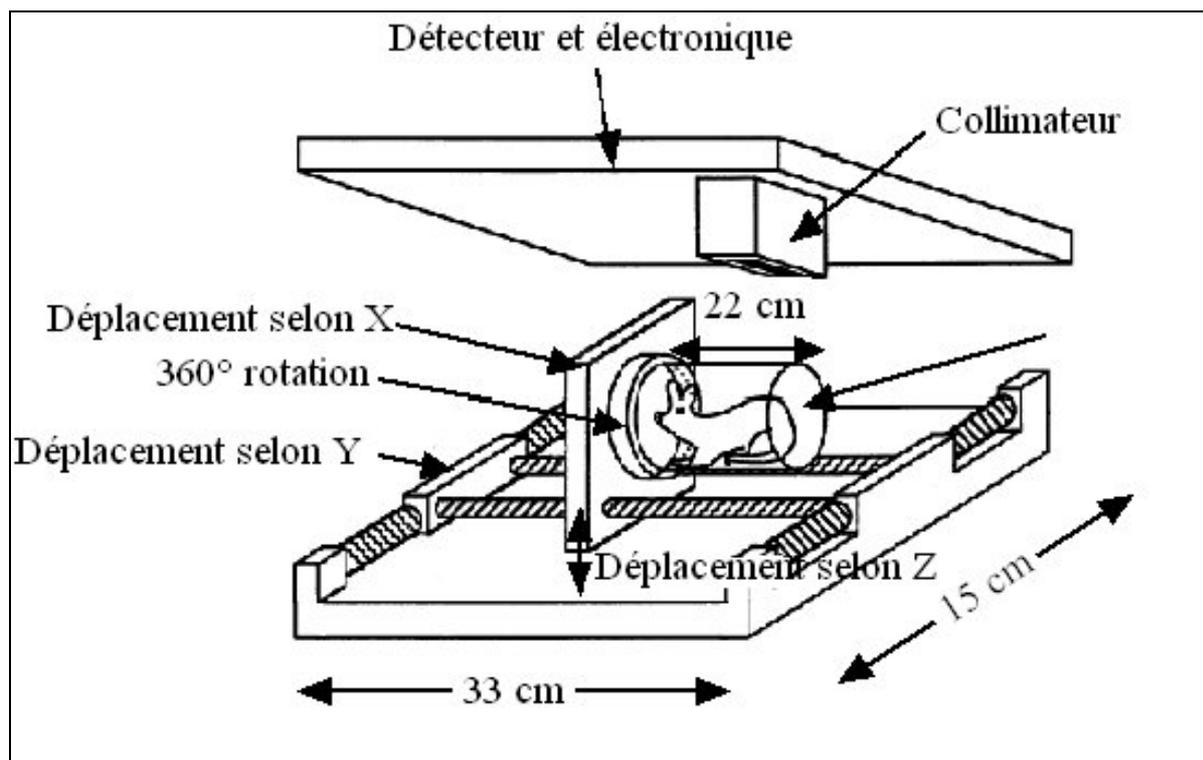


Figure VII.1: Schéma du banc d'acquisition

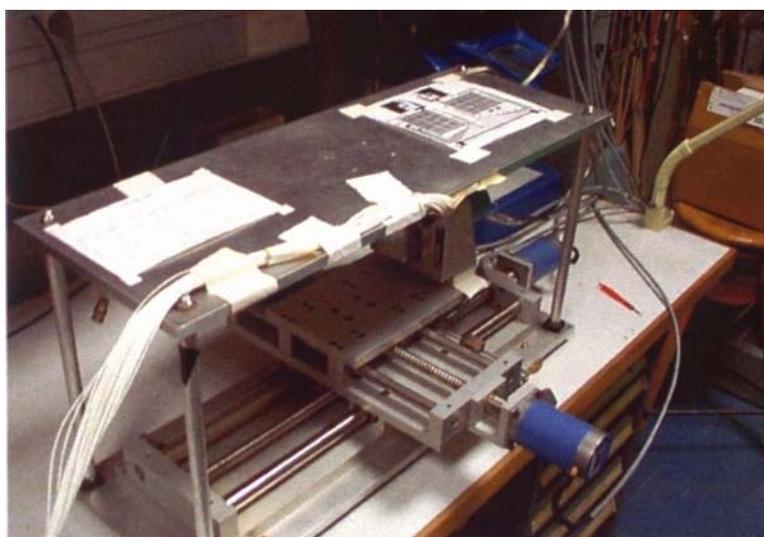


Figure VII.2: Photographie du banc d'acquisition

L'ensemble des mouvements est contrôlé par une carte électronique pilotée par ordinateur. Un script écrit en REXX/BASIC permet d'automatiser l'exécution des programmes qui dirigent l'acquisition en alternant les mesures et les mouvements de balayage.

Pour un fantôme donné, le calcul des limites de balayage en translation et en rotation est choisi à l'aide de la formule mathématique donnée dans le Chapitre 5. D'autres vérifications des limites sont également effectuées à l'aide d'un test expérimental sur l'objet. En effet, nous nous sommes assurés que le détecteur ne collecte plus de photons provenant du fantôme lorsqu'il est situé aux limites du balayage. Cette vérification a été effectuée pour chaque élément détecteur des deux matrices et avant le commencement de chaque expérience.

VII.1.1.2 Le détecteur

Les détecteurs utilisés dans cette étude sont des détecteurs pixelisés en silicium de type PIPS (Passivated Implanted Planar Silicon detectors, Figure VII.3). Ils ont été développés par l'unité de production (Canberra, Olen) [P. Burger], le laboratoire d'études des détecteurs et d'électronique (CEA) et le LEMDI.

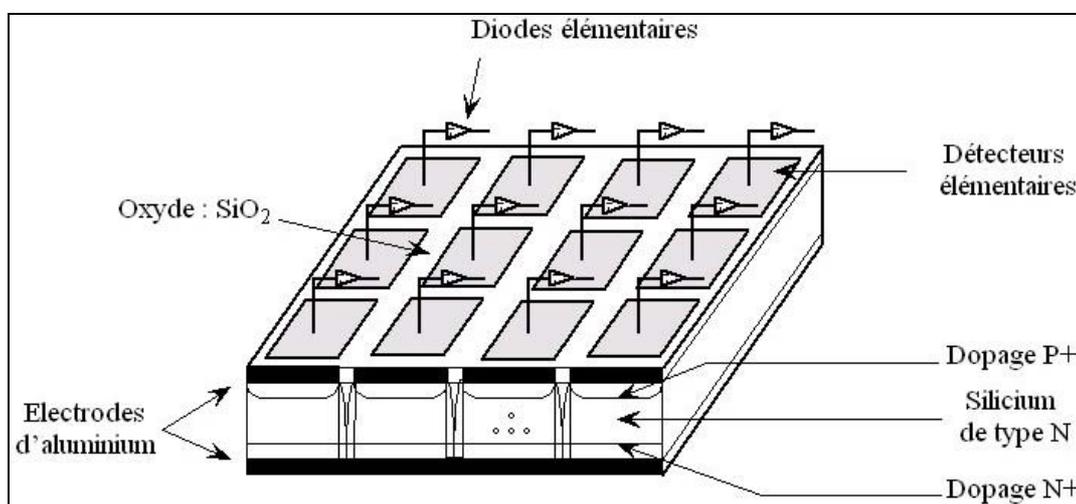


Figure VII.3: Principe de détecteur Silicium à pixels PIPS

La surface de chaque detcel (abréviation de "detector cell") est de $2,7 \times 2,7 \text{ mm}^2$, ce qui nous donne une surface totale de détection d'environ $12 \times 9 \text{ mm}^2$. La capacité de chaque élément détecteur étant faible, une bonne résolution en énergie sera obtenue à condition que le préamplificateur ait une impédance d'entrée adaptée. En moyenne une résolution de l'ordre de 1,9 keV a été observée pour l'ensemble des detcels.

En revanche, le nombre de detcels (24 éléments) complique la connectivité du circuit électronique. Pour pouvoir appliquer une déconvolution multi-canaux, il est nécessaire d'obtenir en X et en Y deux largeurs de collimateur différentes. Cette caractéristique a été obtenue en utilisant deux détecteurs pixelisés identiques de forme rectangulaire dont les grands axes sont disposés perpendiculairement Figure VII.4.

Bien que nous disposions de 2 détecteurs pixelisés identiques de 12 éléments détecteurs chacun (Figure VII.4), l'électronique d'acquisition prévue pour 24 voies ne permet de traiter que 15 voies à la fois à cause du multiplexeur utilisé lors des mesures. Il n'a donc été possible d'utiliser qu'un seul détecteur de 12 detcels, soit 12 voies, à la fois.

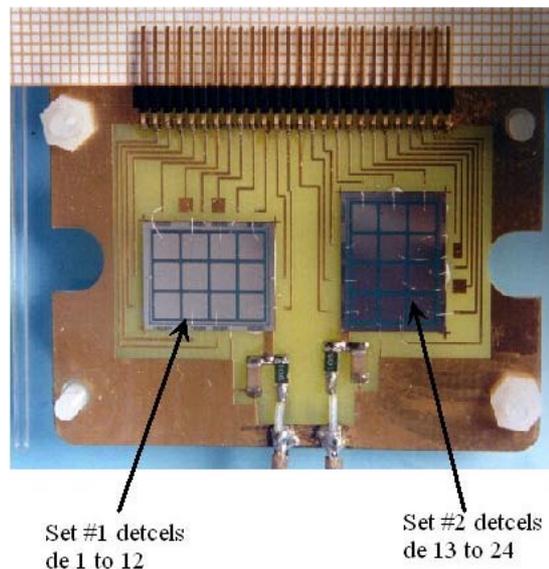


Figure VII.4: Photographie du détecteur à pixels sur son support

En résumé les caractéristiques du détecteur à pixels utilisé sont :

- Détecteur de type : PIPS (diode Silicium).
- Marque CANBERRA.
- 2 Mosaïques de 12 diodes carrées (3x4).
- Épaisseur : 0.5 mm, Surface active : $2,7 \times 2,7 \text{ mm}^2$, Pitch : 0.3 mm
- Capacité d'une diode : 2,5 pF, courant inverse : entre 0,3 et 11,9 nA, alimentation : 100 Volts.
- Résolution : entre 1,8 et 2,3 keV (en moyenne : 1,9 keV)

VII.1.1.3 Le préamplificateur de charge

Pour chacune des 24 voies des détecteurs à pixels, il est nécessaire de réaliser un préamplificateur et un amplificateur. En ce qui concerne les préamplificateurs, un support unique a été développé contenant 24 voies. Afin de tester les détecteurs de $3 \times 3 \text{ mm}^2$, les 24 voies doivent se répartir sur 3 cm avec un pas de 1,25 mm. Les mesures à faible bruit impliquent que le transistor d'entrée soit connecté au plus près du détecteur. Compte tenu du nombre de voies, il est donc impossible dans une version hybride de réaliser 24 préamplificateurs sur 3 cm de distance.

Afin de conserver le transistor d'entrée au plus près du détecteur, le préamplificateur a été séparé en deux parties. Une première partie que nous appellerons la "tête" qui comprend le transistor d'entrée, la capacité et la résistance de contre-réaction. Ce sont ces éléments qui conditionnent le rapport signal sur bruit de la chaîne. La seconde partie qui sera nommée "arrière" du préamplificateur contient l'amplification et la polarisation des différents composants. La Figure 17, extraite de la thèse de Loïc de Carlan, présente les préamplificateurs.

