

**THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR
DE L'UNIVERSITE DE MONTPELLIER**

En Mécanique et Génie Civil

École doctorale : Information, Structures, Systèmes

Unité de recherche UMR5508 (LMGC)

**Modélisation micromécanique de l'endommagement
ductile par une approche cohésive-volumique :
application à l'UO₂ irradié**

Présentée par Noé Brice NKOUMBOU KAPTCHOUANG

Le 16/12/2019

Sous la direction de Yann MONERIE

Devant le jury composé de

M. Renald BRENNER, Directeur de Recherche CNRS, MISES

M. Jacques BESSON, Directeur de Recherche CNRS, Mines ParisTech

M. Nicolas MOËS, Professeur, Centrale Nantes

M. Frédéric DUBOIS, Ingénieur de Recherche CNRS, LMGC

M. Rodrigue LARGENTON, Ingénieur-Chercheur, EDF

M. Stéphane PAGANO, Directeur de Recherche CNRS, LMGC

M. Yann MONERIE, Professeur, Université de Montpellier

M. Pierre-Guy VINCENT, Ingénieur-Chercheur, IRSN

Président

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Directeur de thèse

Encadrant de thèse



*À mon père, ma mère
mon frère et mes sœurs.*

Remerciements

J'ai effectué cette thèse à l'IRSN (Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire), au sein du LPTM (Laboratoire de Physique et de Thermomécanique des Matériaux) d'octobre 2016 à octobre 2019.

L'accomplissement de ce travail a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

Je tiens avant tout à remercier Monsieur P.-G. VINCENT, ingénieur de recherche à l'IRSN qui a encadré ce travail au quotidien. De part son sens aigu de la minutie et de la précision, il a su me montrer la voie de la rigueur dans la formalisation des idées et dans le maniement des équations.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Y. MONERIE, Professeur à l'Université de Montpellier, qui a dirigé cette thèse. Ses analyses scientifiques rigoureuses, ses conseils et ses encouragements ont rendu ce travail possible.

Je remercie Monsieur R. BRENNER, directeur de Recherche CNRS, pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de soutenance de thèse.

Que Messieurs J. BESSON, directeur de Recherche CNRS et N. MOES, Professeur à l'Ecole Centrale Nantes, qui m'ont fait l'honneur d'examiner et de rapporter sur ce travail trouvent ici l'expression de ma reconnaissance. Leurs remarques perspicaces ont apporté de la clarté sur plusieurs aspects de ce travail.

Je remercie vivement tous les membres du jury d'avoir accepté d'assister à ma soutenance de thèse. Leurs questions et remarques ciblées, ainsi que leurs analyses pertinentes ont démontrées tout leur intérêt pour ce travail.

Un remerciement particulier à Messieurs F. PERALES, ingénieur de recherche à l'IRSN et F. DUBOIS, ingénieur de recherche CNRS qui par leurs talents de mécaniciens - numériciens ont contribué de manière significative à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie affectueusement l'intégralité des membres de l'équipe LPTM pour m'avoir accueilli dans un cadre convivial, et pour les discussions scientifiques échangées. Une pensée particulière à N. VISSYRIAS, ingénieur consultant à l'IRSN, M. SALVO et V. GEORGENTHUM, ingénieurs de recherche à l'IRSN, pour les nombreuses informations sur l'accident d'insertion de réactivité et sur le combustible en dioxyde d'uranium. Un grand merci également aux membres du LMGC (Laboratoire de Mécanique et de Genie Civil) dans lequel j'ai effectué un séjour de quelques mois. Une pensée particulière à R. MOZUL, ingénieur de recherche CNRS pour avoir promptement apporté des réponses à mes questions sur le de code calcul LMGC90.

Enfin je ne saurais terminer sans remercier mon camarade de thèse et ami A. SOCIE (aujourd'hui Docteur en Mécanique) dont les nombreux échanges durant ces 3 années ont été d'une grande aide.

Table des Matières

Introduction	17
1 Contexte et problématique	21
1.1 Éléments de contexte sur le combustible	23
1.1.1 Généralités	23
1.1.2 Microstructure	23
1.1.3 Propriétés et comportement thermomécanique de l'UO ₂	25
1.2 Problématique industrielle	30
1.2.1 Comportement du combustible en réacteur en fonctionnement normal	31
1.2.2 Accident d'insertion de réactivité	32
1.2.3 Objectifs appliqués de la thèse	36
1.3 Portée de l'étude et démarche	37
1.3.1 Portée de l'étude	37
1.3.2 Démarche générale	37
2 Mécanique de la rupture ductile : éléments de bibliographie	41
2.1 Mécanismes microscopiques de l'endommagement ductile	43
2.2 Modèles de rupture ductile	43
2.2.1 Approche phénoménologique et cadre thermodynamique	44
2.2.1.1 Indicateurs d'endommagement ou critère de rupture, mo-	
dèles non couplés	44
2.2.1.2 Modèles couplés (cadre thermodynamique)	46
2.2.2 Critères de plasticité effectifs pour matériaux poreux	47
2.2.2.1 Le modèle de Rice-Gurson	50
2.2.2.2 Le modèle de Gurson Tveergaard Needleman (GTN)	55
2.2.2.3 Autres critères de plasticité pour matériaux poreux à ca-	
vités sphériques	56
2.2.2.4 Extension du modèle GTN pour l'endommagement à basses	
triaxialités	57
2.3 Fissuration : création de surface	59
2.3.1 Extensions de la mécanique linéaire de la rupture	59
2.3.1.1 L'intégrale J de Rice-Eshelby	59

2.3.1.2	L'ouverture en fond de fissure (CTOD ou CTOA)	60
2.3.2	Fissuration par emploi de Modèles de Zones Cohésives (MZC)	61
2.3.2.1	Généralités	61
2.3.2.2	Application des modèles de zones cohésives à la rupture ductile	65
3	Un modèle cohésif pour l'endommagement ductile surfacique	69
3.1	Généralités	71
3.2	Bande cohésive : cinématique	72
3.3	Loi de traction - séparation	74
3.4	Prise en compte des effets triaxiaux	77
3.4.1	Enrichissement de la cinématique cohésive par une variable de déformation dans le plan	77
3.4.2	Caractérisation de l'état du chargement et évaluation de la déformation dans le plan	79
3.5	Comparaison entre le modèle d'interface et le modèle GTN sur un point matériel	81
3.5.1	Paramètres matériaux	81
3.5.2	Intégration du modèle GTN et du modèle de zone cohésive	82
3.5.3	Déformation axisymétrique	83
3.5.4	Direction de contrainte axisymétrique	84
3.5.5	Discussion	85
3.6	Éléments de mise en œuvre	86
3.6.1	Modèle de zone cohésive intrinsèque	86
3.6.2	Introduction de l'irréversibilité et de la décharge	89
3.6.3	Hypothèse de la théorie de la déformation	91
3.7	Modèle simplifié analytique	92
3.8	Synthèse	95
3.8.1	Récapitulatif de la démarche : transformation d'un modèle d'endommagement volumique en un modèle de zone cohésive	96
3.8.2	Synthèse des équations du modèle retenu	97
4	Implémentation numérique et première application	99
4.1	Généralités : approche multi-corps et dynamique des contacts	101
4.2	Aspects du schéma d'intégration numérique	106
4.3	Simulation d'un essai CT	108
4.3.1	Présentation du cas d'étude	108
4.3.2	Résultats	110
4.3.3	Sensibilité aux paramètres de maille et d'échelle	113
4.4	Bilan du chapitre	117

5	Application : simulation d'une portion de combustible UO_2 en conditions RIA	119
5.1	Présentation du cas d'étude	121
5.2	Paramètres matériaux	123
5.2.1	paramètres pour l' UO_2	123
5.2.2	Paramètres pour la gaine en Zircaloy 4	127
5.3	Prise en compte de la pressurisation des cavités microscopiques	127
5.4	Résultats	130
	Conclusions et perspectives	135
	Annexes	139
A	Expressions de $\dot{\gamma}$ en fonction de la triaxialité η_E^{vol} et du saut $[\dot{\mathbf{u}}]$	141
B	Intégration implicite du modèle GTN	143
B.1	Relations de comportement	143
B.2	Intégration numérique	144
C	Estimation des paramètres numériques $\alpha_n, \alpha_t, \alpha_s$	148
D	Calcul de la déformation moyenne	150
E	Implémentation du modèle de zone cohésive GTN/ZC	153
F	Détermination de la courbe de rupture $J - \Delta a$	156
G	Compléments d'informations sur la simulation RIA	158
G.1	Compléments d'informations sur la géométrie	158
G.2	Compléments d'informations sur les chargements	159
G.3	Compléments d'informations sur la prise en compte de la pressurisation des cavités	159
	Bibliographie	161

Liste des Figures

Chapitre 1 : Contexte et problématique

1	Pastille de combustible UO_2 [Parisot et al., 2008].	24
2	Schéma d'un crayon combustible (à gauche) [Parisot et al., 2008] . Schéma d'un assemblage combustible REP 17 x 17 et d'une grappe de commande (à droite) [Parisot et al., 2008].	24
3	Micrographie d'une céramique UO_2 [Parisot et al., 2008].	25
4	Micrographie MEB d'un morceau de combustible : a) non irradié, b) irradié avec un taux local de combustion de $75 GW_j/t$ illustrant la structure typique de la zone HBS. [Rondinella et Wiss, 2010]	26
5	Populations de bulles dans le combustible UO_2 . a) UO_2 irradié à $23.4 GW_j/t$ porté à 2000 K pendant approximativement 3 h [Dubourg et al., 2005]. b) Coalescence de bulles aux joints de grains sur de l' UO_2 non irradié soumis à un essai de compression à une température de 1465 °C [Dherbey et al., 2002].	26
6	Comportement du combustible UO_2 vierge en compression en fonction de la température.	28
7	Résultats d'essais de Canon et al. [1971], flexion de l' UO_2 vierge avec une porosité de fabrication 3%, et une taille de grain de $8 \mu m$ (figures tirées de Vincent [2007]). Mise en évidence d'un comportement fragile à basse température et ductile à haute température. $\varepsilon\%$: déformation plastique totale.	29
8	Carte de mécanismes de rupture de l' UO_2 dans l'espace contrainte-température (tirée de la thèse de Colin [2003]).	29
9	(a) Macrographie d'un combustibles irradié. Illustration de la fragmentation et des profils radiaux de température et de puissance [Baron et Hallstadius, 2012]. (b) Schéma de la forme de diabolo vers laquelle tend une pastille de combustible sous l'effet des contraintes thermiques [Baron et Hallstadius, 2012].	32
10	Évolution du jeu entre les pastilles et la gaine au cours de son utilisation nominale et lors d'un transitoire de puissance ([Bailly et al., 1996]).	33
11	Évolution de la puissance et de l'énergie injectée lors d'un RIA en fonction du temps [Parisot et al., 2008]. Représentation du gradient thermique radial dans le combustible pour différents niveaux de puissance [Marcet, 2010].	34
12	Schématisation des modes de rupture de la gaine en RIA (illustration tirée de Fuketa [2012]).	35

13	Images MEB de la périphérie d'un échantillon UO_2 irradié à 57.4 GWj/t soumise à un transitoire thermique [Marcet, 2010]. a) avant transitoire. b) après transitoire.	35
14	Principe des modèles de zones cohésives	38
15	Approche cohésive - volumique.	38

Chapitre 2 : Mécanique de la rupture ductile : éléments de bibliographie

16	Mécanismes de nucléation et croissance. a) Nucléation par décohésion de l'interface matrice-inclusion. b) Nucléation de cavités par décohésion de l'interface matrice-inclusion et par rupture de l'inclusion. Observations réalisées au MEB pour un chargement en cisaillement par Achouri et al. [2013] sur un acier HLE. Les flèches donnent la direction du cisaillement ainsi que le pourcentage de déplacement à rupture.	44
17	Modes de coalescence observées par Weck et Wilkinson [2008] a) Striction interne des ligaments inter-cavités. b) Coalescence dans une bande de cisaillement. Chargement macroscopique selon la verticale.	45
18	Sphère creuse	51
19	Contour d'intégration.	61
20	Définition de la zone cohésive en pointe de fissure par Dugdale [1960] (à gauche) et Barenblatt [1959] (à droite).	62
21	Quelques modèles proposés dans la littérature d'après Schwalbe et al. [2012]) pour la modélisation de la rupture ductile. a) [Needleman, 1987], b) [Needleman, 1990], c) [Tvergaard et Hutchinson, 1992], d) [Scheider et Brocks, 2003].	63
22	Illustration 2D de la synthèse des mécanismes microscopiques de la process zone par une relation traction \mathbf{R} - séparation $[\mathbf{u}]$	65
23	Principe de détermination des paramètres cohésifs par identification sur cellule unitaire GTN. MZC #1 : identification avec modèle de type Needleman [1990]. MZC #2 : identification avec modèle de type Tvergaard et Hutchinson [1992]	67
24	Identification de la contrainte cohésive R_0 et de l'énergie cohésive Γ_0 en fonction de la triaxialité des contraintes η_Σ par Schwalbe et al. [2012]. h est la taille de la cellule unitaire élémentaire ayant servi à l'identification des paramètres cohésifs. D'après [Siegmund et Brocks, 2000a; Scheider, 2009; Schwalbe et al., 2012], les paramètres R_0 et Γ_0 peuvent se mettre sous la forme $\frac{R_0}{\sigma_0} = C_0 - C_1 \exp\left(\frac{C_2 - \eta_\Sigma}{C_3}\right)$ et $\frac{\Gamma_0}{\sigma_0 h} = C'_0 - C'_1 \exp\left(\frac{C'_2 - \eta_\Sigma}{C'_3}\right)$ où $C_0, C_1, C_2, C_3, C'_0, C'_1, C'_2, C'_3$ sont des constantes à identifier.	67

Chapitre 3 : Un modèle cohésif pour l'endommagement ductile surfacique

25	Domaine Ω avec champ présentant une discontinuité.	72
26	Modélisation d'une zone de localisation des déformations comme une zone bande cohésive. Définition du repère local normal-tangent dans la bande $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{s}\}$	73
27	Principe de prise en compte de l'état du chargement dans la zone cohésive. État du chargement caractérisé dans le voisinage de la bande cohésive, puis imposé à la bande cohésive.	78

28	Données expérimentales pour la courbe l'écroissage d'un acier ferritique StE460 (désignation allemande) reportées dans [Siegmond et Brocks, 2000a] (point) et corrélation d'une loi puissance (3.33) (ligne).	81
29	Réponse du point matériel GTN (ligne continue) et du modèle de traction - séparation GTN/ZC (ligne interrompue) pour différents triaxialités des déformations η_E (déformations axisymétriques). Pas d'élasticité dans le modèle cohésif.	83
30	Réponse du point matériel GTN (ligne continue) et du modèle de traction - séparation GTN/ZC (ligne interrompue) pour différentes triaxialités des contraintes η_Σ (contraintes axisymétriques). Pas d'élasticité dans le modèle cohésif.	85
31	Dépendance de la contrainte cohésive R_0 et de l'énergie de rupture Γ_0 à la triaxialité des contraintes η_Σ et des déformations η_E	86
32	Représentation schématique d'un modèle de zone cohésive intrinsèque et d'un modèle de zone cohésive extrinsèque.	87
33	Principes de décharge formulées dans la littérature.	90
34	Illustration du principe de décharge suivant le mode normal. (1) : charge initiale, (2) : charge (endommagement), (3) : décharge, (4) : recharge, (5) : charge (endommagement). Figure (a) dans la direction normale; Figure (b) : direction tangentielle.	91
35	Comparaison du modèle GTN/ZC incrémental à la version analytique simplifiée pour une triaxialité des déformations $\eta_E = 0.125$ imposée (chargement monotone radial de déformation axisymétrique). Propriétés matériaux reportées dans le tableau 6, sans nucléation ($f_N = 0$).	94

Chapitre 4 : Implémentation numérique et première application

36	Domaine Ω modélisé comme un ensemble de corps Ω_i en interaction. Chaque corps peut être un élément fini simple ou alors discrétisé par plusieurs éléments finis.	102
37	Schéma de dualité dans l'approche de la dynamique des contacts	104
38	Illustration du transfert dans la zone cohésive de la contrainte moyenne d'un élément fini quadrangulaire (N_G points de Gauss affectés des poids w_i, w_j).	107
39	Évolution de grandeurs locales à différentes distances x de la pointe d'une fissure lors de la simulation d'un essai CT. a) Triaxialité des contraintes au voisinage de la zone cohésive. b) Triaxialité du taux de déformation imposé dans la zone cohésive. c) Ralentissement de l'évolution de l'endommagement f^* dans la zone cohésive.	108
40	Éprouvette CT.	109
41	Maillage de l'éprouvette C(T) ($l_{mesh} = 200 \mu m$).	110
42	Force (F) vs ouverture (v). Comparaison entre simulation et données expérimentales de Brocks et al. [1995].	111
43	Courbe de rupture $J - \Delta a$	112
44	Force (F) vs ouverture (v) pour différentes valeurs du paramètre h	115
45	Force (F) vs ouverture (v) pour différentes tailles de maille l_{mesh}	115
46	a) Dissipation plastique totale dans les mailles volumiques (U_p). b) Dissipation totale dans les zones cohésives (U_{sep}).	116

47	Illustration de la réponse d'un modèle unidimensionnel fait d'un ressort en série avec une zone cohésive.	116
48	Convergence à la taille de maille si h est accordé en fonction de l_{mesh} . h est fonction d'une longueur caractéristique du matériau Λ et de la taille de la discrétisation l_{mesh}	116
49	Variation de h en fonction de la taille de maille l_{mesh} sur les courbes de la figure 48.117	

Chapitre 5 : Application : simulation d'une portion de combustible UO_2 en conditions RIA

50	Micrographie d'une tranche d'un crayon combustible après un essai d'insertion de réactivité. Observations de fissures radiales primaires formées en conditions nominales et de fissures radiales secondaires en périphérie pouvant être dues au transitoire rapide de puissance.	121
51	a) Pulse de puissance au plan de flux max (PFM : section du combustible où la puissance est maximale). b) Profil radial de température au PFM de la pastille calculé par SCANAIR pour l'essai REP-Na3.	122
52	Portion de combustible. Maillage ($l_{mesh} \approx 100 \mu m$), conditions aux limites et champs imposés (T la température, E_{zz} la déformation hors plan, n la quantité de matières de gaz pressurisées dans les bulles de la matrice.)	123
53	Températures imposées pour la simulation sur XPer. Fonctions analytiques identifiées à partir des résultats de calculs SCANAIR. Fonctions données au tableau 13 en annexe G.	124
54	Déformation E_{zz} imposée. Fonction analytique identifiée à partir des résultats de calculs SCANAIR. Fonction donnée en annexe G.	124
55	Points : données pour l' UO_2 vierge identifiées à partir d'expériences de Salvo [2014] pour une vitesse de déformation $\dot{\epsilon} = 0.1 s^{-1}$. Ligne : fonction 5.1 identifiées.	125
56	a) Loi de traction-séparation en contrainte uniaxiale ($\eta_{\Sigma} = 0.33$) en fonction de la température. Pour chaque température, la porosité de coalescence f_c est déterminée afin d'obtenir une déformation à rupture similaire aux mesures de Canon et al. [1971] . b) Points : valeurs de f_c identifiées. Ligne : fonction proposée.	127
57	Comparaison des faciès de fissuration. Points en noir : zones cohésives rompues. .	131
58	Champ de température et profil de fissuration dans la pastille à différents instants.	132
59	Comparaison de l'état final du combustible en fonction de la prise en compte des propriétés particulières de la zone HBS ou non.	133

Annexes

60	Comparaison du modèle GTN/ZC incrémental à la version analytique simplifiée pour une triaxialité des déformations $\eta_E = 0.5$ (déformation uniaxiale) imposée. Propriétés matériaux reportées dans le tableau 6, sans nucléation ($f_N = 0$). . .	151
61	Définition de la courbe force - ouverture pour le calcul de J	157
62	Spécifications géométriques de la portion de combustible modélisée.	158

Liste des Tableaux

1	Quelques corrélations des modules élastiques de l'UO ₂ disponibles dans la littérature : Y module d'Young en [GPa], G module de cisaillement [GPa], T en °C sauf pour la loi de Gatt et al. [2005] où T en K , bu en GWj/t.	27
2	Quelques lois proposées dans la littérature pour la contrainte ultime de l'UO ₂ sous différents types de sollicitations. k , a et b sont des paramètres empiriques à identifier dépendant de la température. σ_U en [MPa]. $R = 1.987 \text{ cal/mol}^{-1}K^{-1}$, T en K , $\dot{\epsilon}$ en h^{-1} . f est la porosité de fabrication. g est la taille de grain en μm . ps est la taille moyenne des pores en μm dans la loi de Radford [1979] ou la taille du plus gros pore en μm dans la loi de Oguma [1982]	30
3	Quelques exemples de fonctions \bar{g} utilisées dans les modèles non couplés.	46
4	Quelques critères de plasticité pour les matériaux poreux à cavités sphériques.	56
5	Valeurs de la variable $\dot{\gamma}$ en fonction de $[\dot{\mathbf{u}}]$ et de la triaxialité du taux de déformation η_E^{vol} . Seul le cas $[\dot{u}_n] > 0$ est considéré ici (la décharge $[\dot{u}_n] \leq 0$ est traitée à la section 3.6.2)	80
6	Paramètres matériaux pour un acier ferritique StE460 (désignation allemande) de Siegmond et Brocks, 2000a . Paramètres d'écrouissage identifiées à partir des données expérimentales fournies dans Siegmond et Brocks, 2000a	81
7	Taille de maille et nombre d'éléments	113
8	Quelques caractéristiques de l'essai REP-Na3 [Papin et al., 2007 ; Sercombe et al., 2010 ; Salvo, 2014].	122
9	Données du modèle GTN utilisées pour la simulation.	126
Annexes		
10	Solutions de l'équation A.1	141
11	Solutions retenues pour le calcul de $\dot{\gamma}$. On notera que les solutions $[\dot{u}_n] > 0$ ont été prolongées au cas $[\dot{u}_n] = 0$	142
12	Dimensions de la portion de combustible (à température ambiante). Jeu initiale de $2\mu m$ entre le combustible et la gaine.	158
13	Fonctions analytiques approximant le champ de température dans chaque zone.	159

Introduction

L'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN) est l'expert public des risques nucléaires et radiologiques. L'IRSN concourt aux politiques publiques en matière de sûreté nucléaire. La recherche est consubstantielle aux missions de l'IRSN. Elle contribue au développement de la capacité d'expertise de l'institut, par l'acquisition de nouvelles connaissances scientifiques et le développement d'outils techniques nécessaires à la maîtrise des risques. L'un des axes de cette recherche porte sur la physique du combustible nucléaire et la thermomécanique des matériaux lors d'un hypothétique accident de réactivité dans les réacteurs à eau sous pression (REP).

Dans les REP, un crayon combustible est constitué d'une gaine en alliage de zirconium dans laquelle sont empilées des pastilles cylindriques de combustible en dioxyde d'Uranium (UO_2) ou en oxyde mixte d'uranium et de plutonium (Mixed OXide, MOX). La gaine constitue la première barrière de sûreté contre le risque de dispersion de matières radioactives dans l'environnement. Dans l'optique de mettre en place des outils numériques prédictifs pour la simulation de scénarii accidentels, il est nécessaire de modéliser les comportements des matériaux en tenant compte des évolutions microstructurales, des endommagements divers ainsi que l'initiation et la propagation de fissures dans ces matériaux.

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre du laboratoire commun MIST¹ et a pour objectif de contribuer à la modélisation et à la simulation numérique du comportement mécanique et notamment de la fissuration du combustible UO_2 irradié. La fissuration et la fragmentation des pastilles en réacteur ont une influence sur l'état des contraintes dans le combustible, sur les écoulements des gaz fissions et sur le chargement mécanique subit par la gaine.

Ce travail aborde deux volets.

1. **Un volet théorique portant sur la modélisation de l'initiation et la propagation des fissures dans les matériaux.** La démarche adoptée repose sur les modèles de zones cohésives. L'approche de fissuration par zones cohésives a déjà été appliquée avec succès pour la rupture des matériaux fragiles. L'application des modèles de zones cohésives aux matériaux ductiles reste encore un domaine de recherche largement ouvert. Dans ce travail, une modélisation par zone cohésive du processus de fissuration dans un matériau ductile est proposée. Un modèle de zone cohésive (ZC) est élaboré sur des bases micromécaniques, via une formulation *surfactive* d'un modèle d'endommagement ductile volumique poro-mécanique de type Gurson (modèle GTN). La pertinence de cette approche pour la simulation de la rupture ductile a été évaluée par la simulation d'un essai de ténacité.

1. MIST : laboratoire de Micromécanique et d'Intégrité des Structures. Laboratoire issu d'une mise en commun des moyens de recherche de l'IRSN, du CNRS et l'Université de Montpellier et dont l'objectif du point de vue de l'IRSN est de comprendre, simuler et prédire les conditions de perte d'intégrité de structures de confinement et ses conséquences.

2. **Un volet appliqué portant sur l'étude de la fissuration du combustible UO_2 irradié sous chargements thermomécaniques.** Il s'agit d'appliquer la modélisation et la méthode numérique des zones cohésives au cas concret de l'analyse du comportement du combustible. Ceci nécessite entre-autres de tenir compte de la transition fragile-ductile dans le comportement du combustible UO_2 suivant la température. L'objectif sous-jacent est d'investiguer finement l'interaction mécanique entre la pastille et la gaine du combustible et de mettre en évidence les mécanismes de fissuration de la pastille lors d'un transitoire de puissance consécutif à une situation hypothétique d'accident d'insertion de réactivité (RIA). Notamment, une des questions principales est la temporalité d'une éventuelle fissuration de la zone périphérique de la pastille lors d'un RIA, où deux hypothèses peuvent être formulées : 1/ fissuration lors de la phase de montée en température, auquel cas, les gaz de fission participent au chargement de la gaine lors du pic de température, 2/ fissuration ultérieure lors du retour à froid, auquel cas les gaz de fission sont majoritairement relâchés lors du retour à froid et n'interviennent pas dans le chargement mécanique de la gaine lors du pic de température.

Ce mémoire s'organise en 5 chapitres :

- Le chapitre 1 présente le contexte de la thèse. Il introduit le matériau d'étude et la problématique industrielle. L'objectif de la thèse est défini et la démarche adoptée est précisée.
- Le chapitre 2 est une étude bibliographique non-exhaustive sur la rupture ductile des matériaux. Il présente dans un premier temps les mécanismes microscopiques d'endommagement ductiles dans les métaux et céramiques (à haute températures), quelques classes de modèles d'endommagement ductiles et des critères de rupture développés dans la littérature. Puis dans un second temps, la modélisation de la propagation de fissures par l'emploi des modèles de zones cohésives est décrite.
- Le chapitre 3 discute d'une modélisation de l'initiation et la propagation de fissure par une approche cohésive-volumique. Une fissure est traitée comme une surface de discontinuité résultant de la localisation des déformations. La représentation de cette surface par une bande cohésive et l'hypothèse d'un comportement de la bande décrit par un modèle de poroplasticité permet de déterminer une loi cohésive sur des bases micromécaniques.
- Le chapitre 4 traite de l'implémentation numérique dans le cadre des éléments finis du modèle de zone cohésive développé dans le chapitre 3. Ce cadre est celui de la dynamique des contacts avec adhésion. Cette méthode est brièvement présentée et l'approche est ensuite validée par la simulation d'un essai de ténacité sur un acier ferritique ductile. La sensibilité des résultats de simulation à la taille du maillage est investiguée.

- Le chapitre 5 est dédié à l'application de l'approche cohésive-volumique à la simulation du comportement du combustible soumis à des conditions thermomécaniques accidentelles. Le modèle de zone cohésive est adapté en fonction de la température pour modéliser la transition fragile-ductile et est également étendu pour tenir compte de la pression des gaz dans les cavités microscopiques sur le comportement à rupture. L'essai REP-Na3 sur le réacteur expérimental CABRI est simulé. Les résultats de simulation sont comparés aux micrographies post-essai et la pertinence de cette approche pour l'étude du combustible est analysée.

Certains détails de calculs ont été reportés dans les annexes A à E, F afin de simplifier la lecture du mémoire. Des informations complémentaires à l'étude du combustible menée dans le chapitre 5 sont fournis dans l'annexe G.

Chapitre 1

Contexte et problématique

Ce premier chapitre a pour objet la présentation du contexte dans lequel s'inscrit ce travail de thèse, les objectifs de la thèse ainsi que la démarche adoptée. Le premier paragraphe donne quelques éléments sur le combustible en dioxyde d'Uranium (UO_2) avec une attention particulière sur ses propriétés thermomécaniques. Le deuxième paragraphe décrit la problématique industrielle avec en particulier la prédiction du comportement du combustible lors d'un éventuel accident d'insertion de réactivité dans les réacteurs nucléaires à eau sous pression. Le dernier paragraphe précise la portée de ce travail ainsi que la démarche générale adoptée.

Sommaire

1.1	Éléments de contexte sur le combustible	23
1.1.1	Généralités	23
1.1.2	Microstructure	23
1.1.3	Propriétés et comportement thermomécanique de l' UO_2	25
1.2	Problématique industrielle	30
1.2.1	Comportement du combustible en réacteur en fonctionnement normal	31
1.2.2	Accident d'insertion de réactivité	32
1.2.3	Objectifs appliqués de la thèse	36
1.3	Portée de l'étude et démarche	37
1.3.1	Portée de l'étude	37
1.3.2	Démarche générale	37

1.1 Éléments de contexte sur le combustible

1.1.1 Généralités

Le nucléaire civil couvre au 1^{er} janvier 2019 environ 10.3 % de la production mondiale d'électricité, avec des réacteurs distribués dans 31 pays [WNA, 2019]. En France, 72 % de la production nationale d'électricité provient des centrales nucléaires. Les réacteurs du parc électronucléaire français sont issus de la filière des Réacteurs à Eau sous Pression (REP). Au cœur de ces centrales nucléaires, le combustible nucléaire est le siège de la fission des atomes lourds d'uranium ou de plutonium qui, in fine va permettre la production d'électricité.

Les combustibles nucléaires utilisés dans les REP en France sont le dioxyde d'Uranium UO_2 et un mélange de dioxyde d'Uranium et de dioxyde de plutonium $\text{UO}_2\text{-PuO}_2$ couramment dénommé combustible MOX (Mixed OXyde fuel). Le combustible est conditionné sous la forme de pastilles de céramique cylindriques d'environ 8 mm de diamètre et ayant une masse de l'ordre d'une dizaine de grammes (voir figure 1). Ces pastilles sont obtenues par frittage de poudres d' UO_2 , lui conférant une porosité de fabrication de l'ordre de 5 % à 6 %. Les pastilles sont empilées dans une gaine tubulaire en alliage de zirconium. Cet ensemble constitué des pastilles d' UO_2 et de la gaine est appelé *crayon combustible* (voir figure 2) et a une longueur d'environ 4 m pour un diamètre voisin de 1 cm [Parisot et al., 2008]. Le crayon est pressurisé avec de l'hélium entre 15 et 31 bars (à froid).

Ces crayons sont regroupés pour former un *assemblage combustible*, dans lequel ils sont arrangés en un réseau à maille carrée et sont maintenus par des grilles métalliques servant de support (voir figure 2). Un assemblage contient 17x17 crayons combustibles, 24 tubes guides qui servent à l'introduction des barres de contrôle, et 1 tube d'instrumentation central. Le cœur du réacteur est contenu dans une cuve métallique étanche et est composé de 157 assemblages dans les tranches 900 MWe et de 193 assemblages pour les tranches 1300 MWe entre lesquels circule l'eau primaire sous pression qui évacue la chaleur et modère¹ les neutrons.

1.1.2 Microstructure

D'un point de vue microstructural, le combustible UO_2 vierge est un polycristal monophasé constitué de grains d'une taille de l'ordre de 10 μm [Dherbey et al., 2002] (voir figure 3). Le combustible UO_2 irradié présente une microstructure complexe : les pastilles d'uranium une fois en réacteur s'altèrent et s'endommagent de manière hétérogène du fait des gradients thermomécaniques et de l'irradiation qui y règnent.

En particulier, lorsque le *taux de combustion*² local dépasse 50 – 70 GWj/t dans la partie

1. Un modérateur de neutron est un milieu destiné à réduire la vitesse des neutrons et dans lequel est plongé le combustible d'un réacteur nucléaire conventionnel. [Parisot et al., 2008]

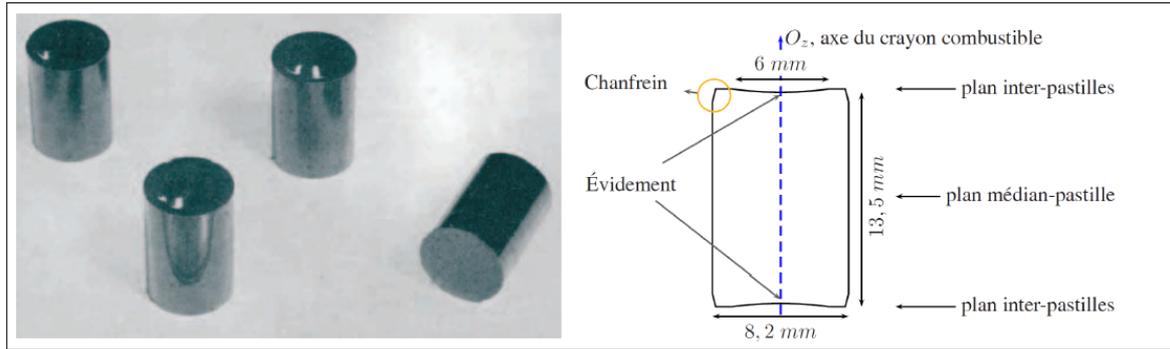


Figure 1 – Pastille de combustible UO_2 [Parisot et al., 2008].

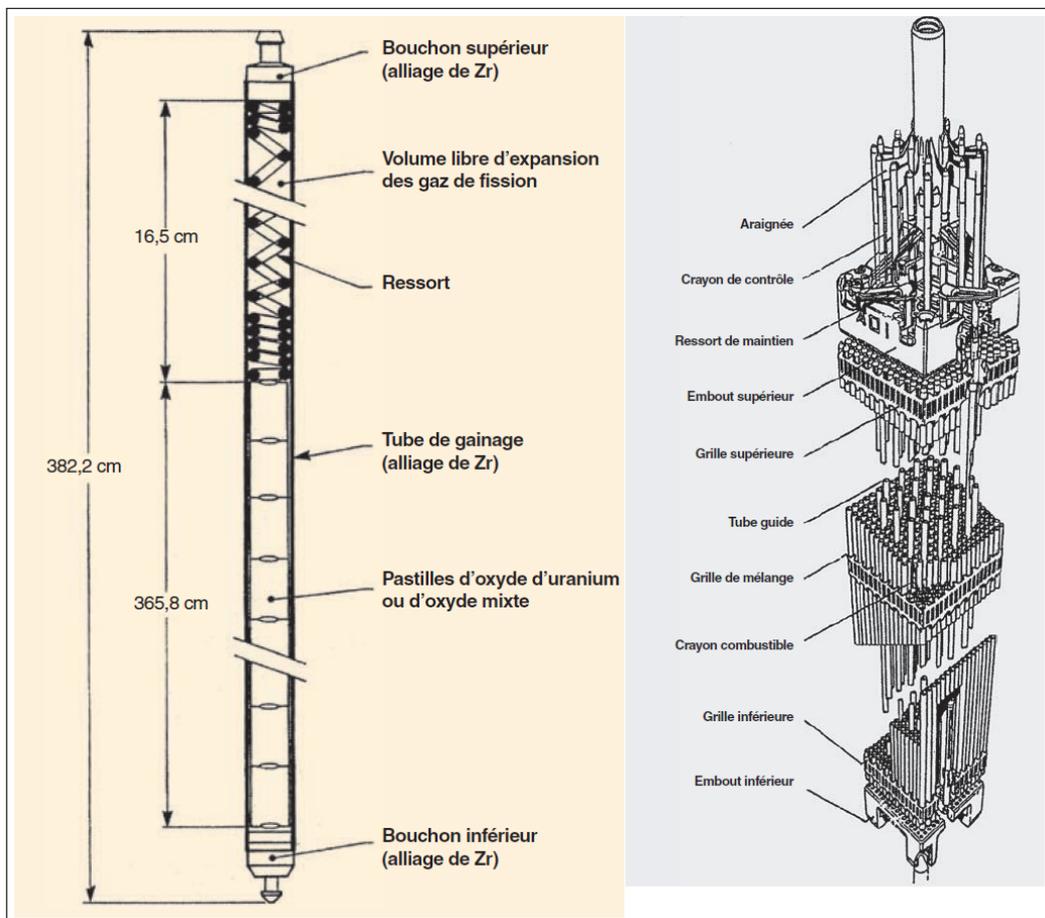


Figure 2 – Schéma d'un crayon combustible (à gauche) [Parisot et al., 2008]. Schéma d'un assemblage combustible REP 17 x 17 et d'une grappe de commande (à droite) [Parisot et al., 2008].

périphérique du combustible UO_2 , une transformation microstructurale prend place sous l'effet de l'accumulation des produits de fission et des défauts d'irradiation [Parisot et al., 2008]. La microstructure nouvellement formée est communément appelée zone HBS (*High Burnup Structure*) ou encore zone RIM (voir figure 4). Des observations [Spino et al., 1996, 1998; Rondinella et Wiss, 2010] ont montré que cette microstructure en zone RIM

se différencie du reste du combustible par :

- la présence d’une quantité élevée de produits de fission,
- une porosité relativement importante (10 à 25 %),
- une subdivision des grains initiaux d’une taille de l’ordre de $10\ \mu\text{m}$ en de petits grains d’une taille avoisinant $0.1 - 0.3\ \mu\text{m}$.

Les porosités (bulles) formées au cours de l’irradiation sont saturées par des gaz de fission (essentiellement du Xénon et du Krypton). On distingue en général deux populations de bulles à l’intérieur des pastilles (voir figure 5). Les *bulles intragranulaires* formées à l’intérieur des grains, de formes plutôt sphériques et de taille nanométrique [Kashibe et al., 1993], et les *bulles intergranulaires* formées aux joints de grains, de formes lenticulaires. Ces dernières ont des tailles 10 à 100 fois supérieures à celles des bulles intragranulaires [Kashibe et Une, 1991].

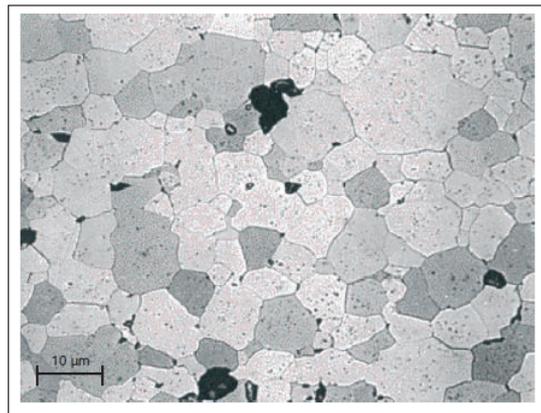


Figure 3 – Micrographie d’une céramique UO_2 [Parisot et al., 2008].

1.1.3 Propriétés et comportement thermomécanique de l’ UO_2

Plusieurs études ont été menées pour caractériser le comportement mécanique du combustible UO_2 (essentiellement vierge) à basse et à haute température sous différentes vitesses et types de sollicitations. On peut par exemple citer celles de Canon et al. [1971]; Guerin [1975]; Salvo et al. [2015]. Il ressort de la littérature que le combustible UO_2 adopte un comportement de type *élastique fragile* pour des basses températures et un comportement de type *élasto-visco-plastique* à hautes températures. La température de transition fragile-ductile se situe entre $1100\ \text{°C}$ et $1450\ \text{°C}$ (d’après Canon et al. [1971]).

2. **Taux de combustion** : correspond au pourcentage d’atomes lourds (uranium et plutonium) ayant subi la fission pendant une période donnée. Cette unité est couramment utilisée pour évaluer la quantité d’énergie thermique par unité de masse de matière fissile obtenue en réacteur entre le chargement et le déchargement du combustible [Parisot et al., 2008].

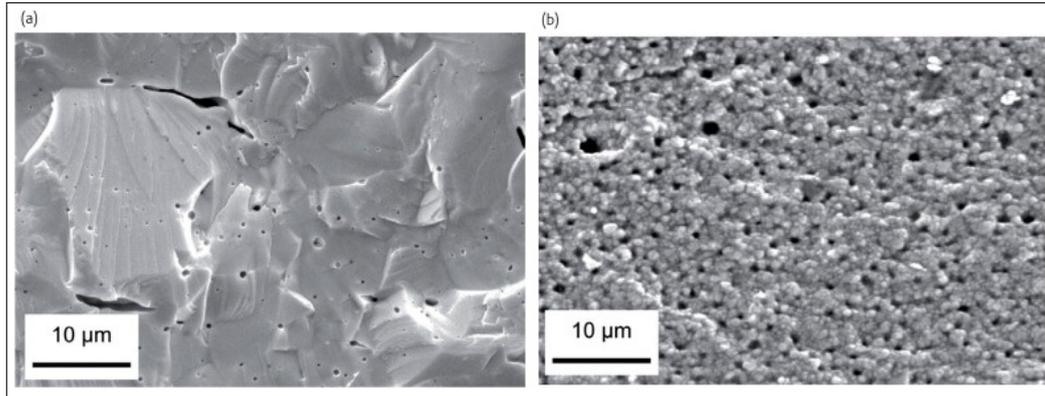


Figure 4 – Micrographie MEB d'un morceau de combustible : a) non irradié, b) irradié avec un taux local de combustion de 75 GWj/t illustrant la structure typique de la zone HBS. [Rondinella et Wiss, 2010]

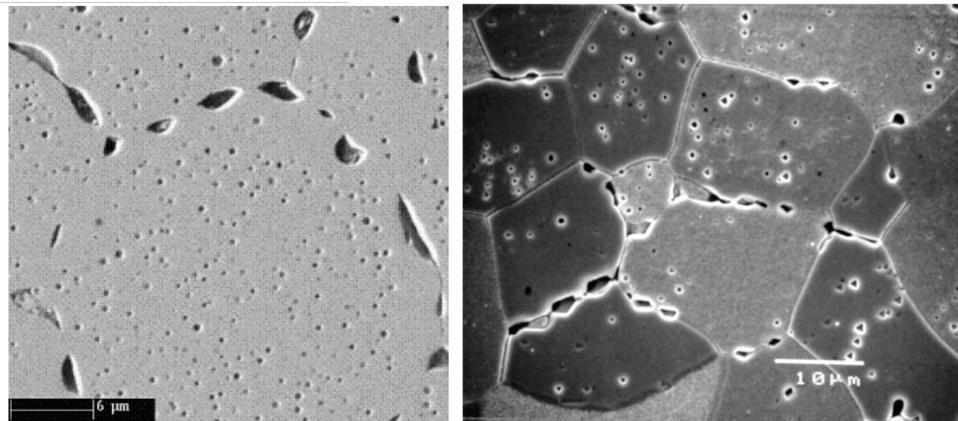


Figure 5 – Populations de bulles dans le combustible UO_2 . a) UO_2 irradié à 23.4 GWj/t porté à 2000 K pendant approximativement 3 h [Dubourg et al., 2005]. b) Coalescence de bulles aux joints de grains sur de l' UO_2 non irradié soumis à un essai de compression à une température de 1465 °C [Dherbey et al., 2002].

Propriétés élastiques

Des corrélations de l'évolution des propriétés élastiques de l' UO_2 en fonction de la porosité de fabrication f et de la température T ont été proposées. Ces corrélations ont pour forme générale :

$$Y(T, f) = Y_0 \mathcal{P}(f) \mathcal{G}(T)$$

avec Y_0 le module d'Young du matériau complètement dense (sans porosité), $\mathcal{P}(f)$ une fonction de la porosité et $\mathcal{G}(T)$ une fonction de la température. Récemment, Cappia et al. [2016] ont proposé un modèle empirique pour de l' UO_2 fortement irradié en ajoutant un terme de dépendance au taux de combustion :

$$Y = Y_0 \mathcal{P}(f) \mathcal{G}(T) \mathcal{H}(bu),$$

où bu (en GWj/t) est le taux de combustion local (taux d'irradiation ou burn-up). Le facteur de dépendance au taux de combustion a été identifié en combinant des résultats

Corrélations	Références
$Y(T, f) = 226(1 - 2.62f)(1 - 1.131 \cdot 10^{-4}T)$ <p style="text-align: center;">–</p>	[MacDonald et Thompson, 1976]
$Y(T, f) = 226.4(1 - 2.752f)(1 - 1.125 \cdot 10^{-4}T)$ <p style="text-align: center;">–</p>	[Hagrman et Reymann, 1979]
$Y(T, f) = 224(1 - 2.6f)(1 - 1.392 \cdot 10^{-4}T)$ $G(T, f) = \frac{(1 - 2.6f)(224.3 - 31.19 \cdot 10^{-3}T)}{2(1 + 0.325(1 - f))}$	[Lassmann et Moreno, 1977]
$Y(T, f) = 222.46(1 - 2.5f)(1 - 8.428 \cdot 10^{-5}T - 4.381 \cdot 10^{-8}T^2)$ $G(T, f) = 84.14(1 - 2.25f)(1 - 8.56 \cdot 10^{-5}T - 4.453 \cdot 10^{-8}T^2)$	[Martin, 1989]
$Y(T, f) = 226.9(1 - 2.62f)(1 - 6.79 \cdot 10^{-5}T - 4.23 \cdot 10^{-8}T^2)$ $G(T, f) = 85.83(1 - 2.48f)(1 - 6.00 \cdot 10^{-5}T - 4.37 \cdot 10^{-8}T^2)$	[Gatt et al., 2005]
$Y(T, f, bu) = 223.7(1 - 2.6f)\{1 - 1.394 \cdot 10^{-4}(T - 20)\} \times$ $\{1 - 0.1506[1 - \exp(-0.035 bu)]\}$ <p style="text-align: center;">–</p>	[Cappia et al., 2016]

Tableau 1 – Quelques corrélations des modules élastiques de l’UO₂ disponibles dans la littérature : Y module d’Young en [GPa], G module de cisaillement [GPa], T en °C sauf pour la loi de Gatt et al. [2005] où T en K, bu en GWj/t.

d’essais de micro-dureté et des analyses de microscopie acoustique sur de l’UO₂ irradié à température ambiante. Quelques corrélations des modules élastiques de l’UO₂ reportées dans la littérature sont synthétisées dans le tableau 1.