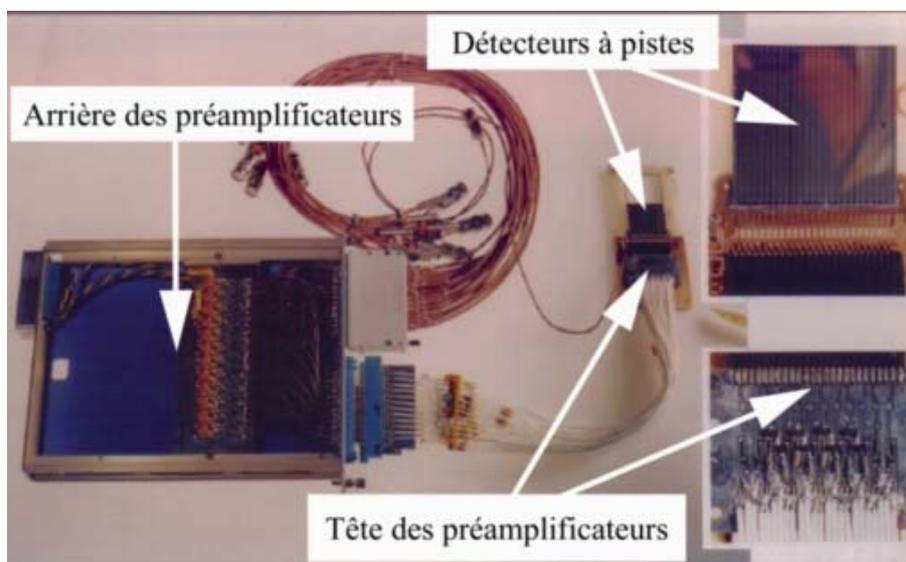


Figure VII.5: Préamplificateurs associés au détecteur à pistes

C'est cette même électronique qui a été utilisée pour les différents essais de mesures avec le détecteur à pixels. La "tête" des préamplificateurs est réalisée par un circuit époxy 7 couches dans lequel est obtenue la capacité de contre-réaction par mise en regard de deux électrodes. Sur ce même circuit, le transistor à effet de champ et la résistance de contre-réaction sont connectés et ceci pour chaque voie. L'arrière du préamplificateur est située dans un tiroir de standard NIM (Nuclear Instrument Module). La connexion entre les deux parties se fait par des câbles coaxiaux de diamètre 1,6 mm. La liaison entre le détecteur et le préamplificateur est une liaison continue pour limiter le nombre de composants sur le circuit multicouche.

Le choix de la capacité de contre-réaction a été effectué en fonction de la sensibilité du préamplificateur que l'on désire dans la gamme d'énergie de 10 à 100 keV. La valeur de la capacité réalisée dans le circuit multicouche est d'environ 0,17 pF correspondant à une sensibilité de 260 mV/MeV.

Le choix du transistor d'entrée est plus délicat car il conditionne de manière particulière le rapport signal/bruit. Les deux caractéristiques principales des transistors sont la transconductance et la capacité d'entrée. Cette dernière est sommée dans le calcul du bruit avec la capacité du détecteur. Dans le cas de détecteurs ayant des capacités entre 10 et 20 pF, le choix s'est porté sur le transistor IF1320 car sa

capacité d'entrée est la plus proche de celle des détecteurs, ce qui correspond théoriquement à la configuration optimale.

L'association de détecteur et préamplificateur est réalisée par l'intermédiaire d'un connecteur 24 voies amovibles permettant de changer de détecteur.

VII.1.1.4 Le collimateur

Afin de comparer l'approche classique et l'approche CACAO deux collimateurs en plomb ont été réalisés, l'un à trous fins (Figure VII.6) l'autre à trous larges (Figure VII.7). Le collimateur à petits trous comporte deux ensembles de 12 trous correspondant aux deux séries de pixels détecteurs et dont les axes principaux de chaque ensemble sont perpendiculaires. La profondeur du collimateur a été fixée à 4 cm. La surface totale des trous est de $(2,7)^2 \times 24$ mm².



Figure VII.6: Le collimateur à petits trous

Le collimateur CACAO est réalisé de la même manière que le collimateur à petits trous, mais il ne comporte que deux grands trous. Les fines cloisons en plomb visibles sur la Figure VII.6 n'existent plus (Figure VII.7) et la profondeur du collimateur reste identique au collimateur à petits trous (4 cm).



Figure VII.7: Le collimateur CACAO

VII.1.2. Les sources et les fantômes

VII.1.2.1 Les radioéléments

Le radio isotope utilisé pour ce travail est l'Américium 241, ce radio isotope a pour numéro atomique 95, un poids atomique de 243 et demi-vie de 432 ans. Les énergies de ^{241}Am retenues pour les mesures effectuées à l'IPSN sont présentées dans le Tableau VII-1.

^{241}Am	Énergies	Probabilité
Raie γ	59,54 keV	36,03 %.
Raie X	13,93 keV	13,01 %
Raie X	17,51 keV	18,99 %
Raie X	21,01 keV	4,82 %

Tableau VII-1: Énergies caractéristiques s de ^{241}Am

VII.1.2.2 Les fantômes

Afin d'effectuer nos mesures, deux supports composés de deux parties ont été réalisés, un socle fixé sur la partie mobile du banc d'acquisition et un couvercle. La Figure VII.8 représente un des supports utilisés pour la réalisation des fantômes. Ce support prend la place de la souris sur le banc d'acquisition (Figure VII.1). Dans ces supports une solution chargée en une activité connue de ^{241}Am a été déposée dans chacun des trous du support pour constituer les fantômes utilisés pour les mesures. Après le dépôt de gouttes de solution d'américium dans les cuvettes du socle et du couvercle, le couvercle est refermé sur l'ensemble pour éviter toute contamination.

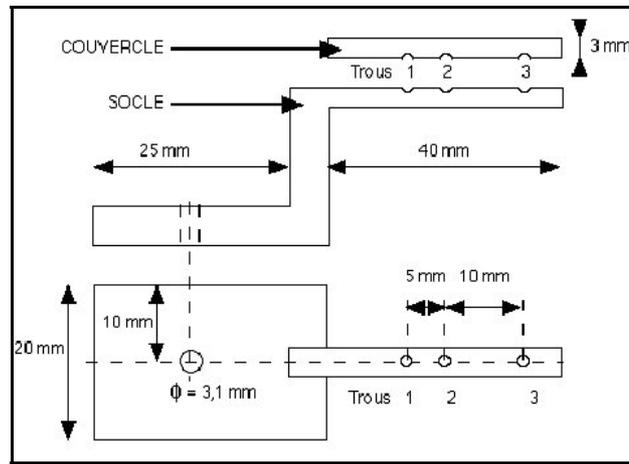


Figure VII.8: Le support des sources

Le tableau ci-dessous résume les activités obtenues après dépôt de gouttes de solution d'américium d'activité spécifique 43,693 kBq/ml.

Type de support			Nombre de gouttes	Activité en Bq
Support N° 1	Socle	Trou 2 :	43	939,400
	Couvercle	Trou 2 :	34	742,781
Soit Support N° 1		Trou 2 :	77	1 682,181
Support N° 2	Socle	Trou 1 :	26	568,009
		Trou 2 :	26	568,009
		Trou 3 :	29	633,549
	Couvercle	Trou 1 :	24	524,316
		Trou 2 :	24	524,316
		Trou 3 :	29	633,549
Soit Support N° 2		Trou 1 :	50	1 092,325
		Trou 2 :	50	1 092,325
		Trou 3 :	58	1 267,097

Tableau VII-2: Calcul des activités des supports

En résumé les fantômes d'américium utilisés lors des mesures sont les suivants :

- 1 source ponctuelle de 300 kBq (support 0)
- 1 source ponctuelle de 918 kBq (support 1)
- 3 sources ponctuelles alignées totalisant une activité de 1,77 kBq (support 2)

VII.1.3. La chaîne de mesure

L'ensemble des acquisitions et des traitements est représenté sur la Figure VII.9. Le système de positionnement est commandé par un programme écrit en "REXX"; l'acquisition, l'affichage et le traitement des spectres se font par l'intermédiaire du logiciel de Canberra "Genie-PC". Les informations à transférer correspondent aux photons détectés dans chaque élément détecteur pour l'ensemble des positions du support. Les informations sont sauvegardées en binaire dans un fichier qui sera utilisé par le calculateur pour réaliser l'étape de la reconstruction.

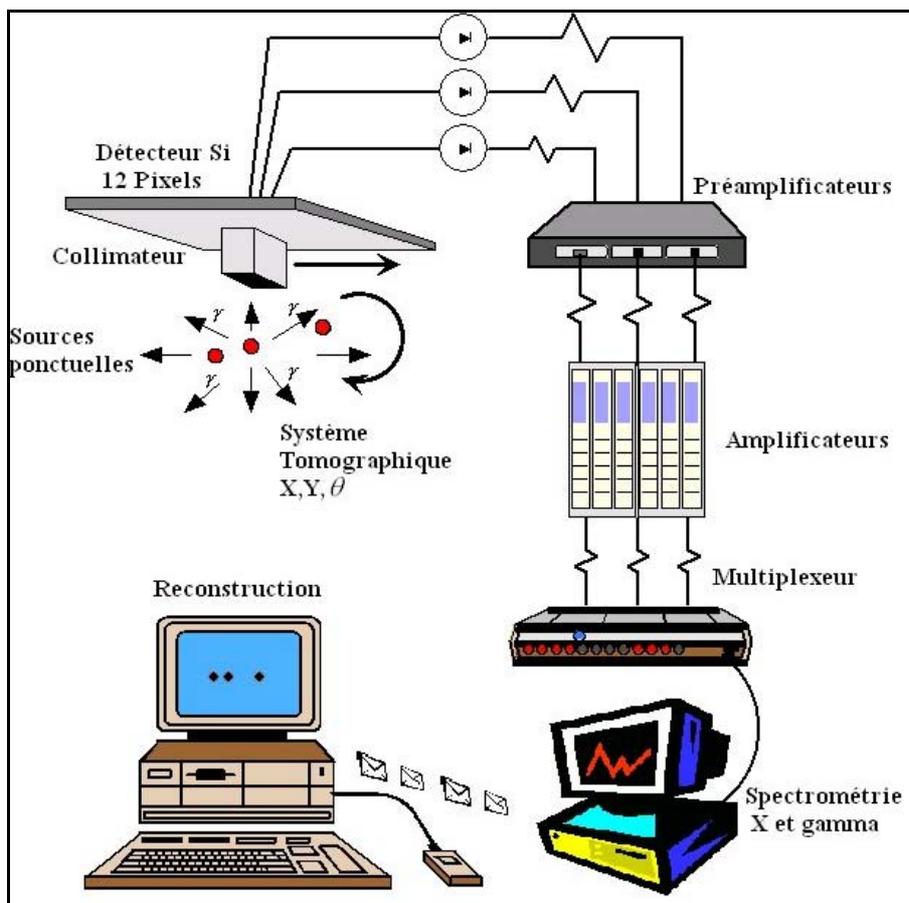


Figure VII.9: Schéma de principe du système

VII.1.4. L'informatique commandant le banc

Avant de lancer les acquisitions, il a été nécessaire de régler et d'améliorer les programmes permettant de réaliser les tomographies pour notre propre configuration. Une carte d'acquisition caractérisée par un logiciel de commande nommé "FENWICK" liant le banc à un ordinateur est prévue à cet effet. Le programme créé permet de diriger le banc et de lancer simultanément le logiciel de spectrométrie afin de comptabiliser le nombre de coups reçus par chaque élément détecteur. Ce programme est écrit en "REXX" et fait appel aux commandes spécifiques du logiciel "FENWICK".

VII.1.5. L'algorithme général de l'acquisition

Ce programme doit permettre la réalisation simultanée d'une tomographie et d'un balayage plan. La tomographie est réalisée avec un incrément angulaire constant. Le balayage plan permet un déplacement en X et en Y suivant un pas de l'ordre du millimètre. Le but du programme est de recueillir le nombre de coups reçus par les pixels pour chaque position. Ces données sont sauvegardées dans deux types de fichiers.txt : un fichier (fichdec.txt) comptabilisant le nombre de coups en décimal et un fichier (fichbin.txt) comptabilisant le nombre de coups en binaire. Ces fichiers.txt seront traités par la suite pour réaliser des images. Dans un premier temps, il a été nécessaire d'étalonner en énergie pour chaque pixel la chaîne de mesure et d'initialiser les paramètres du mouvement :

- Le pas de déplacement en X et en Y a été fixé à 1,5 mm compte tenu de la résolution extrinsèque de l'ensemble détecteur-collimateur. La taille des images est limitée à 24×16 ce qui correspond à une surface balayée de 36×27 mm. Cette petite taille est suffisante pour étudier nos objets
- L'angle de rotation utilisé est de 45° et par conséquent il y a 8 positions angulaires du fantôme pour avoir une rotation complète.
- Compte tenu des très faibles activités du traceur utilisé et pour avoir une statistique suffisantes, la durée d'acquisition spectrométrique pour chaque position du fantôme est de 6 minutes.

Les acquisitions comportent 16×24×8 positions du fantôme, c'est-à-dire que pour chaque position d'angle, un maillage rectangulaire de 16x24 positions en XY sont effectuées, chaque comptage élémentaire durant 6mm, 3072 mesures correspondent à 2 semaines de comptage. Pour le cas d'une acquisition plane, le temps de mesure est réduit à deux jours.

Pour chaque position du fantôme et pour chacun des detcels, l'ordinateur enregistre un spectre en énergie. Le logiciel Génie PC calcule ensuite le nombre de coups dans la fenêtre sélectionnée en énergie. Puis le programme change la position du fantôme et recommence l'enregistrement du spectre.

VII.1.6. Le logiciel Genie-PC

Le logiciel Genie-PC permet de vérifier le calibrage des gains des détecteurs, le réglage des seuils, la visualisation des spectres mais également d'acquérir et de traiter une série de spectres. Ces opérations sont réalisées automatiquement par l'intermédiaire d'une macro composée de commandes propres à Genie-PC. Ainsi pour chaque position du détecteur, il a été possible de calculer l'aire du ou des pics photoélectriques pour chaque pixel sur une ou plusieurs fenêtres en

énergie. A partir de ces valeurs intégrées qui présente le nombre de coups détecté dans l'élément détecteur, nous avons appliqué notre algorithme de reconstruction afin de reconstituer l'objet de départ.

VII.2. Spectrométrie X et Gamma

VII.2.1. Bruit de fond

Une première étape a consisté à évaluer le bruit de fond ambiant. La Figure VII.10 et la Figure VII.11 représentent le spectre du bruit de fond du détecteur associé respectivement à un collimateur CACAO et au collimateur à petits trous. Le temps de comptage pour cette étape a été de 17 heures. Le nombre de coups détectés est de l'ordre de 70, quel que soit le collimateur. Il est évident que des acquisitions d'une durée moyenne de 400 secondes ne seront que peu perturbées par ce bruit de fond.

La courbe inférieure présente les spectres en énergie des éléments détecteurs et le spectre somme de tous ces spectres. La courbe supérieure représente le spectre en énergie de la région d'intérêt sélectionnée sur la première courbe, il s'agit de l'agrandissement d'un des spectres correspondant à un élément détecteur en particulier. La première zone d'information intitulée "Info RI" décrit la région d'intérêt ainsi que la zone de mesure, on peut y lire le nombre de coups comptés ainsi que la résolution en énergie du détecteur (FWHM), la deuxième zone d'information, placée au-dessus des courbes, permet une analyse fine du spectre (canal et coups) et de surveiller le déroulement d'une acquisition (Présél).

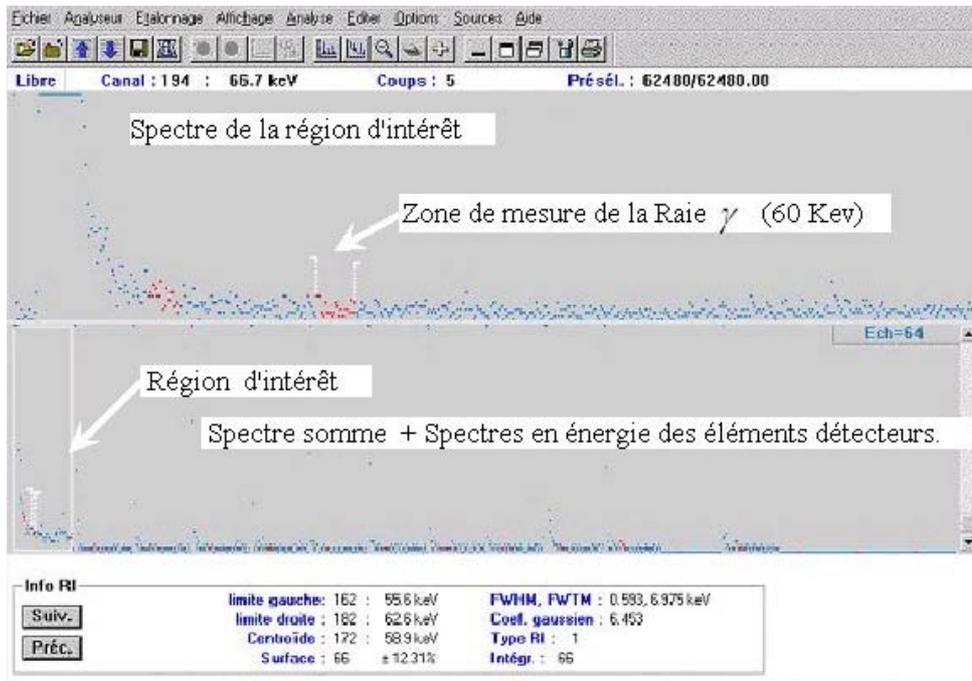


Figure VII.10: Spectre de bruit de fond du détecteur avec le collimateur CACAO

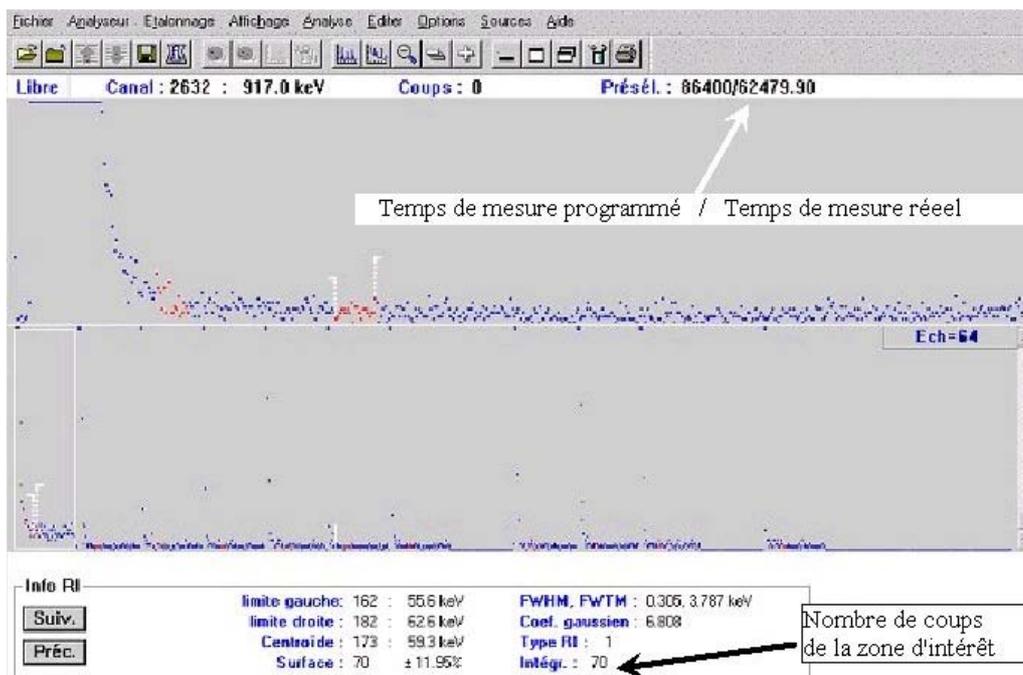


Figure VII.11: Spectre de bruit de fond du détecteur avec collimateur à petits trous

Les Figure VII.12 et Figure VII.13 présentent les graphes des valeurs moyennes du bruit de fond exprimés en nombre de coups par seconde pour la série n°1 d'éléments détecteurs et pour les deux fenêtres X et γ . Cette mesure du bruit de fond est importante dans notre cas : d'une part parce que nous utilisons des sources peu actives (1,7 kBq) et d'autre part, parce que le balayage du collimateur

nécessite une durée assez longue. Les mesures donnent en moyenne de $2 \cdot 10^{-4}$ et de $2 \cdot 10^{-3}$ coups par seconde dans les deux fenêtres étudiées (X et γ).

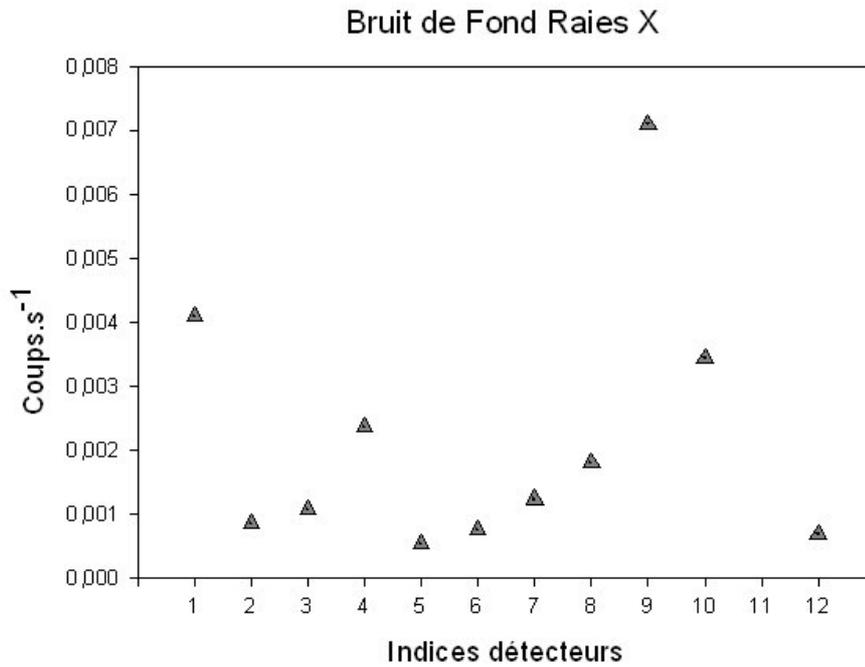


Figure VII.12: Bruit de fond mesuré sur 43 heures pour la zone des raies X.

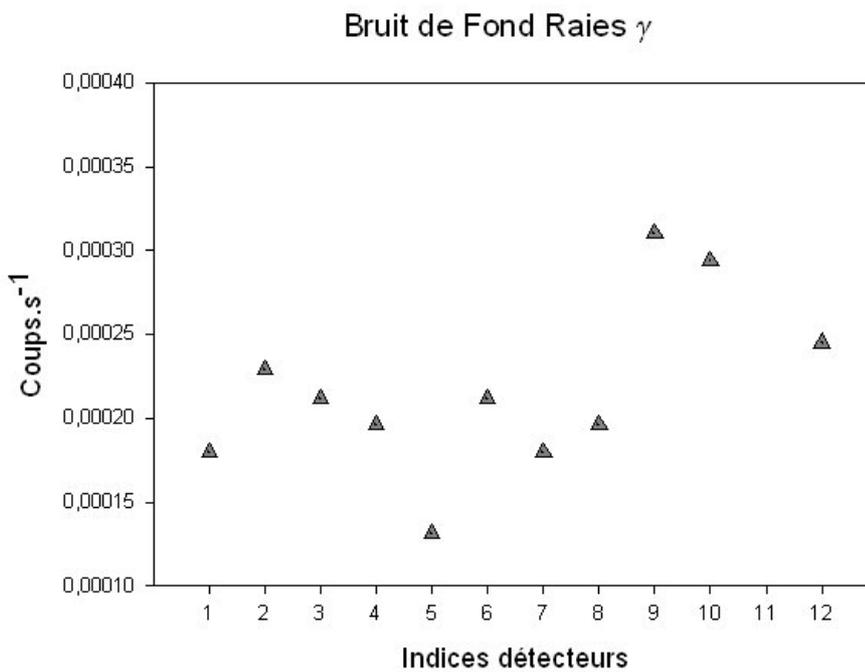


Figure VII.13: Bruit de fond mesuré sur 43 heures pour la zone des raies γ .