Comportement viscoplastique

Le comportement viscoplastique de l’UO₂ pour les hautes températures a fait l’objet de nombreuses caractérisations expérimentales. On peut notamment citer les essais de compression à différentes températures et différentes vitesses de sollicitation de Byron [1968]; Guerin [1975]; Salvo et al. [2015], ou encore les essais de flexion menés par Canon et al. [1971]; Radford [1979]; Oguma [1982]. La figure 6 issue des travaux de Salvo et al. [2015] illustre le comportement ductile en compression de l’UO₂ au-delà de 1100 °C. Des modèles décrivant le comportement viscoplastique du combustible UO₂ à haute température (communément appelé *loi de fluage*) ont été proposés par différents auteurs sur la base de données expérimentales. La plupart des lois proposées pour l’UO₂ ont la forme suivante (en version unidimensionnelle) :

$$\dot{\varepsilon} = \mathcal{F}(\sigma, T, f, g, x, \dots) = A(f, g, x, \dots)\sigma^n \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)$$

où $\dot{\varepsilon}$ est le taux de déformation (vitesse de fluage), σ la contrainte appliquée, T la température dont l'influence est traduite par un terme d'Arrhénius où Q est l'énergie d'activation des mécanismes microstructuraux mis en jeu et R la constante des gaz parfaits. L'influence des caractéristiques microstructurales sur le comportement en fluage peut être prise en compte par la porosité f , la taille de grains g , l'écart à la stœchiométrie x , etc. La valeur de l'exposant n vaut 1 pour des contraintes appliquées σ faibles (généralement inférieure à 70 MPa) où le fluage est dû à la diffusion des lacunes (*fluage diffusion*) et entre 4 et 5 pour des contraintes élevées où le fluage est dû au mouvement des dislocations (*fluage dislocation*) [Seltzer et al., 1971]. La vitesse de fluage stationnaire est d'autant plus importante que la température est élevée et/ou la contrainte est élevée. Une synthèse détaillée des différents modèles viscoplastiques proposées pour l' UO_2 est donnée dans Salvo [2014].

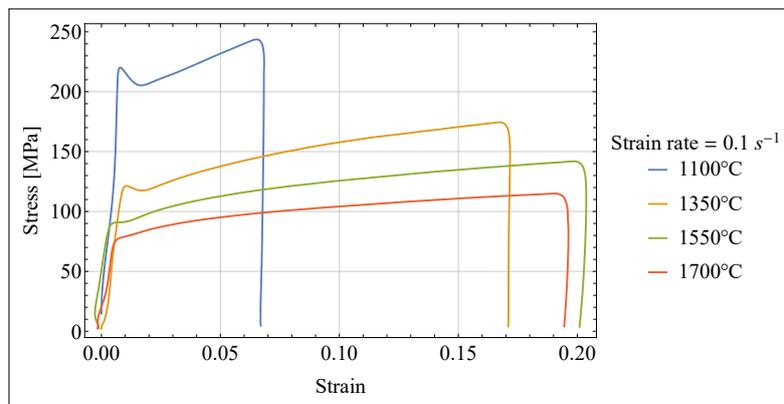


Figure 6 – Comportement du combustible UO_2 vierge en compression en fonction de la température.

Rupture

Les pastilles de combustible UO_2 sont des céramiques fragiles jusqu'à la température de transition. Au-delà, la rupture des pastilles UO_2 survient à la suite de déformations plastiques non négligeables (voir figure 7). On note tout de même que le combustible UO_2 à haute température est particulièrement ductile en compression ($\varepsilon \approx 20\%$ sur la figure 6), mais cette ductilité reste relativement limitée en traction ($\varepsilon \approx 3\%$ sur la figure 7).

Les mécanismes de rupture intervenant dans le combustible UO_2 en fonction de la température et de la contrainte sont synthétisées sur la carte d'Ashby (cf. figure 8). À l'échelle microscopique, on observe deux mécanismes principaux de rupture :

- la rupture intragranulaire (transgranulaire) observée à basses températures,
- la rupture intergranulaire (décohésion des joints de grains) observée dans le domaine des hautes températures (voir figure 5).

La contrainte ultime σ_U (UTS) mesurée sur de l' UO_2 dépend de la taille moyenne des grains, de la porosité de fabrication f et varie avec la température. Quelques lois empiriques identifiées sur la base des résultats expérimentaux sont synthétisées dans le tableau 2.

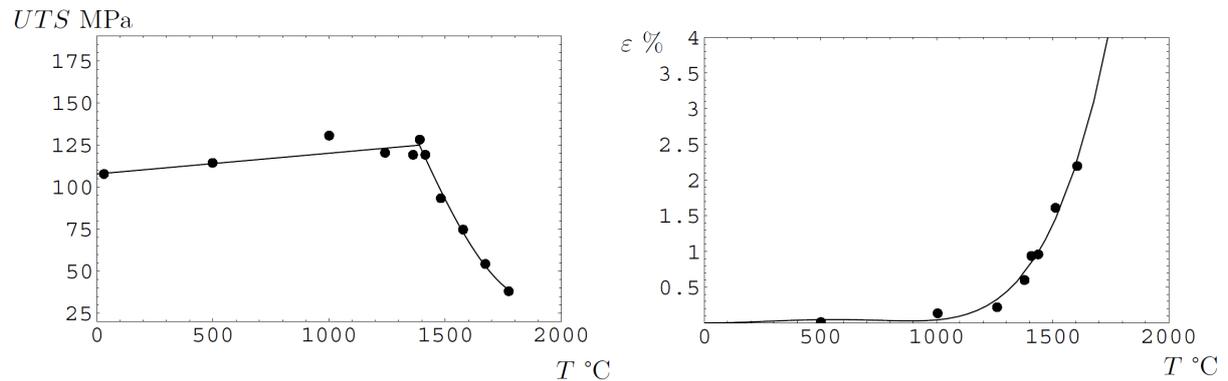


Figure 7 – Résultats d’essais de *Canon et al. [1971]*, flexion de l’ UO_2 vierge avec une porosité de fabrication 3%, et une taille de grain de $8 \mu m$ (figures tirées de *Vincent [2007]*). Mise en évidence d’un comportement fragile à basse température et ductile à haute température. $\epsilon\%$: déformation plastique totale.

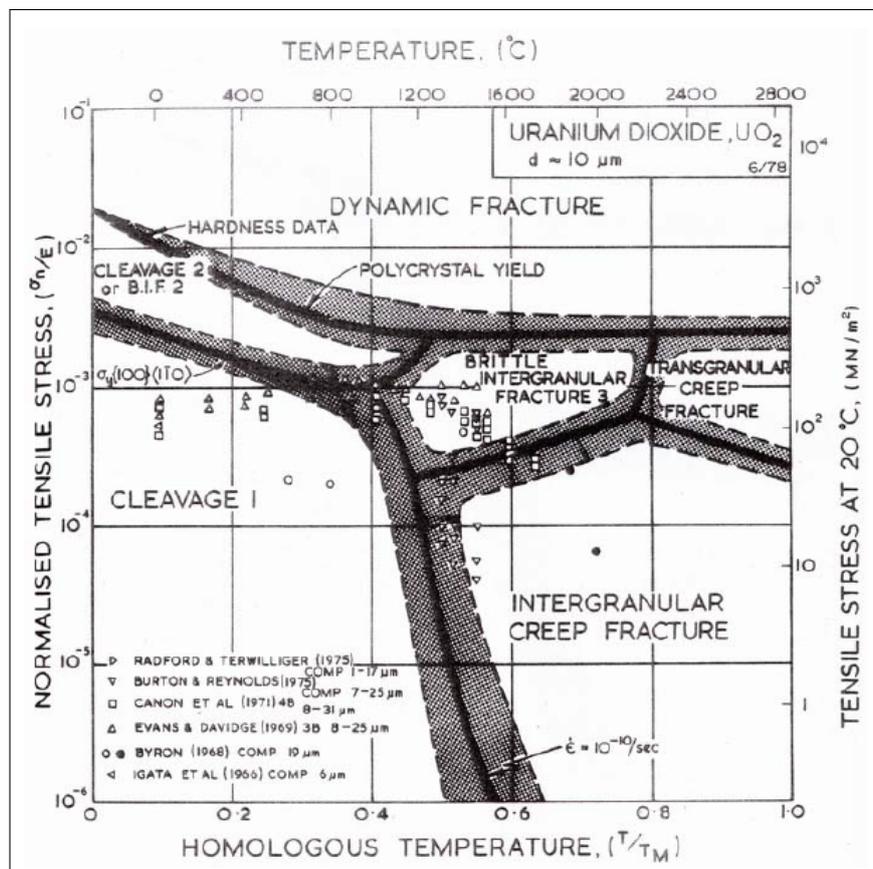


Figure 8 – Carte de mécanismes de rupture de l’ UO_2 dans l’espace contrainte-température (tirée de la thèse de *Colin [2003]*).

Auteurs	Corrélations	Essais
[Knudsen et al., 1960]	$\sigma_U = kg^{-a} \exp(-bf)$	Flexion à basse et haute température
[Canon et al., 1971]	$\sigma_U = 0.1 \left(\frac{1}{2} \dot{\varepsilon} T \exp\left(\frac{8700}{RT}\right) \right)^{\frac{1}{4.23}}$	Flexion à haute température
[Igata et Domoto, 1973]	$\sigma_U = 1067 \exp(-3.505f)$	Compression à température ambiante
[Radford, 1979]	$\sigma_U = 403.21 \exp(-6.17f)(g + 3ps)^{-0.29}$	Flexion à température ambiante.
[Oguma, 1982]	$\sigma_U = 626 \exp(-0.057f)(ps + \frac{g}{2})^{-0.5}$	Flexion à température ambiante.

Tableau 2 – Quelques lois proposées dans la littérature pour la contrainte ultime de l' UO_2 sous différents types de sollicitations. k , a et b sont des paramètres empiriques à identifier dépendant de la température. σ_U en [MPa]. $R = 1.987 \text{ cal/mol}^{-1}K^{-1}$, T en K , $\dot{\varepsilon}$ en h^{-1} . f est la porosité de fabrication. g est la taille de grain en μm . ps est la taille moyenne des pores en μm dans la loi de Radford [1979] ou la taille du plus gros pore en μm dans la loi de Oguma [1982]

1.2 Problématique industrielle

La prévention des accidents susceptibles d'affecter une installation nucléaire repose sur la démonstration de sûreté des équipements en fonctionnement normal, ainsi que sur la sûreté des différentes barrières de confinement en situation accidentelle. Ces barrières sont :

- la gaine (en alliage de zirconium) des crayons combustibles,
- le circuit primaire (généralement fait d'alliage d'acier),
- l'enceinte de confinement (en béton) qui est le bâtiment abritant le circuit primaire.

Du point de vue appliqué pour de l'IRSN, il s'agit par ce travail d'apporter des éléments de réponse à la question suivante : "*Comment mieux caractériser et modéliser les phénomènes qui génèrent des contraintes thermomécaniques et chimiques sur la première barrière ou font évoluer ses modes de dégradation ou de ruine ?*" [IRSN, 2015]. Ce travail propose une modélisation fine du comportement mécanique du combustible en réacteur et de son interaction mécanique avec la première barrière.

Sans vouloir faire une présentation détaillée ou exhaustive, il est question dans la suite de cette section de décrire quelques phénomènes qui interviennent dans le crayon combustible au cours de son irradiation en fonctionnement normal, puis de présenter l'accident d'insertion de réactivité et enfin de préciser l'objectif appliqué de la thèse. Les informations sur le combustible présentées sont essentiellement issues des références [Parisot et al., 2008; Fuketa, 2012; Bailly et al., 1996; Baron et Hallstadius, 2012].

1.2.1 Comportement du combustible en réacteur en fonctionnement normal

En conditions de fonctionnement normal, la production de chaleur par fission nucléaire est non uniforme dans le combustible. Cet effet, combiné à la mauvaise conductivité du combustible (oxyde) et au transfert de chaleur entre la périphérie du combustible et la gaine est à l'origine d'un important gradient de température dans les pastilles de combustible. La température est maximale au centre (environ 1200 °C) et décroît radialement jusqu'à une température d'environ 450 °C en périphérie (voir figure 9). La dilatation thermique, l'accumulation de produits de fission non solubles, de défauts, la formation de précipités etc, conduisent à un gonflement du combustible. Pour des températures très élevées (> 1200 °C), la coalescence des bulles de gaz provoque également un gonflement dans le combustible [Baron et Hallstadius, 2012]. Par contre, la gaine subit une réduction de son diamètre sous l'effet du fluage sous irradiation et de la pression externe du fluide caloporteur. Le gonflement du combustible combiné au fluage de la gaine conduit à une fermeture progressive du jeu pastille-gaine et une interaction chimio-thermomécanique entre les deux éléments. Une couche de zircone d'environ 8 μm d'épaisseur se développe alors sur la face interne de la gaine par diffusion de l'oxygène du combustible.

En général, le gradient de température dans les pastilles d' UO_2 est à l'origine de contraintes thermiques suffisantes pour provoquer la fragmentation axiale et radiale du combustible dès la première montée en puissance dans le réacteur (voir figure 9). Cette fissuration se poursuit sur les fragments nouvellement formés. De plus, sous l'effet des contraintes élastiques induites par le champ de température, les pastilles prennent une forme dite "de diabolo". Le chargement du combustible en forme de diabolo sur la gaine provoque l'apparition de plis sur la gaine au niveau des plans interpastilles (voir figure 10). Lorsqu'un contact fort est établi à l'interface, la forme en diabolo ainsi que la couche de zircone peut conduire à un *accrochage permanent* entre la gaine et le combustible. Dans les zones où le jeu n'est pas complètement fermé, on observe des *conditions de contact frottant*.

L'interaction entre les fragments de pastille et la gaine (IPG ou PCMI pour *pellet-cladding mechanical interaction*) est un aspect prépondérant dans l'étude du comportement mécanique du crayon combustible. Son importance est capitale lors des phases de transitoires (transitoires de puissances entraînant des transitoires d'énergie et de température). Elle conditionne en partie le dimensionnement du crayon combustible qui est conçu sous l'objectif de garantir l'étanchéité de la gaine lors des transitoires de puissance normaux et même pour des transitoires puissance anormaux très rapides comme ceux issus d'un accident de réactivité.

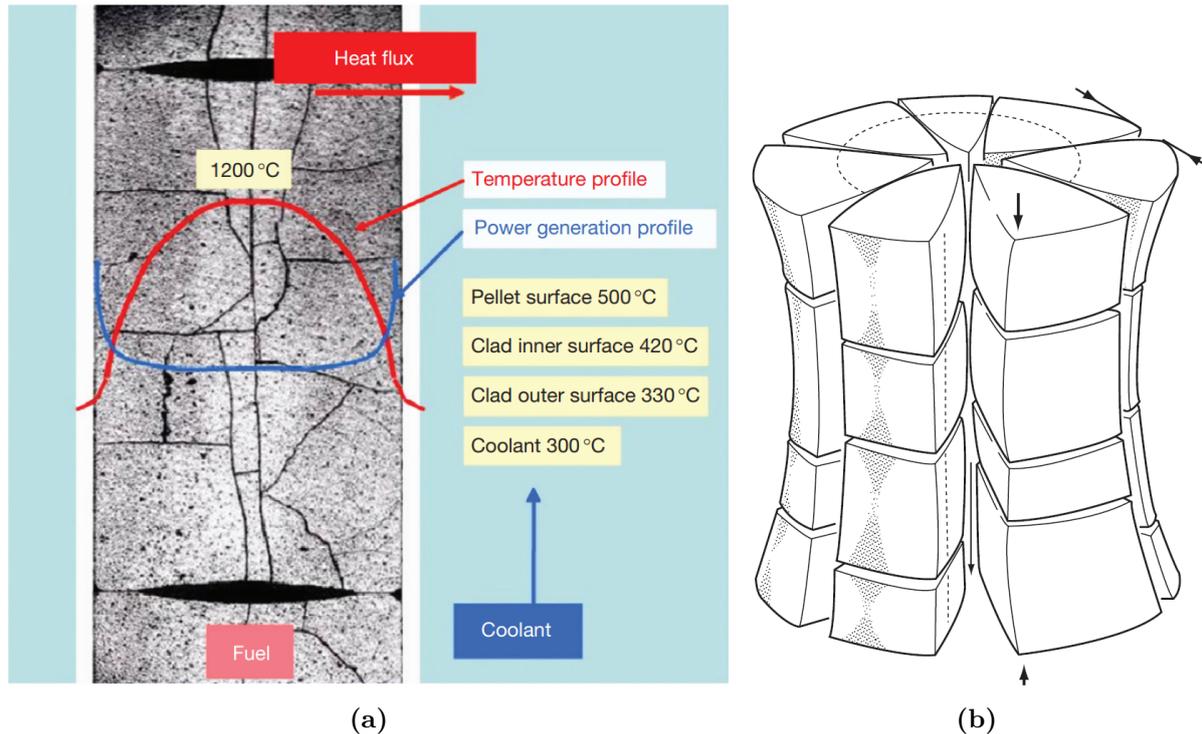


Figure 9 – (a) Macrographie d'un combustibles irradié. Illustration de la fragmentation et des profils radiaux de température et de puissance [Baron et Hallstadius, 2012]. (b) Schéma de la forme de diabolos vers laquelle tend une pastille de combustible sous l'effet des contraintes thermiques [Baron et Hallstadius, 2012].

1.2.2 Accident d'insertion de réactivité

Les transitoires de puissances les plus contraignants utilisés pour le dimensionnement du crayon combustible sont ceux observés lors d'un accident de réactivité RIA (de l'anglais *Reactivity Insertion Accident*). C'est un accident résultant d'une défaillance d'un des moyens de contrôle des réactions neutroniques du cœur, notamment la rupture mécanique et l'éjection d'une barre de commande¹ en raison de la différence de pression entre le circuit primaire (155 bars) et l'enceinte de confinement (pression atmosphérique).

La conséquence de l'éjection de cette barre de commande est l'emballement local de la réactivité pendant quelques dizaines de millisecondes ("pulse" de puissance) dans le voisinage de la barre éjectée. Ce pulse de puissance engendre un dépôt significatif d'énergie dans les crayons combustibles se caractérisant par une montée brutale de la température du combustible (10^4 K/s) comme illustré en figure 11. Il en résulte une dilatation rapide et quasi-adiabatique (compte tenu de la courte durée de l'événement) du combustible, une fermeture du jeu pastille-gaine (si cela n'est pas déjà le cas) et une augmentation importante de la pression interne des gaz de fission relâchés à travers les fissures libres du combustible. Cette déformation rapide et à haute température de la gaine soumise à une

1. **Barre de commande (grappe de commande ou contrôle)** : barre ou ensemble de tiges solidaires mobiles contenant une matière absorbant des neutrons et qui, suivant sa disposition dans le cœur d'un réacteur nucléaire, influe sur sa réactivité [Parisot et al., 2008].

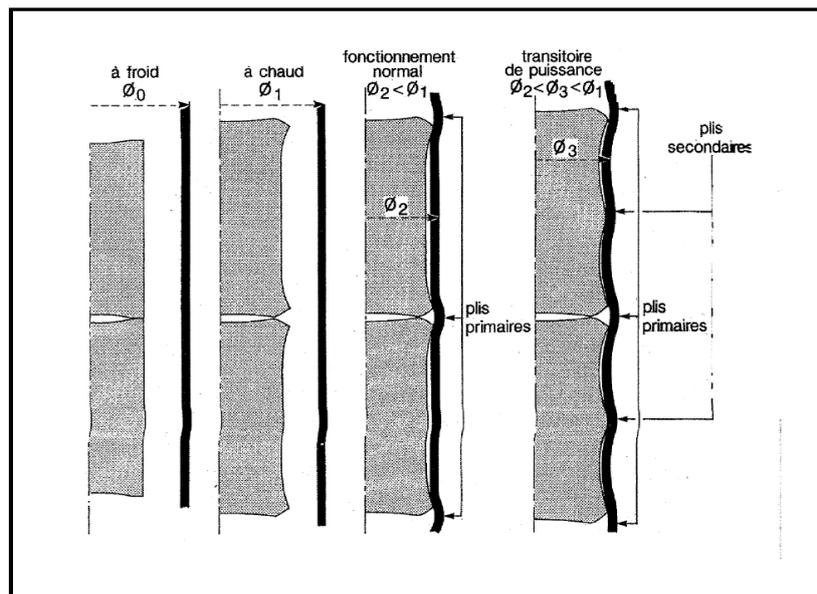


Figure 10 – Évolution du jeu entre les pastilles et la gaine au cours de son utilisation nominale et lors d'un transitoire de puissance ([Bailly et al., 1996]).

déformation interne sévère peut conduire à sa rupture.

La principale question est alors de savoir si la gaine est en mesure de supporter le chargement instantané qui lui est imposé par le combustible et les gaz de fission lors de ce type de transitoire. Trois modes de rupture de la gaine ont été observés pour ce type de transitoire :

- Une rupture fragile par interaction mécanique pastille - gaine due au chargement imposé à la gaine par la dilatation rapide du combustible comme illustré sur le schéma (a) de la figure 12. Elle survient au début du transitoire, juste après le pic de puissance, la température de la gaine étant encore basse. Ce mode de rupture est observé sur les combustibles à fort taux de combustion pour lesquels la gaine a subi une perte relative de ductilité due à la corrosion et à l'absorption d'hydrogène.
- Si la ductilité de la gaine est suffisante pour qu'elle ne rompe pas suite à l'IPG, l'augmentation continue de la température de la gaine à cause du flux thermique provenant du combustible va provoquer l'apparition d'un film de vapeur au niveau de la paroi extérieure de la gaine (phénomène nommé DNB comme *Departure from Nucleate Boiling*). Ce film de vapeur va réduire le coefficient d'échange entre la gaine et le fluide caloporteur, exacerbant la montée de température dans la gaine. À haute température, le relâchement des gaz de fission et l'augmentation de la pression interne du crayon provoque un ballonnement de la gaine (plus ductile à haute température) avec potentiellement une rupture ductile, cf. schéma (b) sur la figure 12.
- Si la pression interne n'est pas suffisamment élevée et que la température du combustible continue d'augmenter, la gaine peut se rompre de manière fragile en raison d'une oxydation sévère combinée à un début de fusion du combustible, voir schéma

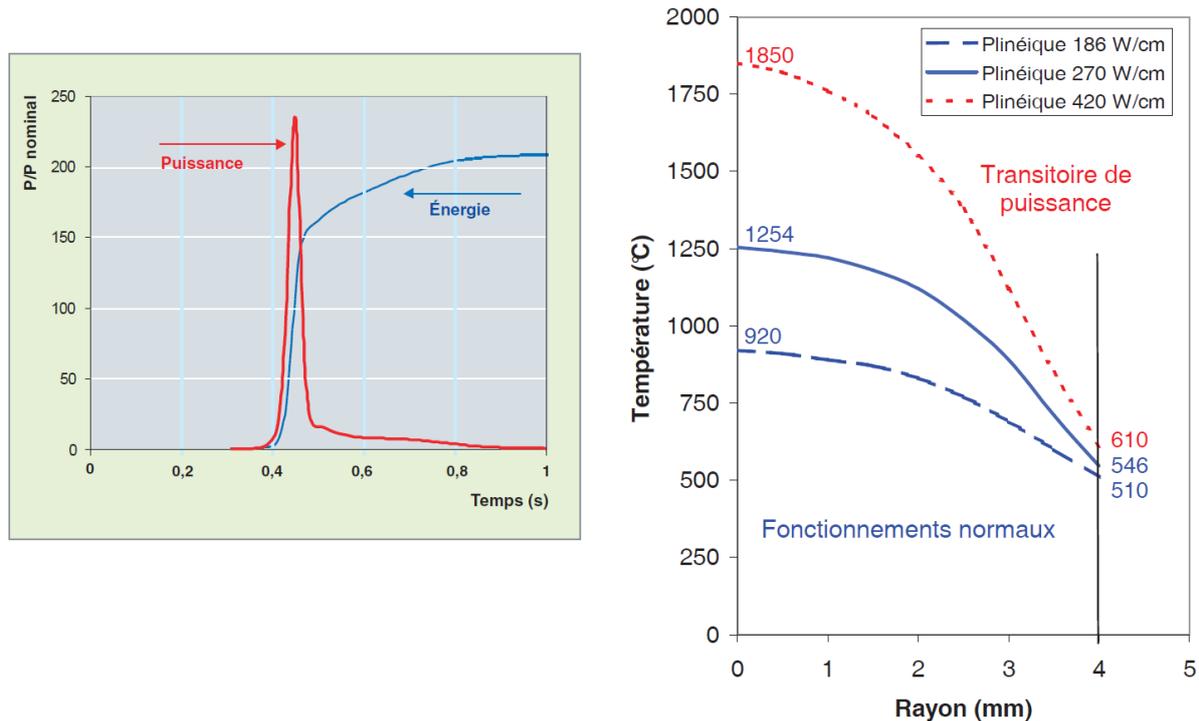


Figure 11 – Évolution de la puissance et de l'énergie injectée lors d'un RIA en fonction du temps [Parisot et al., 2008]. Représentation du gradient thermique radial dans le combustible pour différents niveaux de puissance [Marcet, 2010].

(c) sur la figure 12.

Le programme d'essai CABRI REP-Na réalisé par l'IRSN en coopération avec EDF a été dédié à l'étude du comportement des combustibles irradiés soumis à des transitoires rapides de puissance pour simuler un RIA en REP. Les essais ont été réalisés dans la boucle à sodium du réacteur CABRI. Ce programme a permis notamment d'étendre les connaissances sur les phénomènes physiques relatifs au comportement des combustibles REP soumis à des transitoires de puissance. Par la suite, le CABRI International Program (CIP) a été lancé en 2000, piloté et cofinancé par l'IRSN sous l'égide de l'OCDE. Il est prévu d'utiliser la nouvelle boucle à eau du réacteur CABRI pour étudier la phase avancée du transitoire.

Le comportement thermomécanique d'un crayon combustible de REP lors d'un RIA est modélisé par le code de calcul SCANAIR (Système de Codes pour l'Analyse d'Accidents d'Insertion de Réactivité) développé à l'IRSN [Moal et al., 2014]. Ce code est spécialisé pour des études du comportement d'un crayon combustible en RIA et a vocation à préciser les conditions de perte d'intégrité des gaines, établir et vérifier les critères de sûreté. Il permet également l'interprétation de résultats expérimentaux. Le code SCANAIR couple de nombreux aspects physiques (thermique, mécanique, cinétique des gaz de fissions, cinétique des neutrons), et s'appuie sur des simplifications géométriques (modélisation $1.5D$) et de modélisation afin de garantir des temps de calculs très petits (environ 1 minute pour la simulation d'un essai REP-Na). En particulier, la fissuration du com-

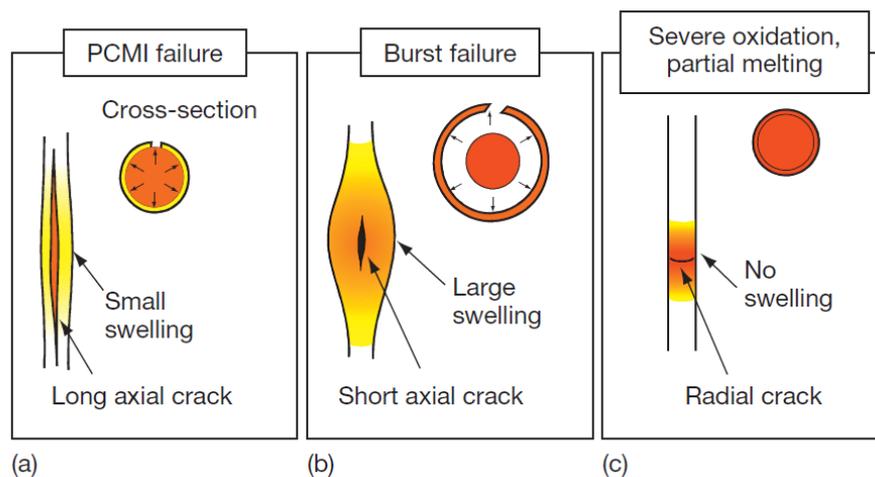


Figure 12 – Schématisation des modes de rupture de la gaine en RIA (illustration tirée de Fuketa [2012]).

bustible est prise en compte simplement comme une déformation additionnelle dans la loi de comportement. Il est essentiel de proposer une modélisation *fine* des phénomènes de fragmentation et de fissuration du combustible notamment en zone RIM de manière à approfondir les études SCANAIR et à éventuellement suggérer des recommandations de modélisation pour ce code.

Les analyses expérimentales ont montré que la périphérie du combustible (zone HBS) en contact avec la gaine est le lieu, lors de transitoires rapides de puissance, d'un important relâchement de gaz de fission ainsi que d'une sur-fragmentation (voir figure 13).

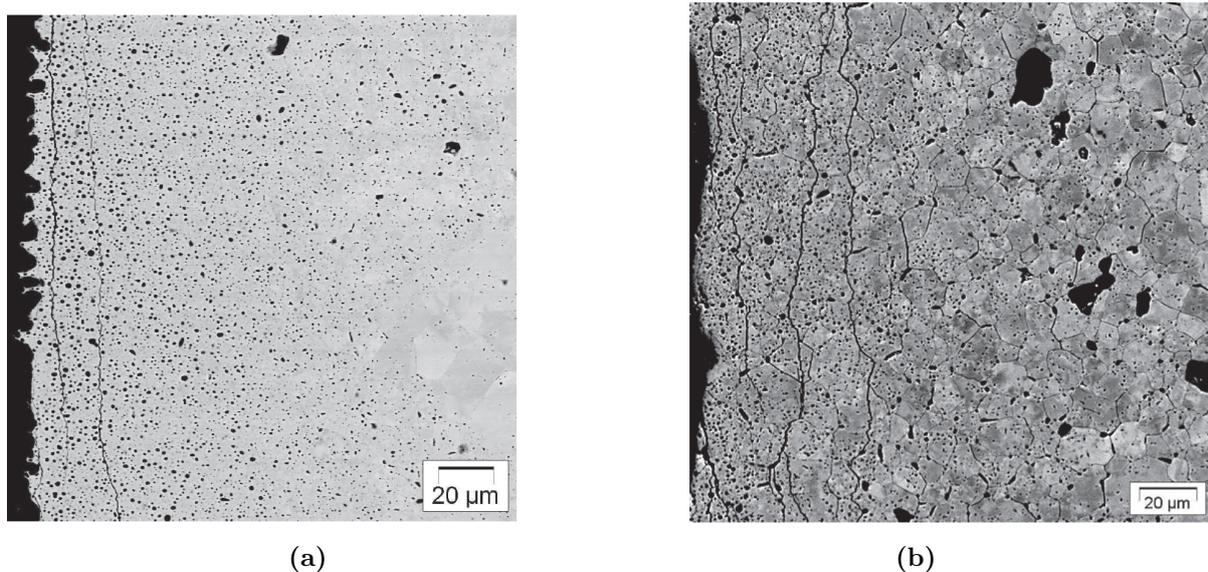


Figure 13 – Images MEB de la périphérie d'un échantillon UO_2 irradié à 57.4 GWj/t soumise à un transitoire thermique [Marcet, 2010]. a) avant transitoire. b) après transitoire.

1.2.3 Objectifs appliqués de la thèse

Le comportement du combustible lors de transitoire rapide (notamment RIA) fait appel à des connaissances dans de nombreux domaines tels que la neutronique, les transferts de chaleur, la mécanique des fluides, la mécanique des structures, la métallurgie, la chimie sous rayonnement, etc. Dans ces conditions, les investigations par des approches expérimentales s'avèrent très difficiles et limitées car le plus souvent effectuées à des échelles réduites et de manière plus ou moins simplifiées [Couturier et al., 2017]. À ces investigations expérimentales, il est judicieux d'associer le développement de modèles physiques qui une fois intégrés dans des logiciels de calcul permettent de simuler tout ou une partie des phénomènes jugés essentiels à la bonne compréhension du déroulement de l'accident.

L'objet du présent travail est issu d'un programme de recherche de l'IRSN qui porte sur la modélisation précise du comportement du combustible, ceci via le développement de lois de comportement et d'approches numériques pour la simulation à différentes échelles (atomique, microscopique, macroscopique etc). En particulier, il est question via ce travail de **contribuer au développement d'approches génériques pour décrire l'initiation et la propagation de fissures dans les matériaux**, approches qui pourront être appliquées entre autres à l'étude du comportement *mécanique macroscopique* du combustible UO_2 , en tenant compte *explicitement* de sa fissuration et de sa fragmentation lors des transitoires rapides.

Cette modélisation du combustible UO_2 est en effet importante pour investiguer finement le comportement du combustible lors d'un scénario d'accident d'insertion de réactivité :

- l'analyse de la temporalité d'une éventuelle fissuration du combustible (en phase de montée ou en phase de descente en température), peut donner des indications quant au moment où les produits de fission sont relâchés. Lors du transitoire thermique, si la majorité des gaz sont relâchés en phase de montée en température alors ceux-ci vont participer à pressuriser la gaine, si c'est lors du retour à froid alors le chargement dû aux gaz vu par la gaine est moindre ;
- la prédiction de l'état de fragmentation combustible est nécessaire pour analyser l'éventuelle éjection par écoulement granulaire des fragments de combustible dans le circuit primaire en cas de rupture de gaine ou pour déterminer la perméabilité radiale et axiale de la pastille vis-à-vis de l'écoulement des gaz de fission ;
- de manière plus large, comprendre et interpréter les mesures effectuées en réacteur et les données issues d'expérimentations, améliorer les performances des combustibles et examiner la validité des critères de sûreté etc.

1.3 Portée de l'étude et démarche

1.3.1 Portée de l'étude

La question de la prédiction et de la simulation du comportement du combustible UO_2 en conditions extrêmes avec une description explicite de sa fissuration fait appel aux modèles théoriques amonts de la mécanique de la rupture et à des méthodes de simulations adaptées. La mécanique de la rupture des matériaux étant un domaine relativement large, ce travail se limite au cadre de la rupture ductile des matériaux. L'approche développée est suffisamment générique pour être applicable à une large classe de matériaux ductiles dont par exemple le combustible UO_2 à haute température, les aciers ferritiques utilisés dans les composants du circuit primaire des réacteurs etc.

Le terme "*rupture ductile*" concerne les matériaux qui subissent d'importantes déformations plastiques dans la zone d'amorçage de la fissure, notamment lorsque la taille de la zone plastifiée vis-à-vis de la taille de la structure est importante. Il est question ici des matériaux ductiles qui s'endommagent suite à un mécanisme microscopique de *nucleation*, de *croissance* et de *coalescence de porosités* dans le matériau. Ce mécanisme est celui mis-en-jeu dans les métaux et céramiques à hautes températures.

Quelques hypothèses préalables délimitant le contour de ce travail sont posées :

- la dépendance du comportement du matériau au temps (ou aux vitesses de chargement - viscosité) n'est pas abordée ;
- la description du comportement du matériau se fait dans l'approximation d'une évolution *quasi-statique* et *isotherme* (le couplage possible entre effets d'inertie, les variations de température et les lois de comportement est négligé) ;
- les aspects de vieillissement sous irradiation ne sont pas abordés.

1.3.2 Démarche générale

Dans la littérature, les modèles d'endommagement et les approches de modélisation et simulation de la fissuration sont très variés. Généralement, la modélisation et la simulation de la fissuration nécessite une modélisation de l'endommagement dans le matériau et une méthode pour décrire l'initiation et la propagation de fissure. Une brève bibliographie est faite dans le chapitre suivant.

L'approche retenue dans ce travail est l'emploi des modèles de zones cohésives pour décrire l'amorçage et la propagation d'une fissure au sein d'un milieu continu. L'approche cohésive consiste à donner une loi de comportement adoucissante aux points matériels situés sur le trajet de fissuration. Cette loi relie le vecteur contrainte normale \mathbf{R} et le saut de déplacement $[\mathbf{u}]$ mesurant une ouverture de fissure (voir figure 14).

Dans la démarche mise en œuvre dans ce travail **l'endommagement et la fissuration sont entièrement modélisés par la zone cohésive**. La combinaison d'un comportement volumique durcissant avec un comportement adoucissant dans la zone cohésive

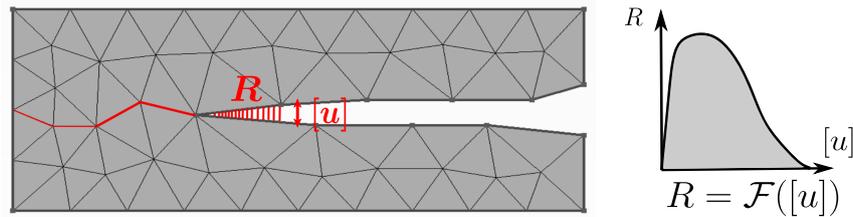


Figure 14 – Principe des modèles de zones cohésives

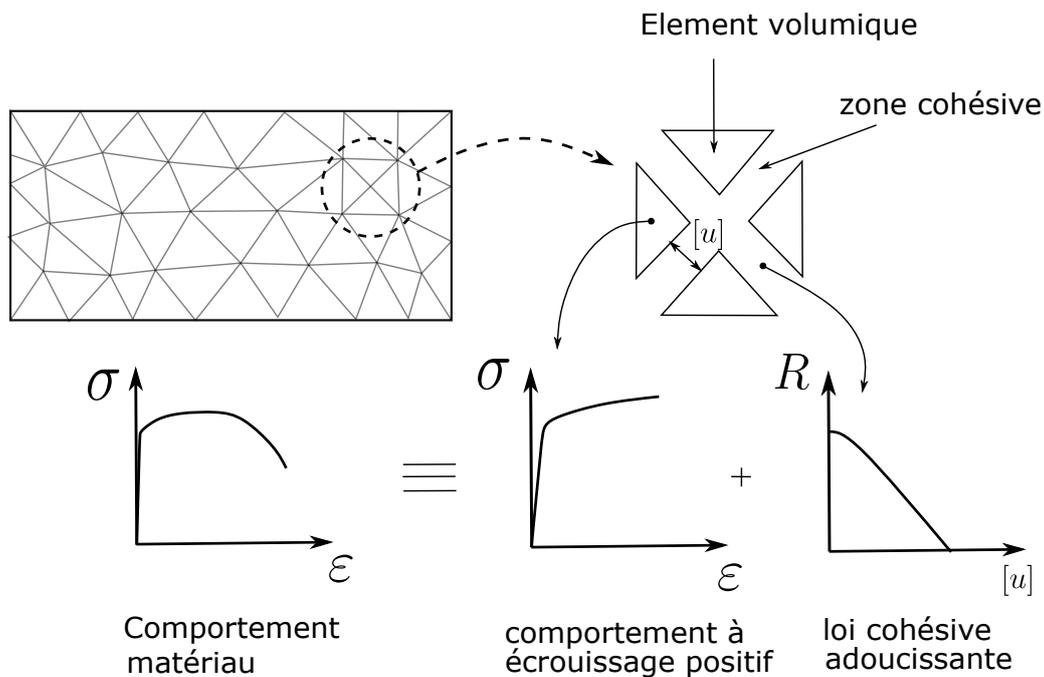


Figure 15 – Approche cohésive - volumique.

permet de modéliser une réponse globale du matériau endommageable (figure 15). Cette hypothèse est pertinente lorsque c'est l'amorçage et la propagation des fissures qui sont d'intérêt et non la réduction des propriétés locales du matériau due à un mécanisme d'endommagement. Cette simplification nécessite néanmoins une loi cohésive $\mathbf{R}([\mathbf{u}])$ fine rendant compte des mécanismes d'endommagement initiant la fissure.

Le modèle de zone cohésive pour le matériau ductile sera élaborée avec les idées suivantes :

- la zone d'élaboration d'une fissure (process zone) est assimilée à une interface adhésive de faible épaisseur comme cela est fait dans les problèmes de décohésion de solides adhésifs (Michel et al. [1994]; Monerie et Acary [2001]). L'ouverture de la fissure étant la différence entre le champ de déplacement de part et d'autre de l'interface (saut du champ de déplacement). Une mesure de la déformation de l'interface est associée au champ de déplacement de part et d'autre de l'interface. Cette mesure de la déformation permet d'écrire un comportement de type contrainte-déformation dans la bande cohésive. Cette bande peut alors être interprétée comme une zone de localisation des déformations plastiques amorçant de la rupture ductile ;

- le comportement local dans la zone cohésive est supposé similaire à celui d'un volume élémentaire représentatif du matériau considéré soumis à un chargement de traction. Un exemple de modèle répandu pour décrire le comportement endommageable d'un matériau ductile est le modèle GTN (Gurson-Tveergard-Needleman) et est celui retenu dans ce travail¹.

1. Le choix d'approcher le comportement de la bande cohésive par le modèle GTN a été fait dans le cadre de ce travail, mais en pratique un modèle micromécanique quelconque peut être utilisé, la démarche d'ensemble reste inchangée. Seule la loi de traction - séparation obtenue dépend du modèle micromécanique considéré.

Chapitre 2

Mécanique de la rupture ductile : éléments de bibliographie

Ce chapitre présente succinctement les mécanismes microscopiques d'endommagement ductile dans les métaux et céramiques. Quelques modèles d'endommagement ductile sont décrits avec une attention particulière portée sur le modèle micromécanique de Gurson, ainsi que son extension, le modèle GTN. Les modèles de zones cohésives sont introduits comme une approche permettant d'une part, sur le plan théorique, d'assurer la transition entre un milieu continu et une discontinuité, et d'autre part sur le plan numérique, de représenter explicitement ces discontinuités dans le cadre de la méthode des éléments finis.

Sommaire

2.1	Mécanismes microscopiques de l'endommagement ductile . .	43
2.2	Modèles de rupture ductile	43
2.2.1	Approche phénoménologique et cadre thermodynamique . . .	44
2.2.2	Critères de plasticité effectifs pour matériaux poreux	47
2.3	Fissuration : création de surface	59
2.3.1	Extensions de la mécanique linéaire de la rupture	59
2.3.2	Fissuration par emploi de Modèles de Zones Cohésives (MZC) .	61

2.1 Mécanismes microscopiques de l'endommagement ductile

La rupture ductile se caractérise par d'importantes déformations plastiques avant l'amorçage et la propagation des fissures. Les mécanismes microscopiques à l'origine de l'endommagement ductile dans les métaux et les céramiques sont généralement décrits par trois étapes [Benzerga et Leblond, 2010; Benzerga et al., 2016; Achouri et al., 2013] :

- La *nucléation (germination)* correspond à l'initiation de micro cavités dans le matériau. En plus d'une éventuelle présence d'une porosité initiale issue du processus de fabrication, des microcavités peuvent se former dans le matériau sous l'effet du chargement, soit par décohésion de l'interface entre la matrice et les inclusions ou les précipités présents dans le matériau, soit par rupture de ces inclusions (voir figure 16).
- La *croissance* correspond à l'augmentation du volume des cavités sous l'effet de la déformation plastique de la matrice qui entoure ces cavités (mécanisme dominant à forte triaxialité). Cette croissance peut s'accompagner d'une rotation et d'un changement de forme des cavités, ainsi que d'une distorsion du ligament de matière entre les cavités (mécanisme dominant à faible triaxialité). Lorsque les cavités deviennent suffisamment nombreuses et de taille significative, elles modifient le comportement local du matériau, engendrant un adoucissement global du matériau.
- La *coalescence* des cavités mène à la rupture finale du matériau lorsque la croissance et la déformation des cavités est suffisante. La coalescence des cavités est la dernière phase de l'endommagement ductile avant initiation d'une fissure mesoscopique ou macroscopique. Elle s'opère selon différents modes qui dépendent d'aspects microstructuraux, des conditions de chargement ainsi que des propriétés d'écoulement de la matrice [Benzerga et Leblond, 2010]. Les modes les plus courant observés sont : *la striction interne*, correspondant à une réduction brutale de la section des ligaments de matière séparant les cavités ou encore *la localisation des déformations dans des bandes de cisaillement* (voir figure 17).

2.2 Modèles de rupture ductile

La littérature sur l'endommagement ductile est très large et de nombreux modèles ont été proposés. De manière générale, ces modèles peuvent être regroupés en trois classes [Cao et Bouchard, 2016] :

- les critères de rupture ;
- les modèles d'endommagement décrits dans le cadre de la thermodynamique ;
- les surfaces seuils de plasticité pour les matériaux poreux.

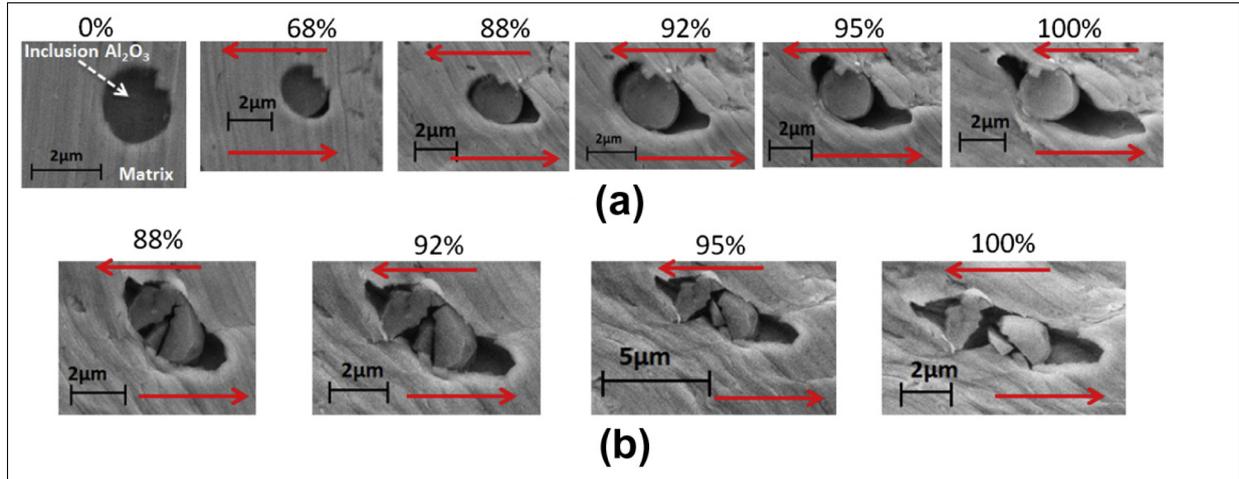


Figure 16 – Mécanismes de nucléation et croissance. a) Nucléation par décohésion de l'interface matrice-inclusion. b) Nucléation de cavités par décohésion de l'interface matrice-inclusion et par rupture de l'inclusion. Observations réalisées au MEB pour un chargement en cisaillement par Achouri et al. [2013] sur un acier HLE. Les flèches donnent la direction du cisaillement ainsi que le pourcentage de déplacement à rupture.

2.2.1 Approche phénoménologique et cadre thermodynamique

2.2.1.1 Indicateurs d'endommagement ou critère de rupture, modèles non couplés

Cette classe de modèles regroupe les critères appliqués sur des calculs élastoplastiques (sans endommagement) et donnant une indication du dommage dans la structure. Ces indicateurs d'endommagement sont proposés sur la base d'une approche phénoménologique ou suite à des considérations micromécaniques sur les matériaux poreux. Les approches micromécaniques sont basées sur des études de croissance d'une cavité dans une matrice plastique infinie, la rupture survenant lorsque la cavité atteint une taille critique. La porosité dans le massif infini étant nulle, le comportement macroscopique reste celui de la matrice, et il n'y a pas de couplage entre endommagement et comportement.

De manière générale, dans cette classe de modèle, la rupture se produit lorsqu'une variable caractéristique (D) atteint une valeur critique (D_c) qui dépend du matériau considéré. Cette variable est le plus souvent définie comme l'intégrale d'une fonction d'une ou plusieurs variables internes sur le chemin des déformations plastiques [Wierzbicki et al., 2005; Xue, 2007; Cao et Bouchard, 2016] :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^p} \bar{g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, T, \dots) d\bar{\varepsilon}^p = D_c \quad (2.1)$$

où

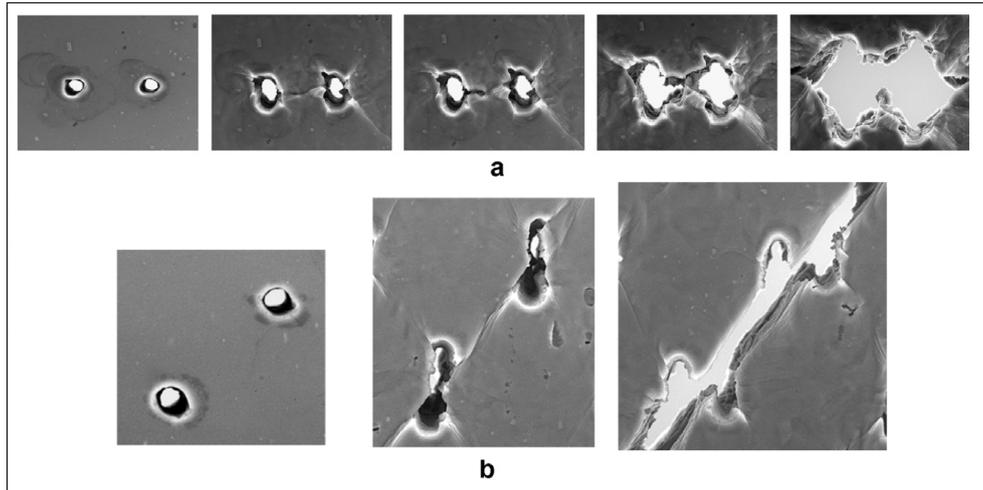


Figure 17 – Modes de coalescence observés par [Weck et Wilkinson \[2008\]](#) a) Striction interne des ligaments inter-cavités. b) Coalescence dans une bande de cisaillement. Chargement macroscopique selon la verticale.

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, T \\ \bar{g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, T, \dots) \\ \bar{\varepsilon}_f^p \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sont les tenseurs de contrainte et de déformation, la température.} \\ \text{est une fonction de pondération de l'endommagement} \\ \text{est la déformation plastique équivalente à rupture} \end{array}$$

La déformation équivalente à rupture $\bar{\varepsilon}_f^p$ est mesurée expérimentalement. Il s'avère néanmoins que cette valeur n'est pas unique pour un matériau considéré, mais dépend du trajet de chargement dans l'espace des contraintes ou des déformations [[Bao et Wierzbicki, 2004](#); [Achouri et al., 2013](#); [Papasidero et al., 2015](#)]. En pratique, le trajet de chargement dans l'espace des contraintes est caractérisé par la *triaxialité des contraintes* η_σ et le *paramètre de Lode*¹ ξ (ou *l'angle de Lode* θ); la déformation à rupture $\bar{\varepsilon}_f^p$ est donnée en fonction de ces deux paramètres :

$$\eta_\sigma = \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}, \quad \xi = \cos(3\theta) = \frac{27}{2} \frac{J_3}{\sigma_{eq}^3}, \quad (2.2)$$

avec $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}$, $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d}$ et $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{i}$. Le tenseur identité d'ordre 2 est noté \mathbf{i} , $J_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}_d)$ est le troisième invariant du déviateur des contraintes. Par définition, η_σ , ξ et θ sont compris entre :

$$-\infty < \eta_\sigma < \infty, \quad \text{et} \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad \text{ou} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}. \quad (2.3)$$

Si le chargement est proportionnel, alors la triaxialité des contraintes et le paramètre de Lode sont constants au cours de l'histoire du chargement. Si le chargement est quelconque,

1. Il existe plusieurs définitions du paramètre de Lode ou de l'angle de Lode dans littérature, mais elles sont toutes équivalentes [[Cao et Bouchard, 2016](#)].

alors il convient de définir des valeurs moyennes de la triaxialité des contraintes $\langle \eta_\sigma \rangle$ et du paramètre de Lode $\langle \xi \rangle$ au cours du chargement et de mesurer la déformation à rupture plutôt en fonction de ces valeurs moyennes, soit $\bar{\varepsilon}_f^p(\langle \eta_\sigma \rangle, \langle \theta \rangle)$ où [Bao et Wierzbicki, 2004; Wierzbicki et al., 2005; Bai et Wierzbicki, 2008] :

$$\langle \eta_\sigma \rangle = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_f^p} \int_0^{\bar{\varepsilon}_f^p} \eta_\sigma d\bar{\varepsilon}^p \quad \langle \xi \rangle = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_f^p} \int_0^{\bar{\varepsilon}_f^p} \xi d\bar{\varepsilon}^p$$

Quelques modèles de rupture découplés sont présentés dans le tableau 3. Une bibliographie plus large peut être trouvée dans Cao et Bouchard [2016]; Xue [2007].

Références	Fonction \bar{g} à utiliser dans l'équation (2.1)
[Rice et Tracey, 1969] ¹	$0.558 \sinh\left(\frac{3}{2}\eta_\sigma\right) + 0.008\nu \cosh\left(\frac{3}{2}\eta_\sigma\right)$
[Huang, 1991]	$\alpha \exp\left(\frac{3}{2}\eta_\sigma\right)$
[Johnson et Cook, 1985] ²	$\frac{1}{F(\eta_\sigma)}$, avec $F(\eta_\sigma) = C_1 + C_2 \exp(C_3\eta_\sigma)$
[Xue, 2007]	$\frac{1}{F(\eta_\sigma, \xi)}$, avec $F(\eta_\sigma, \xi) = C_1 \exp(C_2\eta_\sigma) - [C_1 \exp(C_2\eta_\sigma) - C_3 \exp(C_4\eta_\sigma)](1 - \xi^{\frac{1}{n}})^n$
[Budiansky et al., 1982]	$\frac{1}{2}s \left[\frac{3m}{2} \eta_\sigma + (1-m)[1 + m(0.418 + 0.014\chi s)] \right]^{\frac{1}{m}}$

$\nu = -\frac{3\dot{\varepsilon}_{II}}{\dot{\varepsilon}_I - \dot{\varepsilon}_{III}}$, $\dot{\varepsilon}_i$ les taux de déformations plastiques principales. $\alpha = 0.426 \left(\frac{3}{2}\eta_\sigma\right)^{\frac{1}{4}}$ pour $\eta_\sigma \leq 1$, $\alpha = 0.426$ pour $\eta_\sigma \geq 1$. C_1, C_2, C_3, C_4 des paramètres matériaux. $\xi = \frac{27}{2} \frac{J_3}{\sigma_{\text{eq}}^3}$. n coefficient d'écroutissage, m coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation. s signe de σ_m . $\chi = +1$ si la contrainte axiale est plus grande que la contrainte radiale et $\chi = -1$ sinon.

Tableau 3 – Quelques exemples de fonctions \bar{g} utilisées dans les modèles non couplés.

2.2.1.2 Modèles couplés (cadre thermodynamique)

Cette approche est une théorie phénoménologique pour l'écriture des lois de comportements couplées à l'endommagement qui trouve ses origines dans les travaux de Kachanov [1986].

L'idée de base est d'introduire une variable d'endommagement notée D représentant une densité surfacique de microcavités. Pour une section S donnée dans un élément de matière représentatif, avec des cavités occupant une partie S_v de S , la variable D représente la surface des vides due à l'endommagement ramenée à la section totale :

$$D_{(n)} = \frac{|S_v|}{|S|} \quad (2.4)$$

1. Pour $\eta_\sigma > 0$, une approximation du critère de Rice et Tracey [1969] est donné par $0.283 \exp\left(\frac{3}{2}\eta_\sigma\right)$
 2. La forme complète du modèle de Johnson et Cook [1985] inclut également un terme dépendant de la vitesse de déformation et un terme de dépendance à la température T

où \mathbf{n} est la normale à la section considérée et $|\cdot|$ représente la mesure du domaine. La variable d'endommagement vaut 0 pour un matériau sain et tend vers 1 lorsque le matériau est totalement endommagé.

Pour un endommagement supposé isotrope, D est indépendant de \mathbf{n} . On peut définir une contrainte effective $\tilde{\sigma}$ qui traduit la contrainte appliquée, ramenée à l'aire de la section qui résiste *réellement* à l'effort appliqué $S - S_v$ (appelée section effective) :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{|S - S_v|} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad \text{où} \quad \sigma = \frac{F}{S} \quad (2.5)$$

Le couplage entre endommagement et loi de comportement est réalisé en remplaçant le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ par le tenseur $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ dans la loi de comportement. Par exemple partant de la loi de Hooke $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ on peut déduire la loi de comportement avec endommagement :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.6)$$

La loi d'évolution de l'endommagement D reste à définir et dépend des contraintes, des déformations et autres variables internes en fonction des modèles considérés. Le développement de cette approche dans le cadre de l'endommagement ductile a été réalisée sur la base des travaux de [Lemaitre et Chaboche \[1978\]](#). Le couplage proposé par [Lemaitre et Chaboche \[1978\]](#) consiste à utiliser le tenseur de contraintes $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ dans le critère de plasticité de von Mises avec une loi d'évolution de D donnée par :

$$\dot{D} = \dot{\varepsilon}_{eq}^p \left(\frac{\mathcal{Y}}{S} \right)^b \quad (2.7)$$

avec

$$\mathcal{Y} = \frac{\sigma_{eq}^2}{2Y(1 - D)^2} \left[\frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu)\eta_{\sigma}^2 \right]$$

où $\dot{\varepsilon}_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^p}$ est la norme de la vitesse de déformation plastique, Y est le module d'Young du matériau et ν le coefficient de Poisson.

Cette approche de l'endommagement se base aujourd'hui sur un outil classique dans l'écriture des lois de comportement : *la thermodynamique des processus irréversibles* [[Germain et al., 1983](#)]. Les nombreux développements ont donné lieu à des extensions telles que l'endommagement anisotrope, une définition tensorielle de D , un couplage avec des lois de comportement complexes : visco-élasto-plasticité avec endommagement, endommagement par fluage, endommagement oligo-cyclique, à grand nombre de cycle, en température etc. [[Chaboche et al., 2001b](#)].

2.2.2 Critères de plasticité effectifs pour matériaux poreux

Pour cette classe de critères de plasticité, les surfaces de charge macroscopiques sont déterminées à partir de considérations micromécaniques. L'endommagement est pris en

compte par la porosité qui agit sur la surface de charge macroscopique du matériau poreux. On distingue actuellement deux types d'approches permettant d'obtenir une estimation ou dans certains cas une borne de la surface de plasticité macroscopique de matériaux poreux à matrice plastique [Vincent, 2007] :

- l'approche basée sur la théorie de l'analyse limite avec des éléments des méthodes d'homogénéisation (approche "type Gurson");
- l'approche d'homogénéisation non linéaire, dont l'utilisation du principe variationnel de Ponte Castañeda [1991] (équivalent à la méthode sécante modifiée. Voir [Suquet, 1995; Ponte Castañeda et Suquet, 1997]).

Dans la suite, le modèle de plasticité de Gurson [1977] est présenté après un rappel de quelques résultats d'homogénéisation utilisés pour le calcul de critères de plasticité macroscopiques de matériaux poreux. Depuis son élaboration en 1977, la démarche menant au critère de plasticité de Gurson a été revue et améliorée dans la littérature [Leblond et al., 1994; Gărăjeu et Suquet, 1997; Leblond, 2003]. Pour une présentation détaillée, le lecteur pourra se référer aux travaux de Gurson [1975, 1977], les revisites présentées dans Chaboche et al. [2001b]; Leblond [2003]. La présentation faite ici s'inspire largement des références précitées.

Quelques rappels d'homogénéisation pour les matériaux poreux

Soit un VER (Volume Élémentaire Représentatif) noté Ω constitué d'une matrice et de cavités (domaine ω , porosité $f = \frac{|\omega|}{|\Omega|}$). La frontière de Ω est noté $\partial\Omega$. La matrice est supposée être régie par un potentiel de dissipation convexe tel que :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (2.8)$$

Supposons d'abord que Ω est soumis à des conditions de **taux de déformation homogène au bord**, avec \mathbf{v} le champ de vitesse dans Ω et $\dot{\mathbf{E}}$ imposé (appelé *taux de déformation macroscopique* ou *effectif*) :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (2.9)$$

On montre que :

$$\dot{\mathbf{E}} = \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} \quad \text{où} \quad \langle \cdot \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \cdot d\Omega \quad (2.10)$$

où le champ de vitesse \mathbf{v} a été prolongé dans ω de manière à être de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .

Les champs microscopiques réels $\boldsymbol{\sigma}$ et $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ dans Ω sont solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \text{ dans } \Omega - \omega \\ \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ dans } \Omega - \omega \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\omega, \mathbf{n} \text{ normale au pore considéré,} \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

En prolongeant le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ défini sur $\Omega - \omega$ par $\mathbf{0}$ dans ω , on peut

définir la *contrainte effective* ou *macroscopique* sur le VER Ω :

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle_{\Omega} = (1 - f) \langle \sigma \rangle_{\Omega - \omega} \quad (2.12)$$

Sous ces conditions, on montre que la contrainte effective Σ et le taux de déformation effectif $\dot{\mathbf{E}}$ vérifient [Bornert et al., 2001; Leblond, 2003] :

$$\Sigma = \frac{\partial \Phi^+}{\partial \dot{\mathbf{E}}}(\dot{\mathbf{E}}) \quad (2.13)$$

où le potentiel de dissipation effectif $\Phi^+(\dot{\mathbf{E}})$ vérifie la propriété variationnelle suivante :

$$\Phi^+(\dot{\mathbf{E}}) = \inf_{\mathbf{v}^* \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} (1 - f) \langle \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^*)) \rangle_{\Omega - \omega}, \quad \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}}) = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} \text{ sur } \partial\Omega\}, \quad (2.14)$$

Le potentiel en contrainte dual de $\Phi^+(\dot{\mathbf{E}})$ noté $\Psi^+(\Sigma)$ s'écrit :

$$\Psi^+(\Sigma) = \inf_{\sigma^* \in \mathcal{S}} (1 - f) \langle \psi(\sigma^*) \rangle_{\Omega - \omega}, \quad \mathcal{S} = \{\sigma | \operatorname{div} \sigma = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega - \omega \text{ et } \Sigma = \langle \sigma \rangle_{\Omega}\}; \quad (2.15)$$

où $\psi(\sigma)$ est le dual de $\varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$:

$$\psi(\sigma) = \sup_{\mathbf{v}^* \in \mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})} (\sigma : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))) \quad (2.16)$$

Considérons maintenant que Ω est soumis à des conditions de **contraintes homogènes sur son bord** :

$$\sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \Sigma \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad \mathbf{n} \text{ normale sortante à } \Omega \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.17)$$

Les champs microscopiques réels σ et $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ dans Ω sont solutions du système :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \text{ dans } \Omega - \omega \\ \operatorname{div} \sigma = 0 \text{ dans } \Omega - \omega \quad \text{et} \quad \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\omega, \quad \mathbf{n} \text{ normale au pore considéré,} \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = \Sigma \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega, \quad \mathbf{n} \text{ normale sortante à } \Omega \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.18)$$

En exploitant les mêmes prolongements que précédemment, on peut cette fois-ci montrer que Σ est la contrainte macroscopique sur le VER Ω :

$$\Sigma = (1 - f) \langle \sigma \rangle_{\Omega - \omega}, \quad (2.19)$$

et définir le taux de déformation macroscopique comme :

$$\dot{\mathbf{E}} = \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{\Omega}. \quad (2.20)$$

La contrainte Σ et le taux de déformation $\dot{\mathbf{E}}$ vérifient :

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \Psi^-}{\partial \Sigma}(\Sigma) \quad (2.21)$$

avec

$$\Psi^-(\Sigma) = \inf_{\sigma^* \in \mathcal{S}(\Sigma)} (1-f) \langle \psi(\sigma^*) \rangle_{\Omega-\omega}, \quad \mathcal{S}(\Sigma) = \{\sigma \mid \operatorname{div} \sigma = 0 \text{ dans } \Omega-\omega \text{ et } \sigma \cdot \mathbf{n} = \Sigma \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega\}; \quad (2.22)$$

Le potentiel dual de Ψ^- vaut :

$$\Phi^-(\dot{\mathbf{E}}) = \inf_{\mathbf{v}^* \in \mathcal{K}} (1-f) \langle \varphi(\varepsilon(\mathbf{v}^*)) \rangle_{\Omega-\omega}, \quad \mathcal{K} = \{\mathbf{v} \mid \dot{\mathbf{E}} = \langle \varepsilon(\mathbf{v}) \rangle_{\Omega}\}, \quad (2.23)$$

Les potentiels de dissipations effectifs réels $\Phi(\dot{\mathbf{E}})$ ou $\Psi(\Sigma)$ sont encadrés par Willis [1989] :

$$\Phi^-(\dot{\mathbf{E}}) \leq \Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \Phi^+(\dot{\mathbf{E}}) \quad (2.24)$$

$$\Psi^+(\Sigma) \leq \Psi(\Sigma) \leq \Psi^-(\Sigma) \quad (2.25)$$

Le problème de l'élaboration du modèle d'endommagement est réduit à la détermination de l'un des potentiels macroscopiques (ou effectifs) Φ ou Ψ . Dans la littérature, l'approche cinématique (équations (2.9), (2.13) et (2.14)) est la plus utilisée pour établir des critères de plasticité macroscopiques. Cela demande de préciser :

- la géométrie du volume élémentaire représentatif Ω ;
- le potentiel de dissipation microscopique de la matrice $\varphi(\dot{\varepsilon})$;
- le champ de vitesses microscopiques dans l'ensemble $\mathcal{K}(\dot{\mathbf{E}})$ des champs de vitesses cinématiquement admissibles.

2.2.2.1 Le modèle de Rice-Gurson

Gurson [1977] a proposé un critère de plasticité pour les matériaux poreux isotropes à cavités sphériques :

$$\phi(\Sigma, f) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (2.26)$$

Ce critère de plasticité dépend de la contrainte d'écoulement σ_0 de la matrice saine (sans cavités) qui suit le critère de von Mises et de la porosité f . Quelques étapes menant à ce critère sont présentées par la suite.

La géométrie du VER (Ω) considérée par Gurson et Rice est une sphère creuse (voir figure 18) soumise à des conditions de taux de déformation imposées sur son bord extérieur. La matrice (domaine $\Omega-\omega$) est constituée d'un matériau de von Mises rigide parfaitement

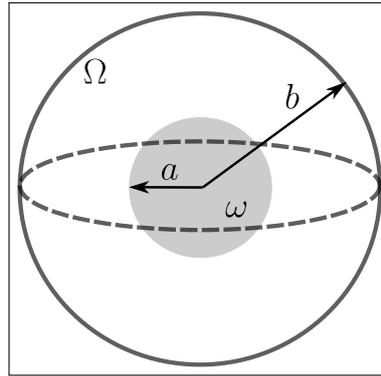


Figure 18 – Sphère creuse

plastique de contrainte d'écoulement σ_0 . Le potentiel de dissipation de la matrice est donnée par le principe de dissipation maximale de Hill :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \max_{\boldsymbol{\sigma}^* \in \mathcal{P}} \boldsymbol{\sigma}^* : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{où} \quad \mathcal{P} = \{\boldsymbol{\sigma} | \sigma_{eq} \leq \sigma_0\} \quad (2.27)$$

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \sigma_0 \dot{\varepsilon}_{eq} \quad (2.28)$$

avec $\dot{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d}$ le taux de déformation équivalent et $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{3} \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{i}$ le déviateur du taux de déformation.

Le champ de vitesse considéré par Gurson s'inspire de celui de Rice et Tracey [1969]. Il se décompose en un champ responsable du changement de volume de la cavité et un autre responsable du changement de forme :

$$\mathbf{v}^G = \dot{E}_m \frac{b^3}{r^2} \mathbf{e}_r + \dot{\boldsymbol{E}}_d \cdot \mathbf{x}, \quad (2.29)$$

où $\dot{E}_m = \frac{1}{3} \text{tr} \dot{\boldsymbol{E}}$, $\dot{E}_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{E}}_d : \dot{\boldsymbol{E}}_d}$, $\dot{\boldsymbol{E}}_d = \dot{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{3} \text{tr} \dot{\boldsymbol{E}} \mathbf{i}$, et $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ désigne la base associée aux coordonnées sphériques. a est le rayon intérieur de la sphère creuse et b est le rayon extérieur (voir figure 18). La porosité du VER est $f = \frac{a^3}{b^3}$. Ce choix de la forme du champ de vitesse réduit l'ensemble $\mathcal{K}(\dot{\boldsymbol{E}})$ au seul champ \mathbf{v}^G (2.29).

Le potentiel de dissipation macroscopique associé au champ de vitesse proposé par Gurson est obtenu en utilisant le principe variationnel (2.14) :

$$\Phi(\dot{\boldsymbol{E}}) \leq \Phi^G(\dot{\boldsymbol{E}}) = (1 - f) \langle \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^G)) \rangle_{\Omega - \omega} = \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dot{\varepsilon}_{eq} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr. \quad (2.30)$$

Puisque le minimum dans (2.14) n'est pas forcément atteint avec le champ de vitesse considéré (2.29), la valeur de la dissipation macroscopique obtenue et notée $\Phi^G(\dot{\boldsymbol{E}})$ est une approximation par l'extérieur (borne supérieure) du potentiel $\Phi(\dot{\boldsymbol{E}})$.

L'expression analytique de l'intégrale (2.30) n'étant pas connue, elle est majorée en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dot{\varepsilon}_{eq} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr \leq \Phi^{G^+}(\dot{\mathbf{E}}) = \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_a^b \left[\left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dot{\varepsilon}_{eq}^2 \sin \theta d\theta d\phi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi \right)^{\frac{1}{2}} \right] r^2 dr$$

Le calcul de $\dot{\varepsilon}_{eq}$ avec le champ de vitesse (2.29) et l'introduction du changement de variable $y = (\frac{r}{b})^3$ permettent d'obtenir :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \Phi^G(\dot{\mathbf{E}}) \leq \Phi^{G^+}(\dot{\mathbf{E}}) = \sigma_0 \int_f^1 \left(\frac{4\dot{E}_m^2}{y^2} + \dot{E}_{eq}^2 \right)^{\frac{1}{2}} dy \quad (2.31)$$

Le majorant Φ^{G^+} du potentiel de dissipation Φ^G est le potentiel de dissipation macroscopique du modèle de Gurson. Une expression générale de cette intégrale peut être trouvée dans [Gărăjeu et Suquet, 1997] :

$$\Phi^{G^+}(\dot{\mathbf{E}}) = \sigma_0 \dot{E}_{eq} [2\eta_{\dot{\mathbf{E}}} M(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, f) + N(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, f)] \quad (2.32)$$

avec :

$$M(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, f) = \operatorname{arcsinh} \left(\frac{2\eta_{\dot{\mathbf{E}}}}{f} \right) - \operatorname{arcsinh} (2\eta_{\dot{\mathbf{E}}}) \quad (2.33)$$

$$N(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, f) = \sqrt{(2\eta_{\dot{\mathbf{E}}})^2 + 1} - \sqrt{(2\eta_{\dot{\mathbf{E}}})^2 + f^2} \quad (2.34)$$

où il a été posé $\eta_{\dot{\mathbf{E}}} = \frac{\dot{E}_m}{\dot{E}_{eq}}$, la *triaxialité du taux de déformation macroscopique*.

Le tenseur de contrainte macroscopique Σ dérivant du potentiel macroscopique s'écrit :

$$\Sigma = \frac{\partial \Phi^{G^+}}{\partial \dot{\mathbf{E}}} = \frac{\partial \Phi^{G^+}}{\partial \dot{E}_m} \frac{1}{3} \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi^{G^+}}{\partial \dot{E}_{eq}} \frac{2}{3\dot{E}_{eq}} \dot{\mathbf{E}}_d \quad (2.35)$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \Sigma_m &= \frac{2}{3} \sigma_0 \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{2\eta_{\dot{\mathbf{E}}}}{f} \right) - \operatorname{arcsinh} (2\eta_{\dot{\mathbf{E}}}) \right) \\ \Sigma_{eq} &= \sigma_0 \left(\sqrt{(2\eta_{\dot{\mathbf{E}}})^2 + 1} - \sqrt{(2\eta_{\dot{\mathbf{E}}})^2 + f^2} \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

avec $\Sigma_m = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \Sigma$, $\Sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \Sigma_d : \Sigma_d}$ et $\Sigma_d = \Sigma - \Sigma_m \mathbf{i}$.

L'élimination du paramètre cinématique $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}$ de l'équation (2.36) permet d'obtenir l'équation de la surface de plasticité de Gurson :

$$\phi(\Sigma, f) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (2.37)$$

Quelques remarques peuvent être faites vis-à-vis de ce critère :

- le critère de Gurson est une borne supérieure à la surface réelle de charge d'une sphère creuse rigide parfaitement plastique ;

- en cas de porosité nulle ($f = 0$), le critère de Gurson se réduit au critère de von Mises ($\Sigma_{eq} = \sigma_0$);
- en chargement purement hydrostatique ($\Sigma_{eq} = 0$), la contrainte seuil fournie par le critère de Gurson est $\Sigma_m = \pm \frac{2}{3} \sigma_0 \ln f$, qui est la charge limite exacte d'une sphère creuse soumise à un chargement hydrostatique;
- en chargement purement déviatorique ($\Sigma_m = 0$), le critère de Gurson est $\Sigma_{eq} = (1 - f) \sigma_0$ et correspond à une borne supérieure de type Voigt.

Gurson [1977] a également établi la conservation de la propriété de normalité lors du passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique et cela même pour la borne supérieure à la surface de charge réelle. Le taux de déformation plastique¹ $\dot{\mathbf{E}}^p$ est donné par le critère :

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\Sigma}, f)}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = \dot{\lambda} \left[\frac{f}{\sigma_0} \sinh \left(\frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0} \right) \mathbf{i} + \frac{3}{\sigma_0^2} \boldsymbol{\Sigma}_d \right], \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.38)$$

où $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique.

Écrouissage dans la matrice, évolution de la porosité

Gurson propose une approche simplifiée permettant de prendre en compte l'écrouissage tout en maintenant la forme du critère de plasticité (2.26). Cette approche consiste à considérer que l'écrouissage est uniforme dans la matrice du VER et à remplacer la contrainte seuil σ_0 dans l'équation (2.26) par une contrainte d'écoulement σ_y , qui évolue en fonction d'une "déformation équivalente" $\bar{\varepsilon}$ suivant la loi d'écrouissage du matériau dense (sans porosité) $\sigma_y(\bar{\varepsilon})$. La déformation équivalente $\bar{\varepsilon}$ est telle que la moyenne de la dissipation microscopique dans le volume total est égale à la dissipation macroscopique :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}^p = \langle \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega - \omega} \sigma_{eq} \dot{\varepsilon}_{eq}^p d\Omega \quad (\text{car } \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ dans } \omega \text{ et } \text{tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0 \text{ dans } \Omega - \omega) \quad (2.39)$$

La dissipation plastique microscopique vaut $\sigma_{eq} \dot{\varepsilon}_{eq}^p = \sigma_y \dot{\bar{\varepsilon}}$ et comme elle est par hypothèse uniforme dans la matrice (domaine $\Omega - \omega$), l'équation 2.39 devient :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}^p = \frac{\sigma_y \dot{\bar{\varepsilon}}}{|\Omega|} \int_{\Omega - \omega} d\Omega = (1 - f) \sigma_y \dot{\bar{\varepsilon}} \quad (2.40)$$

Cette prise en compte de l'écrouissage dans le modèle de Gurson bien qu'efficace est heuristique. Perrin [1992]; Leblond [2003] ont proposé une amélioration de la prise en compte de l'écrouissage de la matrice sur la base d'un véritable passage "micro-macro".

1. Le modèle de Gurson a été établi dans l'hypothèse d'un matériau rigide parfaitement plastique. Ainsi, il n'y avait jusqu'à présent pas la nécessité de faire la distinction entre $\dot{\mathbf{E}}$ et $\dot{\mathbf{E}}^p$. Mais en pratique le critère est utilisé dans un cadre élastoplastique, la notation $\dot{\mathbf{E}}^p$ permet de préciser lorsque cela est nécessaire que c'est la partie plastique des déformations qui entre en jeu dans certaines équations.

L'évolution de la porosité est donnée par :

$$\dot{f} = \dot{f}_g + \dot{f}_n \quad (2.41)$$

où \dot{f}_c est le taux de croissance des cavités qui est déduite du bilan de masse [Gurson, 1975; Leblond, 2003; Chaboche et al., 2001b] en l'absence des déformations élastiques :

$$\dot{f}_g = (1 - f) \operatorname{tr} \dot{\mathbf{E}}^p \quad (2.42)$$

\dot{f}_n est le taux de nucléation contrôlé par l'évolution de la déformation équivalente [Gurson, 1975] :

$$\dot{f}_n = A \dot{\bar{\epsilon}}, \quad (2.43)$$

où A est une constante dépendante de la fraction volumique d'inclusions présentes dans le matériau [Gurson, 1975]. La formulation du taux de nucléation a été développée et améliorée notamment par Needleman et Rice [1978]; Chu et Needleman [1980] qui proposent :

$$\dot{f}_n = A \dot{\bar{\epsilon}} + B(\dot{\sigma}_y + c \dot{\Sigma}_m), \quad (2.44)$$

où la constante c a été introduite par Needleman [1987] sur la base de simulations sur des cellules unitaires de type matrice-inclusion. Si la nucléation des cavités peut être corrélée à la déformation équivalente [Goods et Brown, 1979], alors $B = 0$. Par contre si la nucléation est contrôlée par la contrainte maximale à l'interface inclusion - matrice [Argon et al., 1975; Beremin, 1981], alors $A = 0$. Les termes A et B dépendent de la distribution des inclusions dans le matériau. Chu et Needleman [1980] suggèrent que A et B sont des fonctions de $\bar{\epsilon}$ et $\dot{\sigma}_y + c \dot{\Sigma}_m$ respectivement et suivent des lois gaussiennes normales :

$$A(\bar{\epsilon}) = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\epsilon} - \epsilon_N}{s_N} \right)^2 \right] \quad (2.45)$$

$$B = \frac{f_N}{s'_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_y + c \Sigma_m - \sigma_N}{s'_N} \right)^2 \right] \quad (2.46)$$

où f_N représente la fraction volumique des inclusions, ϵ_N un paramètre de nucléation en déformation, σ_N un paramètre de nucléation en contrainte, et s_N et s'_N les déviations standards du modèle de nucléation. L'expression de B n'est valable que lorsque la quantité $\sigma_y + c \Sigma_m$ est à son maximum sur l'histoire des déformations et subit un incrément $\dot{\sigma}_y + c \dot{\Sigma}_m > 0$. Dans le cas contraire $B = 0$.

De par sa construction le modèle de Gurson présente quelques limitations :

- les interactions et la coalescence des cavités ne sont pas prises en compte ;
- seule la variation de volume des cavités est considérée, mais la rotation et la distorsion des cavités qui sont les mécanismes d'endommagement à basses triaxialités ne

sont pas prises en compte ;

- l'écroûissage est supposé uniforme dans la matrice, ce qui n'est pas le cas en réalité [Leblond, 2003].

Des modèles améliorant le modèle de Gurson ont été proposés dans la littérature. Une bibliographie peut être trouvée dans [Benzerga et al., 2016].

2.2.2.2 Le modèle de Gurson Tveergaard Needleman (GTN)

Ce modèle est issu de modifications successives [Tveergaard, 1981, 1982; Tveergaard et Needleman, 1984] du modèle original de Gurson pour prendre en compte les effets d'interactions entre cavités ainsi que les effets de la coalescence des cavités. Le critère de Gurson, Tveergaard et Needleman (G.T.N.) s'écrit :

$$\phi^{GTN}(\Sigma, \sigma_y, f^*) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_y^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m}{\sigma_y}\right) - 1 - q_3 f^{*2} = 0 \quad (2.47)$$

où $q_1, q_2, q_3 = q_1^2$ sont des constantes et f^* est la porosité effective tenant compte de la coalescence des cavités.

Les coefficients q_1, q_2 et q_3 initialement introduits par Tveergaard [1981], permettent au modèle de Gurson d'avoir un meilleur accord avec les prévisions de localisation des déformations obtenues par des simulations numériques par éléments finis et de corriger une insuffisance du critère de Gurson. En effet, en cisaillement pur, le critère de Gurson prévoit une perte complète de la capacité du matériau à transmettre des efforts lorsque ($f = 1$), ce qui n'est pas en adéquation avec la réalité physique dans laquelle le matériau se rompt pour une porosité bien inférieure à 1, ceci étant dû aux phénomènes d'interaction et de coalescence des cavités. La contrainte seuil en cisaillement pur dans le modèle de Tveergaard est $(1 - q_1 f)\sigma_0$. Lorsque $q_1 > 1$ la perte de cohésion du matériau survient pour une porosité ($f = \frac{1}{q_1} < 1$).

La majorité des auteurs s'accordent pour fixer la valeur de q_2 à 1. La valeur de q_1 diffère selon les auteurs [Chaboche et al., 2001b]. Elle est en général comprise entre 1 et 1.5 (1 pour Gurson [1977], 1.5 pour Tveergaard [1981], 1.25 pour Koplik et Needleman [1988], 1.47 pour Perrin et Leblond [1990]). L'introduction du coefficient q_1 n'est pas suffisante pour modéliser correctement la croissance des cavités proche de la coalescence. Tveergaard et Needleman [1984] introduisent une porosité modifiée f^* pour prendre en compte l'accélération de l'endommagement lors de la coalescence et la perte complète de la capacité du matériau à transmettre des efforts pour des valeurs de porosité bien inférieures à 1. f^* coïncide avec f pour des petites valeurs de porosité et s'accroît plus rapidement que f à

partir d'une porosité critique f_c où les effets de la coalescence deviennent significatifs :

$$f^* = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + k(f - f_c) & \text{si } f > f_c \end{cases} \quad (2.48)$$

où $k = \frac{f_u^* - f_c}{f_f - f_c}$, f_f est la fraction volumique à rupture, $f^*(f_f) = f_u^* = \frac{1}{q_1}$.

2.2.2.3 Autres critères de plasticité pour matériaux poreux à cavités sphériques

Quelques autres critères de plasticité pour les matériaux poreux à cavités sphériques proposés dans la littérature sont présentés dans le tableau 4.

Références	Critère de plasticité
[Sun et Wang, 1989]	$\phi = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + \frac{f \left[\beta_2 \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) \right]}{\left[1 + \beta_4 f^2 \sinh^2\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) \right]^{\frac{1}{2}}} - \beta_3 = 0$
[Ponte Castañeda, 1991]	$\phi = \left(1 + \frac{2}{3}f\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + f \left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right)^2 - (1 - f)^2 = 0$
[Michel et Suquet, 1992]	$\phi = \left(1 + \frac{2}{3}f\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + \frac{9}{4} \left(\frac{1-f}{\ln f}\right)^2 \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right)^2 - (1 - f)^2 = 0$
[Leblond et al., 1994]	$\phi = \left(1 + \frac{2}{3}f\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - f^2 = 0$
[Danas et Aravas, 2012]	$\phi = \left(1 + \frac{2}{3}f\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + f \left(\frac{1-f}{\sqrt{f \ln(1/f)}}\right)^2 \left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right)^2 - (1 - f)^2 = 0$
[Cao et al., 2015]	$\phi = \left(1 + \frac{2}{3}\alpha_g f\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + 2q_1 f \cosh\left(q_2 \frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - q_1^2 f^2 = 0$

Tableau 4 – Quelques critères de plasticité pour les matériaux poreux à cavités sphériques.

Les coefficients intervenant dans le modèle de Sun et Wang [1989] ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 2 - \frac{1}{2} \ln(f) & \beta_3 &= 1 + f(1 + \ln(f)) \\ \beta_4 &= \left(\frac{\beta_2}{\beta_3}\right)^2 \coth^2\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m^0}{\sigma_0}\right) - \frac{1}{f^2 \sinh^2\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m^0}{\sigma_0}\right)} & \Sigma_m^0 &= -0.65\sigma_0 \ln f \end{aligned}$$

Le modèle de Sun et Wang [1989] est basée sur la même approche que celle de Gurson avec des conditions de contraintes homogènes aux bord. C'est une borne inférieure au critère de plasticité réel.

Il est à noter que le facteur $(1 + \frac{2}{3}f)$ devant $\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2$ dans les modèles de Ponte Castañeda [1991]; Michel et Suquet [1992]; Leblond et al. [1994]; Danas et Aravas [2012]; Cao et al. [2015] permet une amélioration par rapport au critère de Gurson pour des chargements déviatoriques purs.

2.2.2.4 Extension du modèle GTN pour l'endommagement à basses triaxialités

Extension de [Xue \[2008\]](#) et [Nahshon et Hutchinson \[2008\]](#).

Le modèle GTN est basé sur l'hypothèse de cavités sphériques qui restent sphériques au cours de la déformation. Or, à faible triaxialité le chargement est dominé par le cisaillement. Cela implique un changement important de la forme des cavités qui peut provoquer un endommagement sans augmentation de la fraction volumique des pores dans le matériau.

Pour traiter des cas de chargements à faibles triaxialités, [Nahshon et Hutchinson \[2008\]](#) et [Xue \[2008\]](#) ont proposé une modification de la loi d'évolution de la porosité effective f^* du modèle GTN tout en conservant la forme de base du modèle. Dans cette modification f^* n'a plus le sens d'une porosité mais est perçue comme une variable d'endommagement :

$$\phi = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_y} \right)^2 + 2D \cosh \left(\frac{3q_2 \Sigma_m}{2 \sigma_y} \right) - 1 - D^2 = 0$$

où $D = q_1 f^*$ dans la forme classique du modèle GTN. La modification proposée par [Xue \[2008\]](#); [Nahshon et Hutchinson \[2008\]](#) consiste à ajouter une composante additionnelle \dot{f}_s dans l'évolution de la porosité pour tenir compte de l'endommagement en cisaillement :

$$\dot{D} = q_1(\dot{f}_g + \dot{f}_n + \dot{f}_s), \quad \dot{f}_s = k_w \frac{f\omega(\xi)}{\Sigma_{eq}} \Sigma_d : \dot{\mathbf{E}}^p \quad \text{Nahshon et Hutchinson [2008]} \quad (2.49)$$

$$\dot{D} = q_1(\dot{f}_g + \dot{f}_n) + \dot{f}_s, \quad \dot{f}_s = q_3 f^{q_4} g(\theta_L) E_{eq}^p \dot{E}_{eq}^p \quad \text{Xue [2008]} \quad (2.50)$$

$$\text{où } \omega(\xi) = 1 - \xi^2 = 1 - \left(\frac{27J_3}{2\Sigma_{eq}^3} \right)^2 \quad \text{et} \quad g(\theta_L) = 1 - \frac{6|\theta_L|}{\pi}$$

k_w et q_3 sont des paramètres, $J_3 = \det \Sigma_d$ est le troisième invariant du déviateur des contraintes, $q_4 = \frac{1}{2}$ pour des problèmes 2D et $q_4 = \frac{1}{3}$ pour des problèmes 3D. θ_L est l'angle de Lode défini par :

$$\theta_L = \arctan \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \frac{s_{II} - s_{III}}{s_I - s_{III}} \right) \right] \quad (2.51)$$

où $s_I \geq s_{II} \geq s_{III}$, sont les composantes principales du déviateur des contraintes Σ_d . Tout comme dans le modèle GTN, l'endommagement est accéléré au delà d'une valeur

critique f_c pour tenir compte des effets de la coalescence des cavités microscopiques :

$$\begin{aligned} \dot{D} &= k_D [q_1(\dot{f}_g + \dot{f}_n + \dot{f}_s)], \quad \text{ou} \quad \dot{D} = k_D [q_1(\dot{f}_g + \dot{f}_n) + \dot{f}_s] \\ k_D &= \begin{cases} 1 & \text{si } D \leq q_1 f_c \\ \frac{1/q_1 - f_c}{f - f_c} + k(f - f_c) & \text{si } D > q_1 f_c \end{cases} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Un seul nouveau paramètre matériau à identifier expérimentalement (k_w dans [Nahshon et Hutchinson, 2008] et q_3 dans Xue [2008]) est ajouté dans ces modèles pour caractériser l'intensité de l'évolution de l'endommagement par cisaillement. Les fonctions $\omega(\xi)$ et $g(\theta_L)$ sont des mesures sur l'état des contraintes permettant de différencier les états de contraintes sans cisaillement ($\omega(\xi) \approx 0$ ou $g(\theta_L) \approx 0$) des états de contraintes issus d'une combinaison entre le cisaillement pur et une pression hydrostatique ($\omega(\xi) \approx 1$ ou $g(\theta_L) \approx 1$).