VII.2.2. Vérification des résolutions en énergie pour chaque élément détecteur.

La résolution en énergie de chaque élément détecteur est obtenue en mesurant la réponse à une source mono énergétique. Une source d'Américium (^{241}Am) de 300 kBq est disposée sous les détecteurs.

Après avoir ajusté les gains des amplificateurs afin de calibrer le spectre en énergie, nous effectuons une mesure dont le temps de comptage, fixé à 17 heures, nous permet d'obtenir un spectre complet contenant environ 30 000 coups détectés. Il est alors possible d'obtenir la distribution des impulsions autour de la raie γ caractéristique à 60 keV (Figure VII.15) de la source d'Américium, celle-ci étant gaussienne d'écart type variant entre 0.8 et 1,2, la résolution en énergie se définit comme la largeur à mi-hauteur de ce pic. Les résultats de ces mesures sont présentés dans le graphe de la Figure VII.14. La résolution en énergie se situe entre 1,8 et 2,3 keV. Comme on peut le remarquer dans ce graphe deux détecteurs élémentaires étaient défectueux: le numéro 11 pour la série n°1 et le numéro 17 pour la série 2.

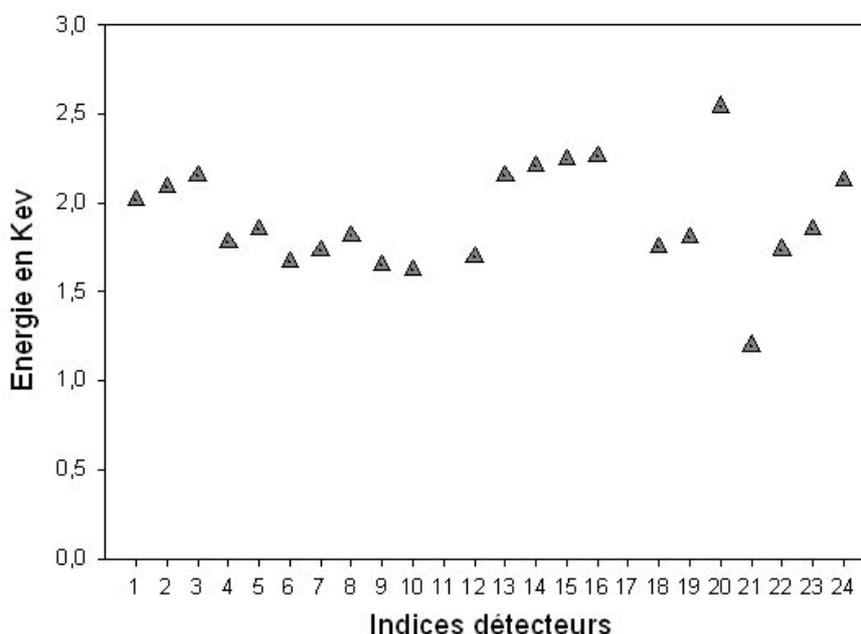


Figure VII.14: Résolution en énergie des éléments détecteurs.

VII.2.3. Comparaison entre les mesures CACAO et Classique

Le Tableau VII-3 représente les mesures effectuées pour les deux modes de collimation : la collimation CACAO et la collimation classique. Ces acquisitions ont été réalisées sur la zone de la raie γ (59,6 keV) d'une source ponctuelle de ^{241}Am d'activité 300 kBq et durant 550 secondes pour les deux collimateurs. Les valeurs données dans le tableau expriment la somme des coups comptabilisés par l'ordinateur (Génie-PC) pour chaque pixel de série n°1, durant l'acquisition. On distingue nettement la supériorité de la détectabilité du système CACAO par rapport au système classique.

Collimateur CACAO		collimateur classique	
Temps de mesures		550 secondes	
Indices des detctels	Nombre de coups détectés	Indices des detctels	Nombre de coups détectés
1	19485	1	300
2	19316	2	289
3	18006	3	290
4	20028	4	310
5	19420	5	308
6	18357	6	290
7	19998	7	325
8	19277	8	289
9	18179	9	309
10	20067	10	299
11	Hors Service	11	Hors Service
12	18011	12	305
Moyenne	19104	Moyenne	301

Tableau VII-3 : Nombre de photons collectés par detctels pour les deux modes de collimation : le collimateur CACAO et le collimateur classique avec une source ponctuelle d'une activité de 300 kBq

VII.2.4. Choix de la fenêtre énergétique

La Figure VII.15 et la Figure VII.16 sont représentatives du gain en sensibilité que l'on obtient en changeant de fenêtre énergétique. Pour un temps de comptage de 400 secondes, l'aire sous le seuil de la raie γ correspond à 252 coups, alors que pour un même temps de comptage (400 secondes) l'aire sous le seuil des raies X correspond à 9969 coups. Soit un facteur de 40 fois plus. Ces mesures nous incitent donc à utiliser la fenêtre "X" afin d'augmenter le rapport signal sur bruit. On peut ainsi espérer, par association du collimateur CACAO et de la mesure sur les seuils des raies X, obtenir un système compétitif pour la mesure de plaies contaminées. L'avantage d'un tel gain est de réduire significativement les temps de mesure. Une étude plus approfondie tenant compte du bruit de fond et de l'atténuation serait nécessaire avant d'étendre ce résultat pour des mesures pratiques, notamment en présence d'un mélange d'isotopes.

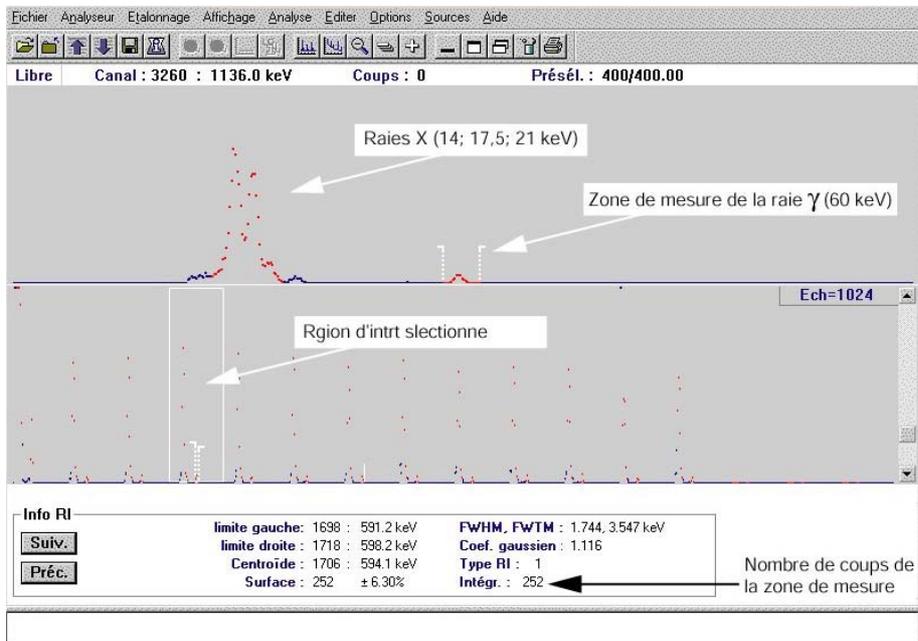


Figure VII.15: mesure du seuil de la raie γ de l'américium.

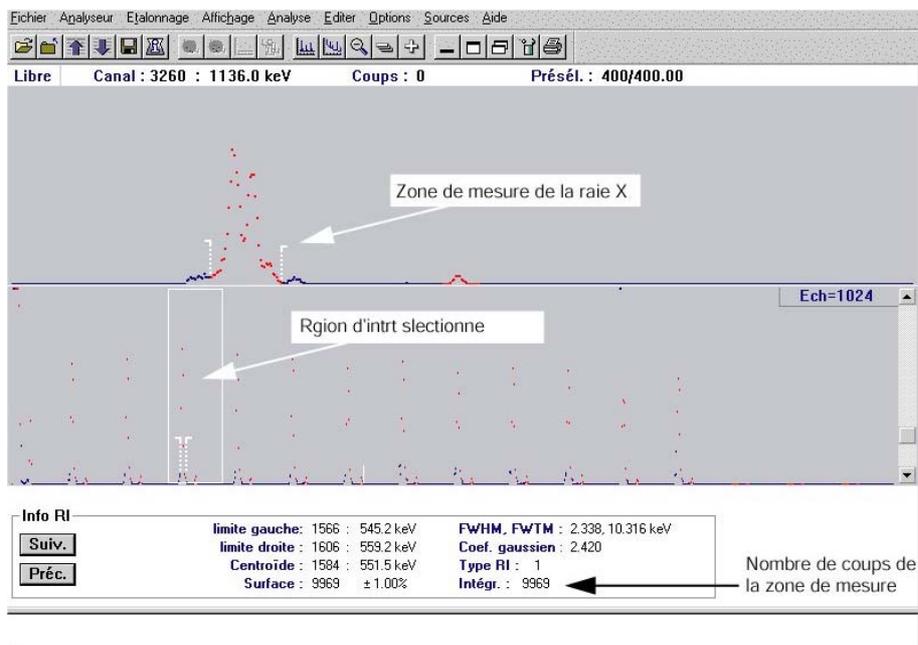


Figure VII.16: mesure du seuil de la raie X de l'américium avec collimateur CACAO

VII.3. Reconstruction

VII.3.1. Reconstruction plane

Les reconstructions à partir d'acquisitions planes (24x16 déplacements) ont été réalisées dans le but de comparer le cas classique (le collimateur à petits trous) avec le système CACAO (le collimateur à trous

larges). Pour chaque système deux acquisitions sont réalisées consécutivement, correspondant aux deux séries de détecteurs élémentaires (série 1 et 2).

Dans le cas du collimateur à trous fins, la reconstruction choisie est élémentaire. En effet, il suffit de repositionner dans l'histogramme de l'image les valeurs mesurées dans l'élément de détecteur, en face du pixel choisi. Les acquisitions provenant des deux séries de détecteurs sont cumulées selon le même processus pour former l'image finale.

Pour la méthode CACAO, les étapes suivantes sont effectuées:

1. Sommation & décalage.
2. Déconvolution & filtrage. Le filtre parabolique n'est bien sûr pas nécessaire pour ces acquisitions planes.

L'image de la Figure VII.17 représente la reconstruction à partir des projections expérimentales avec le système à collimation fine.



Figure VII.17: Résultat des reconstructions des projections expérimentales: Reconstruction avec un collimateur à trous fins.

Pour les reconstructions CACAO, nous avons utilisé deux méthodes de déconvolution, la méthode de Multi-kernel optimisation et la méthode de maximum de vraisemblance à deux noyaux en utilisant l'algorithme de double décomposition (voir Chapitre 4). L'introduction de la méthode de maximum de vraisemblance montre l'extensibilité du système CACAO à des méthodes de reconstructions de types statistiques.

La Figure VII.18 représente les reconstructions à partir du collimateur CACAO en utilisant deux types de reconstruction: la méthode du maximum de vraisemblance après 100 itérations et la méthode de multi-kernel optimisation MKO.

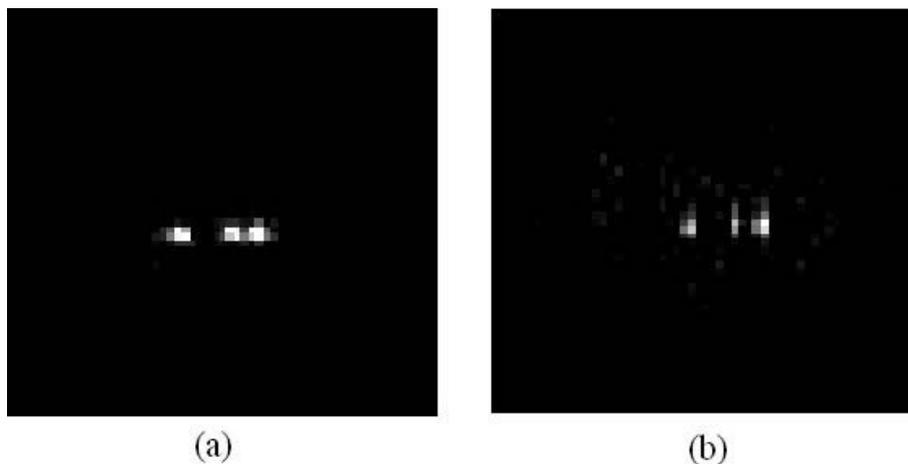


Figure VII.18: Résultat des reconstructions des projections expérimentales: (a) reconstruction plane à partir du collimateur CACAO et avec la méthode du Maximum de vraisemblance.(b) reconstruction à partir du collimateur CACAO et avec la méthode de multi-kernel optimisation.