Le modèle de Nahshon et Hutchinson [2008] étend le modèle GTN aux basses triaxialités, mais à forte triaxialité les prédictions du modèle GTN sont meilleures que celles de Nahshon et Hutchinson [2008]. Sur cette base, Nielsen et Tvergaard [2010] ont proposé d'introduire de manière heuristique un nouveau facteur $\Omega(\eta_\Sigma)$ sur la fonction \dot{f}_s avec pour idée d'utiliser le modèle GTN pour les fortes triaxialités et celui de Nahshon et Hutchinson [2008] pour les basses triaxialités :

$$\dot{f}_s = \Omega(\eta_\Sigma) k_w \frac{f \omega(\xi)}{\Sigma_{eq}} \Sigma_d : \dot{\mathbf{E}}^p, \quad \text{où} \quad \Omega(\eta_\Sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta_\Sigma \leq \eta_1 \\ \frac{\eta_\Sigma - \eta_2}{\eta_1 - \eta_2} & \text{si } \eta_1 \leq \eta_\Sigma \leq \eta_2 \\ 0 & \text{si } \eta_\Sigma > \eta_2 \end{cases} \quad (2.53)$$

où η_1 et η_2 sont deux nouveaux paramètres à identifier. L'expression (2.53) signifie que le modèle de Nahshon et Hutchinson [2008] est utilisé pour les basses triaxialités $\eta_\Sigma \leq \eta_1$, alors que le modèle GTN est utilisé pour les hautes triaxialité $\eta_\Sigma > \eta_2$. Entre η_1 et η_2 une interpolation linéaire entre les deux modèles est appliquée.

Modèles incorporant les effets de formes des cavités

D'autres modèles étendent l'analyse limite sur une sphère creuse de Gurson à des cavités sphéroïdales et ellipsoïdales. Ces modèles prennent en compte les effets de forme de cavités et permettent donc une prédiction de l'endommagement à basse triaxialité sur la base d'une approche micromécanique. On peut citer le modèle GLD (Gologanu-Leblond-Devaux) [Gologanu et al., 1993, 1994; Gologanu, 1997; Gologanu et al., 1997], le modèle de Madou et Leblond [Madou et Leblond, 2012b,a].

2.3 Fissuration : création de surface

Les modèles d'endommagement présentés dans la section précédente permettent de prédire le lieu d'apparition d'une fissure dans un milieu continu notamment lorsqu'un ou plusieurs champs mécaniques atteignent une valeur critique. La théorie de la fissuration qu'est la mécanique de la rupture s'intéresse aux états post-endommagement. En particulier, elle décrit le comportement des matériaux solides présentant des discontinuités géométriques. Ces discontinuités modifient les champs locaux de contraintes et de déformations. De manière générale trois types de variables ont été développées en mécanique linéaire de la rupture pour caractériser la perturbation du champ de contraintes due à la présence d'une fissure : les facteurs d'intensité des contraintes issus de l'approche locale [Williams, 1959; Irwin, 1957], le taux de restitution d'énergie issu de l'approche énergétique de [Griffith et Ingram Taylor, 1921], les intégrales de contour [Rice, 1968; Bui, 1978]. Certains des résultats ont par la suite été étendus au cadre de la plasticité généralisée (voir [Lemaitre et al., 2003]).

En parallèle du développement d'approches théoriques pour décrire l'état des contraintes au voisinage d'une fissure ainsi que les conditions d'accroissement de cette fissure, des méthodes ont été développées au cours des dernières décennies pour représenter et décrire la transition endommagement-localisation-discontinuité sur le plan numérique notamment dans le cadre de la méthode des éléments finis. On peut citer de manière non exhaustive les modèles de zones cohésives, l'approche variationnelle de la rupture (endommagement à gradient) développé par Francfort et Marigo [1998], la méthode des éléments finis étendus X-FEM de Moës et Belytschko [2002], la méthode Eigen-Erosion [Pandolfi et Ortiz, 2012], la méthode TLS (thick level set) [Moës et al., 2011].

Par la suite, deux grandeurs (l'intégrale J et le $CTOD$) issues de la mécanique linéaire et non linéaire de la rupture, utilisées pour caractériser la ténacité et les conditions de propagation d'une fissure dans le cadre des matériaux élastoplastiques, sont brièvement présentées. Puis seront décrits les modèles de zones cohésives comme une approche théorique et numérique qui permet de décrire l'initiation et la propagation de fissure.

2.3.1 Extensions de la mécanique linéaire de la rupture

2.3.1.1 L'intégrale J de Rice-Eshelby

Si on considère un milieu fissuré plan (contraintes ou déformations planes, problème antiplan) où la fissure est selon l'axe x_1 (voir figure 19). L'intégrale J due à Eshelby [1956]; Cherepanov [1967]; Rice [1968], définie en élasticité peut-être étendue aux matériaux élastiques non linéaires et utilisée pour les matériaux plastiques en conditions de *chargement monotone* et en l'absence de toute décharge élastique [Chaboche et al., 2001b] :

$$J = \int_{\Gamma} \left(\omega n_1 - \Sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds = \int_{\Gamma} \left(\omega dx_2 - \Sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right) \quad (2.54)$$

où $\omega = \int_0^{E_{ij}} \Sigma_{ij} dE_{ij}$ est la densité d'énergie de déformation. Γ est un contour ouvert orienté (voir figure 19) qui contient la pointe de la fissure. \mathbf{n} est la normale sortante à Γ , \mathbf{u} est le champ de déplacement.

Si le matériau est élastique, cette intégrale J est égale au *taux de restitution d'énergie* de la théorie de Griffith ($J = G = -\frac{dP}{dA}$ avec \mathcal{A} l'aire de la fissure et P est l'énergie potentielle du solide considéré) [Budiansky et Rice, 1973]. La valeur de l'intégrale (2.54) est indépendante du contour Γ entourant la fissure considérée [Rice, 1968] sous les conditions suivantes [Brocks et al., 2003] :

- processus indépendant du temps,
- absence de forces volumiques et quasi-staticité, $\text{div } \Sigma = \mathbf{0}$,
- petites déformations, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v})$,
- problème plan,
- matériau homogène et élastique,
- conditions de bord libre sur les lèvres de la fissure ($\Sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$).

Si le matériau est élastoplastique, cette indépendance au contour n'est maintenue que si le contour Γ est pris en dehors de la zone plastique (plasticité confinée) ou alors si le chargement en plus d'être monotone est *proportionnel* ou *radial* ($\Sigma(t) = k(t)\Sigma^0$, $k(0) = 1$ en chaque point de la structure).

Du fait de cette propriété d'indépendance au contour, l'intégrale J est une grandeur caractérisant les champs à la pointe de la fissure et est en pratique utilisée d'une manière analogue au facteur d'intensité des contraintes K , le critère de propagation de la fissure s'écrivant [ASTM, 2018] :

$$J > J_{IC}$$

où J_{IC} est une valeur critique de J dépendant du matériau, de la géométrie et du chargement.

2.3.1.2 L'ouverture en fond de fissure (CTOD ou CTOA)

Dans le cas des matériaux ductiles, les observations expérimentales montrent que la fissure commence par s'émousser et ce n'est qu'après un certain émoussement qu'elle avance [Chaboche et al., 2001b; Wells, 1961]. Cela a conduit [Wells, 1961, 1969] à proposer une mesure de cet émoussement (notamment le déplacement des faces de la fissure) comme un critère pour évaluer la ténacité des matériaux ductiles. Cette mesure est appelée le CTOD (Crack Tip Opening Displacement) ou le CTOA (Crack Tip Opening Angle). Mesurer directement la valeur critique du CTOD à la pointe de fissure n'est pas simple. En pratique le CTOD peut être déterminé à partir des valeurs de déplacement (COD ou

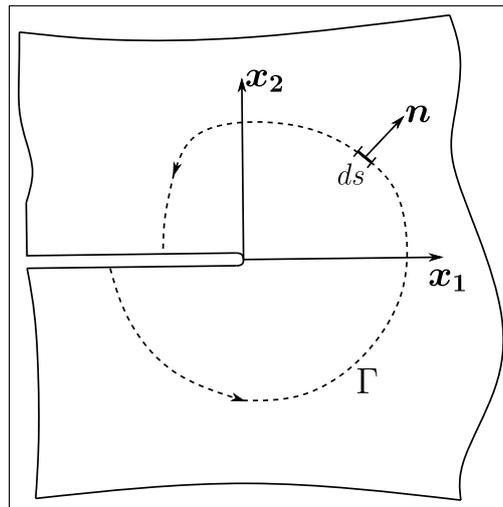


Figure 19 – Contour d'intégration.

Crack Opening Displacement) mesurées à une distance z de la pointe de fissure [ASTM, 2018].

Un fort intérêt de ce critère est qu'il est relié à l'intégrale J définie précédemment par :

$$J = m\sigma_0\delta \quad (2.55)$$

où δ est la valeur du CTOD, σ_0 la contrainte d'écoulement et m est un paramètre sans dimension qui dépend des propriétés d'écoulement du matériau et de l'état du chargement (contrainte plane vs déformation plane). Cette relation montre qu'il y a une relation directe entre J et CTOD et ces deux quantités peuvent être utilisées indifféremment pour caractériser la ténacité du matériau. En particulier, il est possible de définir de façon équivalente un critère de propagation en terme de J ou en terme de CTOD (voir ASTM [2018]).

2.3.2 Fissuration par emploi de Modèles de Zones Cohésives (MZC)

2.3.2.1 Généralités

Les *modèles de zones cohésives (MZC)* sont une approche théorique et numérique pour modéliser les discontinuités (ex : des fissures, des interfaces dans des solides bi-phasés etc) dans les matériaux solides. Cette approche ne prétend pas représenter finement les mécanismes de rupture, mais permet une description simplifiée de la zone active en pointe de fissure et un passage progressif d'un milieu continu à une discontinuité. Le principe des MZC trouve son origine dans les travaux de Dugdale [1960] et Barenblatt [1959] dans le cadre d'extension de la mécanique linéaire de la rupture. Elles découlent de la considération que les contraintes infinies en pointe de fissure prédites en mécanique linéaire de la rupture ne sont pas réalistes. Dugdale [1960] et Barenblatt [1959] proposent

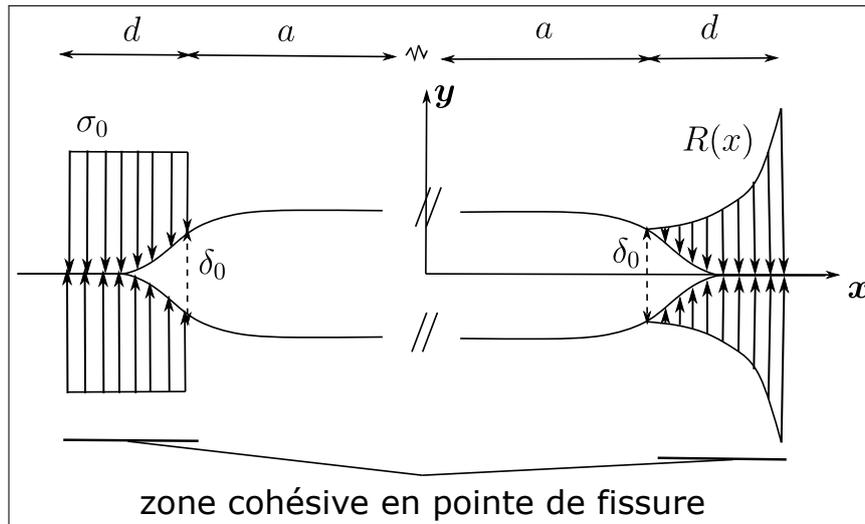


Figure 20 – Définition de la zone cohésive en pointe de fissure par [Dugdale \[1960\]](#) (à gauche) et [Barenblatt \[1959\]](#) (à droite).

de décrire la pointe de fissure non plus comme un point de singularité, mais plutôt comme une *process zone* s'étendant sur une distance d dans laquelle les contraintes demeurent finies (voir figure 20). Dans son approche [Dugdale \[1960\]](#) considère que les contraintes locales en tout point du matériau (supposé élastique parfaitement plastique) sont limitées par la contrainte d'écoulement σ_0 du matériau considéré. [Barenblatt \[1959\]](#) considère qu'il existe dans la zone cohésive une distribution d'efforts de cohésion $R(x)$ qui sont la représentation macroscopique des interactions atomiques agissant sur le front de fissure.

Depuis ces travaux fondamentaux, les modèles de zones cohésives ont subi des développements importants dans la littérature, notamment dans le domaine des matériaux granulaires, matériaux composites, des problèmes de modélisation d'assemblage avec interface adhésives etc. La majorité des modèles actuels de zones cohésives sont sous la forme d'une loi de type *traction-séparation* ou donnés à partir d'un potentiel surfacique φ^{coh} dont dérive la contrainte cohésive $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$:

$$\mathbf{R} = \mathcal{R}([\mathbf{u}]) \quad \text{ou} \quad \mathbf{R} = \frac{\partial \varphi^{coh}}{\partial [\mathbf{u}]} \quad (2.56)$$

où $[\mathbf{u}]$ est le saut de déplacement entre la lèvres inférieure et la lèvres supérieure de la fissure (ou encore le saut de déplacement à la traversée de la fissure dans le milieu continu entourant la fissure). Notons la différence avec l'approche originelle de Barenblatt où les efforts de cohésion sont exprimés en fonction de la distance au front de fissure. Il est usuel d'exprimer la loi cohésive dans le repère normal-tangent associé au plan de la fissure :

$$[\mathbf{u}] = [u_n] \mathbf{n} + [\mathbf{u}_T] \quad \text{avec} \quad [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = [u_n]$$

$$\mathbf{R} = R_n \mathbf{n} + \mathbf{R}_T \quad \text{avec} \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} = R_n$$

où \mathbf{n} est la normale au plan de la fissure. $[u_n]$ décrit le mode I et $[\mathbf{u}_T]$ les modes II et III.

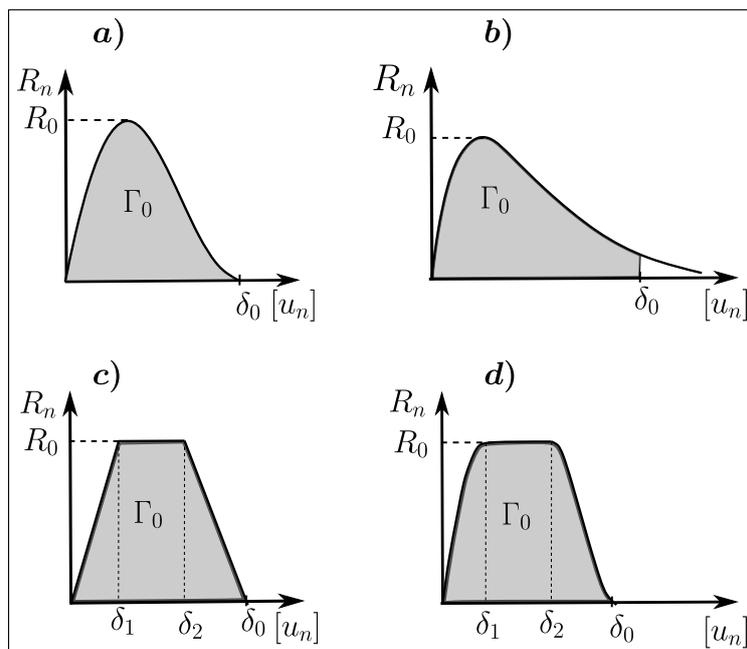


Figure 21 – Quelques modèles proposés dans la littérature d’après [Schwalbe et al. \[2012\]](#)) pour la modélisation de la rupture ductile. **a)** [\[Needleman, 1987\]](#), **b)** [\[Needleman, 1990\]](#), **c)** [\[Tvergaard et Hutchinson, 1992\]](#), **d)** [\[Scheider et Brocks, 2003\]](#).

La forme de la loi $\mathcal{R}([\mathbf{u}])$ pour un matériau est généralement inconnue et plusieurs formes de lois (modèles) sont proposées dans la littérature [\[Needleman, 1987, 1990; Tvergaard et Hutchinson, 1992; Scheider et Brocks, 2003; Banerjee et Manivasagam, 2009\]](#). Quelques modèles sont illustrés sur la figure 21. La plupart de ces modèles sont complètement déterminés par deux paramètres, δ_0 la valeur de l’ouverture à laquelle les efforts de cohésion deviennent nuls et R_0 la contrainte cohésive maximale. Pour relier les modèles de zones cohésives à la mécanique linéaire de la rupture, les paramètres cohésifs (R_0 et δ_0) sont choisis de manière à assurer l’égalité entre l’énergie de décohésion Γ_0 et le taux de restitution d’énergie de Griffith G ou la valeur de l’intégrale J à l’initiation de la propagation de fissure [Schwalbe et al. \[2012\]](#). Par exemple, en mode I pur :

$$\Gamma_0 = \int_0^\infty R_n \cdot d[u_n] = G. \quad (2.57)$$

Il a été montré que sous l’hypothèse d’une propagation stable et rectiligne d’une fissure dans un matériau élastique et homogène, il y a équivalence entre un modèle de zone cohésive et l’utilisation du critère de Griffith si l’énergie de décohésion est prise égale au taux de restitution d’énergie [\[Rice, 1978; Monerie, 2000; Acary et Monerie, 2006\]](#).

D’un point de vue pratique l’intérêt dans l’emploi des zones cohésives est :

- le petit nombre de paramètres à identifier (généralement 2 entre R_0 , δ_0 et Γ_0 , le troisième paramètre étant relié aux 2 autres par l’équation (2.57));
- les MZC décrivent l’évolution locale de la process zone en pointe de fissure en régularisant les valeurs des champs mécaniques tout en étant reliés aux grandeurs

énergétiques globales comme le taux de restitution d'énergie ;

- sur le plan numérique, les MZC permettent de décrire explicitement l'ouverture et de la propagation des fissures dans un maillage éléments finis. Ainsi elles se couplent également avec d'autres méthodes numériques de modélisation de l'endommagement et de la rupture telles que la méthode *X-FEM* (Wolf et al. [2017]), la méthode *Thick Level Set* (LÉ et al. [2018]), ou encore la méthode de champs de phases (*Phase-Field*) Paggi et Reinoso [2017] dans lesquelles les zones cohésives sont insérées pour décrire explicitement la discontinuité de la matière résultant de la localisation de l'endommagement.

Malgré leurs nombreux avantages dont leur formalisme relativement simple, l'implémentation numérique et l'utilisation pratiques des zones cohésives ont soulevé des difficultés dont quelques-unes sont listées ci-dessous :

- **Problèmes d'instabilités dues à l'adoucissement dans la loi cohésive** [Chaboche et al., 2001a; Monerie, 2000; Acary et Monerie, 2006]. La solution (en déplacement) d'un problème d'équilibre quasi-statique de solides élastiques liés par une zone cohésive n'est pas toujours unique. Cette non unicité de la solution équilibrant le système peut mener à des sauts de solutions dans les simulations faisant intervenir les modèles de zones cohésives. Monerie [2000]; Acary et Monerie [2006] ont étudié les conditions d'unicité de la solution au problème d'équilibre de solides élastiques liés par une zone cohésive.
- **Dépendance des chemins de fissuration au maillage** [Tijssens et al., 2000; Radin et Sadun, 1996]. La dépendance à la morphologie du maillage des chemins de fissurations obtenus par des simulations avec les méthodes de zones cohésives a été mise en évidence par Tijssens et al. [2000]. Néanmoins, la réponse macroscopique force-déplacement reste principalement indépendante de la morphologie du maillage. L'indépendance du chemin de fissuration peut être obtenue si le maillage respecte la propriété dite d'*isopérimétrie* (i.e. lorsque la taille de maille tend vers zéro, il est possible de trouver pour tout chemin de fissuration une ligne passant aux interfaces des mailles décrivant ce chemin de fissuration [Radin et Sadun, 1996]).
- **Perte de rigidité de la structure lors de l'emploi de modèles de zones cohésives intrinsèques** [Acary et Monerie, 2006; Chaboche et al., 2001a; Blal, 2013; Blal et al., 2013]. L'insertion des modèles de zones cohésives intrinsèques entre les mailles volumiques dans un modèle éléments finis induit une souplesse additionnelle artificielle, qui réduit la rigidité de la structure globale.
- **Des coûts numériques pouvant être prohibitifs**. Notamment lorsqu'un grand nombre de zones cohésives sont employées, le calcul parallèle s'avère nécessaire.

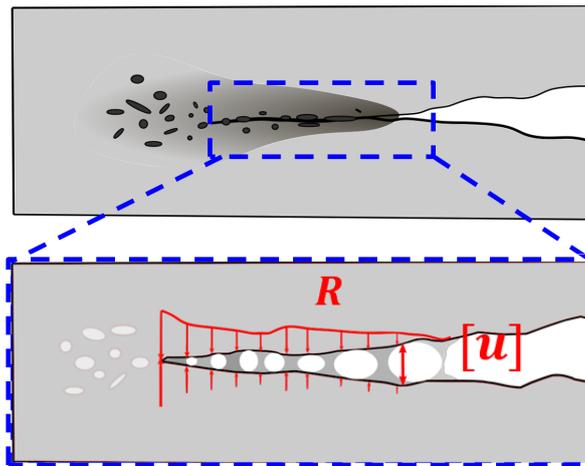


Figure 22 – Illustration 2D de la synthèse des mécanismes microscopiques de la process zone par une relation traction \mathbf{R} - séparation $[\mathbf{u}]$.

2.3.2.2 Application des modèles de zones cohésives à la rupture ductile

L'application des zones cohésives à la rupture ductile est une approche relativement récente et reste encore un domaine de recherche ouvert. Lorsque couplés à des modèles d'endommagement, les zones cohésives sont une méthode de modélisation explicite de la propagation de fissure. Par contre, dans l'approche cohésive-volumique, les modèles de zones cohésives font office à la fois de modèle d'endommagement et de méthode de fissuration, le comportement volumique étant durcissant sans endommagement. Les zones cohésives sont alors perçues comme une représentation de la process zone dans laquelle se localise l'endommagement avant fissuration (voir figure 22).

Les premières application des zones cohésives à la rupture ductile remontent aux travaux de Needleman [1987] qui étudie la décohésion d'une inclusion dans une matrice et de Tvergaard et Hutchinson [1992] qui analysent l'influence des paramètres élastoplastiques sur la propagation d'une fissure. Quelques modèles proposés dans la littérature couramment utilisés pour la modélisation de la propagation de fissure dans un matériau ductile sont illustrés sur la figure 21.

L'utilisation de ces modèles nécessite de déterminer la valeur des paramètres des modèles, notamment l'énergie de rupture Γ_0 , la contrainte cohésive critique R_0 et l'ouverture à rupture δ_0 . Ces trois paramètres étant liés par l'équation (2.57), l'identification de deux des paramètres permet de déterminer le troisième. On note actuellement deux types d'approches pour identifier les paramètres d'une loi cohésive pour un matériau ductile dans la littérature [Schwalbe et al., 2012] :

- *Approche par identification expérimentale* : l'énergie de rupture Γ_0 et la contrainte cohésive critique R_0 sont identifiés sur la base d'essais sur éprouvettes normales ou entaillées. R_0 peut être identifiée directement comme la contrainte ultime (ratio entre la force mesurée à rupture et la section réelle à rupture) sur des essais de traction sur éprouvettes normales ou entaillées. Cette contrainte ultime peut aussi

être évaluée numériquement par des simulations éléments finis de l'essai en question $F(\Delta b)$ qui permet d'obtenir la répartition des contraintes dans la section au début de la rupture. La contrainte cohésive critique R_0 est alors prise égale à la contrainte maximale atteinte dans la section [Schwalbe et al., 2012]. L'énergie de rupture est généralement prise comme la valeur critique de l'intégrale J (J_{IC}) en mode I.

L'identification séparée des deux paramètres via les procédures mentionnées ci-dessus ne permet pas toujours d'obtenir le jeu de paramètre (R_0 et Γ_0) optimal. Dans ce cas, des méthodes inverses d'identification basées sur des algorithmes d'optimisation à deux paramètres sont utilisées pour déterminer le jeu de paramètres du modèle cohésif qui permet de reproduire les résultats d'essais (courbes R ou $CTOD$) avec des simulations numériques [Schwalbe et al., 2012]. Des méthodes expérimentales permettant d'identifier directement une courbe traction-séparation à partir des mesures expérimentales peuvent également être employées [Richefeu et al., 2012].

— *Identification numérique sur la base d'un volume élémentaire représentatif :*

une autre approche pour déterminer une loi cohésive pour un matériau ductile, consiste à identifier la loi de traction-séparation à la réponse d'un volume élémentaire représentatif (VER) d'un matériau poreux. Dès lors, la forme de la loi cohésive peut être déterminée à partir de la modélisation micromécanique d'un VER communément appelée "cellule unitaire ou élémentaire". Cette cellule unitaire est alors soit creuse avec une matrice élastoplastique, soit homogène avec un modèle de comportement de type GTN (voir figure 23). L'évolution de la contrainte en fonction de l'élongation (normalisée par la taille de la cellule) de la cellule unitaire soumise à un chargement est soit utilisée directement comme la loi locale cohésive, soit utilisée pour identifier les paramètres d'un modèle de zone cohésive. Les premiers auteurs à utiliser ce type d'approche sont Tvergaard et Hutchinson [1992] qui ont identifié les paramètres d'un modèle de zones cohésives sur une cellule unitaire soumise à un état de déformation uniaxiale. L'intérêt de cette approche est l'identification des paramètres de zones cohésives en fonction de l'état du chargement. Une étude du comportement d'une cellule unitaire GTN en déformation plane sous différents chargements à triaxialité constante a permis à Siegmund et Brocks [1999, 2000a,b] d'identifier une évolution de R_0 et Γ_0 en fonction de la triaxialité des contraintes η_{Σ} (voir figure 24). Cette approche a également été appliquée par Scheider et al. [2006]; Scheider [2009] qui ont identifié $R_0(\eta_{\Sigma})$ et $\Gamma_0(\eta_{\Sigma})$ en étudiant les déformations d'une cellule unitaire axisymétrique. Anvari et al. [2007] ont déterminé l'évolution de $R_0(\eta_{\Sigma}, \dot{E})$ et $\Gamma_0(\eta_{\Sigma}, \dot{E})$ sur la base d'une cellule unitaire donc le comportement dépend de la vitesse de déformation \dot{E} .

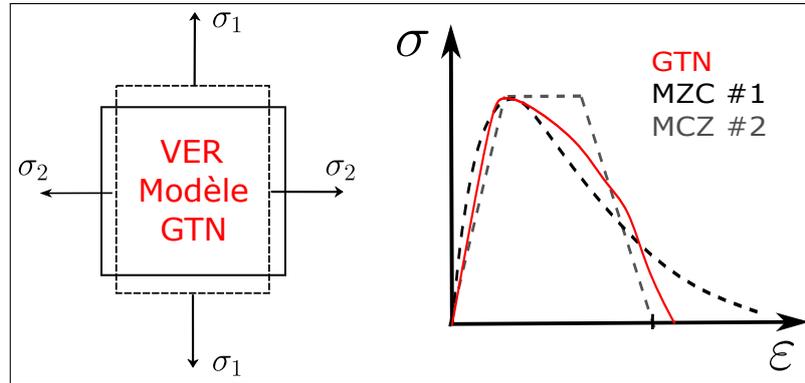


Figure 23 – Principe de détermination des paramètres cohésifs par identification sur cellule unitaire GTN. MZC #1 : identification avec modèle de type *Needleman* [1990]. MZC #2 : identification avec modèle de type *Tvergaard et Hutchinson* [1992]

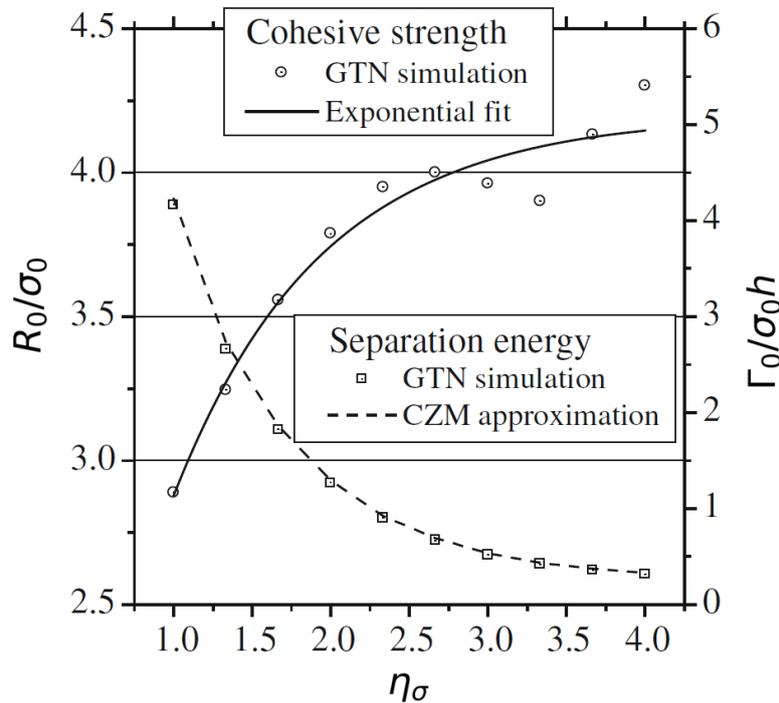


Figure 24 – Identification de la contrainte cohésive R_0 et de l'énergie cohésive Γ_0 en fonction de la triaxialité des contraintes η_{Σ} par *Schwalbe et al.* [2012]. h est la taille de la cellule unitaire élémentaire ayant servi à l'identification des paramètres cohésifs. D'après [*Siegmund et Brocks, 2000a; Scheider, 2009; Schwalbe et al., 2012*], les paramètres R_0 et Γ_0 peuvent se mettre sous la forme $\frac{R_0}{\sigma_0} = C_0 - C_1 \exp\left(\frac{C_2 - \eta_{\Sigma}}{C_3}\right)$ et $\frac{\Gamma_0}{\sigma_0 h} = C'_0 - C'_1 \exp\left(\frac{C'_2 - \eta_{\Sigma}}{C'_3}\right)$ où $C_0, C_1, C_2, C_3, C'_0, C'_1, C'_2, C'_3$ sont des constantes à identifier.

Chapitre 3

Un modèle cohésif pour l'endommagement ductile surfacique

Comme souligné par l'état de l'art (chapitre 2), l'endommagement dans les matériaux ductiles (notamment les métaux et les céramiques à haute température) est régi par la nucléation, la croissance et la coalescence des phases poreuses dans le matériau (tout du moins pour les fortes triaxialités). L'évolution de ces phases poreuses a tendance à induire une localisation des déformations plastiques, zone dans laquelle l'endommagement est maximal avant la rupture finale du matériau. Le but de ce chapitre est de formuler une loi de traction - séparation sur une base micromécanique en s'appuyant sur l'idée que la zone de localisation des déformations (par exemple en pointe d'une fissure) peut être décrite comme une bande cohésive. Un modèle micromécanique (modèle GTN) est utilisé pour modéliser le comportement de la bande cohésive et la loi de traction - séparation est obtenue par projection du comportement volumique dans une cinématique surfacique. L'intérêt d'une telle modélisation est que des informations micromécaniques, notamment la fraction volumique de phases poreuses, sont contenues directement dans la loi cohésive. Pour que le comportement de la loi cohésive soit similaire au comportement d'une cellule unitaire GTN, la cinématique surfacique réduite est enrichie par des déformations additionnelles dans le plan cohésif.

Sommaire

3.1	Généralités	71
3.2	Bande cohésive : cinématique	72
3.3	Loi de traction - séparation	74
3.4	Prise en compte des effets triaxiaux	77
3.4.1	Enrichissement de la cinématique cohésive par une variable de déformation dans le plan	77
3.4.2	Caractérisation de l'état du chargement et évaluation de la déformation dans le plan	79

3.5	Comparaison entre le modèle d'interface et le modèle GTN sur un point matériel	81
3.5.1	Paramètres matériaux	81
3.5.2	Intégration du modèle GTN et du modèle de zone cohésive . .	82
3.5.3	Déformation axisymétrique	83
3.5.4	Direction de contrainte axisymétrique	84
3.5.5	Discussion	85
3.6	Éléments de mise en œuvre	86
3.6.1	Modèle de zone cohésive intrinsèque	86
3.6.2	Introduction de l'irréversibilité et de la décharge	89
3.6.3	Hypothèse de la théorie de la déformation	91
3.7	Modèle simplifié analytique	92
3.8	Synthèse	95
3.8.1	Récapitulatif de la démarche : transformation d'un modèle d'en- dommagement volumique en un modèle de zone cohésive	96
3.8.2	Synthèse des équations du modèle retenu	97

3.1 Généralités

La rupture ductile est souvent précédée par la localisation des déformations dans des bandes d'épaisseur réduite où les déformations plastiques s'intensifient. Une étude récente de [Tekoglu et al. \[2015\]](#) basée sur des simulations de cellules unitaires a montré que la localisation des déformations à l'échelle macroscopique survient soit simultanément, soit avant la coalescence des cavités en fonction de la triaxialité des contraintes. La localisation des déformations est un précurseur de la rupture ductile et la bande de localisation plastique est le lieu où s'initie la fissuration. Les phénomènes de localisation des déformations jouent un rôle important en rupture ductile. Dans certaines circonstances, des déformations locales intenses vont précipiter la nucléation, la croissance et la coalescence des cavités. Dans d'autres circonstances, la nucléation et la croissance des cavités provoquent la localisation des déformations [[Benzerga et al., 2016](#)].

Cette localisation des déformations observée sur le plan expérimental est en concordance avec la théorie classique des problèmes d'évolution élastoplastique. En effet, les champs de vitesses (et par extension les champs de déplacements) solutions d'un problème d'évolution élastoplastique peuvent présenter *des discontinuités*. Ces discontinuités possibles dans les champs de vitesses solutions peuvent être perçues comme des cas limites de localisation des déformations. La recherche d'un cadre mathématique convenable pour étudier ce phénomène a menée à l'introduction de l'espace fonctionnel $BD(\Omega)$ (espace des champs de vecteurs dont le tenseur déformation est un tenseur de mesure bornées sur Ω) comme cadre fonctionnel correct pour rechercher les solutions des problèmes d'évolution élastoplastique [[Suquet, 1988](#)] :

$$BD(\Omega) = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} = (u_i); u_i \in L^1(\Omega); E_{ij}(\mathbf{u}) \in M^1(\Omega)\}$$

où $M^1(\Omega)$ est l'espace des mesures bornées de Ω .

Lorsque sur un domaine Ω , le champ de déplacement \mathbf{u} admet une surface de discontinuité S de normale \mathbf{n} (voir figure 25), son saut étant noté $[\mathbf{u}]$, alors la déformation est interprétée comme une distribution et se définit (dans l'hypothèse des petites perturbations) par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + {}^T \nabla \mathbf{u}) \mathcal{X}_{\Omega-S}(\mathbf{x}) + ([\mathbf{u}] \otimes_s \mathbf{n}) \delta_S \quad (3.1)$$

δ_S est la distribution de Dirac surfacique de support S , ∇ est l'opérateur gradient ($\nabla \mathbf{u} = u_{i,j}$) et ${}^T \nabla$ sa transposée (${}^T \nabla \mathbf{u} = u_{j,i}$), $(a \otimes_s b)_{ij} = \frac{1}{2}(a_i b_j + a_j b_i)$, et $\mathcal{X}_X(x)$ est la fonction caractéristique du domaine X :

$$\mathcal{X}_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{si } x \notin X \end{cases} \quad (3.2)$$

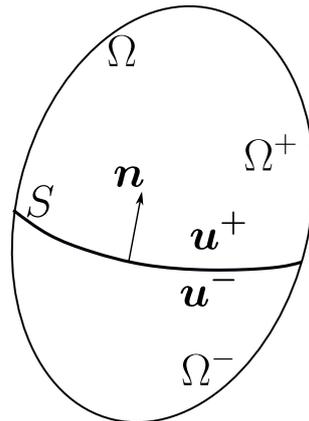


Figure 25 – Domaine Ω avec champ présentant une discontinuité.

Le tenseur de déformation est défini classiquement en dehors de S et sur S il peut être vu comme une masse de Dirac.

Il est à noter que si le champ de déplacement est *incompressible* ($\text{tr } \mathbf{E}(\mathbf{u}) = 0$), alors sur S : $\text{tr } \mathbf{E}(\mathbf{u}) = [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = 0$. Le champ \mathbf{u} n'admet que des discontinuités tangentielles. D'un point de vue physique, ces discontinuités tangentielles peuvent correspondre à des lignes de glissement (qui sont elles mêmes des cas limites de la localisation des déformations dans des bandes de cisaillement).

Si le champ de déplacement est *compressible* ($\text{tr } \mathbf{E}(\mathbf{u}) \neq 0$), alors des discontinuités normales sont possibles. Elles peuvent être perçues comme l'ouverture normale d'une fissure suite à la localisation des déformations.

3.2 Bande cohésive : cinématique

Considérons un domaine matériel $\Omega \in \mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$ constitué d'un matériau ductile. Le champ de déplacement dans Ω est désigné \mathbf{u} . On considère qu'il existe une zone de localisation des déformations notée S_h . Les frontières du domaine S_h admettent la même normale \mathbf{n} . La bande de localisation sépare le domaine Ω en deux sous-domaines Ω^- and Ω^+ . La normale \mathbf{n} pointant de Ω^- vers Ω^+ .

Les hypothèses essentielles consistent à :

- considérer que l'endommagement ductile dans le matériau se concentre dans la bande de localisation des déformations. *Le comportement de la bande de localisation est décrit par le modèle de plasticité poreux (modèle GTN)*. En dehors de la bande de localisation, le matériau est sain et obéit au modèle de plasticité sans endommagement (von Mises par exemple) ;
- l'épaisseur h de la bande de localisation est supposée très petite par rapport à la taille du domaine Ω . Les champs mécaniques peuvent être considérés uniformes dans l'épaisseur.

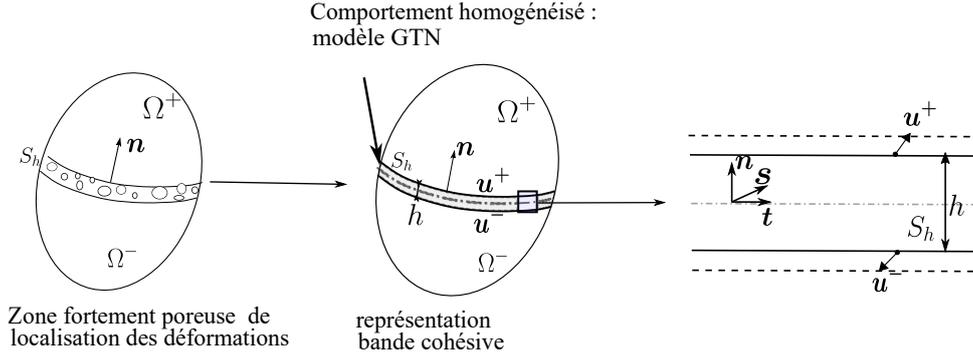


Figure 26 – Modélisation d'une zone de localisation des déformations comme une zone bande cohésive. Définition du repère local normal-tangent dans la bande $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{s}\}$.

L'ensemble de la démarche est synthétisé sur la figure 26.

En désignant par \mathbf{u}^+ et \mathbf{u}^- les valeurs respectives du champ de déplacement sur les bords des domaines Ω^+ et Ω^- partagés avec S_h , le saut de déplacement (l'ouverture de fissure) à la traversée de la bande de localisation se définit par :

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- \quad (3.3)$$

$$[\mathbf{u}] = [u_n]\mathbf{n} + [u_t]\mathbf{t} + [u_s]\mathbf{s}, \quad (3.4)$$

avec $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{s}\}$ une base orthonormée associée à la normale \mathbf{n} (en dimension 2 le choix de \mathbf{t} est unique).

Le taux de déformation dans la bande de localisation plastique S_h est évalué par :

$$\dot{\mathbf{E}} \approx \frac{[\dot{\mathbf{u}}] \otimes_s \mathbf{n}}{h} = \begin{bmatrix} \frac{[\dot{u}_n]}{h} & \frac{[\dot{u}_t]}{2h} & \frac{[\dot{u}_s]}{2h} \\ \frac{[\dot{u}_t]}{2h} & 0 & 0 \\ \frac{[\dot{u}_s]}{2h} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Les taux de déformation hydrostatique \dot{E}_m , déviatorique $\dot{\mathbf{E}}_d$ et équivalent \dot{E}_{eq} associés au tenseur de taux de déformation défini à l'équation (3.5) s'écrivent :

$$\dot{E}_m = \frac{1}{3} \text{tr} \dot{\mathbf{E}} = \frac{[\dot{u}_n]}{3h} \quad (3.6)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_d = \dot{\mathbf{E}} - \dot{E}_m \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \frac{2[\dot{u}_n]}{3h} & \frac{[\dot{u}_t]}{2h} & \frac{[\dot{u}_s]}{2h} \\ \frac{[\dot{u}_t]}{2h} & -\frac{[\dot{u}_n]}{3h} & 0 \\ \frac{[\dot{u}_s]}{2h} & 0 & -\frac{[\dot{u}_n]}{3h} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\dot{E}_{eq} = \left(\frac{2}{3} \dot{\mathbf{E}}_d : \dot{\mathbf{E}}_d \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3h} \left([\dot{u}_n]^2 + \frac{3}{4} [\dot{u}_t]^2 + \frac{3}{4} [\dot{u}_s]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

Quelques remarques peuvent être formulées :

— la bande S_h est une régularisation d'une surface de discontinuité employée pour

des applications pratiques ([Michel et al., 1994; Oliver et al., 1999; Kulkarni et al., 2010]). Lorsque l'épaisseur de la bande de localisation h tend vers 0, la surface de discontinuité est retrouvée et le taux de déformation défini dans (3.5) approche la définition (3.1) (car $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathcal{X}_{S_h}(x) = \delta_S$);

- une conséquence de cette modélisation est que les déformations dans le plan de normale \mathbf{n} sont négligées dans l'approximation (3.5);
- la modélisation introduit une longueur (paramètre h) qui caractérise l'épaisseur de la zone de localisation des déformations. La localisation des déformations macroscopiques peut être contrôlée par des caractéristiques microstructurales (plan de glissement dans les mono ou polycristaux, réseau de failles microscopiques dans les systèmes géologiques, répartition des cavités dans le processus de rupture ductile). Pour les matériaux ductiles une telle caractéristique de la microstructure est souvent prise comme l'espacement moyen Λ entre les inclusions ou entre les cavités. À ce stade on peut envisager que le paramètre de régularisation h soit lié à la microstructure, $h = \mathcal{F}(\Lambda)$.

3.3 Loi de traction - séparation

Le principe de l'approche par zones cohésives est de représenter le comportement de la process zone (zone d'amorçage d'une fissure) par une relation entre le saut de déplacement $[\mathbf{u}]$ à la traversée de la bande S_h (exprimant l'ouverture de fissure) et le vecteur contrainte \mathbf{R} . L'effort de cohésion dans la modélisation présente est assimilée à la valeur du vecteur contrainte appliquée sur la bande de localisation qui provoque la rupture du matériau :

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (3.9)$$

Dans la suite, on désignera indifféremment la bande de localisation par le terme zone cohésive.

Comme le domaine Ω est en équilibre, ce vecteur contrainte est continu à la traversée de la bande de localisation :

$$[\mathbf{R}] = \mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^- = [\boldsymbol{\Sigma}] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

Il a été supposé que le comportement du matériau dans la bande de localisation est décrit par le modèle GTN rappelé en section 2.2.2. Par analogie aux contraintes limites du modèle de Gurson équation (2.36), les contraintes seuils dans la zone cohésive s'expriment en fonction du taux de déformation par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_m \mathbf{i} + \Sigma_d \quad \text{où} \quad \Sigma_d = \frac{2 \Sigma_{eq}}{3 \dot{E}_{eq}} \dot{\mathbf{E}}_d$$

avec

$$\begin{cases} \Sigma_m = \frac{2}{3q_2} \sigma_y M(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*) = \frac{2}{3q_2} \sigma_y \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{2\eta_{\dot{\mathbf{E}}}}{q_1 f^*} \right) - \operatorname{arcsinh}(2\eta_{\dot{\mathbf{E}}}) \right) \\ \Sigma_{eq} = \sigma_y N(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*) = \sigma_y \left(\sqrt{1 + (2\eta_{\dot{\mathbf{E}}})^2} - \sqrt{(q_1 f^*)^2 + (2\eta_{\dot{\mathbf{E}}})^2} \right) \end{cases} \quad (3.11)$$

où il est rappelé que $\eta_{\dot{\mathbf{E}}} = \frac{\dot{E}_m}{\dot{E}_{eq}}$ est la triaxialité du taux de déformation et σ_y la contrainte d'écoulement de la matrice qui évolue en fonction d'une déformation équivalente $\bar{\epsilon}$.

Pour des raisons de commodités le tenseur des contraintes limites *normalisé* \mathbf{T} est introduit :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sigma_y} \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.12)$$

Le vecteur traction appliqué à la zone cohésive s'écrit :

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \sigma_y \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (3.13)$$

où

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} T_{nn} = \frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*) + \frac{4}{9} N(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*) \frac{1}{\dot{E}_{eq}} \frac{[\dot{u}_n]}{h} \\ T_{nt} = \frac{1}{3} N(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*) \frac{1}{\dot{E}_{eq}} \frac{[\dot{u}_t]}{h} \\ T_{ns} = \frac{1}{3} N(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*) \frac{1}{\dot{E}_{eq}} \frac{[\dot{u}_s]}{h} \end{cases} \quad (3.14)$$

avec

$$\dot{E}_{eq} = \frac{2}{3h} \left([\dot{u}_n]^2 + \frac{3}{4} [\dot{u}_t]^2 + \frac{3}{4} [\dot{u}_s]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \eta_{\dot{\mathbf{E}}} = \frac{[\dot{u}_n]}{2 \left([\dot{u}_n]^2 + \frac{3}{4} [\dot{u}_t]^2 + \frac{3}{4} [\dot{u}_s]^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.15)$$

Évolution de la variable d'endommagement f^*

L'évolution de la porosité f est donnée par (2.41), (2.42), (2.44). En faisant l'hypothèse d'une nucléation pilotée par la déformation équivalente et en exploitant l'expression du taux de déformation dans la bande cohésive (3.5), l'évolution de f s'écrit :

$$\dot{f} = \dot{f}_c + \dot{f}_n = (1 - f) \frac{[\dot{u}_n]}{h} + \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\epsilon} - \epsilon_N}{s_N} \right)^2 \right] \dot{\bar{\epsilon}} \quad (3.16)$$

où f_N représente la fraction volumique des inclusions, ϵ_N un paramètre de nucléation en déformation et s_N la déviation standard.

La porosité effective s'exprime par :

$$f^*([\mathbf{u}]) = \begin{cases} f([\mathbf{u}]) & \text{si } f([\mathbf{u}]) \leq f_c \\ f_c + k(f([\mathbf{u}]) - f_c) & \text{si } f([\mathbf{u}]) \geq f_c \end{cases} \quad (3.17)$$

Ecrouissage et nucléation

L'écrouissage de la matrice σ_y est calculé en fonction d'une déformation "équivalente" $\bar{\varepsilon}$ qui elle-même est solution de l'équivalence entre la dissipation macroscopique et de la moyenne de la dissipation microscopique [Gurson, 1977] :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{1-f} \left(T_{nn} \frac{[\dot{u}_n]}{h} + T_{nt} \frac{[\dot{u}_t]}{h} + T_{ns} \frac{[\dot{u}_s]}{h} \right) \quad (3.18)$$

La relation (3.18) vient de :

$$\begin{aligned} (1-f)\sigma_y \dot{\bar{\varepsilon}} &= \Sigma_{ij} \dot{E}_{ij} \quad (\text{où } \dot{E}_{ij} = \frac{([\dot{\mathbf{u}}] \otimes_s \mathbf{n})_{ij}}{h}) \\ &= \frac{\Sigma_{ij} n_j [\dot{u}_i] + \Sigma_{ij} n_i [\dot{u}_j]}{2h} \\ (1-f)\sigma_y \dot{\bar{\varepsilon}} &= \frac{R_i [\dot{u}_i]}{h} = \sigma_y \frac{T_{ik} n_k [\dot{u}_i]}{h} \quad (\text{dû à la symétrie de } \Sigma) \\ \text{d'où } \dot{\bar{\varepsilon}} &= \frac{1}{1-f} T_{ik} n_k \frac{[\dot{u}_i]}{h} \end{aligned}$$

Il est à noter que la loi d'évolution de la déformation "moyenne" $\bar{\varepsilon}$ (3.18) ne dépend pas de σ_y et reste par conséquent valable pour toute loi d'écrouissage $\sigma_y(\bar{\varepsilon})$.

L'ensemble des équations (3.13), (3.15), (3.16), (3.18) constitue la projection du modèle GTN dans la cinématique surfacique (3.5) et sera simplement noté loi de traction - séparation GTN/ZC .

La loi de traction - séparation obtenue présente néanmoins un inconvénient : elle ne peut pas représenter tous les états de chargements possibles dans une cellule élémentaire volumique. Cela est dû à l'absence de déformation dans le plan dans la cinématique surfacique (3.5). La conséquence en est que :

$$\eta_{\dot{\mathbf{E}}} = \frac{[\dot{u}_n]}{2 \left([\dot{u}_n]^2 + \frac{3}{4} [\dot{u}_t]^2 + \frac{3}{4} [\dot{u}_s]^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall [\dot{\mathbf{u}}] \in \mathbb{R}^3$$

La triaxialité du taux de déformation est majorée par $\frac{1}{2}$: tous les états du chargement allant au-delà de cette limite ne sont pas réalisables dans la cinématique surfacique réduite (3.5). Une évolution du modèle en ce sens est proposée dans la section suivante.

3.4 Prise en compte des effets triaxiaux

Il a été vu précédemment que les modèles de zones cohésives ne peuvent intrinsèquement parcourir tous les états de chargements. Il existe (au moins) deux façons de lever cette limitation. Une approche initialement proposée par [Tvergaard et Hutchinson \[1996\]](#); [Siegmund et Brocks \[1999\]](#) est de simplement faire dépendre les paramètres des lois de traction-séparation de grandeurs caractérisant l'état du chargement ($R_0 = R_0(\eta_{\Sigma}, E_{eq}, \dot{E}, \dots)$, $\Gamma_0 = \Gamma_0(\eta_{\Sigma}, E_{eq}, \dot{E}, \dots)$) comme discuté en bibliographie à la section 2.3.2.2. Les grandeurs caractérisant l'état du chargement étant alors prises sur un domaine volumique (maille volumique) adjacent à la zone cohésive.

Plus récemment, [Remmers et al. \[2013\]](#) ont proposé une autre approche pour améliorer la dépendance à l'état de chargement des modèles de zones cohésives. Elle consiste à définir un tenseur de déformation complet dans la zone cohésive :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{nn} & E_{nt} & E_{ns} \\ E_{tn} & E_{tt} & E_{ts} \\ E_{sn} & E_{st} & E_{ss} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\text{où } E_{nn} = \frac{[u_n]}{h}, \quad E_{nt} = \frac{[u_t]}{2h}, \quad E_{ns} = \frac{[u_s]}{2h}.$$

Les composantes des déformations dans le plan sont évaluées à partir des valeurs aux bords de la bande cohésive (sur le domaine volumique adjacent à la zone cohésive) de manière à assurer une certaine continuité des déformations à la traversée de la bande de localisation :

$$E_{tt} = \frac{1}{2} \left(E_{tt}|_{S_h^-} + E_{tt}|_{S_h^+} \right), \quad E_{ss} = \frac{1}{2} \left(E_{ss}|_{S_h^-} + E_{ss}|_{S_h^+} \right), \quad E_{ts} = \frac{1}{2} \left(E_{ts}|_{S_h^-} + E_{ts}|_{S_h^+} \right).$$

En pratique, les composantes des déformations aux bords de la zone cohésive proviennent des mailles volumiques adjacentes dans lesquelles les déformations sont exprimées dans le système de coordonnées global $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Il faut donc exprimer les déformations au bord venant du domaine volumique dans le repère local avant de les introduire dans le modèle de comportement de la zone cohésive.

Dans la suite, l'idée d'un enrichissement de la cinématique cohésive sera mise en œuvre pour améliorer le modèle de zone cohésive.

3.4.1 Enrichissement de la cinématique cohésive par une variable de déformation dans le plan

Pour un taux de déformation \dot{E}_{nn} , la présence des composantes de déformations dans le plan (\dot{E}_{tt} et \dot{E}_{ss}) dans le cas d'une approche volumique influence l'évolution de la variable d'endommagement f , ce qui n'est pas le cas dans la formulation cohésive qui ne tient pas compte des déformations dans le plan. Et de fait la variable d'endommagement

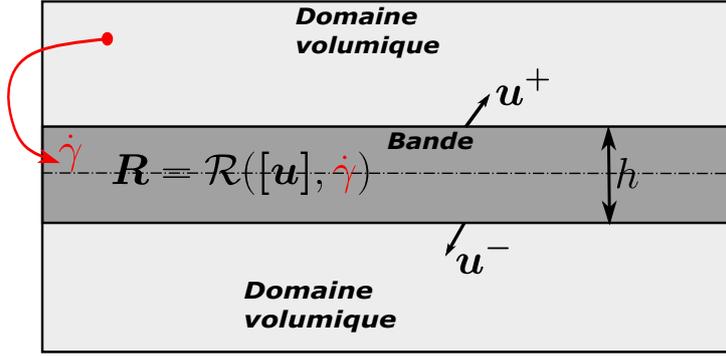


Figure 27 – Principe de prise en compte de l'état du chargement dans la zone cohésive. État du chargement caractérisé dans le voisinage de la bande cohésive, puis imposé à la bande cohésive.

dans le modèle de zone cohésive évolue toujours selon le mode correspondant à l'état de déformation *uniaxiale*.

Fort de ce constat, il est proposé un enrichissement du taux de déformation dans la zone cohésive de la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{[\dot{\mathbf{u}}] \otimes_s \mathbf{n}}{h} + \dot{\gamma} \mathbf{t} \otimes_s \mathbf{t} + \dot{\gamma} \mathbf{s} \otimes_s \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \frac{[\dot{u}_n]}{h} & \frac{[\dot{u}_t]}{2h} & \frac{[\dot{u}_s]}{2h} \\ \frac{[\dot{u}_t]}{2h} & \dot{\gamma} & 0 \\ \frac{[\dot{u}_s]}{2h} & 0 & \dot{\gamma} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

La variable γ ne décrit pas une cinématique physique dans la zone cohésive (qui est entièrement déterminée par le vecteur saut de déplacement $[\mathbf{u}]$). Cette variable doit être perçue comme un paramètre *ad hoc* permettant d'étendre la plage des états de chargements possibles dans le modèle de zone cohésive. La valeur de cette variable pourra être déterminée à partir d'informations sur l'état du chargement volumique voisin de la zone cohésive (voir figure 27). Quelques possibilités sur l'évaluation de $\dot{\gamma}$ en fonction de l'état du chargement sont discutées dans la section suivante 3.4.2.

La loi de traction - séparation avec la cinématique enrichie (3.20) est déterminée en suivant la même démarche qu'en section 3.3 :

— Loi de traction séparation :

$$\mathbf{R} = \sigma_y \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (3.21)$$

— Vecteur traction normalisé :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} T_{nn} = \frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*) + \frac{4}{9} N(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*) \frac{1}{\dot{E}_{eq}} \left(\frac{[\dot{u}_n]}{h} - \dot{\gamma} \right) \\ T_{nt} = \frac{1}{3} N(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*) \frac{1}{\dot{E}_{eq}} \frac{[\dot{u}_t]}{h} \\ T_{ns} = \frac{1}{3} N(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*) \frac{1}{\dot{E}_{eq}} \frac{[\dot{u}_s]}{h} \end{cases} \quad (3.22)$$

où

$$\dot{E}_{eq} = \frac{2}{3} \left(\left(\frac{[\dot{u}_n]}{h} - \dot{\gamma} \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{[\dot{u}_t]^2}{h^2} + \frac{3}{4} \frac{[\dot{u}_s]^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.23)$$

$$\eta_{\dot{E}} = \frac{\frac{[\dot{u}_n]}{h} + 2\dot{\gamma}}{2 \left(\left(\frac{[\dot{u}_n]}{h} - \dot{\gamma} \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{[\dot{u}_t]^2}{h^2} + \frac{3}{4} \frac{[\dot{u}_s]^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.24)$$

— Porosité modifiée :

$$f^* = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + k(f - f_c) & \end{cases} \quad (3.25)$$

— Loi d'évolution de la porosité :

$$\dot{f} = (1 - f) \left(\frac{[\dot{u}_n]}{h} + 2\dot{\gamma} \right) + A\dot{\varepsilon}; \quad (3.26)$$

— Loi d'écroûissage $\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon})$:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{1 - f} \left(T_{nn} \frac{[\dot{u}_n]}{h} + T_{nt} \frac{[\dot{u}_t]}{h} + T_{ns} \frac{[\dot{u}_s]}{h} + (T_{tt} + T_{ss}) \dot{\gamma} \right), \quad (3.27)$$

$$\text{où } T_{tt} = T_{ss} = \frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M(\eta_{\dot{E}}, q_1 f^*) + \frac{2}{9} N(\eta_{\dot{E}}, q_1 f^*) \frac{1}{\dot{E}_{eq}} \left(\dot{\gamma} - \frac{[\dot{u}_n]}{h} \right).$$

3.4.2 Caractérisation de l'état du chargement et évaluation de la déformation dans le plan

Le paramètre γ est introduit pour piloter l'état du chargement dans le modèle de zone cohésive. Une équation supplémentaire est nécessaire pour déterminer sa valeur. Différentes possibilités peuvent être envisagées pour évaluer $\dot{\gamma}$ en fonction de l'état du chargement qui est une donnée connue venant de *l'interface* ou du *domaine volumique voisin de la bande cohésive*. Trois approches sont discutées ci-dessous :

— **imposer une triaxialité du taux de déformation venant du domaine volumique** $\eta_{\dot{E}}^{vol}$. $\dot{\gamma}$ est alors déterminé pour que la triaxialité du taux de déformations de la zone cohésive $\eta_{\dot{E}}$ soit égale à la triaxialité imposée $\eta_{\dot{E}}^{vol}$.

$$\dot{\gamma} \text{ est solution de } \eta_{\dot{E}} = \eta_{\dot{E}}^{vol}, \text{ soit } \eta_{\dot{E}}^{vol} = \frac{\frac{[\dot{u}_n]}{h} + 2\dot{\gamma}}{2 \left(\left(\frac{[\dot{u}_n]}{h} - \dot{\gamma} \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{[\dot{u}_t]^2}{h^2} + \frac{3}{4} \frac{[\dot{u}_s]^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.28)$$

Les solutions de l'équation (3.28) dépendent des valeurs prises par $[\dot{\mathbf{u}}]$ et $\eta_{\dot{E}}^{vol}$ et sont discutées dans l'annexe A. Le tableau 5 synthétise les valeurs choisies de $\dot{\gamma}$ pour $[\dot{\mathbf{u}}]$ et $\eta_{\dot{E}}^{vol}$ donnés. Néanmoins cette approche s'avère inadaptée pour les matériaux supposés plastiquement incompressible ;

— **imposer une triaxialité des contraintes venant du domaine volumique** η_{Σ}^{vol} . $\dot{\gamma}$ est alors déterminé pour que la triaxialité des contraintes de la zone cohésive η_{Σ} soit égale à la triaxialité imposée η_{Σ}^{vol} .

	$\dot{\gamma}([\dot{\mathbf{u}}], \eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol})$
$\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol} < 0$	$\dot{\gamma} = -\frac{[\dot{u}_n]}{2h}$
$0 \leq \eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol} < 1$ et $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol} > 1$	$\dot{\gamma} = \frac{2(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol})^2 + 1}{2((\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol})^2 - 1)} \frac{[\dot{u}_n]}{h} - \frac{\sqrt{(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol})^2 \left(9 \frac{[\dot{u}_n]^2}{h^2} + 3(1 - (\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol})^2) \left(\frac{[\dot{u}_t]^2}{h^2} + \frac{[\dot{u}_s]^2}{h^2} \right) \right)}}{2((\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol})^2 - 1)}$
$\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol} = 1$	$\dot{\gamma} = \frac{1}{4} \frac{[\dot{u}_n]^2 + [\dot{u}_t]^2 + [\dot{u}_s]^2}{[\dot{u}_n]h}$

Tableau 5 – Valeurs de la variable $\dot{\gamma}$ en fonction de $[\dot{\mathbf{u}}]$ et de la triaxialité du taux de déformation $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol}$. Seul le cas $[\dot{u}_n] > 0$ est considéré ici (la décharge $[\dot{u}_n] \leq 0$ est traitée à la section 3.6.2)

$$\eta_{\Sigma}^{vol} = \frac{2}{3q_2} \frac{\operatorname{arcsinh}\left(\frac{2\eta_{\dot{\mathbf{E}}}}{q_1 f^*}\right) - \operatorname{arcsinh}(2\eta_{\dot{\mathbf{E}}})}{\sqrt{1 + (2\eta_{\dot{\mathbf{E}}})^2} - \sqrt{(q_1 f^*)^2 + (2\eta_{\dot{\mathbf{E}}})^2}}. \quad (3.29)$$

La résolution de l'équation (3.29) permet de déterminer $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}$, et une fois $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}$ connue, la valeur de $\dot{\gamma}$ peut être déduite en utilisant le tableau 5 (avec $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}$ à la place $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol}$). L'équation (3.29) nécessite une résolution numérique ;

- **une approche alternative** à la méthode précédente peut être envisagée pour éviter une résolution numérique. Elle consiste à calculer la triaxialité du taux de déformation imposée $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}$ à partir de l'état des contraintes Σ^{vol} venant du domaine volumique voisin en exploitant la règle de normalité. De la règle de normalité, le taux de déformation dans la bande cohésive s'écrit :

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi^{GTN}(\Sigma, f)}{\partial \Sigma} = \dot{\lambda} \left(\frac{q_1 q_2 f^*}{\sigma_y} \sinh\left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m}{\sigma_y}\right) \mathbf{i} + \frac{3}{\sigma_y^2} \Sigma_d \right) \quad \text{avec } \dot{\lambda} > 0, \quad (3.30)$$

la triaxialité du taux de déformation qui en découle est :

$$\eta_{\dot{\mathbf{E}}} = \frac{q_1 q_2 f^* \sinh\left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m}{\sigma_y}\right)}{2 \frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_y}}. \quad (3.31)$$

L'idée est de calculer $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}$ à partir de l'état de contraintes $(\Sigma_m^{vol}, \Sigma_{eq}^{vol})$ du domaine volumique qui prend en compte des composantes dans le plan de la zone cohésive. Le taux de déformation imposé dans la zone cohésive caractérisant l'état du chargement est le suivant :

$$\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol} = \frac{q_1 q_2 f^* \sinh\left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m^{vol}}{\sigma_y}\right)}{2 \frac{\Sigma_{eq}^{vol}}{\sigma_y}}, \quad (3.32)$$

une fois $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol}$ connue, la valeur de $\dot{\gamma}$ peut être déduite en utilisant le tableau 5.

Les deux premières approches de calcul de $\dot{\gamma}$ seront illustrées dans la section suivante où la loi de traction - séparation GTN/ZC sera comparée à la réponse d'un point matériel GTN soumis à des chargements de déformations imposées ou de direction de contraintes imposées. La troisième approche d'évaluation de $\dot{\gamma}$ est celle qui sera retenue au chapitre 4 pour l'implémentation numérique dans un code de calcul.

3.5 Comparaison entre le modèle d'interface et le modèle GTN sur un point matériel

Dans cette section, le modèle de zone cohésive est comparé à la réponse d'une cellule unitaire GTN axisymétrique sous différents types de *chargements axisymétriques*. Il est particulièrement mis en évidence comment la cinématique enrichie par γ permet d'assurer une équivalence (à l'élasticité près) entre la loi de traction-séparation GTN/ZC et le comportement du point matériel GTN.

3.5.1 Paramètres matériaux

Les paramètres matériaux utilisés pour cette étude sont tirés de l'article [Siegmund et Brocks \[2000a\]](#) et sont spécifiés dans le tableau 6. Une loi puissance est utilisée pour décrire l'écroutissage du matériau :

$$\sigma_y(\bar{\epsilon}) = \sigma_0(1 + K\bar{\epsilon})^{\frac{1}{n}}. \quad (3.33)$$

Les paramètres σ_0 , K , et n sont calibrés sur la base des données expérimentales reportées par [Siegmund et Brocks \[2000a\]](#) (voir figure 28) et spécifiés dans le tableau 6.

Elasticité	E	ν						
	210 <i>GPa</i>	0.3						
Ecrouissage	σ_0	K	n					
	470 <i>MPa</i>	35.0	4.5					
GTN	q_1	q_2	f_0	k	f_c	f_N	ϵ_N	s_N
	1.5	1.0	0.0025	3.4	0.021	0.02	0.3	0.1

Tableau 6 – Paramètres matériaux pour un acier ferritique StE460 (désignation allemande) de [\[Siegmund et Brocks, 2000a\]](#). Paramètres d'écrouissage identifiées à partir des données expérimentales fournies dans [\[Siegmund et Brocks, 2000a\]](#).

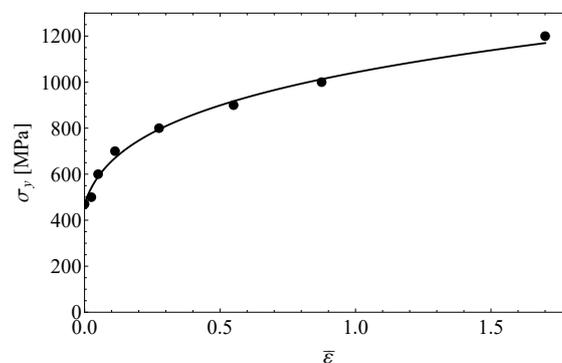


Figure 28 – Données expérimentales pour la courbe l'écrouissage d'un acier ferritique StE460 (désignation allemande) reportées dans [\[Siegmund et Brocks, 2000a\]](#) (point) et corrélation d'une loi puissance (3.33) (ligne).

3.5.2 Intégration du modèle GTN et du modèle de zone cohésive

L'intégration numérique sur un point matériel du modèle GTN avec prise en compte d'une élasticité linéaire isotrope est faite au moyen d'un schéma d'Euler implicite en exploitant l'algorithme d'Aravas [1987] dédié à une classe de modèles de plasticités sensibles à la contrainte hydrostatique Σ_m (des détails de cet algorithme sont présentés à l'annexe B).

Les équations du modèle de zone cohésive GTN/ZC sont intégrés au moyen d'un schéma d'Euler explicite. Les valeurs au temps t sont connues et notées par l'exposant (t) , soit $\mathbf{E}^{(t)}$, $f^{(t)}$, $\bar{\varepsilon}^{(t)}$ la déformation, la porosité et la déformation moyenne au temps t . Par souci de clarté, la dépendance en temps n'est pas précisée pour le temps $t + \Delta t$. Pour un incrément de chargement $\Delta \mathbf{E}$, la nouvelle porosité f et la déformation équivalente de la matrice $\bar{\varepsilon}$ à l'instant $t + \Delta t$ sont calculées par :

$$f = f^{(t)} + (1 - f^{(t)}) \frac{T_{nn} \Delta E_{nn} + 2 T_{tt} \Delta \gamma + T_{nt} \Delta E_{nt} + T_{ns} \Delta E_{ns}}{1 - f^{(t)}} \quad (3.34)$$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^{(t)} + \frac{T_{nn} \Delta E_{nn} + 2 T_{tt} \Delta \gamma + T_{nt} \Delta E_{nt} + T_{ns} \Delta E_{ns}}{1 - f^{(t)}} \quad (3.35)$$

avec :

$$T_{nn} = \frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M[\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*(f^{(t)})] + \frac{4}{9} N[\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*(f^{(t)})] \frac{\Delta E_{nn} - \Delta \gamma}{(\Delta E)_{eq}} \quad (3.36)$$

$$T_{tt} = \frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M[\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*(f^{(t)})] + \frac{2}{9} N[\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*(f^{(t)})] \frac{\Delta \gamma - \Delta E_{nn}}{(\Delta E)_{eq}} \quad (3.37)$$

$$T_{nt} = \frac{1}{3} N[\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*(f^{(t)})] \frac{1}{\dot{E}_{eq}} \frac{[\dot{u}_t]}{h} \quad (3.38)$$

$$T_{ns} = \frac{1}{3} N[\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*(f^{(t)})] \frac{1}{\dot{E}_{eq}} \frac{[\dot{u}_s]}{h} \quad (3.39)$$

$$\eta_{\dot{\mathbf{E}}} = (\Delta E)_m / (\Delta E)_{eq} \quad (3.40)$$

Ensuite, le vecteur traction \mathbf{R} à l'instant $t + \Delta t$ est donné par :

$$\begin{cases} R_n = \sigma_y(\bar{\varepsilon}) \left(\frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M[\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*(f)] + \frac{4}{9} N[\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*(f)] \frac{\Delta E_{nn} - \Delta \gamma}{(\Delta E)_{eq}} \right) \\ R_t = \sigma_y(\bar{\varepsilon}) \frac{2}{3} N[\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*(f)] \frac{\Delta E_{nt}}{(\Delta E)_{eq}} \\ R_s = \sigma_y(\bar{\varepsilon}) \frac{2}{3} N[\eta_{\dot{\mathbf{E}}}, q_1 f^*(f)] \frac{\Delta E_{ns}}{(\Delta E)_{eq}} \end{cases} \quad (3.41)$$

3.5.3 Déformation axisymétrique

On considère un tenseur de déformation axisymétrique imposé sous la forme suivante :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & r \dot{E}_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & r \dot{E}_{nn} \end{bmatrix} t, \quad \text{avec } |r| \leq 1 \text{ et } \dot{E}_{nn} > 0 \text{ constants} \quad (3.42)$$

La triaxialité du taux de déformation s'écrit $\eta_{\mathbf{E}} = \frac{1+2r}{2(1-r)}$. Notons que comme le chargement est proportionnel, la triaxialité du taux de déformation $\eta_{\mathbf{E}}$ est égale à la triaxialité du tenseur de déformation $\eta_{\mathbf{E}}$.

Pour le point matériel GTN, l'incrément de chargement imposé est : $\Delta E_{nn} = \dot{E}_{nn} \Delta t$ et $\Delta E_{tt} = \Delta E_{ss} = r \dot{E}_{nn} \Delta t$. Les valeurs de r imposées, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, 0 , $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ correspondent à des valeurs de triaxialité $\eta_{\mathbf{E}}$ de 0, 0.125, 0.5, 2, 3.5 .

Pour le modèle de zone cohésive, l'incrément de chargement imposé est : $\Delta E_{nn} = \dot{E}_{nn} \Delta t$ et $\Delta \gamma = r \dot{E}_{nn} \Delta t$.

Les évolutions de Σ_{nn}/σ_0 (ou R_n/σ_0) en fonction de E_{nn} (ou $\frac{[u_n]}{h}$) pour le point matériel GTN et pour le modèle de zone cohésive sont comparées sur la figure 29.

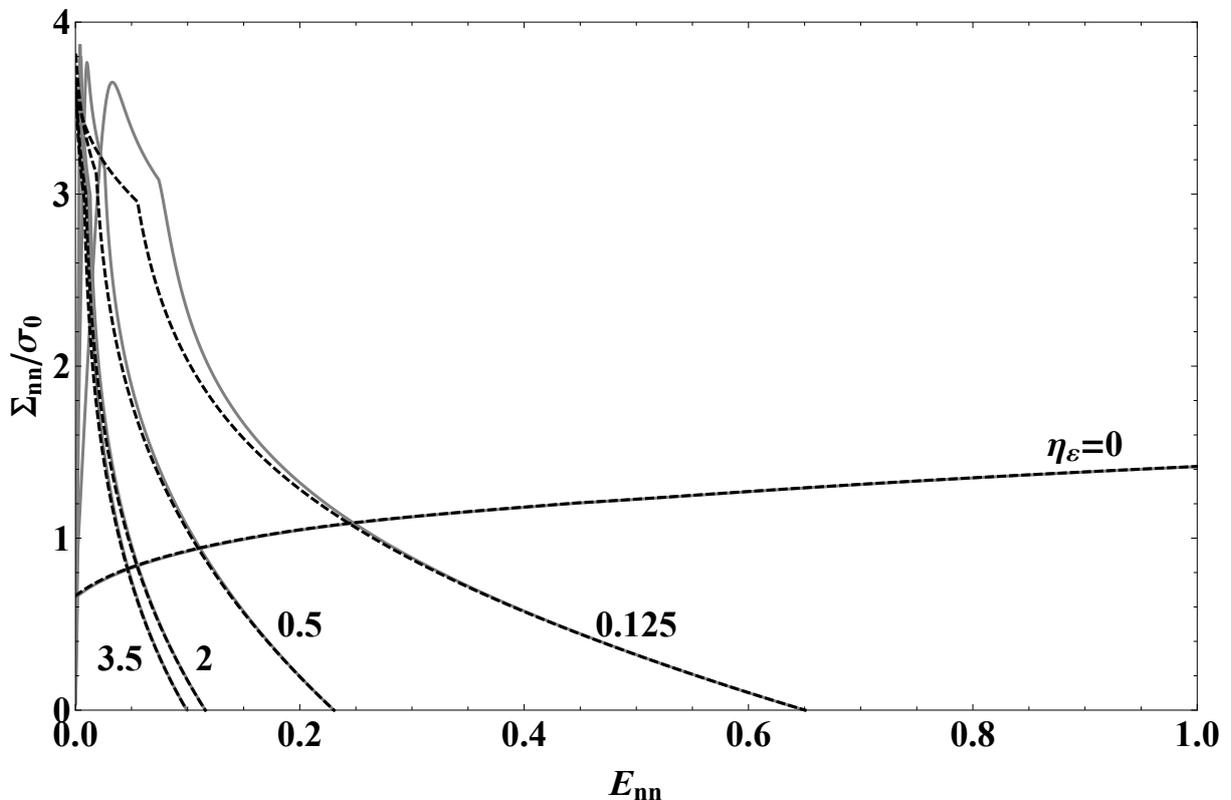


Figure 29 – Réponse du point matériel GTN (ligne continue) et du modèle de traction - séparation GTN/ZC (ligne interrompue) pour différents triaxialités des déformations $\eta_{\mathbf{E}}$ (déformations axisymétriques). Pas d'élasticité dans le modèle cohésif.

3.5.4 Direction de contrainte axisymétrique

Considérons cette fois-ci le cas d'une direction de contrainte axisymétrique imposée :

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = k(t) \boldsymbol{\Sigma}^o = k(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^* & 0 \\ 0 & 0 & r^* \end{bmatrix}, \quad \text{et } |r^*| \leq 1 \text{ maintenu constant} \quad (3.43)$$

où $\boldsymbol{\Sigma}^o$ est la direction des contraintes imposée, $k(t)$ est un scalaire inconnu définissant l'amplitude des contraintes¹. Le chargement est imposé à l'aide de la procédure de [Michel et al. \[1999\]](#). Cette procédure consiste à calculer $\boldsymbol{E}(t)$ et $k(t)$ tels que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}(t) = k(t) \boldsymbol{\Sigma}^o \\ \boldsymbol{\Sigma}^o : \boldsymbol{E}(t) = x \end{cases} \quad (3.44)$$

où x est un paramètre imposé pilotant le chargement. L'évolution de x est donnée par $x = \dot{x} t$ avec \dot{x} constant et positif. La triaxialité des contraintes $\eta_{\boldsymbol{\Sigma}}$ est reliée à r^* par $\eta_{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1+2r^*}{3(1-r^*)}$. Pour le point matériel GTN, un algorithme de Newton-Raphson est utilisé pour résoudre ce système d'équations pour chaque pas de chargement.

L'intégration du modèle de zone cohésive est faite en utilisant le schéma d'Euler explicite présenté dans la sous-section précédente 3.5.2. Au début de chaque pas de temps, la valeur de E_{nn} est augmentée de l'incrément d'un chargement ΔE_{nn} ($E_{nn}(t) = E_{nn}(t - \Delta t) + \Delta E_{nn}$). Par contre, l'incrément de γ (ou E_{tt}), noté $\Delta\gamma$ est déterminé de manière à imposer la triaxialité des contraintes dans la zone cohésive comme discuté en section 3.4.2. L'incrément $\Delta\gamma$, est calculé en résolvant l'équation :

$$\eta_{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{2}{3q_2} \frac{M[\eta_{\Delta\boldsymbol{E}}, q_1 f^*(f(t - \Delta t))]}{N[\eta_{\Delta\boldsymbol{E}}, q_1 f^*(f(t - \Delta t))]} \quad (3.45)$$

avec :

$$\eta_{\Delta\boldsymbol{E}} = \frac{(\Delta\boldsymbol{E})_m}{(\Delta\boldsymbol{E})_{eq}} \quad (3.46)$$

La résolution de l'équation (3.45) par une méthode numérique (Newton-Raphson), permet d'obtenir une valeur actualisée de $\eta_{\Delta\boldsymbol{E}}$. La valeur de $\Delta\gamma$ peut ensuite être déduite en utilisant les relations du tableau 5 (ou de l'annexe A) pour mettre à jour $\gamma(t)$. Ce calcul de la valeur courante $\gamma(t)$ est effectué au début de chaque incrément avant de déterminer les contraintes de cohésion en utilisant le schéma explicite de la sous-section 3.5.2.

Les évolutions de Σ_{nn}/σ_0 (ou R_n/σ_0) en fonction de E_{nn} (or $\frac{[u_n]}{h}$) pour le point matériel GTN et pour le modèle de zone cohésive sont comparées sur la figure 30.

1. Le chargement ne peut être piloté directement en imposant le tenseur des contraintes car ces dernières peuvent être non monotones à cause de la phase d'adoucissement. Alors, seule la direction des contraintes est imposée (l'amplitude des contraintes est une inconnue) et le chargement est piloté autrement.

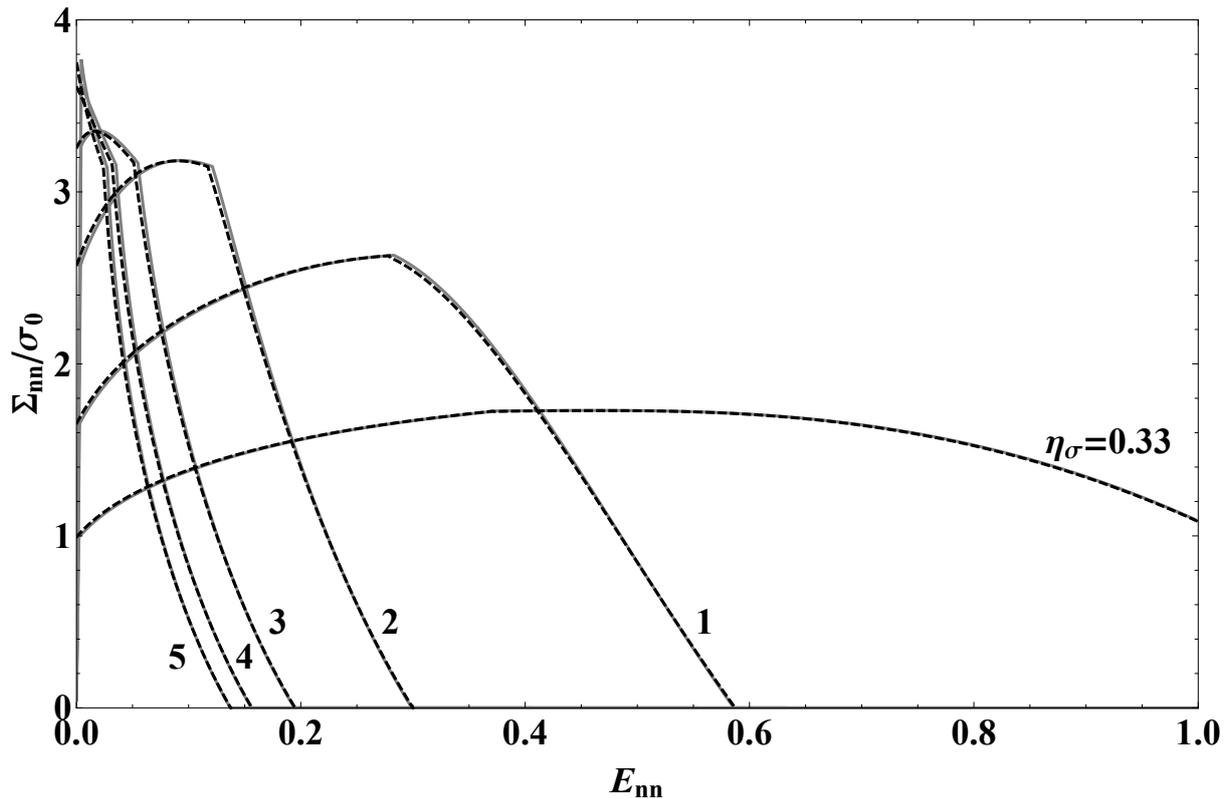


Figure 30 – Réponse du point matériel GTN (ligne continue) et du modèle de traction - séparation GTN/ZC (ligne interrompue) pour différentes triaxialités des contraintes η_Σ (contraintes axisymétriques). Pas d'élasticité dans le modèle cohésif.

3.5.5 Discussion

Comme montré sur les figures 29 et 30, le modèle de zone cohésive est en bon accord avec la réponse du point matériel GTN sur l'ensemble des triaxialités investiguées. La partie linéaire élastique initiale sur les résultats du point matériel GTN est due à l'introduction de l'élasticité dans la résolution des équations de comportement du modèle GTN. Par contre, comme le modèle de zone cohésive dérive des équations du modèle GTN (sans élasticité), il est donc un modèle à seuil sans partie élastique initiale (la réponse obtenue est extrinsèque). Cette différence explique la légère déviation observée entre la réponse du modèle cohésif et du modèle GTN particulièrement visible sur la figure 29 pour $\eta_E = 0.125$. Ces figures illustrent l'influence du trajet du chargement (caractérisé ici par la triaxialité des contraintes ou des déformations) sur l'évolution de la contrainte normale. En particulier, les paramètres d'une loi de traction-séparation tels que la contrainte maximale R_0 et énergie dissipée Γ_0 identifiées sur le comportement d'une cellule unitaire doivent tenir compte de la dépendance à la triaxialité des contraintes (voir figure 31) comme l'avaient noté [Siegmund et Brocks \[1999\]](#). Sans surprise, il est à noter que pour les basses triaxialités ($\eta_\Sigma = 0.33$, $\eta_E = 0$) l'endommagement est faible voir inexistant. Mais cette limitation peut être levée par exemple en ajoutant de manière phénoménologique un terme dans la loi d'évolution de la porosité f qui croit à basses triaxialités comme proposé par [Nahshon et Hutchinson \[2008\]](#) ou [Xue \[2008\]](#) (voir 2.2.2).

La figure 31 présente la contrainte cohésive maximale R_0 et l'énergie de cohésion $\Gamma_0 = h \int_0^\infty R_n dE_{nn}$ en fonction de la triaxialité des contraintes et des déformations.

L'intérêt du modèle de zone cohésive proposé réside aussi dans le fait que les paramètres matériaux du modèle micromécanique (modèle GTN) sont également les paramètres matériaux du modèle de zone cohésive. Aucune identification particulière de paramètres pour le modèle de zone cohésive n'a été effectuée.

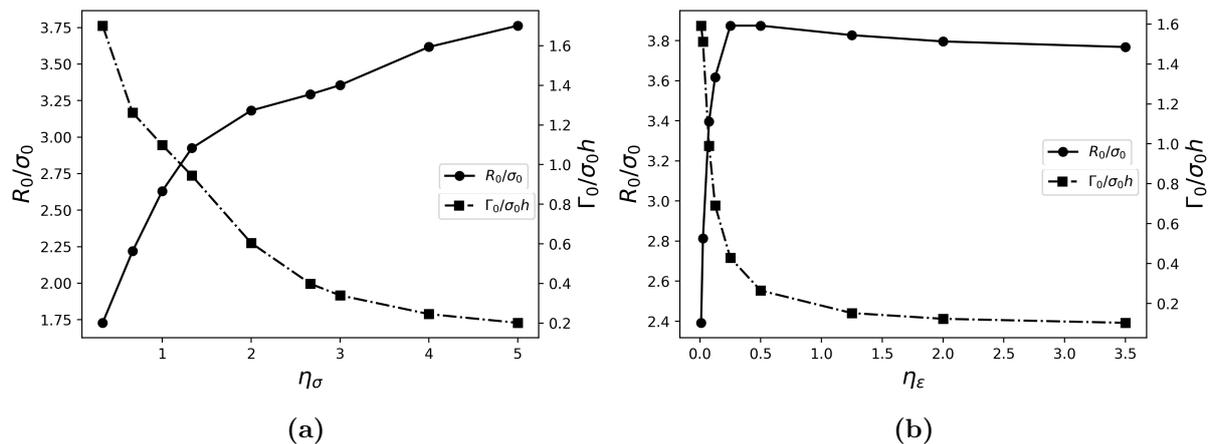


Figure 31 – Dépendance de la contrainte cohésive R_0 et de l'énergie de rupture Γ_0 à la triaxialité des contraintes η_Σ et des déformations η_E .

3.6 Éléments de mise en œuvre

Cette section discute de quelques modifications apportées au modèle de zone cohésive (loi de traction-séparation) en vue d'une intégration dans un code de calcul :

- ajout d'une raideur initiale finie (formulation d'une version intrinsèque du modèle de zone cohésive) ;
- description du comportement en situation de décharge (introduction de l'irréversibilité de l'endommagement) ;
- écriture du modèle dans le cadre de *la théorie de la déformation*. Cette hypothèse est introduite pour éliminer des problèmes d'oscillations numériques observées lors de l'implémentation du modèle dans un code calcul.

3.6.1 Modèle de zone cohésive intrinsèque

En pratique, les modèles de zones cohésives peuvent être regroupés en deux grandes familles : les modèles dits *extrinsèques* et les modèles dits *intrinsèques*. La différence entre ces deux classes de modèles réside principalement dans le comportement avant et à l'initiation de l'endommagement. Dans les modèles intrinsèques, le comportement de la zone cohésive est élastique jusqu'à une contrainte critique (ouverture critique) à partir de laquelle l'endommagement commence. La pente initiale des modèles intrinsèques est

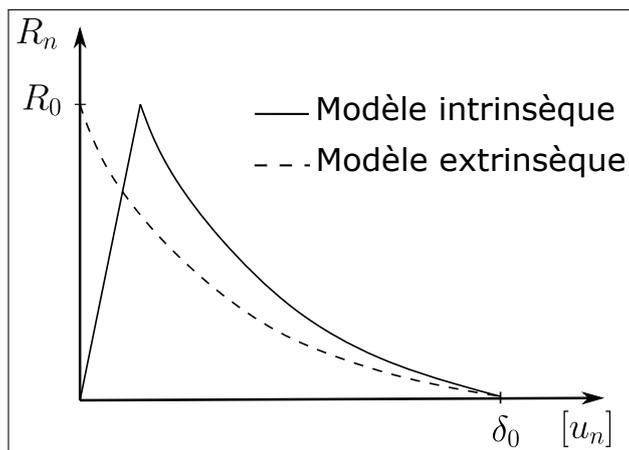


Figure 32 – Représentation schématique d'un modèle de zone cohésive intrinsèque et d'un modèle de zone cohésive extrinsèque.

finie. Dans les modèles extrinsèques, il n'y a pas d'ouverture de fissure jusqu'à ce qu'une contrainte critique soit atteinte. Ces modèles extrinsèques ont une pente initiale *infinie* (voir figure 32). Les modèles extrinsèques sont théoriquement plus stables que les modèles intrinsèques (Acary et Monerie [2006]; Kubair et Geubelle [2003]) et ne génèrent pas de perte de raideur lorsqu'insérés dans un maillage éléments finis. Néanmoins, les zones cohésives extrinsèques sont généralement plus délicates à implémenter dans un code de calcul éléments finis, car elles sont souvent insérées à la volée au cours du calcul lorsqu'un seuil est atteint ($\sigma > \mathbf{R}_0$) et nécessitent donc un traitement numérique particulier de l'initiation de l'ouverture.

La meilleure compatibilité des modèles de zones cohésives intrinsèques avec le formalisme de la méthode des éléments finis font qu'elles sont souvent préférées en vue d'une implémentation numérique.

Pour une loi cohésive *extrinsèque* $\mathbf{R} = \mathcal{R}([\mathbf{u}])$ quelconque, lorsque la contrainte cohésive initiale (ou seuil) R_0 est connue, alors il est possible de transformer la loi cohésive en une loi *intrinsèque* en ajoutant une partie linéaire initiale jusqu'à R_0 avec une pente (raideur cohésive) notée respectivement C_N et C_T pour les directions normale et tangentielle ($C_S = C_T$).

Lorsque la contrainte seuil n'est pas connue (ce qui est le cas dans la loi ZC/GTN¹) une autre méthode doit être envisagée. Il est proposé de reformuler un modèle de zone cohésive extrinsèque quelconque sous une forme intrinsèque en pondérant le vecteur contrainte de cohésion \mathbf{R} par des fonctions tendant vers $\mathbf{0}$ lorsque $[\mathbf{u}]$ tend vers 0 et tendant rapidement vers 1 lorsque que $[\mathbf{u}]$ croît :

1. Bien que la surface de charge (ou seuil) d'écoulement plastique du modèle GTN soit explicitement connue, la valeur des composantes Σ_{ij} au moment où le seuil du modèle GTN est atteint dépend du trajet de chargement qui a été imposé pour atteindre la surface seuil. Les valeurs initiales du vecteur de cohésion \mathbf{R} correspondent aux composantes $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$ au début de l'écoulement plastique et ne sont donc pas connues a priori.

$$\mathbf{R}^{(int)} = \begin{cases} R_n^{(int)} = \left(1 - \exp \left(-\alpha_n \frac{[u_n]}{h} \right) \right) R_n \\ R_t^{(int)} = \left(1 - \exp \left(-\alpha_t \frac{|[u_t]|}{h} \right) \right) R_t \\ R_s^{(int)} = \left(1 - \exp \left(-\alpha_s \frac{|[u_s]|}{h} \right) \right) R_s \end{cases} \quad (3.47)$$

avec α_n , α_t , α_s des constantes qui permettent de calibrer indirectement la pente initiale.