VII.3.2. Reconstruction tomographique

Nous avons réalisé une acquisition 3D (24x16 déplacements x 8 angles) pour les deux collimateurs sur l'objet constitué de trois sources de ^{241}Am . Malheureusement, ayant effectué plusieurs expériences dont chacune durait deux semaines, certaines acquisitions se sont montrées inutilisables. La Figure VII.19: montre l'image obtenue pour l'angle n° 5 avant l'étape de la déconvolution. Comme on peut le constater, des artefacts sans doute d'origine électronique ont pollué cette acquisition. La Figure VII.20 montre pour comparaison les projections sommées décalées pour une acquisition réussie.

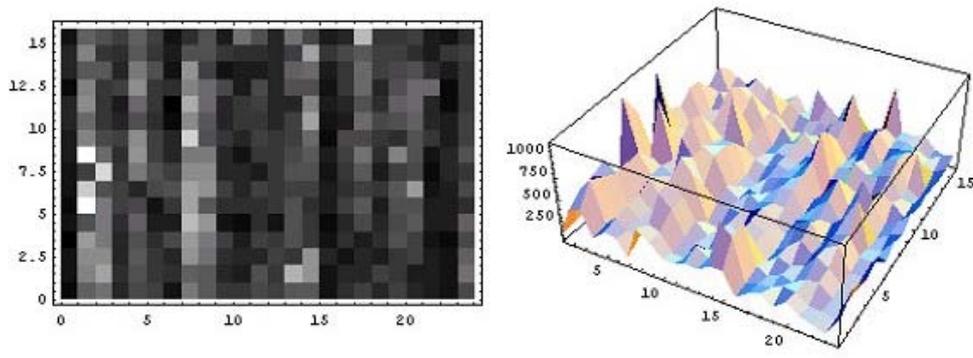


Figure VII.19: Images de trois sources ponctuelles avant l'étape de la déconvolution pour l'angle n° 5.

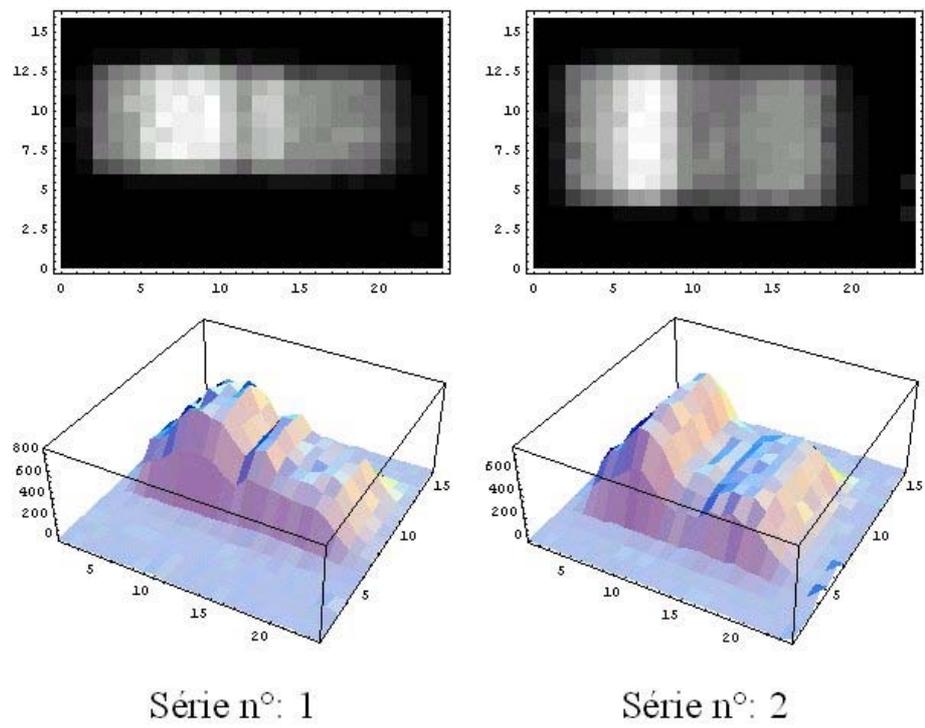


Figure VII.20: Images de trois sources ponctuelles avant l'étape de la déconvolution pour l'angle n° 1.

Cependant, nous avons essayé de réaliser une reconstruction 3D à partir des acquisitions provenant d'un seul plan de projection. La distance entre la source et la face d'entrée du collimateur a été évaluée à 24 mm, maximum de netteté sur les projections sommées décalées pour l'acquisition retenue. En supposant que les sources placées au centre d'un volume fictif de $47 \times 47 \times 47$ mm³, et en répétant cette acquisition projetée identiquement pour les 8 angles nous avons pu reconstruire un volume $31 \times 31 \times 31$ voxels de 1,5 mm de coté.

Les acquisitions ont été traitées suivant les trois étapes de l'algorithme de reconstruction décrit dans la thèse : (1) sommation & décalage, (2) déconvolution & filtrage, (3) rotation & sommation.

Évidemment, cette acquisition présente un bruit corrélé sur tous ces angles et l'on s'attend à des résultats moins bons que ceux auxquels on aurait pu prétendre avec une acquisition complète.

La Figure VII.21 représente ces résultats pour les différentes méthodes d'acquisition et de reconstructions tomographique pour le système CACAO. Nous avons utilisé le format HDF pour visualiser ces volumes 3D. Les représentations des données en 3D comportent donc une ombre projetée en bas et à gauche de chaque image.

La Figure VII.21-a présente le volume des données reconstruites sans seuillage. Les Figure VII.21-b et Figure VII.21-b' montrent les images reconstruites après un premier seuillage pour les deux méthodes de reconstruction. On constate la présence de bruit aux voisinages des trois sources. Avec un seuillage plus important sur ces données, les trois sources ponctuelles sont bien visibles pour les deux méthodes MKO et EM-P 2N, comme le montre la Figure VII.21-c et la Figure VII.21-c'.

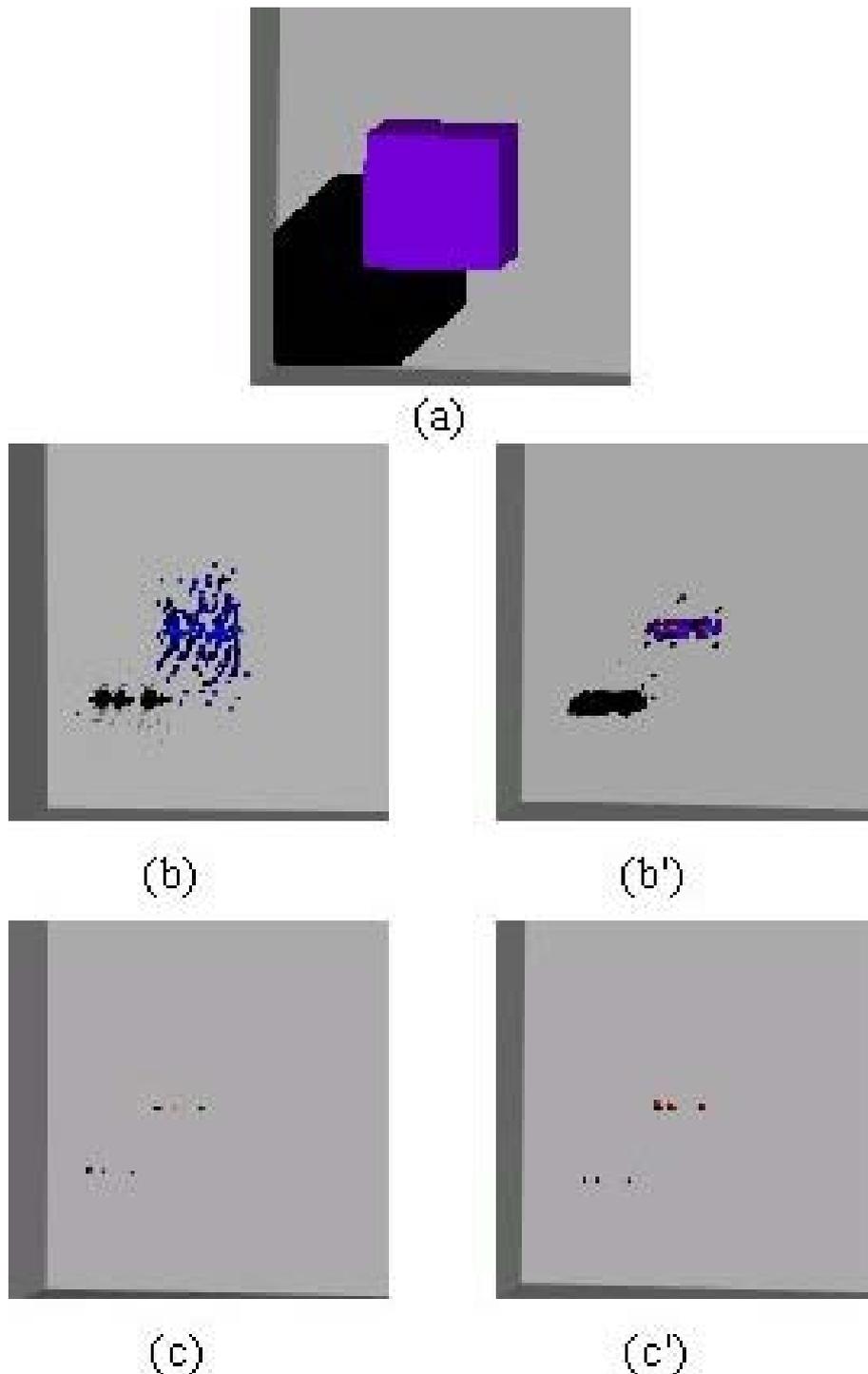


Figure VII.21: Résultat de la reconstruction tomographique à 8 angles: (a) le volume des données. (b) Reconstruction MKO après un premier seuillage des données 3D pour la méthode . (b') Reconstruction ML-P 2N après un premier seuillage des données 3D pour la méthode . (c) Reconstruction MKO après le deuxième seuillage des données 3D. (c') Reconstruction ML-P 2N après le deuxième seuillage des données 3D

VII.3.3. Linéarité et résolution

Les résultats expérimentaux nous ont prouvé qu'une bonne résolution visuelle des images reconstruites pouvaient être obtenues avec le système CACAO. A partir de ces résultats, nous avons

voulu vérifier la linéarité et la résolution du système d'acquisition pour les deux modes, CACAO et classique. La Figure VII.22 représente les profils des images acquises par mesures 2D et obtenus à partir des trois techniques de reconstruction étudiée A partir de ces profils, nous avons ensuite mesuré la distance en pixel entre les pics dans les profils des trois sources.

La résolution spatiale, a été estimée à partir de la largeur à mi hauteur de la source A qui est distincte des autres sources pour les trois reconstructions (Figure VII.22).

La linéarité des trois techniques a été estimée en considérant les distances respectives des trois sources A, B et C les unes par rapport aux autres.