Ces raideurs initiales présentes dans les modèles intrinsèques ne sont pas une propriété du matériau, mais plutôt des paramètres de régularisation numériques. Comme souligné en bibliographie à la section 2.3.2, la conséquence de l'introduction des pentes initiales dans les modèles de zones cohésives est la diminution artificielle de la raideur globale du matériau. En pratique ces raideurs des modèles de zones cohésives doivent être prises suffisamment élevées pour limiter la perte de raideur, mais en même temps elles ne doivent pas être trop importantes afin d'éviter des problèmes d'instabilités numériques. Une étude paramétrique sur le choix de la raideur cohésive et ses effets a été menée dans [Espinosa et Zavattieri, 2003]. La perte de raideur due à l'insertion des modèles intrinsèques a été étudiée dans la littérature et des critères ont été proposés pour estimer des valeurs adaptées de raideur cohésive en fonction des *propriétés du matériau* (E , ν , σ_0) et du *maillage* (taille de maille, type d'éléments) [Blal et al., 2012, 2013; Tomar et al., 2004; Espinosa et Zavattieri, 2003].

Dans le cadre de la loi de traction-séparation GTN/ZC, étant données des valeurs de raideurs initiales C_N et C_T souhaitées, une estimation convenable des paramètres α_n , α_t , α_s est donnée par :

$$\alpha_n = \frac{C_N h}{\sigma_0 \left(\frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M \left(\frac{1}{2}, q_1 f^*(f_0) \right) + \frac{2}{3} N \left(\frac{1}{2}, q_1 f^*(f_0) \right) \right)}, \quad (3.48)$$

$$\alpha_t = \alpha_s = \frac{\sqrt{3} C_T h}{\sigma_0 (1 - q_1 f^*(f_0))}. \quad (3.49)$$

Il est à noter que ces estimations sont données à titre indicatif. Elles permettent de déterminer des valeurs de paramètres assurant que les fonctions $R_n^{(int)}$, $R_t^{(int)}$, $R_s^{(int)}$ données en (3.47) ont une pente initiale de l'ordre de la raideur initiale C_N , C_T souhaitée. Le détail des calculs et hypothèses menant aux formules (3.48), (3.49) est présenté à l'annexe C. En pratique, les raideurs peuvent aussi être calibrées numériquement ; par exemple par une simulation du début d'un essai de traction simple avec des zones cohésives. La comparaison de la valeur du module d'Young évaluée à partir de la courbe force-déplacement simulée, à sa valeur théorique permet de calibrer les paramètres numériques C_N et C_T ou α_n , α_t , α_s (dans le cas de la formulation (3.47)) de façon à minimiser l'écart entre la valeur théorique et celle de la simulation.

3.6.2 Introduction de l'irréversibilité et de la décharge

Le modèle de zone cohésive défini jusqu'à présent est réversible. Le processus d'élaboration d'une fissure étant irréversible (l'énergie consommée par la fissuration est définitivement perdue), il convient de définir :

- un critère de décharge,
- un comportement en décharge (tenant compte de l'irréversibilité).

Les termes "charge" et "décharge" désignent dans le modèle de zone cohésive l'accroissement ou à la diminution du saut de déplacement $[\mathbf{u}]$. Deux modélisations sont possibles pour les modèles de zones cohésives prenant en compte les modes mixtes :

- la décharge peut être traitée séparément pour les modes normal et tangentiel, c'est-à-dire que le modèle de zone cohésive peut être en charge suivant le mode normal et en décharge suivant le mode tangentiel et vice versa ;
- un critère de décharge couplé peut être défini. Par exemple dans la littérature [Ortiz et Pandolfi \[1999\]](#); [Acary et Monerie \[2006\]](#); [Perales \[2005\]](#); [Blal \[2013\]](#) un saut de déplacement "effectif" $[\mathbf{u}]_{eff} = \sqrt{[u_n]^2 + [u_t]^2 + [u_s]^2}$ est souvent considéré. Dans ce cas la décharge ne survient que lorsque $[\mathbf{u}]_{eff}$ diminue, même si le saut de déplacement de certaines composantes augmente.

Le choix d'un traitement séparé de la décharge suivant les différentes directions est fait et présenté ci-dessous. La décharge survient dans la direction normale \mathbf{n} si :

$$[u_n]^{(t)} - [u_n]^{(t-\delta t)} < 0, \quad (3.50)$$

et dans les directions tangentielles \mathbf{t} ou \mathbf{s} si :

$$|[u_t]^{(t)}| - |[u_t]^{(t-\delta t)}| < 0 \quad \text{ou} \quad |[u_s]^{(t)}| - |[u_s]^{(t-\delta t)}| < 0. \quad (3.51)$$

Le comportement en décharge doit être défini de manière à tenir compte du caractère irréversible du processus de fissuration. Là encore plusieurs modélisations existent. Certains auteurs proposent une décharge vers l'origine [[Chaboche et al., 1997](#); [Ortiz et Pandolfi, 1999](#); [Chaboche et al., 2001a](#)] (voir figure 33a) et d'autres auteurs ont formulés des modèles de zones cohésives avec une décharge menant à une ouverture non nulle lorsque les contraintes de cohésion sont nulles [Scheider et Brocks \[2003\]](#) (voir figure 33b).

Suivant l'approche décrite dans [[Ortiz et Pandolfi, 1999](#)], il est fait le choix heuristique que la décharge s'effectue de manière *élastique vers l'origine* comme illustré sur la figure 34. "Elastique" signifiant qu'après décharge, la recharge se fait suivant le même trajet pris lors de la décharge (s'il n'y a pas eu variation de l'endommagement¹ f^* ainsi que de l'état du chargement entre-temps).

1. Le choix d'un traitement séparé de la décharge suivant chaque direction ayant été fait, une composante $[u_i]$ peut être en décharge, alors qu'une autre $[u_j]$ est en charge si bien que l'endommagement f^* varie alors que $[u_i]$ est en décharge.

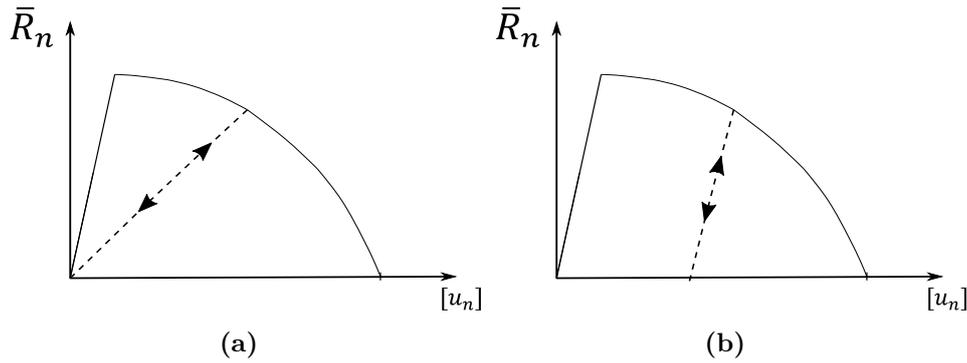


Figure 33 – Principes de décharge formulés dans la littérature.

Trois variables de cumul sont introduites pour prendre en compte l'histoire du chargement :

$$[u_i]_{max} = \max\{|[u_i](\tau)|, 0 \leq \tau \leq t\} \quad \text{avec } i = n, t, s \quad (3.52)$$

$[u_n]_{max}$, $[u_t]_{max}$, $[u_s]_{max}$ sont les valeurs maximales atteintes en valeur absolue par l'ouverture (ou le saut du déplacement) dans chaque direction au cours de l'histoire du chargement. En considérant la décharge, les efforts de cohésion s'expriment comme :

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{cases} (R_n^{(int)})_{max} \frac{[u_n]}{[u_n]_{max}} \\ (R_t^{(int)})_{max} \frac{[u_t]}{[u_t]_{max}} \\ (R_s^{(int)})_{max} \frac{[u_s]}{[u_s]_{max}} \end{cases} \quad (3.53)$$

où $(R_n^{(int)})_{max}$, $(R_t^{(int)})_{max}$, $(R_s^{(int)})_{max}$ sont les composantes des efforts de cohésion $\mathbf{R}^{(int)}$ correspondant aux sauts de déplacements ($[u_n]_{max}$, $[u_t]_{max}$, $[u_s]_{max}$).

Il est adjoint au comportement en décharge une irréversibilité de la variable d'endommagement (la porosité), ainsi que de l'écroutissage.

$$\begin{aligned} \forall \tau \in [0, t], \dot{f}(\tau) &\geq 0 \\ \forall \tau \in [0, t], \dot{\bar{\varepsilon}}(\tau) &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Bien que les porosités à l'échelle microscopique peuvent se refermer (lors d'un chargement en compression), la variable f^* est comprise comme une variable d'endommagement dans la loi de traction-ouverture et est considérée irréversible. En pratique deux tests sont ajoutés dans le schéma d'intégration pour s'assurer du respect de la condition (3.54) :

$$\text{si } f^{(t)} < f^{(t-\delta t)} \quad \text{alors } f^{(t)} = f^{(t-\delta t)} \quad (3.55)$$

$$\text{si } \bar{\varepsilon}^{(t)} < \bar{\varepsilon}^{(t-\delta t)} \quad \text{alors } \bar{\varepsilon}^{(t)} = \bar{\varepsilon}^{(t-\delta t)} \quad (3.56)$$

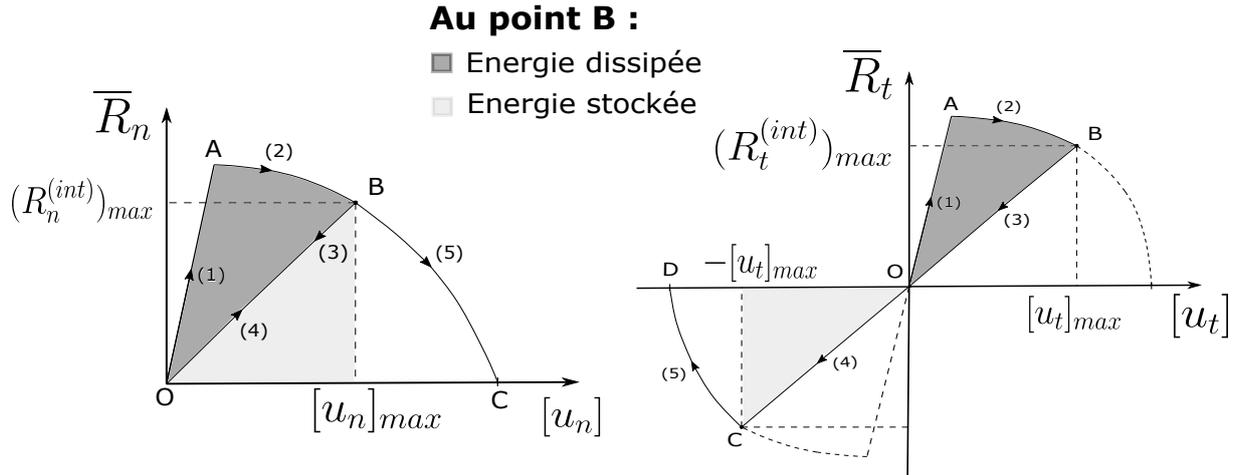


Figure 34 – Illustration du principe de décharge suivant le mode normal. (1) : charge initiale, (2) : charge (endommagement), (3) : décharge, (4) : recharge, (5) : charge (endommagement). Figure (a) dans la direction normale ; Figure (b) : direction tangentielle.

3.6.3 Hypothèse de la théorie de la déformation

Le modèle de zone cohésive développé est incrémental. Son implémentation numérique dans un code éléments finis sous la forme décrite en section 3.5.2 s'avère être délicate à cause de la *possibilité d'oscillations numériques importantes*. Ces oscillations sont principalement dues aux ratios $\frac{\Delta E_{nn} - \Delta \gamma}{(\Delta \mathbf{E})_{eq}}$, $\frac{\Delta E_{nt}}{(\Delta \mathbf{E})_{eq}}$, $\frac{\Delta E_{ns}}{(\Delta \mathbf{E})_{eq}}$ intervenant dans l'équation (3.41). Les valeurs typiques des incréments de chargement $\Delta \mathbf{E}$ au cours des simulations étant petites, les variations de ces ratios entre deux pas de calculs provoquent des oscillations non négligeables dans la réponse locale des zones cohésives. Différentes approches sont possibles pour surmonter ce problème d'oscillations numériques dans les zones cohésives. L'une d'entre elles consiste à se placer dans le cadre de la théorie de la déformation (théorie de Hencky). Dans cette théorie, les contraintes sont reliées aux déformations totales \mathbf{E} et non plus aux incréments de déformation $\Delta \mathbf{E}$ comme en théorie incrémentale de l'élastoplasticité. Les deux théories sont équivalentes pour des chargements monotones et radiaux.

Faisons l'hypothèse *d'un chargement croissant et suivant une direction de déformation imposée* (chargement monotone-radial) :

$$\forall t \in [0, T], \mathbf{E}(t) = k(t) \mathbf{E}^0, \quad k(t) \text{ croissant, } \mathbf{E}^0 \text{ constant} \quad (3.57)$$

où \mathbf{E}^0 est un tenseur constant définissant la direction imposée et $k(t)$ le paramètre de chargement (ou l'amplitude du chargement) est une fonction croissante du temps.

La triaxialité en déformation $\eta_{\mathbf{E}}$ et en taux de déformation $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}$ sont dans ce cas

constantes et égales :

$$\eta_{\dot{\mathbf{E}}} = \frac{\dot{E}_m}{\dot{E}_{eq}} = \frac{\dot{k}(t)E_m^0}{\dot{k}(t)E_{eq}^0} = \frac{E_m^0}{E_{eq}^0}$$

Soit $\eta_{\dot{\mathbf{E}}} = \eta_{\mathbf{E}} = \text{constante}$

Les efforts de cohésion \mathbf{R} s'expriment alors directement en fonction de l'ouverture totale $[\mathbf{u}]$ et de la valeur totale de γ :

$$\mathbf{R} = \sigma_y \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad \text{avec} \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} T_{nn} = \frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M(\eta_{\mathbf{E}}, q_1 f^*) + \frac{4}{9} N(\eta_{\mathbf{E}}, q_1 f^*) \frac{1}{E_{eq}} \left(\frac{[u_n]}{h} - \gamma \right) \\ T_{nt} = \frac{1}{3} N(\eta_{\mathbf{E}}, q_1 f^*) \frac{1}{E_{eq}} \frac{[u_t]}{h} \\ T_{ns} = \frac{1}{3} N(\eta_{\mathbf{E}}, q_1 f^*) \frac{1}{E_{eq}} \frac{[u_s]}{h} \end{cases} \quad (3.58)$$

où

$$E_{eq} = \frac{2}{3} \left(\left(\frac{[u_n]}{h} - \gamma \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{[u_t]^2}{h^2} + \frac{3}{4} \frac{[u_s]^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \eta_{\mathbf{E}} = \frac{\frac{[u_n]}{h} + 2\gamma}{2 \left(\left(\frac{[u_n]}{h} - \gamma \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{[u_t]^2}{h^2} + \frac{3}{4} \frac{[u_s]^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.59)$$

Les incréments de porosité et de déformation équivalente restent inchangés par ce passage au cadre de la théorie de la déformation :

$$df = (1 - f) \left(\frac{d[u_n]}{h} + 2d\gamma \right) + Ad\bar{\varepsilon}, \quad (3.60)$$

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{1}{1 - f} \left(T_{nn} \frac{d[u_n]}{h} + T_{nt} \frac{d[u_t]}{h} + T_{ns} \frac{d[u_s]}{h} + (T_{tt} + T_{ss}) d\gamma \right), \quad (3.61)$$

$$\text{avec} \quad T_{tt} = T_{ss} = \frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M(\eta_{\mathbf{E}}, q_1 f^*) + \frac{2}{9} N(\eta_{\mathbf{E}}, q_1 f^*) \frac{1}{dE_{eq}} \left(d\gamma - \frac{d[u_n]}{h} \right). \quad (3.62)$$

3.7 Modèle simplifié analytique

Il est entendu ici par *modèle analytique*, un modèle de zone cohésive dans lequel la loi de traction-séparation est exprimée explicitement en fonction du saut de déplacement $[\mathbf{u}]$, c'est-à-dire que pour un $[\mathbf{u}]$ donné les contraintes de cohésions peuvent être directement évaluées sans avoir besoin d'effectuer un calcul incrémental. Une telle loi est de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathcal{R}([\mathbf{u}]) \\ \text{avec} \\ f = \mathcal{F}([\mathbf{u}]), \quad \bar{\varepsilon} = \mathcal{E}([\mathbf{u}]) \end{cases}$$

Il a été vu dans la section précédente que l'introduction de l'hypothèse d'un char-

gement monotone radial permet de relier directement les contraintes de cohésions aux déformations totales. Néanmoins l'évolution de la porosité et de l'écroutissement ne sont pas des expressions explicites de $[\mathbf{u}]$. Il reste donc à exprimer analytiquement la loi d'évolution de la porosité ainsi que celle de la contrainte d'écoulement plastique $\sigma_y(\bar{\varepsilon})$ en fonction de $[\mathbf{u}]$.

Une expression analytique de l'évolution de la porosité peut être obtenue en *négligeant le terme de nucléation* :

$$\dot{f} = (1 - f) \operatorname{tr} \dot{\mathbf{E}} \quad \Rightarrow \quad f([\mathbf{u}]) = 1 - (1 - f_0) \exp\left(-\frac{[u_n]}{h}\right) \quad (3.63)$$

L'écroutissement est pris en compte dans le modèle via la loi matériau $\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon})$ avec $\bar{\varepsilon}$ une déformation moyenne dont l'évolution est donnée par (3.27). L'intégration dans le temps de cette équation est de la forme :

$$\bar{\varepsilon} = \int_{t_0}^t \dot{\bar{\varepsilon}}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{1}{1 - f(\tau)} \left(\frac{\mathbf{T}(\tau) \cdot \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{u}}](\tau)}{h} + (T_{tt}(\tau) + T_{ss}(\tau)) \dot{\gamma}(\tau) \right) d\tau. \quad (3.64)$$

Il est rappelé que $T_{tt} = T_{ss}$ car \mathbf{T} est axisymétrique. La solution analytique de l'intégrale (3.64) n'ayant pas une forme simple, une approximation est proposée pour le calcul de la déformation moyenne $\bar{\varepsilon}$ en fonction de $[\mathbf{u}]$ et γ :

$$\bar{\varepsilon} \simeq \bar{\varepsilon}_0 + \left(c_1 \frac{\mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{n}}{1 - f_0} + c_2 \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}}{1 - f} \right) \cdot \left(\frac{[\mathbf{u}]}{h} \right) + 2 \left(c_1 \frac{T_{tt_0}}{1 - f_0} + c_2 \frac{T_{tt}}{1 - f} \right) \gamma. \quad (3.65)$$

\mathbf{T}_0, T_{tt_0} sont les valeurs pour $f = f_0$:

$$T_{tt}([\mathbf{u}], \gamma, f) = \frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M(\eta_{\mathbf{E}}, q_1 f^*(f)) + \frac{2}{9} N(\eta_{\mathbf{E}}, q_1 f^*(f)) \frac{1}{E_{eq}} \left(\gamma - \frac{[u_n]}{h} \right)$$

$$T_{tt_0} = T_{tt}([\mathbf{u}], \gamma, f^* = f_0)$$

$\bar{\varepsilon}_0$ est la valeur telle que $\sigma_y(\bar{\varepsilon}_0) = \sigma_0$ qui dépend du modèle d'écroutissement du matériau. c_1 et c_2 sont deux constantes numériques qui peuvent être ajustées. Une mise au point numérique a montré que les valeurs $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ pour les constantes " c_1 " et " c_2 " permet d'obtenir une estimation raisonnable de $\bar{\varepsilon}$ (voir annexe D). Avec cette expression de la déformation moyenne (équation (3.65)), la contrainte d'écoulement $\sigma_y(\bar{\varepsilon})$ peut être évaluée analytiquement, permettant l'obtention d'un modèle de zone cohésive GTN/ZC complètement

analytique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} = \mathcal{R}([\mathbf{u}]) \text{ expression donnée en équation (3.58)} \\ \text{avec} \\ f = \mathcal{F}([\mathbf{u}]) \text{ donnée en équation (3.63),} \quad \bar{\varepsilon} = \mathcal{E}([\mathbf{u}]) \text{ donnée en équation (3.65)} \end{array} \right. \quad (3.66)$$

Cette formulation analytique de la loi de traction-séparation présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte la nucléation dans l'évolution de la porosité ainsi qu'une prise en compte approximative de l'écoulement. L'erreur commise sur le calcul de la déformation équivalente $\bar{\varepsilon}$ avec l'approximation (3.65) peut être importante après le seuil de coalescence f_c comme illustrée sur la figure 35. Mais on note toutefois qu'au-delà du seuil de coalescence les effets de l'endommagement (porosité) sont prépondérants sur les effets de l'écoulement. L'erreur sur l'estimation de la déformation moyenne n'a que très peu d'effet sur le calcul des efforts de cohésion (voir figure 35).

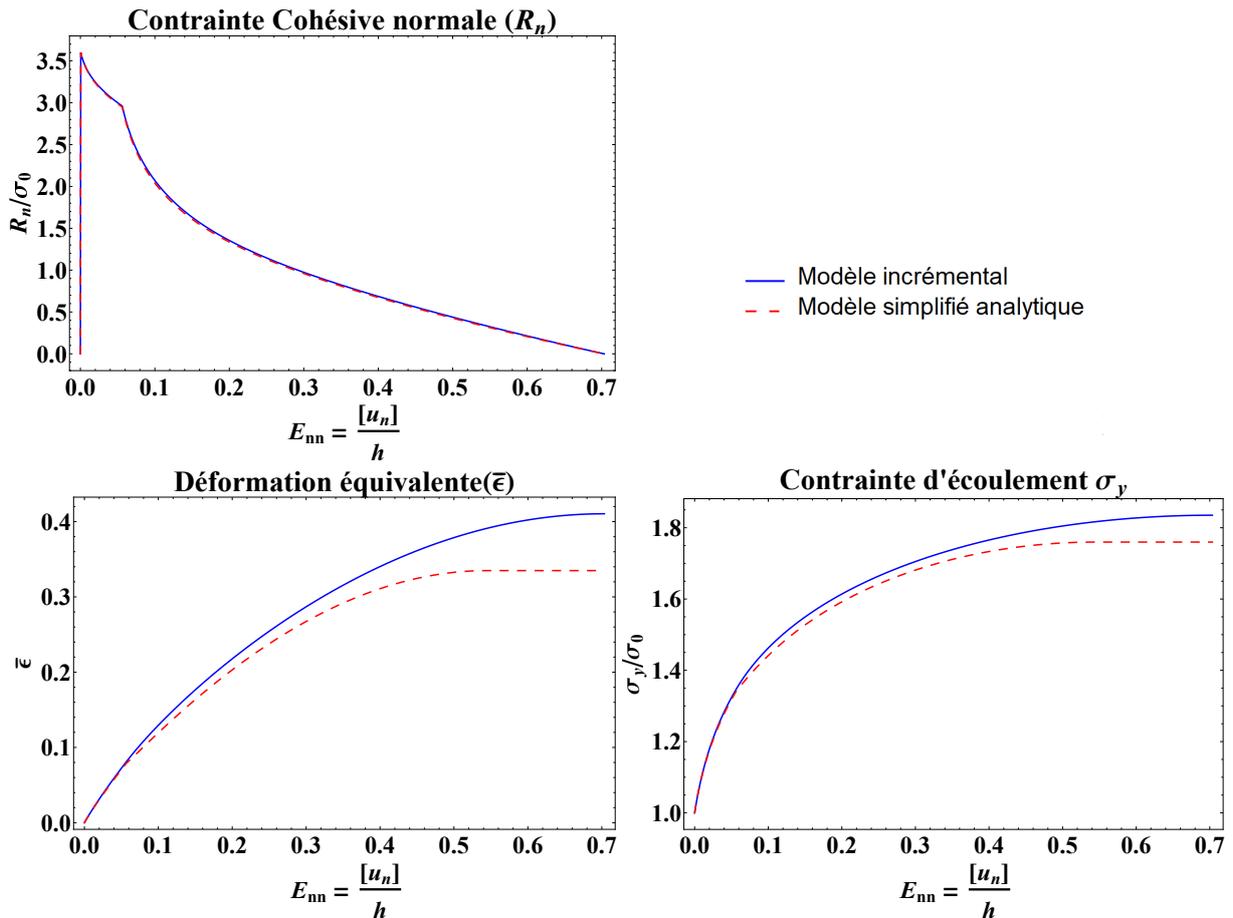


Figure 35 – Comparaison du modèle GTN/ZC incrémental à la version analytique simplifiée pour une triaxialité des déformations $\eta_E = 0.125$ imposée (chargement monotone radial de déformation axisymétrique). Propriétés matériaux reportées dans le tableau 6, sans nucléation ($f_N = 0$).

3.8 Synthèse

Dans ce chapitre a été présenté les points essentiels d'une démarche permettant de transformer un modèle d'endommagement volumique en un modèle de zone cohésive. Les équations de la loi de traction-séparation dérivées du modèle GTN retenue et qui seront implémentées dans la suite dans un code de calcul sont listées ci-dessous. L'hypothèse de la théorie de la déformation introduite en section 3.6.3 est retenue, néanmoins la porosité et la déformation équivalente $\bar{\varepsilon}$ sont évaluées de manière incrémentale.

3.8.1 Récapitulatif de la démarche : transformation d'un modèle d'endommagement volumique en un modèle de zone cohésive

Cinématique *surfacique* de la bande cohésive

- $\dot{\mathbf{E}} \approx \frac{[\dot{\mathbf{u}}] \otimes_s \mathbf{n}}{h}$

Modèle de comportement de la bande cohésive

- $\Sigma = \frac{\partial \Phi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial \dot{\mathbf{E}}}$
- $\Phi(\dot{\mathbf{E}})$ étant un modèle d'endommagement volumique quelconque. Le choix du *modèle GTN* ($\Phi^{GTN}(\dot{\mathbf{E}})$) a été fait dans ce travail.

Loi de traction - séparation

- La loi de traction séparation s'obtient par projection du modèle de comportement dans la cinématique surfacique.
- $\mathbf{R} = \Sigma(\mathbf{E}([\dot{\mathbf{u}}])) \cdot \mathbf{n}$
- La projection se fait avec perte d'informations et tous les états de chargement ne peuvent pas être atteints.

Prise en compte de la triaxialité

- Extension de la cinématique de la bande cohésive
- $\dot{\mathbf{E}} = \frac{[\dot{\mathbf{u}}] \otimes_s \mathbf{n}}{h} + \dot{\gamma} \mathbf{t} \otimes_s \mathbf{t} + \dot{\gamma} \mathbf{s} \otimes_s \mathbf{s}$
- $\dot{\gamma}$ est fonction de l'état du chargement imposée et de l'état cinématique de la zone cohésive $[\dot{\mathbf{u}}]$

Introduction de l'irréversibilité dans la loi de traction - séparation

- Gestion séparée de la décharge suivant les directions normale et tangentielles.
- Décharge vers l'origine.

Formulation de loi traction - séparation intrinsèque à partir de loi extrinsèque

- $R_i^{(int)} = \left(1 - \exp\left(-\alpha_i \frac{u_i}{h}\right)\right) R_i$, avec $i = \{n, t, s\}$ et R_i un modèle extrinsèque

Théorie de la déformation

- Hypothèse de chargement monotone radiaux.
- $\mathbf{R} = \Sigma(\mathbf{E}([\dot{\mathbf{u}}])) \cdot \mathbf{n}$ devient $\mathbf{R} = \Sigma(\mathbf{E}([\mathbf{u}])) \cdot \mathbf{n}$

Loi de traction - séparation analytique $\mathbf{R} = \mathbf{R}([\mathbf{u}])$

- Théorie de la déformation $\mathbf{R} = \Sigma(\mathbf{E}([\mathbf{u}])) \cdot \mathbf{n}$
- Expression analytique de l'évolution de l'endommagement $f([\mathbf{u}])$
- Approximation de la variable d'écrouissage par une fonction analytique $\bar{\varepsilon}([\mathbf{u}])$

3.8.2 Synthèse des équations du modèle retenu

Hypothèse : théorie de la déformation, comportement : modèle GTN

Variables cinématiques $[u]$.

Caractérisation de l'état du chargement Σ^{vol}

$$\eta_E^{vol} = \frac{q_1 q_2 f^* \sinh\left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m^{vol}}{\sigma_y}\right)}{2 \frac{\Sigma_{eq}^{vol}}{\sigma_y}}, \quad \gamma \text{ solution de } \eta_E = \eta_E^{vol}$$

Vecteur traction normalisé :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} T_{nn} = \frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M(\eta_E, q_1 f) + \frac{4}{9} N(\eta_E, q_1 f^*) \frac{1}{E_{eq}} \left(\frac{[u_n]}{h} - \gamma \right) \\ T_{nt} = \frac{1}{3} N(\eta_E, q_1 f^*) \frac{1}{E_{eq}} \frac{[u_t]}{h} \\ T_{ns} = \frac{1}{3} N(\eta_E, q_1 f^*) \frac{1}{E_{eq}} \frac{[u_s]}{h} \end{cases}$$

où

$$M(\eta_E, q_1 f^*) = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2\eta_E}{q_1 f^*}\right) - \operatorname{arcsinh}(2\eta_E)$$

$$N(\eta_E, q_1 f^*) = \sqrt{(2\eta_E)^2 + 1} - \sqrt{(2\eta_E)^2 + (q_1 f^*)^2}$$

$$E_{eq} = \frac{2}{3} \left(\left(\frac{[u_n]}{h} - \gamma \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{[u_t]^2}{h^2} + \frac{3}{4} \frac{[u_s]^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_E = \frac{\frac{[u_n]}{h} + 2\gamma}{2 \left(\left(\frac{[u_n]}{h} - \gamma \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{[u_t]^2}{h^2} + \frac{3}{4} \frac{[u_s]^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Contraintes de cohésion :

$$\mathbf{R} = \sigma_y \begin{Bmatrix} T_{nn} \\ T_{nt} \\ T_{ns} \end{Bmatrix}.$$

Loi d'évolution de la porosité :

$$f^* = \begin{cases} f \text{ si } f \leq f_c, \\ f_c + k(f - f_c); \end{cases}$$

$$df = (1 - f) \left(\frac{d[u_n]}{h} + 2d\gamma \right) + Ad\bar{\varepsilon}.$$

Loi d'écroutissement $\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon})$:

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{1}{1 - f} \left(T_{nn} \frac{d[u_n]}{h} + T_{nt} \frac{d[u_t]}{h} + T_{ns} \frac{d[u_s]}{h} + (T_{tt} + T_{ss}) d\gamma \right),$$

$$\text{où } T_{tt} = T_{ss} = \frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M(\eta_E, q_1 f^*) + \frac{2}{9} N(\eta_E, q_1 f^*) \frac{1}{dE_{eq}} \left(d\gamma - \frac{d[u_n]}{h} \right).$$

Chapitre 4

Implémentation numérique et première application

Ce chapitre traite de l'implémentation du modèle de zone cohésive présenté au chapitre 3 dans le cadre de la méthode des Eléments Finis ainsi que de son application sur un essai classique de propagation de fissure afin d'en évaluer la pertinence. La stratégie numérique se base sur des méthodes issues de la dynamique des contacts. Un milieu continu est considéré comme un ensemble de sous corps reliés par des lois d'interaction surfaciques et la propagation d'une fissure se fait par décohésion à l'interface entre les corps. La méthode de dynamique des contacts permet au moyen d'un formalisme et d'algorithmes spécifiques de résoudre le comportement d'une collection de corps en interaction. Le principe de cette méthode est brièvement décrit et le modèle de zone cohésive est intégré comme une interaction adhésive entre corps. L'application de cette démarche à la simulation d'un essai CT permet d'une part, d'illustrer la pertinence de l'approche pour simuler explicitement la propagation de fissure avec une prédiction quantitative des données macroscopiques. D'autre part, elle met en évidence un lien entre la longueur caractéristique h du modèle et celle de la discrétisation spatiale l_{mesh} associée au maillage.

Sommaire

4.1	Généralités : approche multi-corps et dynamique des contacts	101
4.2	Aspects du schéma d'intégration numérique	106
4.3	Simulation d'un essai CT	108
4.3.1	Présentation du cas d'étude	108
4.3.2	Résultats	110
4.3.3	Sensibilité aux paramètres de maille et d'échelle	113
4.4	Bilan du chapitre	117

4.1 Généralités : approche multi-corps et dynamique des contacts

Le modèle de zone cohésive GTN/ZC présenté au chapitre 3 a été intégré au code de calcul XPer [Perales et al., 2010] (eXtended cohesive zone models and PERiodic homogenisation). Ce code développé à l'IRSN dans le cadre du MIST est dédié à la simulation de la fissuration dynamique des milieux hétérogènes sous chargements thermomécaniques et est issu du couplage de trois bibliothèques principales : PELICANS [IRSN, 2019] pour la partie éléments finis, LMGC90¹ [Dubois et al., 2011] pour la résolution des zones cohésives et MATLAB pour les lois de comportements volumiques. Ce logiciel couple la méthode des éléments finis (FEM) à une méthode de dynamique des milieux divisés (discrets - granulaires), à savoir la méthode de dynamique des contacts ou Contact Dynamics (CD) ou *Non Smooth Contact Dynamics* (NSCD). Ce formalisme permet de tirer avantage des stratégies numériques développées pour la modélisation d'éléments discrets afin d'introduire les modèles de zones cohésives dans une approche multicorps volumique-surfacique. Dans ce formalisme, chaque maille ou des groupes de mailles peuvent être considérés comme des corps indépendants reliés entre eux par des relations surfaciques de type *conditions aux limites mixtes* [Perales, 2005] (voir figure 36). L'approche consiste à résoudre indépendamment le comportement de chaque corps (rigide ou déformable) en tenant compte des interactions existantes entre les différents corps (contact unilatéral, frottant, cohésion, etc.) par le biais d'une formulation adaptée.

L'approche FEM-CD repose sur trois piliers qui sont cités dans la suite mais non détaillés (des références sont fournies pour plus détails) :

- la modélisation d'un milieu continu comme une collection de corps discrets en interactions ;
- la modélisation du système mécanique dans le cadre de la *dynamique non régulière*. Ce cadre de modélisation permet de tenir compte des phénomènes non réguliers décrits par des applications non différentiables (contact unilatéral, chocs entre corps, discontinuités des vitesses etc) ;
- l'utilisation d'algorithmes implicites spécifiques (NSCD) à la résolution des systèmes dynamiques avec contraintes unilatérales, développés par Moreau [1988, 1994]; Jean [1999] ;

Quelques éléments relatifs à la simulation numérique discrète d'un milieu divisé sont présentés pour fixer les idées. Pour une présentation détaillée, le lecteur pourra se reporter aux références suivante : [Moreau, 1988, 1994; Jean, 1999; Jean et al., 2001; Dubois et al., 2018].

1. Code du laboratoire LMGC (CNRS - Université de Montpellier).

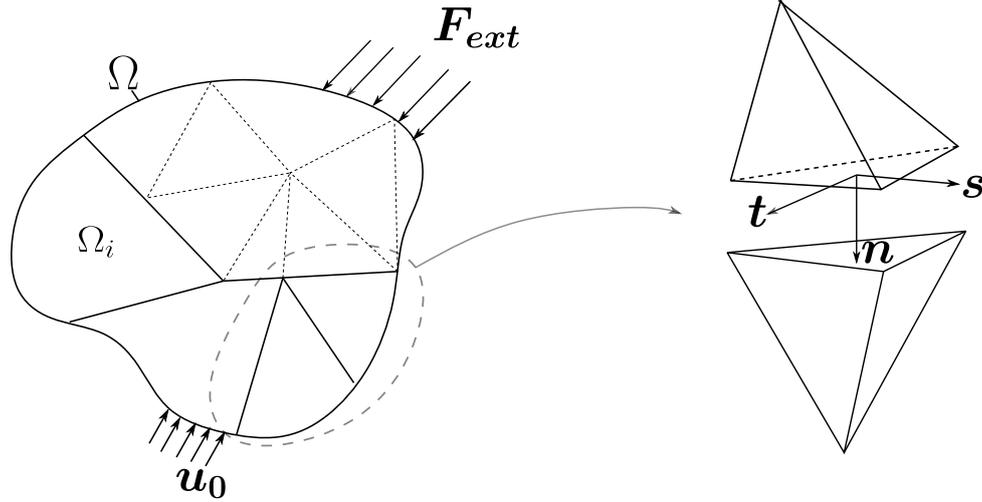


Figure 36 – Domaine Ω modélisé comme un ensemble de corps Ω_i en interaction. Chaque corps peut être un élément fini simple ou alors discrétisé par plusieurs éléments finis.

Équation de la dynamique sur un ensemble de corps

On considère une collection de corps déformables Ω_i , $i = 1, \dots, N$ (voir figure 36) paramétrée par les coordonnées généralisées \mathbf{q} . Dans le cadre d'une discrétisation éléments finis, \mathbf{q} est le vecteur contenant les degrés de liberté de la discrétisation. L'équation de la dynamique s'écrit :

$$\mathbb{M}(\mathbf{q}) \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \mathbf{F}_{ext}(t) + \mathbf{F}_{int}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) + \mathbf{r} \quad (4.1)$$

où $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$ est le vecteur des vitesses nodales, $\mathbb{M}(\mathbf{q})$ est la matrice de masse, $\mathbf{F}_{ext}(t)$ est le vecteur des forces extérieures, $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{q}, \mathbf{v})$ est le vecteur des forces intérieures. Le vecteur \mathbf{r} est le représentant des forces de contact entre les corps en interaction.

Lorsque des discontinuités de vitesse sont envisagées (chocs), les dérivées intervenant dans l'équation de la dynamique doivent être interprétées au sens des distributions. L'équation de la dynamique se réécrit dans ce cas en termes de mesures différentielles [Moreau, 1994] :

$$\begin{cases} \mathbb{M} d\mathbf{v} = \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{t}) dt + \mathbf{F}_{int}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}) dt + d\mathbf{p} \\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v} dt \end{cases} \quad (4.2)$$

où dt est la mesure de Lebesgue, $d\mathbf{v}$ et $d\mathbf{p}$ sont des mesures différentielles de \mathbf{v} et \mathbf{r} respectivement. Le vecteur $d\mathbf{p}$ est le représentant de la densité d'impulsions (ou forces) exercées aux contacts, qui contient une contribution due aux forces de contacts usuelles ($d\mathbf{p} = \mathbf{r} dt$) et une contribution due à "des forces instantanées" (chocs et percussions à un instant t) pour lesquelles $d\mathbf{p} = \mathbf{p} \delta_t$, avec δ_t la mesure de Dirac placée sur l'instant t .

L'intégration de l'équation de la dynamique (4.2) sur un intervalle de temps $[t_i, t_f]$ donne :

$$\mathbb{M}(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i) = \int_{t_i}^{t_f} (\mathbf{F}_{ext}(t) + \mathbf{F}_{int}(q, \dot{q}, \mathbf{v})) dt + \mathbf{p} \quad (4.3)$$

\mathbf{v}_i et \mathbf{v}_f sont des vecteurs contenant les vitesses aux instants t_i et t_f respectivement, \mathbf{p} est le vecteur des impulsions dues aux forces de contacts ainsi que des éventuelles percussions.

Interaction entre corps : contact unilatéral et frottant

Les principales interactions classiquement considérées entre deux corps candidats aux contact dans l'approche de la dynamique des contacts sont l'*unilatéralité* et le *frottement*. La distance et le glissement relatif entre deux corps peuvent être mesurés par le vecteur $[\mathbf{u}]$.

La contrainte due au contact entre les deux corps est notée \mathcal{R}^c :

$$\mathcal{R}^c = \mathcal{R}_n^c \mathbf{n} + \mathcal{R}_T^c \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}^c \cdot \mathbf{n} = \mathcal{R}_n^c$$

où \mathbf{n} est la normale commune aux bords des corps au point de contact. La condition d'unilatéralité (ou d'impénétrabilité des deux corps) exprimée par la *condition de Signorini* s'écrit :

$$\begin{cases} \text{absence de contact si} & [u_n] > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_n^c = 0 \\ \text{un contact à lieu si} & [u_n] = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_n^c \geq 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Cette condition peut se mettre sous la forme d'une relation de complémentarité :

$$[u_n] \geq 0, \quad \mathcal{R}_n^c \geq 0, \quad [u_n] \mathcal{R}_n^c = 0 \quad (4.5)$$

Le frottement entre deux corps exprimé par la loi de Coulomb s'écrit :

$$\begin{cases} \text{non glissement :} & \|\mathcal{R}_T^c\| \leq \mu |\mathcal{R}_n^c| \Rightarrow \|[\dot{\mathbf{u}}_T]\| = 0 \\ \text{glissement :} & \|\mathcal{R}_T^c\| = \mu |\mathcal{R}_n^c| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } [\dot{\mathbf{u}}_T] = -\lambda \mathcal{R}_T^c \end{cases} \quad (4.6)$$

où μ est le coefficient de frottement de Coulomb.

Les conditions de Signorini-Coulomb peuvent être réécrites en *faisant intervenir les vitesses relatives des deux corps* [Moreau, 1988] :

$$[\dot{u}_n] \geq 0, \quad \mathcal{R}_n^c \geq 0, \quad [\dot{u}_n] \mathcal{R}_n^c = 0 \quad \text{conditions de Signorini} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} \|\mathcal{R}_T^c\| \leq \mu |\mathcal{R}_n^c| \Rightarrow \|[\dot{\mathbf{u}}_T]\| = 0 \\ \|\mathcal{R}_T^c\| = \mu |\mathcal{R}_n^c| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } [\dot{\mathbf{u}}_T] = -\lambda \mathcal{R}_T^c \end{cases} \quad \text{frottement de Coulomb} \quad (4.8)$$

L'on fera référence à ces relations de contact (4.7) et (4.8) par la notation compacte :

$$Ctact([\dot{\mathbf{u}}], \mathcal{R}^c). \quad (4.9)$$

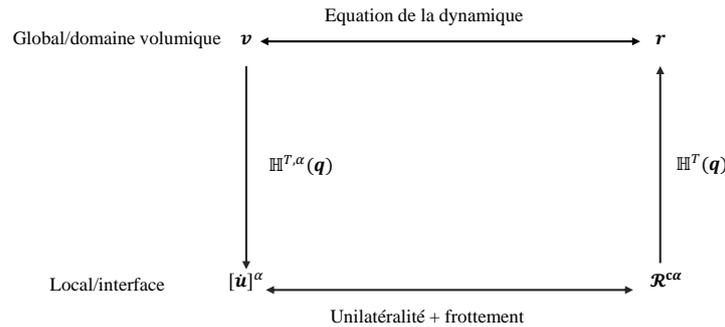


Figure 37 – Schéma de dualité dans l'approche de la dynamique des contacts

L'écriture des conditions de Signorini-Coulomb en vitesse est particulièrement adaptée pour la méthode de dynamiques des contacts car dans cette méthode, les inconnues principales sont la vitesse relative entre les corps et l'impulsion aux contacts. Par la suite, la relation entre les variables de contact et les degrés de libertés de la discrétisation éléments finis est présentée.

Relations entre les variables généralisées et les variables locales

En un contact α , les variables locales $[\dot{\mathbf{u}}]$ et \mathcal{R}^c peuvent être reliées aux variables globales $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$ et \mathbf{r} par :

$$[\dot{\mathbf{u}}]^\alpha = \mathbb{H}^{T,\alpha}(\mathbf{q})\mathbf{v} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{r}^\alpha = \mathbb{H}^\alpha(\mathbf{q})\mathcal{R}^{c\alpha} \quad (4.11)$$

où $\mathbb{H}^{T,\alpha}(\mathbf{q})$ est une application linéaire de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^2 ou 3 et $\mathbb{H}^\alpha(\mathbf{q})$ est la transposée de $\mathbb{H}^{T,\alpha}(\mathbf{q})$. N est le nombre de degrés de liberté de la collection de corps.

La structure des équations et la dualité entre variable locales et globales est illustrée sur la figure 37.

En résumé, les équations régissant la collection Ω de corps Ω_i interagissant avec le contact unilatéral et le frottement de Coulomb sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}d\mathbf{v} = \mathbf{F}_{ext}(t)dt + \mathbf{F}_{int}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v})dt + d\mathbf{p} \\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}dt \\ [\dot{\mathbf{u}}]^\alpha = \mathbb{H}^{T,\alpha}(\mathbf{q})\mathbf{v}, \quad \mathbf{r}^\alpha = \mathbb{H}^\alpha(\mathbf{q})\mathcal{R}^{c\alpha} \\ Ctact^\alpha([\dot{\mathbf{u}}], \mathcal{R}^c), \quad \alpha = 1, \dots, N, \\ \text{conditions initiales à } t_0 \text{ et conditions aux limites sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.12)$$

avec chaque corps Ω_i qui vérifie les relations suivantes entre les champs de déplacement

$\mathbf{u}(q, t)$, de déformations $\mathbf{E}(q, t)$ et de contraintes $\mathbf{\Sigma}(q, t)$ dans Ω_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{\Sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{dynamique}) \\ \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (\text{compatibilité en petites perturbations}) \\ \mathbf{\Sigma}(\mathbf{E}) \quad (\text{loi de comportement}) \\ \text{conditions initiales à } t_0 \\ \text{conditions aux limites sur } \partial\Omega_i \quad (\text{contenant les interactions de contact}) \end{array} \right. \quad (4.13)$$

L'un des intérêts de la démarche présentée réside dans le traitement des non linéarités. Dans cette approche, les non linéarités matérielles (comportement élastoplastique) et géométriques sont traitées à l'échelle globale et les non linéarités dues aux contacts à une échelle locale. Des comportements matériaux divers (élasticité, plasticité, viscosité, etc) peuvent être introduits indépendamment dans chaque corps volumiques, et des physiques fines allant au-delà du cadre contact-frottant peuvent être modélisées aux niveaux des interfaces (cohésion, diffusion d'espèces, pression-post-rupture, écoulement fluide, etc). Il est présenté ci-dessous l'introduction des zones cohésives dans le cadre de la méthode de dynamique des contacts.

Introduction de la cohésion entre corps (modèles de zones cohésives)

Les modèles de zones cohésives sont introduits dans l'approche décrite ci-dessus par une formulation du contact avec prise en compte de l'adhésion due à [Raous et al. \[1999\]](#); [Monerie et Acary \[2001\]](#); [Jean et al. \[2001\]](#). La prise en compte de la cohésion dans les problèmes de contact frottant est faite par des modifications des conditions de Signorini-Coulomb :

$$\mathcal{R}_n^c + R_n \geq 0, \quad [\dot{u}_n] \geq 0, \quad (\mathcal{R}_n^c + R_n)[\dot{u}_n] = 0 \quad (4.14)$$

$$\|\mathcal{R}_T^c + \mathbf{R}_T\| \leq \mu |\mathcal{R}_n^c + R_n| \quad (4.15)$$

$$\text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\mathcal{R}_T^c + \mathbf{R}_T\| < \mu |\mathcal{R}_n^c + R_n| \Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_T] = 0 \\ \|\mathcal{R}_T^c + \mathbf{R}_T\| = \mu |\mathcal{R}_n^c + R_n| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, [\dot{\mathbf{u}}_T] = -\lambda(\mathcal{R}_T^c + \mathbf{R}_T) \end{array} \right. \quad (4.16)$$

où le vecteur \mathbf{R} représente les efforts de cohésion. La condition (4.9) est remplacée par :

$$Ctact([\dot{\mathbf{u}}], \mathcal{R}^c - \mathbf{R}). \quad (4.17)$$

Stratégie de résolution numérique : NSCD

La méthode de résolution globale de (4.12) et (4.13) est basée sur les algorithmes de la méthode de la dynamique des contacts (NSCD) [[Jean et al., 2001](#)]. C'est une méthode de résolution dite *non régulière* car les conditions d'unilatéralité et du frottement de Coulomb sont traitées comme des inégalités (multi-applications) sans régularisation sur ces lois (c'est-à-dire que la condition d'impénétrabilité est simplement exprimée par l'inégalité

$[\dot{u}_n] \geq 0$, à l'opposé des méthodes de résolutions régulières qui utilisent des lois de contact frottant explicitement connues, comme par exemple $\mathcal{R}_n^c = -k[u_n]$ où k est une rigidité reliée aux propriétés élastiques du corps). Une autre spécificité des algorithmes NSCD consiste à exprimer les équations de la dynamique en fonction des inconnues aux contacts [Jean, 1999; Radjaï et Dubois, 2010]. Cette stratégie permet une résolution précise du problème de contact $Ctact([\dot{\mathbf{u}}], \mathcal{R}^c - \mathbf{R})$ sans régularisation, les valeurs nodales \mathbf{q} étant déduites des solutions aux contacts. L'on pourra se référer à Jean [1999]; Jean et al. [2001]; Radjaï et Dubois [2010] pour une présentation détaillée de la méthode NSCD et des schémas de résolution numérique. La nature *implicite* des équations aux contacts dans cette méthode implique des méthodes itératives de résolution comme la méthode de Gauss Seidel.

4.2 Aspects du schéma d'intégration numérique

Les principales étapes de la résolution du problème global dans le cadre FEM-CD sont synthétisées ci-dessous :

Boucle temporelle $t < t_{fin}$

- Incrément de chargement
- Boucle d'itération de Newton-Raphson - NR (tant que résidu > tolérance)
 - Calcul de la matrice de masse, matrice tangente globale, forces nodales
 - Calcul des vitesses globales \mathbf{v} et de la configuration nodale \mathbf{q} sans contact
 - Détection des contacts potentiels
 - Résolution sur tous les contacts α (Gauss Seidel - GS)
 - Transfert de l'état du chargement volumique Σ^{vol}
 - Calcul des vitesses locales *a priori* $[\dot{\mathbf{u}}]^\alpha = \mathbb{H}^{T,\alpha}(\mathbf{q})\mathbf{v}$
 - Calcul des valeurs $[\dot{\mathbf{u}}]^\alpha$, $(\mathcal{R}^c - \mathbf{R})^\alpha$ par la résolution $Ctact([\dot{\mathbf{u}}]^\alpha, (\mathcal{R}^c - \mathbf{R})^\alpha)$
 - Mise à jour des vitesses globales \mathbf{v} et des valeurs nodales \mathbf{q}
 - Test convergence NR

Le modèle de zone cohésive GTN/ZC a été implémenté dans le code XPer, et les étapes de calculs des efforts de cohésion \mathbf{R} lors de la résolution du contact sont présentées à l'annexe E.

Remarque sur la prise en compte de l'état des contraintes

La prise en compte de l'état du chargement se fait en transmettant à la zone cohésive, la contrainte moyenne Σ^{vol} sur l'élément esclave (voir figure 38). Cette contrainte volumique est ensuite utilisée pour calculer une triaxialité de taux de déformation imposée à la zone

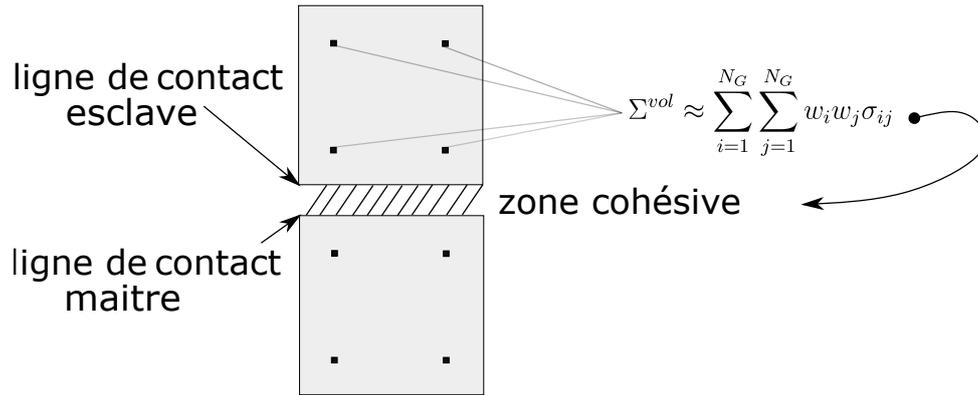


Figure 38 – Illustration du transfert dans la zone cohésive de la contrainte moyenne d'un élément fini quadrangulaire (N_G points de Gauss affectés des poids w_i, w_j).

cohésive suivant la relation :

$$\eta_{\dot{\mathbf{E}}} = \frac{q_1 q_2 f^* \sinh\left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma^{vol}}{\sigma_y}\right)}{2 \frac{\Sigma^{vol}}{\sigma_y}}$$

Il a été observé dans les simulations, notamment celles présentées à la section suivante, que la triaxialité du taux de déformation $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol}$ calculée à partir de l'état du chargement volumique Σ^{vol} et imposée dans la zone cohésive peut retarder artificiellement la rupture lorsque l'endommagement est avancé. Ceci s'explique par une combinaison d'effets :

1. lorsque l'endommagement est avancé dans les zones cohésives, les mailles volumiques voisines peuvent se retrouver dans un état de décharge élastique. La triaxialité des contraintes dans ces mailles peut diminuer vers des valeurs basses (voir courbe (a) de la figure 39).
2. La triaxialité du taux de déformation $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol}$ imposé à la zone cohésive augmente puis diminue avec la triaxialité des contraintes volumiques η_{Σ} (courbe (b) de la figure 39).
3. Le modèle GTN ne tenant pas compte de l'endommagement à basses triaxialités, la conséquence en est un ralentissement de l'évolution de f^* bien que le chargement macroscopique continu d'être imposé et que l'on soit en phase post-coalescence (courbe (c) de la figure 39).

Pour pallier cette limitation, l'état du chargement volumique Σ^{vol} est transféré dans la zone cohésive jusqu'au début de la coalescence. **En phase de post-coalescence l'état du chargement volumique Σ^{vol} vu par la zone cohésive est maintenu constant¹.**

Le taux de déformation $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}$ vu par la zone cohésive s'écrit :

1. Un moyen plus rigoureux de pallier cette limitation serait l'utilisation de l'une des extensions du modèle GTN tenant compte de l'endommagement à basses triaxialités.

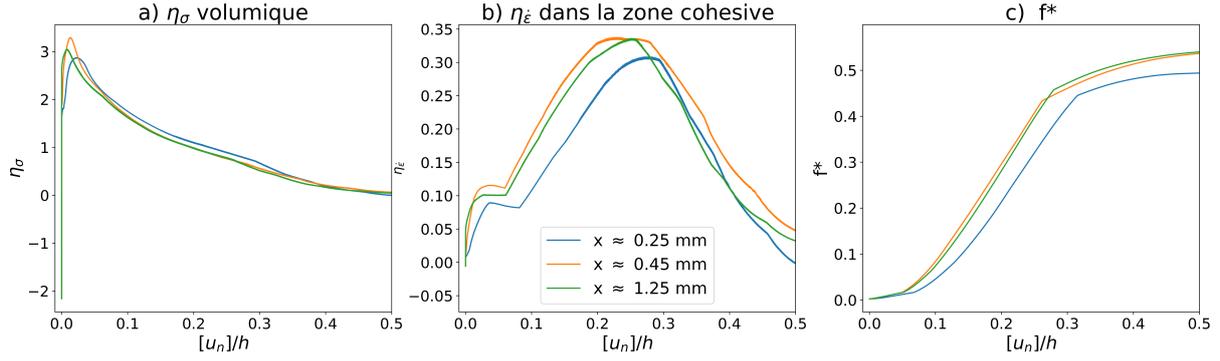


Figure 39 – Évolution de grandeurs locales à différentes distances x de la pointe d'une fissure lors de la simulation d'un essai CT. a) Triaxialité des contraintes au voisinage de la zone cohésive. b) Triaxialité du taux de déformation imposé dans la zone cohésive. c) Ralentissement de l'évolution de l'endommagement f^* dans la zone cohésive.

$$\eta_{\dot{\mathbf{E}}} = \begin{cases} \frac{q_1 q_2 f^* \sinh\left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m^{vol}}{\sigma_y}\right)}{2 \frac{\Sigma^{vol}}{\sigma_y}} & \text{si } f \leq f_c \\ \frac{q_1 q_2 f^* \sinh\left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m^{vol,c}}{\sigma_y}\right)}{2 \frac{\Sigma^{vol,c}}{\sigma_y}} & \text{si } f > f_c \end{cases} \quad \text{avec } \Sigma^{vol,c}, \text{ la valeur de } \Sigma^{vol} \text{ à } f = f_c. \quad (4.18)$$

Bien que l'état du chargement volumique vu par la zone cohésive Σ^{vol} soit fixé à $\Sigma^{vol,c}$ en phase post-coalescence, le taux de déformation imposé $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}$ évolue avec l'endommagement f^* .

4.3 Simulation d'un essai CT

Cette section présente une application du modèle de zone cohésive GTN/ZC à la simulation de la propagation d'une fissure sur une éprouvette compacte de traction (CT), classiquement utilisée pour évaluer la ténacité des matériaux.

4.3.1 Présentation du cas d'étude

Le matériau d'étude est l'acier ferritique de désignation StE 460 (désignation allemande) introduit dans la section 3.5. Ce matériau a été testé à la "German Federal Institute of Materials" et les paramètres GTN pour ce matériau ainsi que des résultats d'essais sont reportés dans plusieurs travaux [Brocks et al., 1994, 1995; Siegmund et Brocks, 2000a,b; Scheider, 2009]. Les valeurs des paramètres matériau ont été présentées à la section 3.5 dans le tableau 6. Le matériau dans les mailles volumiques est de type élastoplastique et suit la loi d'écrouissage (3.33).

Les dimensions de l'éprouvette rainurée sont (figure 40) : $W = 50 \text{ mm}$, $a_0/W = 0.59$, $B = 25 \text{ mm}$, $B_n = 19 \text{ mm}$. a_0 est la longueur de la pré-fissure, B est l'épaisseur et B_N

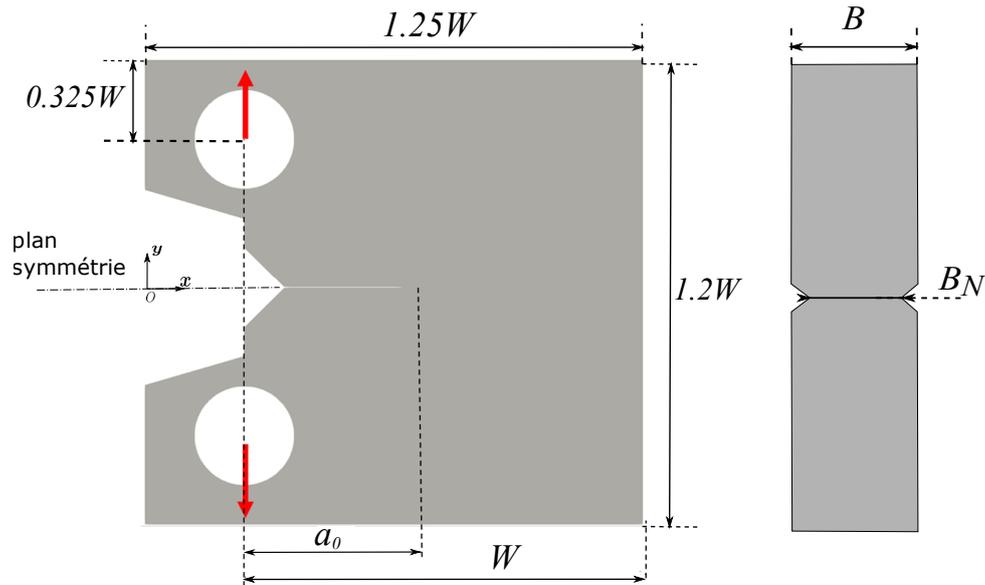


Figure 40 – Éprouvette CT.

est l'épaisseur entre les 2 cotés rainurés.

Une longueur matériau caractéristique de $\Lambda = 200 \mu m$ a été utilisée par [Siegmund et Brocks \[2000a,b\]](#) avec ces propriétés matériaux, comme valeur typique pour la rupture ductile des aciers ferritiques. Les simulations dans ces travaux ont été effectuées sur une moitié d'éprouvette avec des conditions de symétrie selon le plan Oxz (voir figure 40). Avec ces conditions de symétrie, seule la moitié de la process zone est modélisée. Les propriétés cohésives (énergie de cohésion Γ et contrainte cohésive maximale R_{max}) utilisée pour cette moitié de process zone ont été identifiées sur un élément (représentant une cellule unitaire) de taille $\Lambda \times \Lambda$ avec le modèle GTN. Compte tenu de la condition de symétrie, l'énergie réelle d'avancée de fissure est donc de 2Γ . Dans la présente étude, les simulations sont faites sans cette condition de symétrie. Puisque l'énergie dissipée dans un élément est proportionnelle à la taille de l'élément, la valeur du paramètre h permettant d'assurer la même dissipation que dans les simulations de [Siegmund et Brocks \[2000a,b\]](#) est la taille de la cellule d'aire $2\Lambda^2$, soit $h = \sqrt{2} 200 \mu m$. La valeur approchée $h \approx 300 \mu m$ a été utilisée pour les présentes simulations.

Les paramètres numériques C_N et C_T sont fixés à $10^{18} Pa/m$ (ce choix permettant de respecter le critère $C_N = C_T \geq 21Y/l_{mesh}$ de [Blal et al. \[2012\]](#) pour des tailles allant jusqu'à $5 \mu m$).

Les simulations ont été réalisées en 2 dimensions sous l'hypothèse de déformations planes avec des éléments quadrangles linéaires et 2 nœuds de contact par zone cohésive. Le maillage est présenté sur la figure 41. Le maillage est raffiné dans une "zone utile" de $8 \text{ mm} \times 8 \text{ mm}$ en pointe de fissure, et les éléments dans cette zone sont de dimension $l_{mesh} \times l_{mesh}$. Un maillage plus grossier est utilisé en dehors de cette zone utile. Puisque le chemin de fissuration est connu, les zones cohésives ont été placées uniquement dans le prolongement de la pré-fissure (ligne Ox) dans le ligament restant. Les trous circulaires de

l'éprouvette sont partiellement remplis par des blocs constitués d'un matériau *purement élastique* (avec les mêmes propriétés que l'éprouvette), ceci afin de limiter l'influence de la dissipation plastique au point d'imposition du chargement sur les résultats de simulation. Le chargement est réalisé en imposant une vitesse sur les nœuds de la face des blocs parallèle à l'axe Ox (\dot{U}_y sur la face supérieure et $-\dot{U}_y$ sur la face inférieure). Les simulations sont réalisées en utilisant une résolution éléments finis explicite et une résolution implicite du contact. Les pas de temps requis pour la simulation étant petits (Δt de l'ordre de 10^{-8} s), une vitesse relativement élevée est imposée ($\dot{U}_y = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$). La masse volumique du matériau est prise égale $7.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

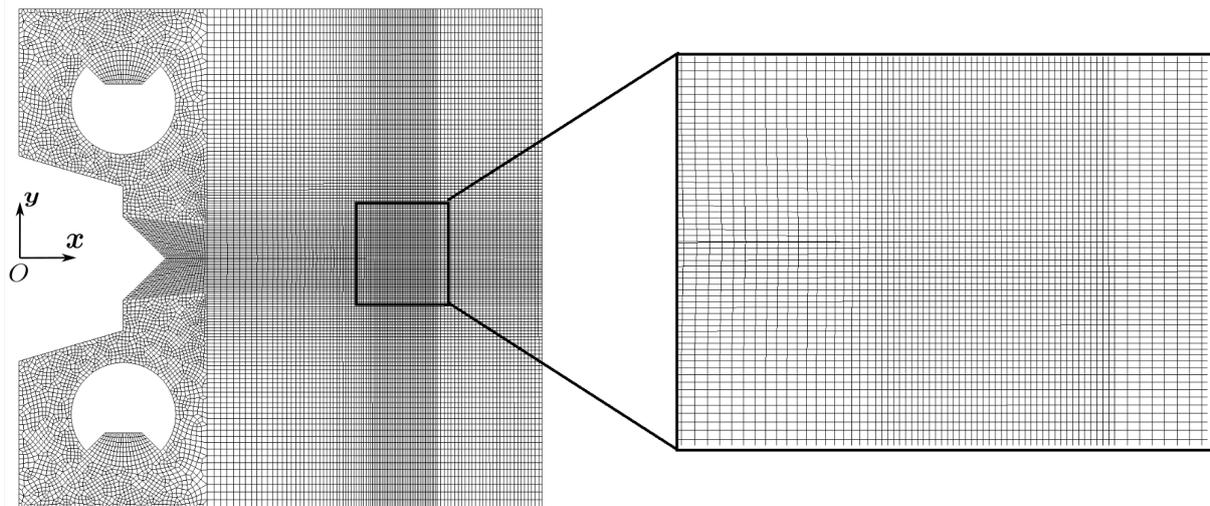


Figure 41 – Maillage de l'éprouvette $C(T)$ ($l_{mesh} = 200 \mu\text{m}$).

4.3.2 Résultats

La courbe force - ouverture simulée est montrée sur la figure 42 ainsi que les résultats expérimentaux de Brocks et al. [1995]. Puisque les simulations ont été faites en 2D sous l'hypothèse des déformations planes et que l'éprouvette est rainurée, une épaisseur effective $B_{eff} = \sqrt{BB_N}$ comme utilisé dans [Brocks et al., 1995] a été prise pour le calcul de la force macroscopique.

Dans les simulations numériques, la fissure avance par pas de l_{mesh} lorsqu'une zone cohésive entre les éléments est cassée (f^* atteint $1/q_1$). La courbe de rupture $J - \Delta a$ a été déterminée en exploitant la courbe force - déplacement macroscopique et les formules de la norme 2 [ASTM, 2018]. La procédure du calcul de J est décrite à l'annexe F. Les courbes de rupture $J - \Delta a$ numérique et expérimentale sont comparées sur la figure 43.

L'accord entre expériences et simulation sur les figures 42 et 43 permet d'illustrer la pertinence de l'approche cohésive - volumique pour simuler la fissuration des matériaux

2. Il est à noter qu'en général, le calcul de J dans les simulations éléments finis se fait sur les champs locaux en utilisant la méthode dite "d'intégrale de domaine", mais cette technique n'est pas encore disponible dans le code Xper.

ductiles. Il est particulièrement intéressant de noter que ces essais ont été simulés auparavant par Brocks et al. [1995] avec un modèle GTN volumique. Les paramètres du modèle GTN sont ceux qui ont été réutilisés dans cette étude. La pertinence de l'approche cohésive-volumique avait déjà été illustrée par les travaux de Siegmund et Brocks [2000a,b] qui ont simulé les essais de Brocks et al. [1995] avec un modèle de zone cohésive phénoménologique où les paramètres (Γ et R_{max}) ont été déterminés par des simulations sur un élément avec le modèle GTN et les mêmes propriétés matériaux. *Les résultats présents sont similaires à ceux obtenus par Siegmund et Brocks [2000a,b], avec la différence que la loi de traction-séparation est non plus phénoménologique mais micromécanique.*

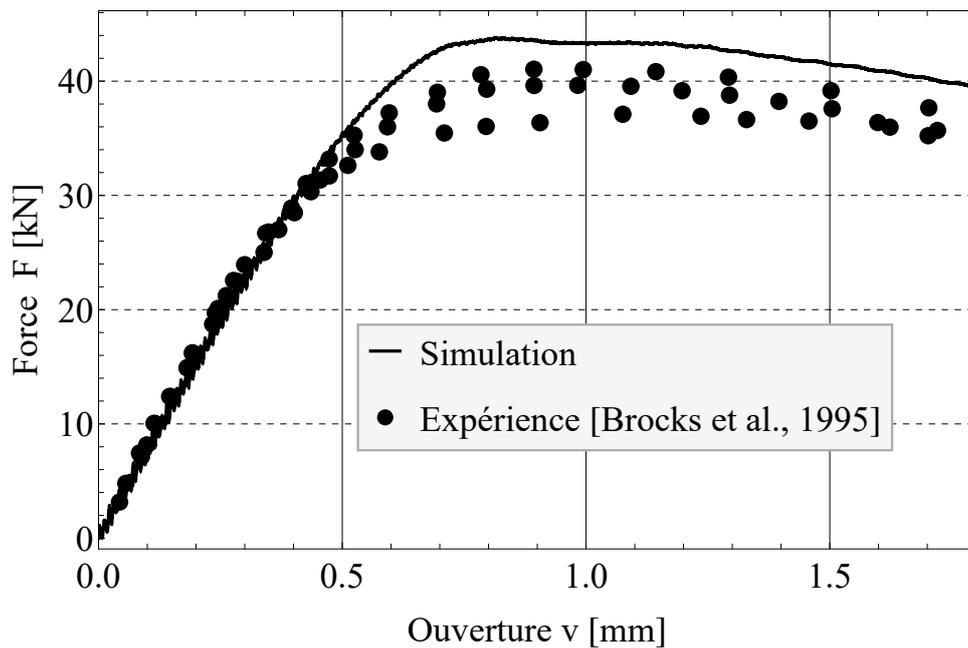


Figure 42 – Force (F) vs ouverture (v). Comparaison entre simulation et données expérimentales de Brocks et al. [1995].

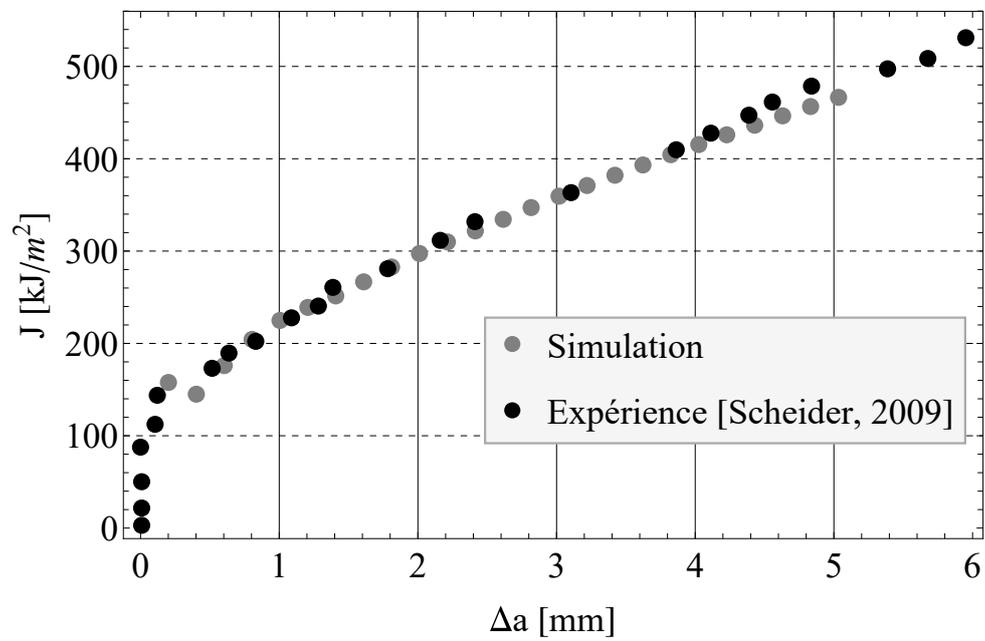


Figure 43 – Courbe de rupture $J - \Delta a$.

l_{mesh}	nombre d'éléments zone centrale	nombre total d'éléments
200 μm	1600	20220
150 μm	2809	26198
100 μm	6400	38020

Tableau 7 – Taille de maille et nombre d'éléments

4.3.3 Sensibilité aux paramètres de maille et d'échelle

Cette section examine l'influence du paramètre h et de la taille de maille l_{mesh} sur la réponse macroscopique en s'appuyant sur les résultats de simulations de l'essai CT présenté dans la section précédente.

L'énergie locale dissipée par avancée de fissure dans la zone cohésive est directement proportionnelle à h :

$$\Gamma = h \int R_n dE_{nn}.$$

Ce paramètre permet donc de contrôler l'énergie dissipée comme illustré sur la figure 44 où l'on observe que la ductilité augmente avec h .

Quelques tailles de maille l_{mesh} reportées dans le tableau 7 ont été investiguées pour analyser l'influence de la discrétisation spatiale sur la réponse macroscopique. La figure 45 montre la sensibilité de la réponse macroscopique à la taille de maille l_{mesh} . La dépendance au maillage observée peut être un peu surprenante à première vue car elle est opposée aux effets du maillage classiquement constatés lors de l'utilisation d'un modèle d'endommagement local. Dans l'approche locale de la mécanique de l'endommagement, l'énergie dissipée diminue avec la taille de maille en conséquence d'une localisation de l'endommagement dans une ligne d'éléments [Besson, 2010]. Dans les simulations présentes, réduire la taille de maille ne mène pas à une réduction de l'énergie dissipée : il n'y a pas d'endommagement dans les mailles volumiques, l'endommagement étant localisée dans les zones cohésives. La longueur caractéristique h agit comme un paramètre de régularisation. Toutefois, il est observé sur la figure 45 que réduire la taille de maille a pour effet de limiter la localisation. Cette observation est corroborée par la figure 46 qui montre l'évolution de l'énergie plastique totale par unité d'épaisseur U_p dissipée dans les mailles volumiques et l'énergie totale par unité d'épaisseur dissipée U_{sep} dans les zones cohésives² en fonction de l'avancé de la fissure Δa :

$$U_p = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{S_e} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p dS \quad U_{sep} = \sum_{j=1}^{N_c} \left[\int_0^{[u_n]} R_n(\delta) d\delta - \frac{1}{2} R_n([u_n])[u_n] \right] l_j \quad (4.19)$$

2. L'ouverture sur l'essai CT se fait en mode I, les composantes tangentielles dans la simulation sont très petites devant les composantes normales et ont été négligées dans la formule (4.19) pour le calcul de U_{sep} .

N_e est le nombre d'éléments, N_c est le nombre de zones cohésives et l_j est la longueur de chaque zone cohésive. L'énergie plastique dissipée dans les éléments volumiques U_p est plus de 10 fois supérieure à l'énergie dissipée dans les zones cohésives (cf. figure 46). L'énergie totale dissipée par l'éprouvette est donc essentiellement due à la dissipation plastique. Nous notons que le taux de dissipation par avancée de fissure dU_p/da dans les éléments volumiques augmente lorsque la taille de maille diminue. Le taux de dissipation dans les zones cohésives $\Gamma = dU_{sep}/da$ semble peu varier avec la taille de maille. Il en ressort donc que la discrétisation éléments finis entraîne une disparité dans la réponse du matériau lors de l'avancé de la fissure.

L'analyse d'un modèle local unidimensionnel constitué d'un ressort de longueur L_0 en série avec une zone cohésive (voir figure 47) peut aider à interpréter les observations numériques précédentes. Une telle analyse a par exemple été faite par [Chaboche et al. \[2001a\]](#); [Forest et Lorentz \[2004\]](#); [Needleman \[2014\]](#). L'analyse ne sera pas reprise ici, mais quelques conclusions issues de ces références peuvent être rappelées :

- la réponse globale du système (ressort+zone cohésive) dépend du ratio δ/L_0 entre une longueur caractéristique de la zone cohésive δ et une longueur caractéristique du ressort L_0 ;
- plus le ratio δ/L_0 est grand plus l'énergie dissipée par le système est importante ;
- pour des petites valeurs du ratio δ/L_0 , la réponse globale peut même exhibée un snap-back ³.

Ces conclusions peuvent s'appliquer à des cas plus généraux (problème 2D ou 3D, matériau inélastique). Dans le cas de la présente étude, δ est fonction de h ($\delta = E_{nn}^f h$, où E_{nn}^f est la déformation à rupture dans la bande cohésive) et le ressort peut être assimilé à un élément du maillage. Les conclusions précédentes s'accordent avec les résultats numériques au sens où la dissipation totale ($U_p + U_{sep}$) augmente avec le ratio $\delta(h)/l_{mesh}$.

Sur cette base, il est raisonnable d'envisager que le paramètre de régularisation h , en plus d'être lié à une ou plusieurs grandeurs caractéristiques de la localisation (par exemple la distance inter-cavités Λ), est également d'une certaine façon lié à la discrétisation éléments finis l_{mesh} , soit $h = \mathcal{F}(\Lambda, l_{mesh})$. Ainsi l'obtention d'une convergence au maillage pour un jeu de paramètres matériaux GTN nécessite de connaître le lien entre h et la taille de maille l_{mesh} . La figure 48 illustre des résultats macroscopiques convergés vis-à-vis du maillage, pour lesquels le paramètre h a été accordé en fonction de la taille du maillage l_{mesh} . Une simple corrélation de la forme $h = h_0 + C \ln \left(\frac{l_{mesh}}{L_0} \right)$ où h_0 , C , L_0 sont des constantes, est proposée sur la base des investigations présentes (voir figure 49).

3. Instabilité dans la réponse force - déplacement correspondant à une soudaine chute de la force à déplacement constant ou avec déplacement qui diminue.

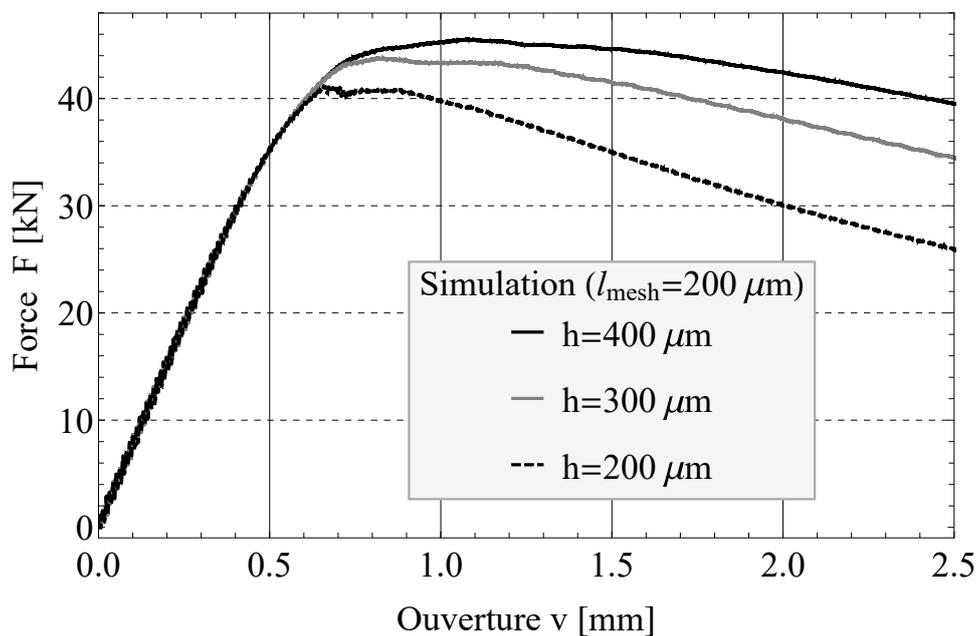


Figure 44 – Force (F) vs ouverture (v) pour différentes valeurs du paramètre h .

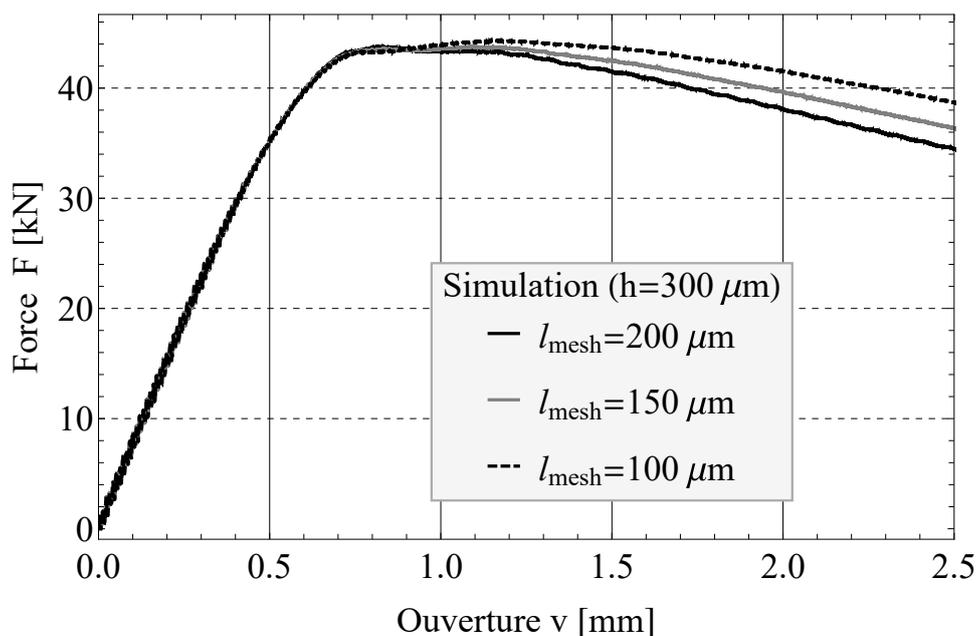


Figure 45 – Force (F) vs ouverture (v) pour différentes tailles de maille l_{mesh} .

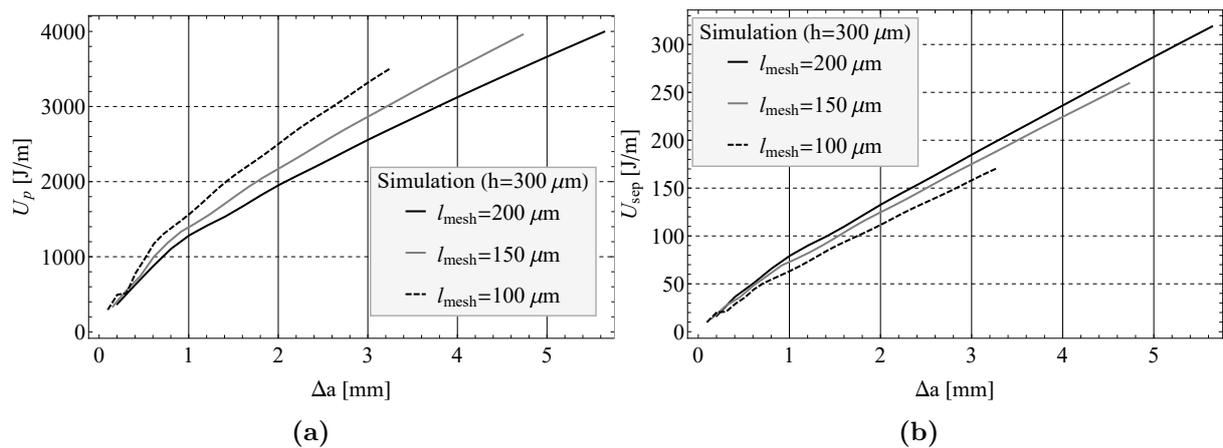


Figure 46 – a) Dissipation plastique totale dans les mailles volumiques (U_p). b) Dissipation totale dans les zones cohésives (U_{sep}).

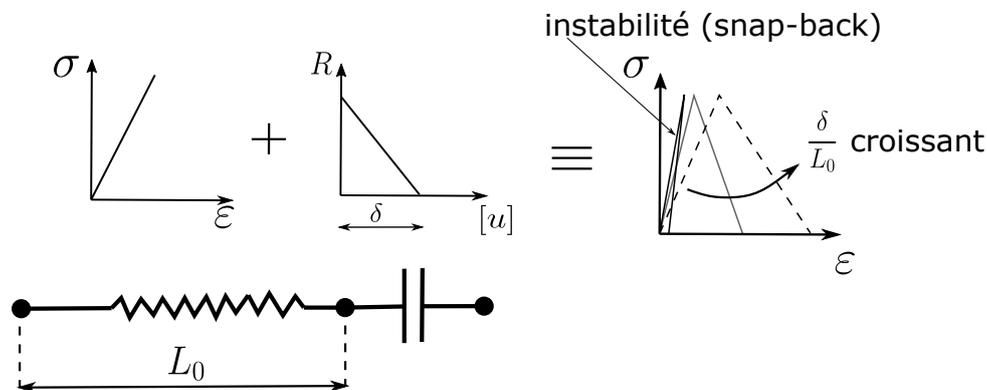


Figure 47 – Illustration de la réponse d'un modèle unidimensionnel fait d'un ressort en série avec une zone cohésive.

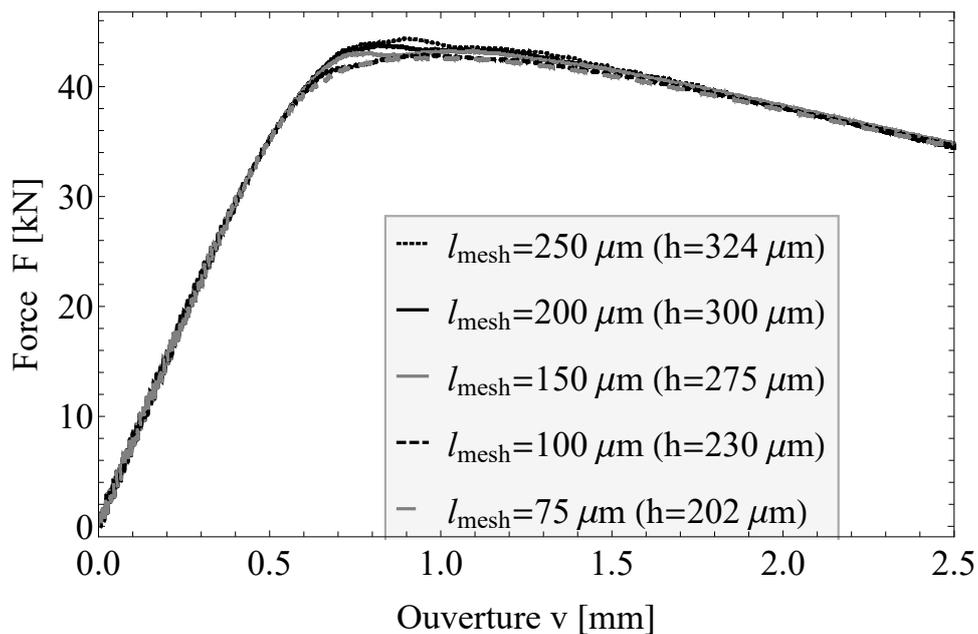


Figure 48 – Convergence à la taille de maille si h est accordé en fonction de l_{mesh} . h est fonction d'une longueur caractéristique du matériau Λ et de la taille de la discrétisation l_{mesh} .

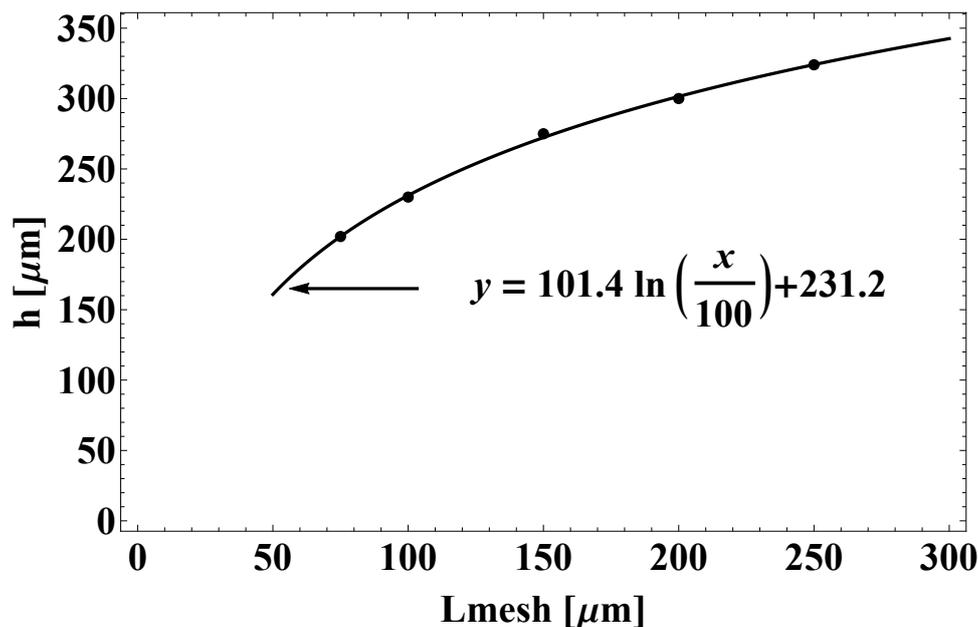


Figure 49 – Variation de h en fonction de la taille de maille l_{mesh} sur les courbes de la figure 48.

4.4 Bilan du chapitre

La démarche numérique de simulation de la fissuration repose sur une approche multicorps où la fissuration se fait le long de l'interface entre des corps déformables. Les modèles de zones cohésives sont alors intégrés comme des conditions aux limites mixtes entre corps dans une formulation de contact frottant unilatéral avec adhésion. La résolution numérique est basée sur un couplage de la méthode des éléments finis (FEM) à une méthode de dynamique des contacts (CD). Un intérêt de la méthode FEM-CD est la flexibilité offerte dans la modélisation du comportement volumique aussi bien que du comportement aux interfaces entre corps, ceci dans un contexte numérique relativement robuste. Mais cela se fait au prix d'un coût numérique important, notamment pour des calculs 3D.

L'application à la simulation d'un essai de rupture a permis d'illustrer la pertinence de cette démarche dans le cadre de la modélisation et de la simulation de la propagation de fissure.

Les investigations numériques ont également mis en évidence une dépendance de la réponse macroscopique à la taille de maille. Il s'avère toutefois que la réduction de la taille de maille augmente l'énergie dissipée, ce qui revient à renforcer la ténacité du matériau. Ce phénomène a conduit au postulat d'une dépendance du paramètre de longueur h non seulement à une longueur caractéristique liée au matériau, mais également à une longueur caractéristique du maillage. Une relation empirique entre la longueur h et la taille de maille l_{mesh} a été proposée, mais la validité de cette relation pour d'autres géométries reste une voie d'investigation.