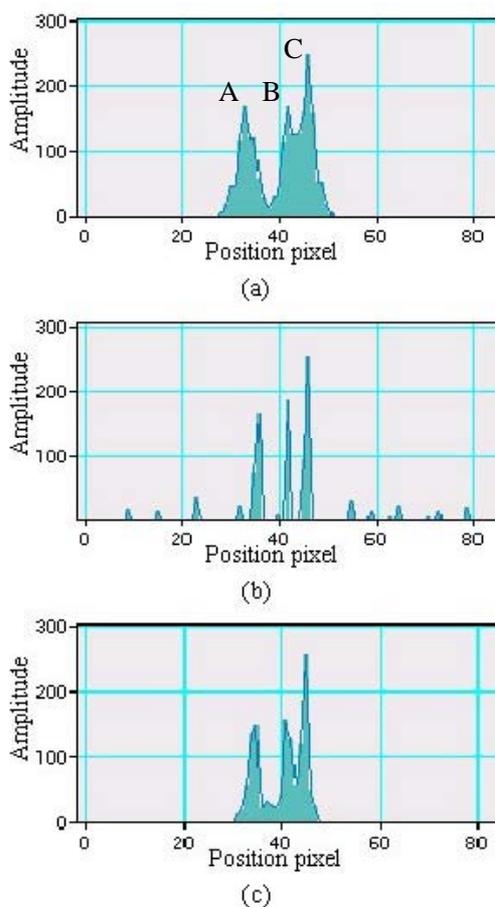


Figure VII.22: Profil des images reconstruites: (a) Reconstruction classique. (b) Reconstruction CACAO avec MKO. (c) Reconstruction CACAO avec ML-P 2N

Le Tableau VII-4 montre les résultats obtenus. d_1 et d_2 représentent les distances en pixel entre les trois sources. FWHM-A la largeur à mi-hauteur de la source A en pixel

	Distance d1 en pixel	Distance d2 en pixel	FWHM-A en pixel
Classique	3	7	11
CACAO MKO	3	6	3
CACAO ML-P 2N	3	6	5

Tableau VII-4: Calculs des d1, d2 et FWHM-A des trois sources en pixel pour les trois méthodes étudiées.

L'algorithme de MKO donne au système CACAO une résolution spatiale bien meilleure par rapport aux autres techniques. Cependant, il est important de noter que malgré la mauvaise résolution du système classique, ces résultats restent qualitativement acceptables dans cette configuration composée de sources ponctuelles. En effet, les mouvements en translation réalisés pour le cas classique étaient identiques à ceux du système CACAO en translation et en durée d'acquisition. Par ailleurs, sur le fantôme fabriqué l'espacement entre les trois sources est de respectivement de 5 et 10 mm soit un facteur 2 entre d1 et d2.. Expérimentalement, ces distances exprimées en pixel ont en moyenne une distance de 3 et 6 pixels pour les trois méthodes correspondant au rapport 2 du fantôme fabriqué. Ce résultat prouve la bonne linéarité du système d'acquisition pour les deux modes.

VII.4. Conclusion

Les résultats obtenus lors de ces premières études ont montré clairement l'intérêt de la tomographie dans le domaine de la mesure anthroporadiométrique et ce qu'une méthode « larges trous » telle que CACAO pouvait apporter d'un point de vue de la sensibilité de détection, de la résolution des images reconstruite et d'un meilleur rapport signal sur bruit en comparaison avec le système classique. Il est cependant apparu très rapidement que l'utilisation de détecteurs de si petite surface et d'un banc expérimental aussi éloigné d'une véritable gamma caméra était un facteur très limitant pour CACAO. En effet, si le remplacement du collimateur à petits trous par le collimateur à grand trou nous a permis d'augmenter le nombre de photons détectés (Tableau VII-3), plusieurs problèmes ont été mis en évidence après cette première série de mesures telles que la durée des acquisitions par rapport à une tomographie classique. Toutefois, la défaillance des deux détecteurs élémentaires (11 et 17) ne nous a pas permis de compléter cette étude par une étude quantitative en estimant les activités des sources. En effet, la déconvolution par les deux algorithmes proposés (MKO et ML-P) a été effectuée avec des données expérimentales manquantes et des noyaux parfaits. Ce problème n'est pas visible dans une étude qualitative pour des sources ponctuelles, mais il reste un obstacle pour avoir des détails d'informations sur les activités reconstruites. Une nouvelle étude est en cours d'élaboration visant à comparer les principes de la méthode CACAO et de la tomographie classique sur des acquisitions réalisées avec une gamma camera réelle. Dans ce cas, les émetteurs gamma de plus haute énergie tels

que les produits d'activation et les produits de fission émetteurs gamma d'énergie >100 keV et des surfaces de contamination de plus grande dimension seront considérées.

Si ce travail de thèse restait centré sur le développement mathématique et informatique, sa finalité est la faisabilité du concept CACAO à des cas réels. Ceci est justifié par le fait que, s'avancant vers une application 3D optimisée, ce sont les enjeux de l'application qui dirigent la définition des paramètres et la recherche du meilleur compromis. Ce sont ces mêmes critères qui détermineront les essais à réaliser pour démontrer la faisabilité de l'application à la mesure anthroporadiométrique. On devra à cet égard distinguer les performances de l'application vis-à-vis des produits de fission et des actinides suivant l'énergie et donc la pénétration des raies X et gamma émises. Toutefois, s'agissant d'utiliser des gamma caméra classiques, la recherche sera pratiquement centrée sur des isotopes émetteurs de haute énergie (> 100 keV). Son application à des émetteurs gamma basse énergie (< 100 keV) serait envisageable mais nécessiterait l'utilisation de matériaux de détection différents tel que le silicium.

VIII. CONCLUSION

Dans les chapitres précédents et plus particulièrement les chapitres V,VI et VII nous avons vu qu'il était possible avec l'approche CACAO de reconstruire des images acquises avec des trous plus larges que ceux des collimateurs classiques, actuellement utilisés dans les gamma caméras usuelles. L'augmentation de la taille des trous du collimateur permet de recueillir plus de photons qu'avec les collimateurs classiques et nous avons également vu que ce gain d'informations se fait sentir dans les images reconstruites à la fois en simulation (Chapitre V et VI) mais aussi sur nos expériences préliminaires (Chapitre VII).

Ce résultat n'a rien d'extraordinaire car nous avons antérieurement démontré que cette approche devait se traduire par un gain en qualité des images reconstruites, c'est à dire que malgré les difficultés de traitements et malgré la chute du rapport signal sur bruit pendant l'étape de déconvolution, les images reconstruites devaient être meilleures comparées à l'approche classique (article RBM 2). En effet, avec le système CACAO l'apport est de 2 ordres : non seulement le signal n'est pas gaspillé comme dans le système classique, mais le modèle physique est mieux adapté. Le réflexe classique qui consiste à vouloir détecter directement l'image de projection sans traitement à partir d'un collimateur à trous fins n'est en fait pas réaliste. En effet en mode tomographique, une étape de traitement informatique est obligatoire, et l'acquisition est obligatoirement multiplex. Pourquoi donc vouloir passer par une étape de projection représentative de l'objet à analyser et se priver d'une réelle optimisation du volume multiplex en forme et en taille ?

Ce travail de thèse nous permet également de mieux quantifier l'apport de CACAO. L'étude de la comparaison avec la collimation classique en 2D y est particulièrement approfondie. Le programme de calcul des projections dans le cas classique a été remanié pour ne tenir compte que du demi-champ le plus près du collimateur. Ceci nous a permis d'améliorer la qualité des images dans la voie classique. Parallèlement l'apport de l'algorithme d'interpolation par fonction splines et surtout la déconvolution MKO nous a permis d'améliorer la voie CACAO. Les résultats obtenus sont éloquentes par exemple pour 1G émis, les RSB obtenus sont de 3,69 dans le cas classique et 5,36 pour l'approche CACAO. En multipliant le nombre de photons par 10, le RSB obtenu avec l'approche classique atteint 5,06 ce qui est encore inférieur à l'approche CACAO avec 10 fois moins de photons!

Nous avons également vu que les progrès imminents dans le domaine des détecteurs solides, par exemple une diminution de la résolution spatiale d'un facteur deux, ne changera que peu la résolution des images obtenues au travers des collimateurs classiques. Cette situation ralentit d'ailleurs actuellement la recherche autour de ces détecteurs pixelisés. Or avec le système CACAO une avancée substantielle en terme de résolution spatiale peut décentement être envisagée.

Si les programmes de reconstruction CACAO 3D avaient été abordés dans la thèse de M. Quartuccio, les simulations réalisées présentaient des lacunes dans les données par suite d'un balayage insuffisant. Bien que nos programmes ne présentent toujours pas une souplesse totale dans le choix du balayage, l'apport de ce travail est d'avoir réussi la première reconstruction CACAO à 3D avec une acquisition complète. Nous avons pour cela simulé une acquisition avec une caméra à 2 têtes, implémentée la méthode MKO et la rotation utilisant les fonctions splines dans les programmes. Cette simulation confirme la supériorité de l'approche CACAO sur la collimation classique puisque le RSB est de 4,59 pour CACAO et seulement de 1,62 dans le cas classique. Il faut toutefois remarquer que ces résultats à 3D ne sont pas optimisés contrairement aux résultats obtenus à 2D. On peut en effet penser qu'un meilleur choix de la configuration des noyaux de convolution devrait permettre d'obtenir des résultats un peu meilleurs. Malheureusement le prix d'une telle optimisation, en temps de calcul, est un peu plus important qu'en 2D.

Enfin dans le chapitre VII nous avons complété et retraité les acquisitions expérimentales qui avaient débutées dans le travail de M. Quartuccio. Pour les données réalisées dans un seul plan de projection, et pour un objet composé de sources ponctuelles, l'amélioration apportée par le système CACAO tant en résolution qu'en sensibilité est évidente. Il faut dire qu'un objet composé de sources ponctuelles disjointes est bien adapté aux méthodes multiplex comme l'avait reconnu A. Girard et col. Néanmoins les conditions expérimentales sont loin d'être satisfaisantes. En particulier, la présence de pixels défectueux sur le détecteur gêne beaucoup la déconvolution. Cette dernière donnerait d'ailleurs des résultats désastreux sans l'étape de sommation décalage qui moyenne un peu ces inégalités. D'autre part, l'absence d'une bonne acquisition tomographique est aussi très pénalisante pour les études expérimentales CACAO. Nous avons en effet pu remarquer au cours de nos expériences de reconstruction CACAO que l'étape de rotation sommation améliorait nettement le rapport signal bruit. Il n'est donc pas étonnant que dans beaucoup de cas rencontrés au cours de ce travail le nombre d'angles optimal soit de 40 ou 72. Les conditions de l'expérience sont donc nettement défavorables pour CACAO et il est étonnant que les résultats ne soient pas trop mauvais. D'autant que le traitement à partir d'une acquisition répétée rend le bruit hautement corrélé.

Au terme de ce bilan, la situation ne semble pas mauvaise puisque les résultats sont positifs malgré des conditions encore non optimum surtout pour les expériences pratiques. Peut-on déjà envisager des applications pour ce système?

Les résultats présentés montrent une supériorité de la méthode CACAO, quelque soit le domaine d'activité mesuré. Ceci laisse bien sûr présager des applications aussi bien dans le domaine de la médecine nucléaire que dans le domaine de la mesure topographique de faibles activités. Néanmoins dans le domaine de la médecine nucléaire des appareils existent déjà, alors que l'imagerie d'activité faible est actuellement un domaine encore inexploré. Il semblerait donc intéressant de soutenir cette action de recherche et de la prolonger pour pouvoir réaliser rapidement des images de personnes accidentellement contaminées par des isotopes radio-actifs, a fortiori en cas de plaies contaminées, que ces patients soient des travailleurs ou des victimes d'actes terroristes. L'expérience nous ayant prouvé que malgré les prévisions des scénarios les plus pessimistes, les mesures de traitement sont le plus souvent en retard sur la réalité. Une autre application bien mise en valeur par ce travail est l'association du système CACAO avec des détecteurs pixelisés. Association qui pourra être bénéfique dans tous les domaines d'application de l'imagerie gamma : médecine nucléaire, radio protection, et imagerie expérimentale du petit animal. Ces détecteurs présentant la possibilité d'une résolution spatiale et énergétique inégalée, ils seront donc très utiles dans tous ces domaines, surtout en association avec une méthode de collimation qui pourra suivre cette avancée dans la résolution sans détruire la sensibilité du système.

Avant de clore ce travail, on peut rapidement s'interroger sur les facteurs pratiques négligés dans ce mémoire qui pourraient rendre la collimation CACAO caduque devant les systèmes classiques.

Ils sont en fait peu nombreux, la seule limitation réel du système, inhérente à toutes méthodes tomographiques est l'impossibilité d'étudier des systèmes en dynamique rapide. Le temps nécessaire au mouvement de la caméra pendant l'acquisition définissant la borne inférieure de l'intervalle de temps d'étude. Dans ce domaine les constructeurs ont réalisé des prouesses et les fabricant de scanners hélicoïdaux ont descendu le temps de révolution en dessous de la seconde. Les fabricants de gamma caméra ne se sont actuellement pas penchés sur le problème compte tenu de la faible sensibilité des collimateurs classiques qui impose actuellement le temps d'une tomoscintigraphie à un minimum de 10 ou 15 minutes.

La deuxième objection sérieuse est certainement le rayonnement diffusé. Sa présence non simulée dans notre étude va certainement réduire l'efficacité de la reconstruction. Dans quelle proportion?

Il faut tout d'abord bien comprendre que l'influence du rayonnement diffusé en médecine nucléaire par exemple est très faible. Dans une récente étude, El Fakhri et col. trouvent que le rayonnement diffusé (qui passe dans une fenêtre spectrométrique de 20%) suit une répartition très voisine des photons non diffusés. La perte de RSB due à la fraction diffusée n'est que de 10% dans cette étude centrée sur la tomoscintigraphie myocardique. Il faut également savoir qu'une fenêtre de 20% peut être considérée comme large et que l'on peut obtenir de meilleures images avec une fenêtre de 10 voir de 7% sans trop diminuer la sensibilité du système. Enfin l'utilisation de détecteurs semi-conducteurs réduira encore cette fraction de rayonnement diffusé.

Il nous a été également opposé que la diminution des performances de la gamma caméra avec le taux de comptage viendra annuler le bénéfice apporté par la collimation large. Là encore cet argument est tout d'abord complètement caduque si on se place dans le cadre d'une utilisation commune avec les détecteurs pixelisés qui ont des performances stables avec le taux de comptage. D'autre part nous l'avons également signalé le projet CACAO ne nécessite pas l'utilisation de grande surface contiguë de détecteur. Un assemblage de petits cristaux scintillateur pourrait donc être facilement utilisé, ce qui limiterait grandement le taux de comptage sur chaque cristal qui est le facteur important.

Enfin après avoir vu les difficultés que nous pourrions rencontrer en essayant d'appliquer pratiquement le projet CACAO, nous pouvons aborder succinctement les facteurs éventuels qui pourraient améliorer les résultats déjà acquis dans nos simulations.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre IV sur la déconvolution la méthode MKO n'est pas la meilleure méthode de déconvolution de signaux rectangulaires en présence de bruit poissonien. La méthode des multiplicateurs de Lagrange avec résolution matricielle donne de meilleurs résultats. Il est donc pas utopique de penser que l'introduction de cette méthode dans nos programmes de reconstruction conduira rapidement à une amélioration des images acquises avec un collimateur à trous larges.

Nous avons utilisé dans ce travail une formulation approchée du problème (approximation du type diagonale dominante) et une méthode analytique directe de résolution (par transformée de Fourier). Des méthodes itératives, prenant en compte la globalité des données, permettraient certainement d'améliorer les résultats présentés dans ce mémoire. Les travaux de S. Bégot et de M. Quartuccio, présentaient des reconstructions par méthodes itératives utilisant d'autres algorithmes de déconvolution moins performants. Les résultats montraient une amélioration de 0,7 à 1 dB après 1 ou 2 itérations. Nous n'avons pas pu, par manque de temps reprendre ces programmes avec les perfectionnements apportés dans ce travail. Mais il semble acquis que là encore des progrès sont à venir.

Références

1. Anger, H.O., *A new instrument for mapping gamma-ray emitters*. Biology and Medicine Quarterly Report UCRL, 1957. **3653**: p. 38.
 2. Anger, H.O., *Scintillation camera*. Rev Sci Instrum, 1958. **29**: p. 27-33.
 3. Anthony Parker, J., *Image Reconstruction in radiology*. CRC Press ed. 1990.
 4. Appel, J. and A. Girard, *Analyse d'image par codage optique multiplex*. Europhysics Journal, 1976. **7**(4): p. 221-234.
 5. Barber, H.B., *Applications of semiconductor detectors to nuclear medicine*. Nuclear Instruments & Methods in Physics Research Section a- Accelerators Spectrometers Detectors and Associated Equipment, 1999. **436**(1-2): p. 102-110.
 6. Barrett, H.H., *Fresnel zone plate imaging in nuclear medicine*. J Nucl Med, 1972. **13**: p. 382.
 7. Barrett, H.H., *The Radon transform and its application*. Progress in Optics, 1983. **XXI**: p. 217-286.
 8. Barrett, H.H. and W. Swindell, *Radiological imaging: the theory of image formation, detection, and processing*. 1981, New York: Academic Press.
 9. Bégot, S., *Algorithmes de reconstruction pour le système CACAO : Caméra à collimation assistée par ordinateur*, in *Thèse de Doctorat*. 1998, Université de Paris XI: Orsay.
 10. Berenstein, A.C. and E.V. Patrick, *Exact deconvolution for multiple convolution operators. An overview, plus performance characterizations for imaging sensors*. Proceedings of IEEE, 1990. **78**: p. 723-734.
 11. Berenstein, C.A. and A. Yger, *Analytic Bezout Identities*. Advances in Applied Mathematics, 1989. **10**(1): p. 51-74.
 12. Berenstein, C.A. and A. Yger, *The Problem of Deconvolution*. Journal of Functional Analysis, 1983. **54**(2): p. 113-160.
 13. Bertero, M. and P. Boccacci, *Application of the OS-EM method to the restoration of LBT images*. Astronomy & Astrophysics Supplement Series, 2000. **144**(1): p. 181-186.
 14. Bertero, M. and P. Boccacci, *Inverse problems in imaging*, ed. Iop. 1998: Institute of Physics Publishing.
 15. Bierlaire, M., P.L. Toint, and D. Tuytens, *On iterative algorithms for linear least squares problems with bound constraints*. Linear Algebra and Its Appl, 1991. **143**: p. 111-143.
 16. Boor, C.d., *A practical guide to Splines*, ed. Springer-Verlag. 1985.
 17. Bracewell, R.N., *The fourier transform and its applications*, ed. Mcgraw-Hill. 1965, New York.
 18. Bracewell, R.N., *Strip integration in radioastronomy*. Aust J Phys, 1956. **9**: p. 198.
 19. Browne, J. and A.R. DePierro, *A row-action alternative to the EM algorithm for maximizing likelihoods in emission tomography*. Ieee Transactions on Medical Imaging, 1996. **15**(5): p. 687-699.
 20. Browne, J.A., G.T. Herman, and D. Odhner, *SNARK93 : A programming system for image reconstruction from projections*, in *Technical Report MIPG198*. 1993, Medical Image Processing Group, University of Pennsylvania: Philadelphia.
 21. Burger, P., M. Keters, L.V. Bull, and J. Verplancke. *New générations of position sensitive silicon detectors*. in *Conference on semiconductors for room temperature radiation detection and applications*. 1998. Boston: Res. Soc. Symp. Proc.
 22. Byrne, C.L., *Accelerating the EMLL algorithm and related iterative algorithms by rescaled block-iterative methods*. Ieee Transactions on Image Processing, 1998. **7**(1): p. 100-109.
 23. Cao, Y., P.P.B. Eggermont, and S. Terebey, *Cross burg entropy maximization and its application to ringing suppression in image reconstruction*. Ieee Transactions on Image Processing, 1999. **8**(2): p. 286-292.
-

24. Casey., S.D. and D. F.Walnut, *Systems of convolution equation, deconvolution, Shannon Sampling, and The Wavelet and Gabor Transforms*. Siam Review, 1994. **36**(4): p. 537-755.
 25. Chapman, D., K. Newcomer, D. Berman, and A. Waxman, *Half-inch versus quarter-inch Anger camera technology: resolution and sensitivity differences at low photopeak energies*. J Nucl Med, 1979. **20**: p. 610-611.
 26. Cooley, J., P. Lewis, and P. Welch, *Application of the fast Fourier transform to the computation of Fourier integrals, Fourier series and convolution integral*. IEEE Trans, 1967. **AU-15**: p. 79-84.
 27. Cormack, A.M., *Representation of a function by its line integrals, with some radiological application*. J Appl Phys, 1963. **34**: p. 2722.
 28. Curry, H.B. and I.J. Scoenberg, *On spline distributions and their limits: the polya distribution functions*. Amer. Math. Soc, 1947. **53**: p. 109.
 29. Daube-Witherspoon, M.E., S. Matej, J.S. Karp, and R.M. Lewitt, *Application of the row action maximum likelihood algorithm with spherical basis functions to clinical PET imaging*. Ieee Transactions on Nuclear Science, 2001. **48**(1): p. 24-30.
 30. DeCarlan, L., *Développement d'un système de spectrométrie pulmonaire basse énergie pour la mesure des actinides*, in *Thèse de Doctorat*. 1998, Université Paul Sabatier: Toulouse.
 31. DeCarlan, L., P. Burger, B. Cahan, D. Franck, C. Mazur, J.P. Passerieux, and P. Pihet, *Discrete analog electronics for high-resistivity silicon detectors used for X-ray and Gamma-ray spectroscopy in whole-body monitoring*. Nuclear instrument & Methods in physics research, 1996. **A**(380): p. 371-375.
 32. DeCarlan, L., D. Frank, P. Burger, B. Cahan, P. Legou, O. Maillard, C. Mazur, O. Meyer, P. Pihet, and R. Soulié, *Feasibility of a room temperature silicon system to perform low energy lung spectroscopy*. Rad Prot Dos, 1998. **79**(1-4): p. 485-489.
 33. Demoment, G., *Déconvolution des signaux*. 1987, Ecole Supérieure d'électricité 5853/...1987: Gif sur Yvette.
 34. Dempster, A.D., N.M. Laird, and D.B. Rubin, *Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm*. J Royal Statist Soc, 1977. **B 39**: p. 1-38.
 35. Depierro, A.R., *A Modified Expectation Maximization Algorithm for Penalized Likelihood Estimation in Emission Tomography*. Ieee Transactions on Medical Imaging, 1995. **14**(1): p. 132-137.
 36. Douiri, A., C. Jeanguillaume, D. Franck, P. Hering, M. Quartuccio, B. Begot, and P. Ballongue, *Application of a new multi-kernel algorithm for computer aided collimation gamma camera (CACAO)*. ITBS, 2001.
 37. Elloumi, I., *Etude de la résolution et du rapport signal sur bruit en Tomographie d'émission à photon unique (TEPU): application à la caméra à collimation assistée par ordinateur (CACAO)*. 1995: Sfax Tunisie.
 38. Erdogan, H. and J.A. Fessler, *Ordered subsets algorithms for transmission tomography*. Physics in Medicine and Biology, 1999. **44**(11): p. 2835-2851.
 39. Esser, P.D., P.O. Alderson, R.J. Mitnick, and J.J. Arliss, *Angled-Collimator SPECT (A-SPECT): An improved approach to cranial single photon emission tomography*. J Nucl Med, 1984. **25**(7): p. 805-809.
 40. Franck, D., P. Pihet, P. Burger, M. Keters, M. Rouger, F. Lugiez, and C. Mazur, *Investigation of Silicon Detectors to improve in vivo monitoring of Pu239 after accidental intakes*. Rad Prot Dos, 1999. **89**(3-4): p. 321-324.
 41. Girard, A., *Classification des imageurs spectraux*. J Optics, 1984. **15**(1): p. 7-14.
 42. Golub, G. and C.F. van Loan, *Matrix computations*, ed. Press. 1981.
-

43. Gordon, R., R. Bender, and G.T. Herman, *Algebraic reconstruction techniques (ART) for the three-dimensional electron microscopy and X-ray photography*. J Theor. Biol., 1970. **29**: p. 471-487.
 44. Goshtasby, A., F. Cheng, and B.A. Barsky, *B-Spline curves and surfaces viewed as digital filters*. Computer vision, graphics, and image processing, 1990. **52**: p. 264-275.
 45. Grivet, P., *Electron optics*. 1972: Pergamon Press.
 46. Gustafsson, B., *Mathematics for computer tomography*. Physica Scripta, 1996. **T61**: p. 38-43.
 47. Hadamard, J., *Sur les problemes aux des partielles et leur signification physique*. Bull. University ed. Vol. 13. 1902: Princeton. 49-52.
 48. Hanson, K.M. and G.W. Wecksung, *Bayesian Approach to Limited-Angle Reconstruction in Computed Tomography*. J. Opt. Soc. Am., 1983. **73**(11): p. 1501-1509.
 49. Hayes, M.H., *Statistical digital signal processing and modeling*, ed. John Wiley & Sons. Vol. 1. 1996, New York. 608.
 50. Henkin, R.E., M.A. Boles, G.L. Dillehay, J.R. Halama, S. M.Karesh, R.H. Wagner, and A.M. Zimmer, *Nuclear Medecine*. Mosby. Vol. 1. 1996.
 51. Herman, G.T., *Maximum a postriori image reconstruction from projection*. In Image Models and their speech model cousins, ed. Springer-Verlag. 1996, New York: Leveinson and L. A. Shepp.
 52. Heyda, D.W., F.R. Croteau, and J.A. Govaert. *A third generation digital gamma camera*. in *Proceeding of SPIE*. 1984.
 53. Hudson, H.M. and R.S. Larkin, *Accelerated Image-Reconstruction Using Ordered Subsets of Projection Data*. Ieee Transactions on Medical Imaging, 1994. **13**(4): p. 601-609.
 54. Hunt, B.R., *International Journal of Modern Physics*, 1994. **C 5**(1): p. 151.
 55. Hunt, B.R., *The inverse problem of Radiography*. Mathematical Biosciences, 1970. **8**: p. 161-179.
 56. Jain, K.A., *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice hall information and system sciences series, ed. Kailath. 1989, Englewood Cliffs, New Jersey 07632: Prentice Hall. 569.
 57. Jeanguillaume, C. *Computed assisted collimation and tomography: a new project to enhance the sensitivity and the resolution of gamma cameras*. in *14th Annual IEEE-EMBS Conf*. 1992. Paris FRANCE.
 58. Jeanguillaume, C., *High sensitivity gamma camera system*. 1995: US.
 59. Jeanguillaume, C., *Système de gamma caméra à haute sensibilité*. 1991: France.
 60. Jeanguillaume, C., *Un perfectionement de la gamma camera à haute sensibilité*. 1998: Brevet France.
 61. Jeanguillaume, C., S. Begot, M. Quartuccio, and P. Ballongue, *Gamma caméra à collimation assistée par ordinateur (CACAO)*.
Première partie : principes de base et méthode de reconstruction. RBM, 1996. **18**(7): p. 198-206.
 62. Jeanguillaume, C., S. Begot, M. Quartuccio, A. Douiri, and P. Ballongue, *From whole-body counting to imaging: The computer aided collimation gamma camera project (CACAO)*. Radiation Protection Dosimetry, 2000. **89**(3-4): p. 349-352.
 63. Jeanguillaume, C., S. Begot, M. Quartuccio, A. Douiri, D. Franck, P. Pihet, and P. Ballongue, *A fast algorithm for computer aided collimation gamma camera (CACAO)*. Ieee Transactions on Nuclear Science, 2000. **47**(4): p. 1541-1542.
 64. Kak, A.C. and M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, 1988.
 65. Keyes, W.I., *The fan-beam gamma camera*. Phys Med Biol, 1975. **20**: p. 489-493.
-

66. Koral, K.F., W.L. Rogers, and G.F. Knoll, *Digital tomographic imaging with time-modulated pseudorandom coded aperture and gamma camera*. J Nucl Med, 1975. **16**(5): p. 402-413.
 67. Kuhl, D.E. and R.Q. Edwards, *Image separation radioisotope scanning*. Radiology, 1963. **80**: p. 653-661.
 68. Lange, K. and R. Carson, *EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography*. Comput. Assist. Tomogr., 1984. **8**(2): p. 306-316.
 69. Lascaux, P. and R. Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, ed. Masson. 1984.
 70. Lodge, M., S. Webb, M. Flower, and D. Binnie, *A prototype rotating slat collimator for SPECT*. IEEE Trans Med Imag, 1996. **15**(4): p. 500-511.
 71. Luc, P. and S. Gerstenkorn, *Fourier transform spectroscopy in the visible and ultra violet range*. Applied Optics, 1978: p. 1327-1331.
 72. Lucy, L.B., *An iterative technique for the rectification of observed distributions*. Astronomy Journal, 1974. **79**: p. 745-754.
 73. Mallat, S., *Une exploration des signaux en ondelettes*. 2000: Les éditions de l'école polytechnique.
 74. Mestais, C., R. Allemand, O. Peyret, and E. Tournier, *Les compromis physiques de la détection nucléaire. Incidence sur la conception des caméras*. Médecine Nucléaire et imagerie métabolique, 1994. **18**: p. 303-309.
 75. Natterer, F., *The mathematics of computerized tomography*. John Wiley & SONS ed. 1986.
 76. Oldendorf, W.H., *Isolated flying spot detection of radiodensity discontinuities displaying the lateral structural pattern of a complex object*. IRE Trans Biomed Electronics BMW, 1961. **8**: p. 1.
 77. Parker, J.A., R.V. Kenyon, and D.E. Troxel, *Comparaison of interpolating methods for image resampling*. IEEE Trans Med Imaging, 1983. **1**(MI-2): p. 31-39.
 78. Peyret, O., C. Mestais, R. Allemand, and E. Tournier, *Les méthodes de détection autres que la gamma caméra d'angle*. Médecine Nucléaire - Imagerie fonctionnelle et métabolique, 1994. **18**: p. 310-316.
 79. Peyret, O., C. Mestais, and L. Verger, *Vers les gamma caméras à semi-conducteurs*. Revue LACOMEN, 1999. **5**(2).
 80. Picinbono, B., *Element de théorie du signal*, ed. Dunod. 1980.
 81. Picinbono, B., *Signaux aléatoires*. Vol. 1-3. 1995, Paris: Dunod.
 82. Pihet, P., D. Frank, P. Burger, P. Bérard, L.D. Carlan, D. Paul, and N. Razafindralambo, *Perspectives of silicon detectors for X and low energy gamma ray spectroscopy in whole body counting*. Rad Prot Dos, 1995. **61**(1-3): p. 149-152.
 83. Prenter, P.M., *Splines and variational methods*. 1975, New York: Wiley.
 84. Quartuccio, M., *Caméra à collimation assistée par ordinateur CACAO, étude à 2 et 3 dimensions et premières expériences*, in *LPS*. 2001, Université de Paris Sud: ORSAY.
 85. Quartuccio, M., D. Franck, P. Pihet, S. Begot, and C. Jeanguillaume, *Computer assisted collimation gamma camera : a new approach to imaging contaminated tissues*. Rad Prot Dos, 2000. **89**(3-4): p. 343-348.
 86. Radon, J., *On the determination of functions from their integrals along certain manifolds*. (Ger). Mathematisch-Physische Klasse. (Leipzig), 1917. **69**: p. 262-277.
 87. Richardson, W.B., *Bayesian-based iterative method of image restoration*. J Opt. Soc. Am., 1972. **62**: p. 55-59.
 88. Rockmore, A.J. and A. Macovski, *A maximum likelihood approach to emission image reconstruction from projections*. IEEE Trans Nuc Sci, 1976. **23**: p. 1428-1432.
 89. Rogers, W.L., K.S. Han, L.W. Jones, and W.H. Beierwaltes, *Application of a fresnel zone plate to Gamma-Ray imaging*. J Nucl Med, 1972. **13**(8).
-

90. Saad, Y. and M.H. Schultz, *A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*. Siam J. Stat. Comp, 1986. **7**.
 91. Schoenberg, I.J., *Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*. Quart. Appl. Math, 1946. **4**(112-141): p. 45-99.
 92. Septier, A., *Focusing of charged particles*. 1967: Academic Press.
 93. Shepp, L.A. and Y. Vardi, *Maximum likelihood reconstruction for emission tomography*. IEEE Trans Med Imag, 1982. **1**(2): p. 113-122.
 94. Sorenson, J.A. and M.E. Phelps, *Physics in Nuclear Medicine*. 1987, Philadelphia: W.B. Saunders Company. Harcourt Brace Jovanovitch Inc.
 95. Strang, G., *Introduction to Applied Mathematics*. Mass ed. 1986, Wellesley: Wellesley-Cambridge Press.
 96. Thevenaz, P., T. Blu, and M. Unser, *Image Interpolation and resampling*, in *Handbook of Medical Imaging, Processing and Analysis*, Press, Editor. 2000: San Diego. p. 393-420.
 97. Thevenaz, P., T. Blu, and M. Unser, *Interpolation revisited*. Ieee Transactions on Medical Imaging, 2000. **19**(7): p. 739-758.
 98. Thikonov, A. and V. Arsénine, *Méthodes de résolution des problèmes mal-posés*, ed. Mir. 1976.
 99. Tsui, B., *Collimator design, properties, and characteristics. In the scintillation camera*. Society of Nuclear Medicine, 1988: p. 17-45.
 100. Unser, M., *Splines - A perfect fit for signal and image processing*. Ieee Signal Processing Magazine, 1999. **16**(6): p. 22-38.
 101. Unser, M., A. Aldroubi, and M. Eden, *B-Spline Signal-Processing .1. Theory*. Ieee Transactions on Signal Processing, 1993. **41**(2): p. 821-833.
 102. Unser, M., A. Aldroubi, and M. Eden, *B-Spline Signal-Processing .2. Efficient Design and Applications*. Ieee Transactions on Signal Processing, 1993. **41**(2): p. 834-848.
 103. Unser, M., A. Aldroubi, and M. Eden, *Fast B-Spline Transforms for Continuous Image Representation and Interpolation*. Ieee Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991. **13**(3): p. 277-285.
 104. Unser, M. and M. Eden, *Maximum likelihood estimation of linear signal parameters for poisson processes*. IEEE Trans acous speech signal proc, 1988. **36**(6): p. 942-945.
 105. vanGiessen, J.W., M.A. Viergever, P.P. vanRijk, and J.G. Gerritsen, *Two devices for longitudinal emission tomography of the thyroid*. J Nucl Med, 1987. **28**(12): p. 1892-1900.
 106. Vishampayan, S., J. Stamos, R. Mayans, K. Koral, N. Clinthorne, and W.L. Rogers, *Maximum-Likelihood Image-Reconstruction for Spect*. Journal of Nuclear Medicine, 1985. **26**(5): p. P20-P20.
 107. Vogel, R.A., D.L. Kirch, M.T. LeFree, and P.A. Steele, *A new method of multiplanar emission tomography using a seven pinhole collimator and an Anger camera*. J Nucl Med, 1978. **19**: p. 648-654.
 108. Wang, C.X., W.E. Snyder, G. Bilbro, and P. Santago, *Performance evaluation of filtered backprojection reconstruction and iterative reconstruction methods for PET images*. Computers in Biology and Medicine, 1998. **28**(1): p. 13-25.
 109. Webb, S., *The physics of medical imaging*. Medical Science Series, ed. Publishing. 1993, Bristol. 633.
 110. Wells, R.G., P.H. Simkin, P.F. Judy, and M.A. King, *Maximizing the detection and localization of Ga-67 tumors in thoracic SPECT MLEM(OSEM) reconstructions*. Ieee Transactions on Nuclear Science, 1999. **46**(4): p. 1191-1198.
-