Chapitre 5

Application : simulation d'une portion de combustible UO_2 en conditions RIA

L'objectif de ce chapitre est de simuler le comportement mécanique d'une portion de combustible UO_2 soumise à un chargement thermique de type RIA, avec une modélisation explicite de sa fissuration par l'utilisation des zones cohésives. À ces fins, des paramètres matériaux pour le combustible et la gaine sont déterminés sur la base de la documentation du code SCANAIR et de quelques résultats d'expériences disponibles dans la littérature. Le modèle de zone cohésive GTN/ZC est utilisé pour le comportement à rupture. En particulier, la transition entre comportement fragile et ductile de l' UO_2 est modélisée par la variation du paramètre de coalescence f_c en fonction de la température. Le modèle de zone cohésive GTN/ZC est également étendu pour introduire dans le comportement en rupture, l'effet de la pressurisation des bulles de la matrice UO_2 due aux gaz de fission. Les simulations ont montré des profils de fissuration de l' UO_2 cohérents vis-à-vis des observations micrographiques.

Sommaire

5.1	Présentation du cas d'étude	121
5.2	Paramètres matériaux	123
5.2.1	paramètres pour l' UO_2	123
5.2.2	Paramètres pour la gaine en Zircaloy 4	127
5.3	Prise en compte de la pressurisation des cavités microscopiques	127
5.4	Résultats	130

Le comportement du combustible des REP dans des conditions de transitoire rapide de puissance simulant un accident d'insertion de réactivité a été étudié aux travers de programmes expérimentaux nationaux et internationaux tels que le programme CABRI REP-Na, le programme CIP (CABRI International Program). La plupart des phénomènes physiques survenant dans le combustible durant un RIA sont modélisés dans le code calcul SCANAIR [Moal et al., 2014] développé à l'IRSN. L'analyse des données expérimentales de ces programmes couplée aux simulations numériques du code SCANAIR a permis de mettre en évidence les phénomènes prépondérants (dont l'interaction mécanique pastille-gaine) à l'origine d'une éventuelle rupture des crayons combustibles lors d'un transitoire RIA.

La présente étude est une application simple des modèles de zones cohésives tels que discutés aux chapitres 3 et 4 à la simulation du comportement mécanique d'une portion de combustible soumise à un transitoire thermique typique d'un accident d'insertion de réactivité. Les observations micrographiques post-essais RIA montrent une fissuration importante en périphérie de la pastille de combustible (voir figure 50). L'objectif de la simulation est d'investiguer *qualitativement* les conditions de fissuration du combustible en fonction de la température et dans une moindre mesure la distribution orthoradiale et la longueur de ces fissures ceci afin de les comparer aux faciès issus des micrographies post-essais.

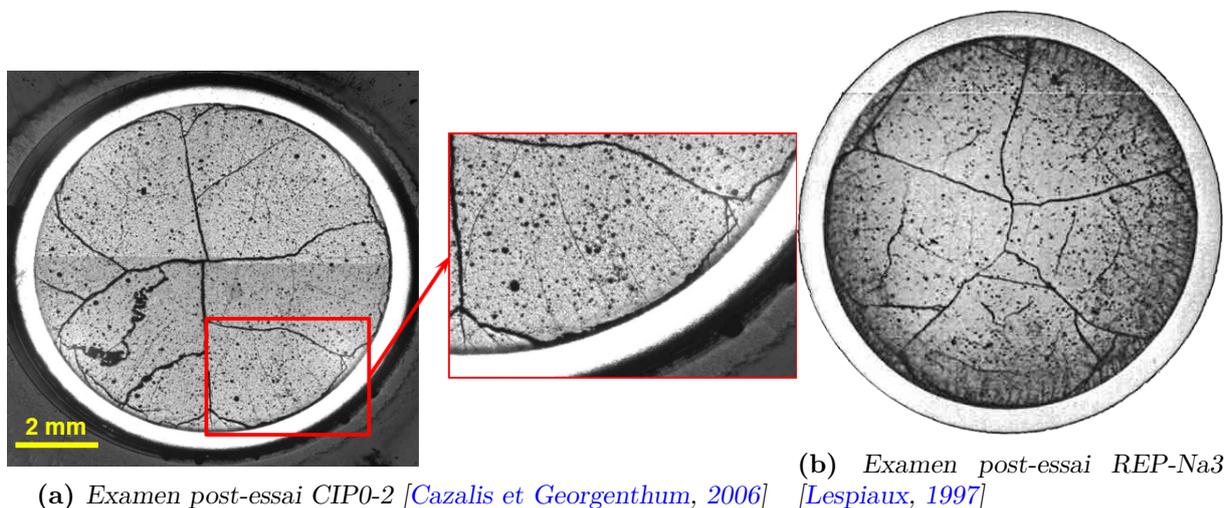


Figure 50 – Micrographie d'une tranche d'un crayon combustible après un essai d'insertion de réactivité. Observations de fissures radiales primaires formées en conditions nominales et de fissures radiales secondaires en périphérie pouvant être dues au transitoire rapide de puissance.

5.1 Présentation du cas d'étude

L'étude réalisée dans ce chapitre est basée sur l'essai CABRI REP-Na3. Quelques informations utiles sur cet essai sont présentées dans le tableau 8.

Taux de combustion moyen (GWj/t)	53
Épaisseur zone RIM (μm)	≈ 100
Type de gaine	Low tin Zy-4
Épaisseur corrodée de la gaine (μm)	15 à 40
Largeur du pulse (ms) à mi-hauteur	9.5
Pourcentage de gaz occlus relâchés durant l'essai (%)	13.70
Fissure radiale en périphérie des pastilles	Oui (fissures courtes)

Tableau 8 – Quelques caractéristiques de l'essai REP-Na3 [Papin et al., 2007; Sercombe et al., 2010; Salvo, 2014].

Le comportement thermomécanique du combustible lors de cet essai a été simulé par le code SCANAIR. Ces simulations donnent accès à des informations locales dont certaines sont utilisées comme données d'entrée pour la présente étude. En particulier la figure 51 présente l'évolution du profil radial de température dans la pastille (prise au plan de flux maximal) simulée par le code SCANAIR.

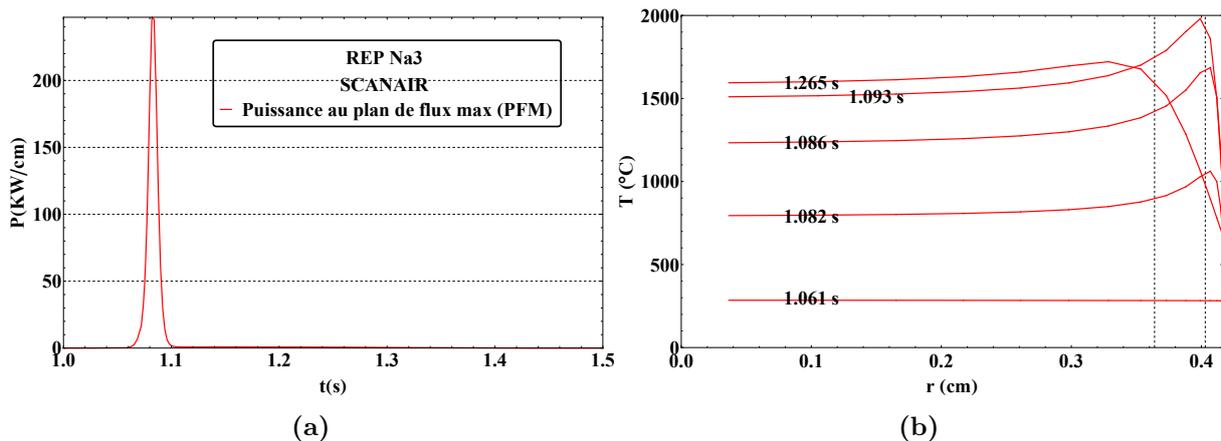


Figure 51 – a) Pulse de puissance au plan de flux max (PFM : section du combustible où la puissance est maximale). b) Profil radial de température au PFM de la pastille calculé par SCANAIR pour l'essai REP-Na3.

La géométrie de la portion du combustible considérée ainsi que les conditions aux limites sont présentées sur la figure 52. Seul un cinquième de pastille est modélisé, ainsi que la portion de gaine correspondante. Cette taille est en accord avec les observations post-irradiation sur les combustibles des REP après 2 à 5 cycles d'irradiation de base, mettant en évidence une division du combustible dans la direction circonférentielle en environ 4 et 10 fragments [Parisot et al., 2008; Sercombe et al., 2010].

La portion de combustible est divisée en 3 zones (centrale, intermédiaire et HBS) et le champ de température est imposé en *première approximation* comme homogène par zone (voir figure 53). Le champ de température est également imposé homogène dans la gaine. La modélisation est en 2D en conditions de déformation plane généralisée. La déformation $E_{zz}(t)$ imposée est donnée sur la figure 54. Il existe un jeu initial (à froid)

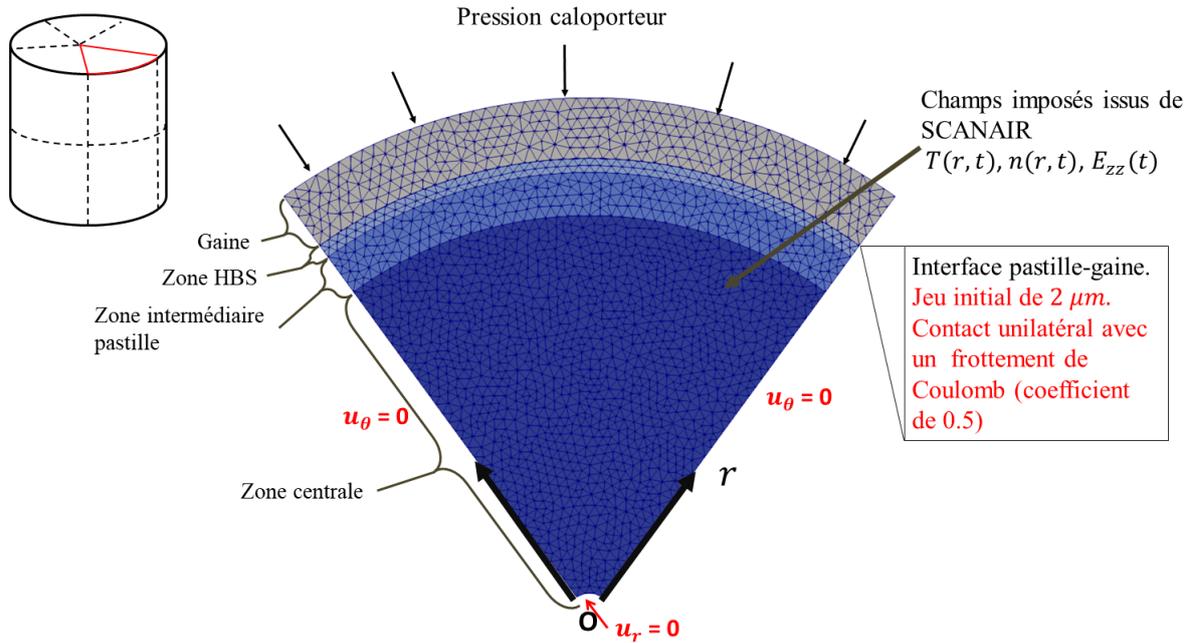


Figure 52 – Portion de combustible. Maillage ($l_{mesh} \approx 100 \mu m$), conditions aux limites et champs imposés (T la température, E_{zz} la déformation hors plan, n la quantité de matières de gaz pressurisées dans les bulles de la matrice.)

de $2 \mu m$ entre la pastille et la gaine. La pression du fluide caloporteur est fixée à $3 bar$ (pression constante calculée par SCANAIR). Les détails des géométries, conditions aux limites et des chargements sont données sur la figure 52 et en annexe G.

5.2 Paramètres matériaux

5.2.1 paramètres pour l' UO_2

Le comportement du combustible est élastoplastique avec des zones cohésives.

élastique

— Module d'Young suit la loi identifiée par Cappia et al. [2016] :

$$E(T, f, bu) = 223.7(1-2.6f)\{1-1.394 \cdot 10^{-4}(T-20)\}\{1-0.1506[1-\exp(-0.035 bu)]\} \text{ GPa},$$

avec en rappel T la température en $^\circ\text{C}$, f la porosité et bu le taux de combustion (burn-up) en GWj/t .

— Le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ d'après Martin [1989] pour $f = 4\%$.

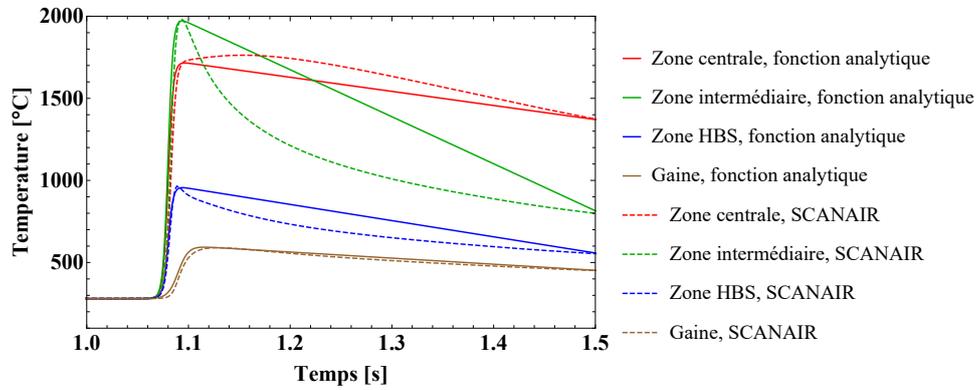


Figure 53 – Températures imposées pour la simulation sur XPer. Fonctions analytiques identifiées à partir des résultats de calculs SCANAIR. Fonctions données au tableau 13 en annexe G.

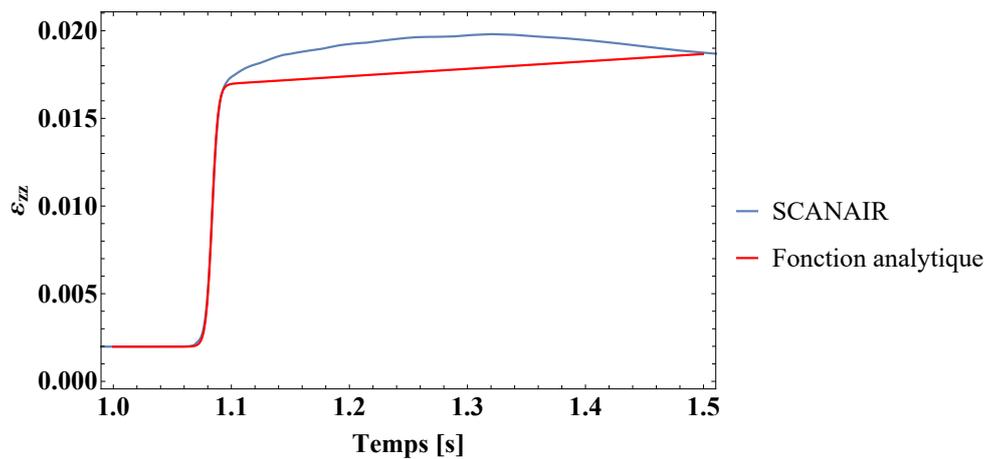


Figure 54 – Déformation E_{zz} imposée. Fonction analytique identifiée à partir des résultats de calculs SCANAIR. Fonction donnée en annexe G.

- Coefficient de dilatation thermique $\alpha \approx 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ($E_{th} = \alpha[T - T_{ref}]$); $T_{ref} = 20^\circ\text{C}$ [Popov et al., 2000].

En zone centrale et intermédiaire la porosité est prise égale à 4% ($f_0 = 0.04$). Le taux de combustion moyen bu est pris égale à 53 GWj/t . Dans la zone HBS la porosité est de 8% ($f_0 = 0.08$) et le taux de combustion local bu est pris égal à 90 GWj/t . La porosité f_0 est basée sur le jeu de données de la base de validation du code SCANAIR pour l'essai REP NA3. La porosité considérée ici prend en compte les pores de fabrication et les pores intergranulaires.

plastique

Le critère de plasticité utilisé est celui de von Mises et l'érouissage est approximé par la fonction : $\sigma_y(\bar{\varepsilon}) = \sigma_0 + K\bar{\varepsilon}$. Les valeurs des paramètres σ_0 et K ont été identifiées pour différentes températures à partir des résultats d'essais de compression de Salvo [2014] (sur le lot de référence) pour la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 0.1 \text{ s}^{-1}$ (voir figure 55) :

Pour $T \leq 2000^\circ\text{C}$

$$\sigma_0(T) = \begin{cases} 190 \text{ MPa} & \text{si } T \leq 1100 \text{ }^\circ\text{C} \\ 190 \exp\{-0.0017(T - 1100)\} \text{ MPa} & \text{si } T > 1100 \text{ }^\circ\text{C} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$K(T) = \begin{cases} 70 \text{ MPa} & \text{si } T \leq 1100 \text{ }^\circ\text{C} \\ 70 \exp\{-0.0017(T - 1100)\} \text{ MPa} & \text{si } T > 1100 \text{ }^\circ\text{C} \end{cases} \quad (5.2)$$

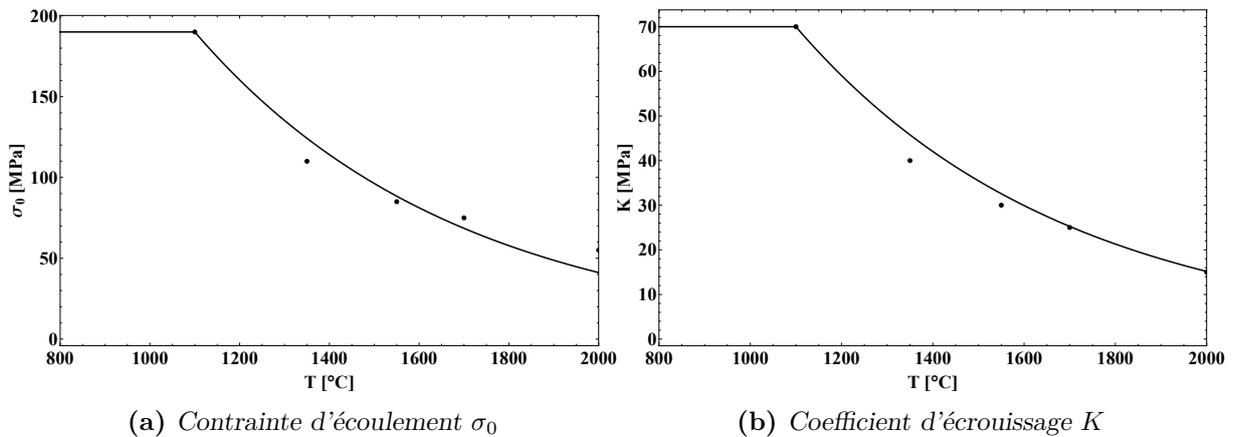


Figure 55 – Points : données pour l'UO₂ vierge identifiées à partir d'expériences de Salvo [2014] pour une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 0.1 \text{ s}^{-1}$. Ligne : fonction 5.1 identifiées.

zones cohésives

Le modèle de zone cohésive GTN/ZC est utilisé de manière phénoménologique pour

modéliser le comportement à rupture des pastilles UO_2 . Les paramètres identifiés sont présentés dans le tableau 9.

paramètres GTN/ZC	q_1	q_2	f_0	k	f_c	f_N	ϵ_N	s_N	h
combustible	1.5	1.0	0.04	1000	0.0400001	-	-	-	$7.5 \mu\text{m}$
zone HBS	1.5	1.0	0.08	1000	0.0800001	-	-	-	$7.5 \mu\text{m}$

Tableau 9 – Données du modèle GTN utilisées pour la simulation.

Le coefficient k est pris élevé et le seuil de coalescence f_c pris proche de f_0 afin de modéliser le comportement fragile du combustible à basse température.

La transition fragile-ductile dans le comportement à rupture est modélisée en faisant évoluer le seuil de coalescence f_c en fonction de la température :

$$f_c(T) = \begin{cases} 0.0400001 & \text{si } T < 1100 \text{ }^\circ\text{C} \\ 0.03996067 + 3.5768 \times 10^{-7}T & \text{si } 1100 \text{ }^\circ\text{C} \leq T < 1379.3 \text{ }^\circ\text{C} \\ 0.0357763 + 3.14944 \times 10^{-6}T & \text{si } T \geq 1379.3 \text{ }^\circ\text{C} \end{cases} \quad (5.3)$$

en zone HBS : $f_c(T) = 0.0800001 \forall T$

Il est à noter que les valeurs de f_c obtenues sont très proches de f_0 et soulignent le comportement peu ductile du combustible UO_2 en traction (il y'a très peu de croissance de cavités avant rupture). L'utilisation du modèle GTN/ZC pour la modélisation du comportement du combustible UO_2 dans cette étude est donc purement phénoménologique.

Nous notons sur la figure 53 que la température dans la zone HBS reste en dessous de 1000°C , impliquant donc que la zone HBS maintient un comportement fragile au cours du RIA (car la transition fragile-ductile s'effectue à partir de 1100°C). Les valeurs de f_c ont été calibrées de manière empirique sur la base d'essais de flexion de [Canon et al. \[1971\]](#). En dessous de $1100 \text{ }^\circ\text{C}$ le comportement est fragile, et au-delà de $1100 \text{ }^\circ\text{C}$ le comportement est de plus en plus ductile avec la température (voir figure 56).

La valeur du paramètre h est choisie pour qu'en rupture fragile (courbe $1100 \text{ }^\circ\text{C}$ sur la figure 56a), l'énergie de rupture soit du même ordre de grandeur que le taux de restitution d'énergie critique de l' UO_2 à température ambiante. La valeur de $h = 7.5 \mu\text{m}$ retenue dans les simulations correspond à une énergie de rupture en mode I de $\Gamma \approx 2.5 \text{ J/m}^2$, valeur proche du taux de restitution d'énergie critique $G_c = 3 \text{ J/m}^2$ de l' UO_2 considéré par [Michel et al. \[2008\]](#). On note que la valeur du taux de restitution d'énergie correspond à une valeur¹ de K_{IC} (en déformation plane) de $0.8 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ qui est du même ordre de grandeur (bien qu'inférieure) aux valeurs de K_{IC} comprises entre 1.3 et $1.5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ pour l' UO_2 vierge, identifiées par essais de microdureté [[McDonald et al., 2014](#)] ou comprises

entre 1 et 3 MPa \sqrt{m} pour l'UO₂ irradié [Spino et al., 1996].

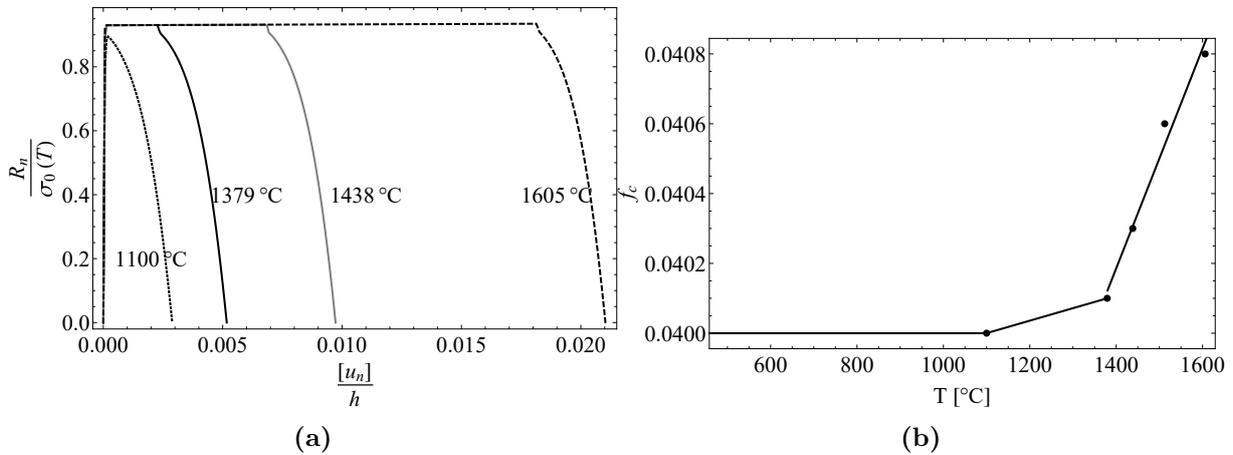


Figure 56 – a) Loi de traction-séparation en contrainte uniaxiale ($\eta_{\Sigma} = 0.33$) en fonction de la température. Pour chaque température, la porosité de coalescence f_c est déterminée afin d'obtenir une déformation à rupture similaire aux mesures de Canon et al. [1971]. b) Points : valeurs de f_c identifiées. Ligne : fonction proposée.

5.2.2 Paramètres pour la gaine en Zircaloy 4

Le comportement de la gaine est élastoplastique parfait avec un critère de plasticité de von Mises, et sans endommagement (pas de zones cohésives). Les propriétés matériaux de la gaine en Zircaloy ont été tirées de la documentation du code SCANAIR [Moal, 2012; Cazalis et al., 2007] :

$$— E(T) = \max[(10^5 - 59T)10^6, 10^9] \text{ Pa} \quad \text{pour } T \leq 1825 \text{ °C}$$

$$— \nu = 0.3 \quad \text{pour } T \leq 1825 \text{ °C}$$

$$— \sigma_0(T) = \frac{1014 - 0.543T}{1.0 + \exp(0.00803(T - 588.6))} \text{ MPa} \quad \text{pour } 20 \text{ °C} \leq T \leq 850 \text{ °C}$$

$$— \text{coefficient de dilatation thermique } \alpha = 5.96 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1} \quad \text{pour } T \leq 800 \text{ °C, température de référence } T_{ref} = 20 \text{ °C.}$$

Il est à noter que pour les besoins de convergence numérique dans la simulation un écoulement faible a tout de même été ajoutée dans le comportement de la gaine.

5.3 Prise en compte de la pressurisation des cavités microscopiques

La production des gaz de fission (essentiellement du Xénon et du Krypton) dans le combustible UO₂, lors de l'irradiation participe à la mise en pression des cavités contenues dans la matrice du combustible. En situation de RIA, les pressions dans les cavités

1. Relation entre G_c et K_{IC} en déformation plane : $K_{IC} = \sqrt{\frac{EG_c}{1-\nu^2}}$

augmentent fortement. Ces bulles sous pression sont responsables d'un gonflement supplémentaire du combustible en plus de la déformation thermique. Cet effet n'est pas pris en compte dans le modèle de comportement du matériau utilisé dans les mailles volumiques pour la simulation. Par contre, dans cette sous-section le modèle de zone cohésive GTN/ZC est modifié pour introduire l'effet de la pressurisation des cavités microscopiques de la matrice dans le comportement à rupture.

L'effet de la pressurisation des bulles est prise compte en considérant une cavité sous une pression P_b dans le VER considéré par Gurson. La surface de charge macroscopique du modèle GTN qui en découle s'obtient en ajoutant la contrainte P_b à la partie hydrostatique de la contrainte seuil (voir [Vincent et al. \[2009\]](#) pour une preuve). Les contraintes seuil du modèle GTN (équation (3.11)) prennent alors la forme :

$$\begin{cases} \Sigma_m = \frac{2}{3q_2} \sigma_y \left(\operatorname{arcsinh} \left(\frac{2\eta \dot{\mathbf{E}}}{q_1 f^*} \right) - \operatorname{arcsinh}(2\eta \dot{\mathbf{E}}) \right) - P_b \\ \Sigma_{eq} = \sigma_y \left(\sqrt{1 + (2\eta \dot{\mathbf{E}})^2} - \sqrt{(q_1 f^*)^2 + (2\eta \dot{\mathbf{E}})^2} \right) \end{cases} \quad (5.4)$$

La loi de traction - séparation ZC/GTN avec une prise en compte de l'effet d'une pression P_b dans les cavités microscopiques est donnée ci-dessous :

Vecteur traction normalisé :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} T_{nn} = \frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M(\eta_E, q_1 f^*) + \frac{4}{9} N(\eta_E, q_1 f^*) \frac{1}{E_{eq}} \left(\frac{[u_n]}{h} - \gamma \right) - \frac{P_b}{\sigma_y} \\ T_{nt} = \frac{1}{3} N(\eta_E, q_1 f^*) \frac{1}{E_{eq}} \frac{[u_t]}{h} \\ T_{ns} = \frac{1}{3} N(\eta_E, q_1 f^*) \frac{1}{E_{eq}} \frac{[u_s]}{h} \end{cases}$$

où

$$E_{eq} = \frac{2}{3} \left(\left(\frac{[u_n]}{h} - \gamma \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{[u_t]^2}{h^2} + \frac{3}{4} \frac{[u_s]^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_E = \frac{\frac{[u_n]}{h} + 2\gamma}{2 \left(\left(\frac{[u_n]}{h} - \gamma \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{[u_t]^2}{h^2} + \frac{3}{4} \frac{[u_s]^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Contraintes de cohésion :

$$\mathbf{R} = \sigma_y \begin{Bmatrix} T_{nn} \\ T_{nt} \\ T_{ns} \end{Bmatrix}.$$

Loi d'évolution de la porosité :

$$f^* = \begin{cases} f \text{ si } f \leq f_c, \\ f_c + k(f - f_c); \end{cases}$$

$$df = (1 - f) \left(\frac{d[u_n]}{h} + 2d\gamma \right) + Ad\bar{\varepsilon}.$$

Loi d'écroutissage $\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon})$:

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{1}{1 - f} \left(T_{nn} \frac{d[u_n]}{h} + T_{nt} \frac{d[u_t]}{h} + T_{ns} \frac{d[u_s]}{h} + (T_{tt} + T_{ss}) d\gamma \right),$$

$$\text{où } T_{tt} = T_{ss} = \frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M(\eta_E, q_1 f^*) + \frac{2}{9} N(\eta_E, q_1 f^*) \frac{1}{dE_{eq}} \left(d\gamma - \frac{d[u_n]}{h} \right) - \frac{P_b}{\sigma_y}.$$

(5.5)

Pour ce calcul d'application, l'évolution locale de la pression P_b dans le modèle de zone cohésive est faite en exploitant la loi des gaz parfaits :

$$P_b = \frac{n}{V_b} RT \quad (5.6)$$

où n est le nombre de moles de gaz, $R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ est la constante des gaz parfaits, V_b le volume de la bulle pressurisée, T la température.

Le transfert des informations calculées par le code SCANAIR au code XPer est effectué en écrivant la pression P_b sous la forme suivante :

$$P_b = \frac{\frac{n}{\Omega_{maille}}}{\frac{V_b}{\Omega_{maille}}} RT = \frac{n_v}{f} RT \quad (5.7)$$

où Ω_{maille} est le volume de l'élément de maillage dans le code SCANAIR, $n_v = n/\Omega_{maille}$, le nombre de moles par unité de volume. La porosité tient compte des pores de fabrication et des bulles intergranulaires. Il a été observé d'après les calculs SCANAIR que cette porosité varie très peu au cours du RIA. Ainsi la porosité va être estimée par :

$$P_b \approx \frac{n_v RT}{f_0} \quad (5.8)$$

Les résultats de simulations du code SCANAIR montrent que le nombre de moles par unités de volume n_v est quasi constant tant qu'il n'y a pas de rupture de joints de grains¹. Pour l'essai REP-Na3, on retient les valeurs suivantes (moyennes des valeurs initiales des différentes mailles SCANAIR) :

- $n_v \approx 60 \text{ mol}/m^3$ dans la zone centrale et intermédiaire,
- $n_v \approx 460 \text{ mol}/m^3$ dans la zone HBS.

5.4 Résultats

L'état de la portion du combustible à la fin de la simulation est présenté sur la figure 57. Le profil de fissuration à l'issue de la simulation concorde avec les observations que l'on peut faire sur la micrographie de l'essai REP-Na3 :

- on observe la présence de nombreuses fissures radiales courtes en périphérie du combustible (dans la zone HBS) ;
- on note que quelques-unes de ces fissures radiales se sont propagées dans la zone intermédiaire ;
- enfin, il est également observé une fissure circonférentielle à l'interface entre la zone intermédiaire et la zone centrale du combustible.

La plupart des fissures radiales courtes s'initient dans la zone HBS lors de la phase de montée en température, puis la propagation des fissures dans la zone intermédiaire se fait lors de la phase de retour à froid (voir figure 58). On note que la fissuration radiale du combustible est en partie influencée par les propriétés particulières de la zone HBS. La figure 59 illustre ce point au sens où si l'on ne tient pas compte de la zone HBS (c'est-à-dire, mêmes propriétés mécaniques dans l'intégralité de la pastille) alors la densité des

1. Il a toutefois été observé dans la simulation SCANAIR de l'essai REP-Na3, une forte chute du nombre de moles par unité de volumes n_v dans les mailles de la zone HBS suite à la rupture des joints de grains et à l'écoulement radial des gaz qui s'en suit. La présente modélisation ne tenant pas compte de la rupture de joints de grains, cet aspect n'est pas pris en compte.

fissures radiales obtenue est moindre. Le positionnement de la fissure circonférentielle à l'interface entre la zone centrale et la zone intermédiaire est favorisé par le gradient thermique important qui existe entre ces 2 régions. Le profil thermique radial dans la pastille a été simplifié dans cette simulation. Une description plus précise du profil thermique radial dans la pastille permettrait de mieux rendre compte de l'initiation et de la propagation des fissures circonférentielles. On notera également que la température de la zone HBS restant en dessous

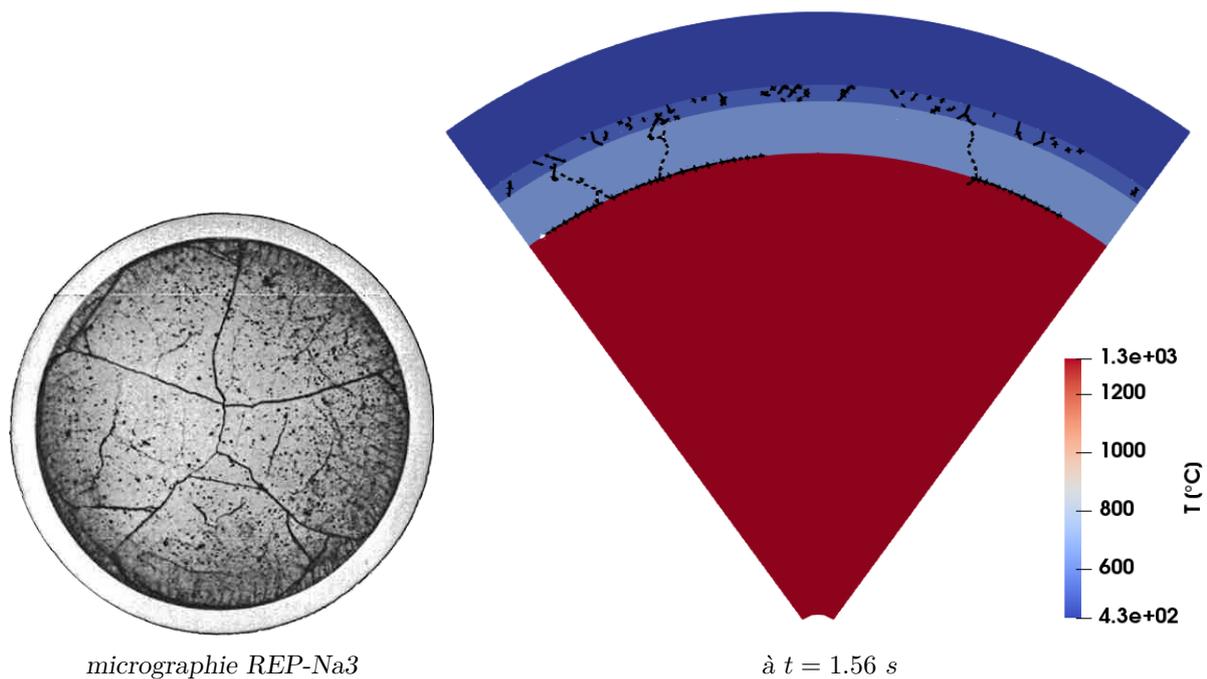


Figure 57 – Comparaison des faciès de fissuration. Points en noir : zones cohésives rompues.

Pour conclure, malgré un certain nombre de simplifications adoptées dans le cadre de la modélisation, les résultats de simulation montrent tout de même des distributions spatiales de fissuration cohérentes avec les micrographies. Ainsi, il s'avère que les facteurs au premier ordre de l'initiation des fissures radiales secondaires sont le gradient thermique important en périphérie et l'état dégradé de la périphérie des pastilles.

D'autres aspects pouvant avoir une influence non négligeable sur les mécanismes de fragmentation du combustible n'ont pas été pris en compte dans cette simulation, notamment :

- l'effet de la vitesse du chargement, particulièrement rapide pour les transitoire RIA.
- l'état mécanique du combustible juste avant un transitoire de type RIA qui est fortement hétérogène suite au vieillissement sous irradiation en conditions nominales de fonctionnement.
- la modélisation en 3 dimensions, car les déformations du combustible ne sont pas homogènes suivant la hauteur dans la pastille.

L'application actuelle est le préluce d'investigations plus fines du comportement d'un

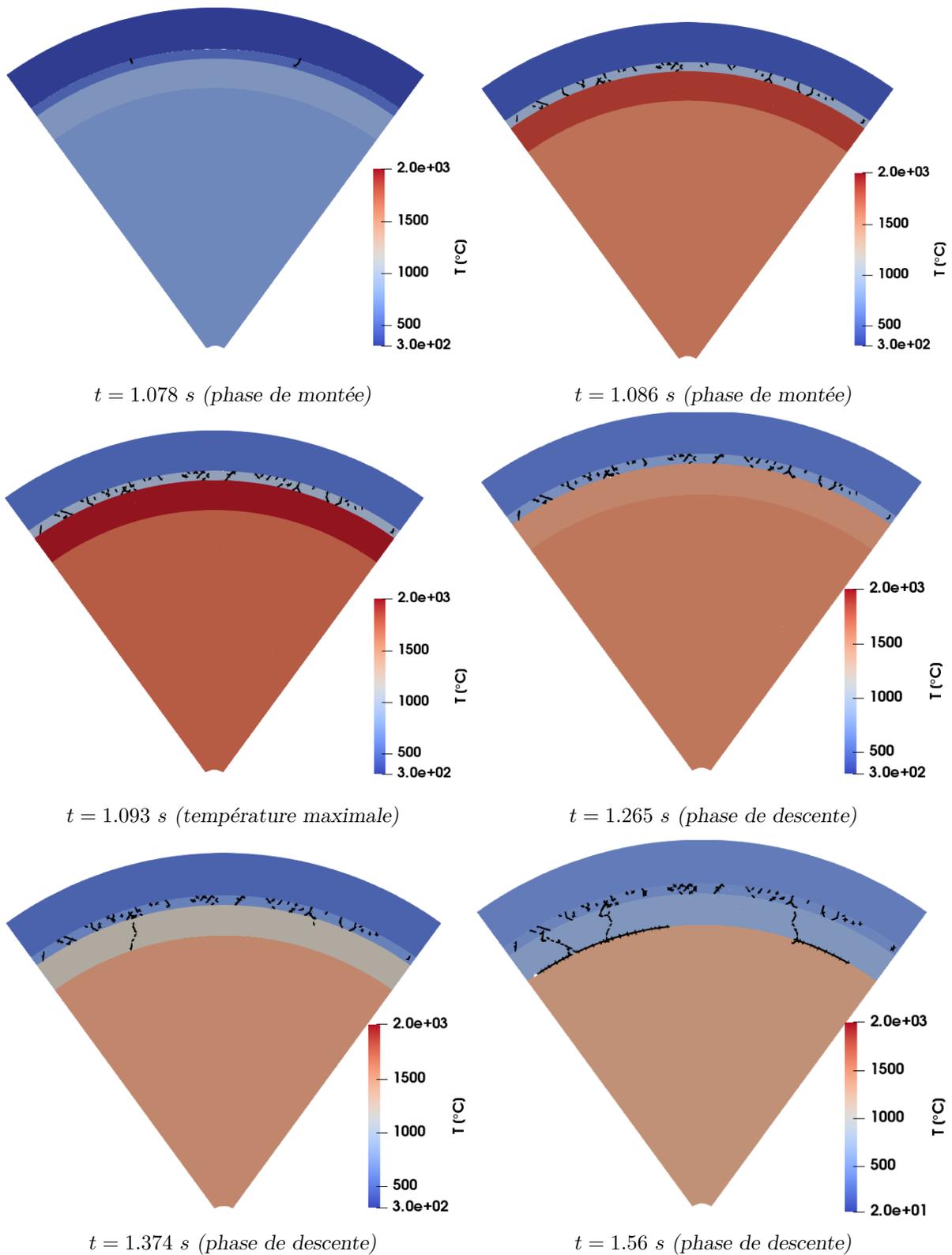
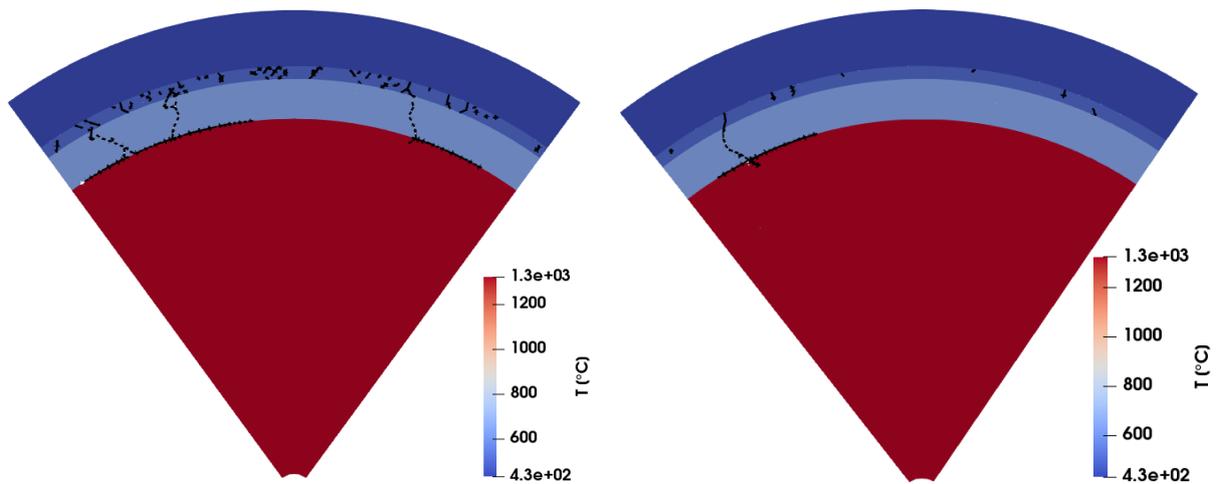


Figure 58 – Champ de température et profil de fissuration dans la pastille à différents instants.



(a) Avec HBS.

Zone HBS ($f_0 = 0.08$ et $bu = 90 \text{ GWj/t}$),
ailleurs ($f_0 = 0.04$ et $bu = 53 \text{ GWj/t}$)

(b) Sans HBS.

Mêmes propriétés dans toute la pastille
($f_0 = 0.04$ et $bu = 53 \text{ GWj/t}$)

Figure 59 – Comparaison de l'état final du combustible en fonction de la prise en compte des propriétés particulières de la zone HBS ou non.

crayon combustible, notamment en conditions de fonctionnement nominales (fragmentation en réacteur) et en conditions accidentelles (fissuration du combustible, interaction mécanique gaine, rupture de la gaine).

Conclusions et perspectives

Ce travail s'inscrit dans la problématique portant sur la prédiction du comportement à haute température du combustible nucléaire des réacteurs à eau sous pression (REP), notamment le combustible en dioxyde d'uranium UO_2 . Le comportement de ce combustible est de type élastique fragile à basses températures et élasto-visco-plastique à haute température avec une zone de transition comprise entre 1100 °C et 1300 °C. En réacteur les pastilles de combustible subissent une fissuration et une fragmentation importante lorsqu'elles sont soumises à des transitoires de puissances. L'interaction des pastilles fragmentées avec la gaine durant des transitoires rapides (comme lors d'un accident d'insertion de réactivité, RIA) peut contribuer à une rupture de la gaine (première barrière de sûreté). Le comportement du crayon combustible constitue un critère majeur d'évaluation de la sûreté des réacteurs nucléaires.

Ce travail s'inscrit dans la thématique de recherche portant sur la modélisation et la simulation du comportement à rupture des matériaux. Le focus est fait ici sur le développement d'un critère local de rupture et sur la simulation de la propagation des fissures dans un matériau ductile. La démarche de modélisation et de simulation adoptée repose sur une approche volumique-surfacique, dont le principe de base consiste à coupler les relations de comportements de type contrainte - déformation décrivant le comportement volumique du matériau, à des modèles de zones cohésives surfaciques (de type contrainte - ouverture) qui permettent de décrire le processus d'initiation et de propagation de fissure. Dans le cadre de cette approche, le choix est fait de décrire l'intégralité du processus d'endommagement et de rupture par les modèles de zones cohésives, le comportement volumique étant sans endommagement. De fait, le modèle de zone cohésive (ou loi de traction - séparation) doit rendre compte des mécanismes d'endommagement ductile. Un modèle de zone cohésive a été développé via une approche micromécanique à partir de l'idée que la loi de traction - séparation doit être équivalente au comportement d'un VER soumis à une traction. Ceci est fait en décrivant la surface cohésive comme une bande de localisation des déformations de faible épaisseur dont le comportement est régi par un modèle de Gurson-Tveergaard-Needleman (GTN). La loi de traction - séparation résulte d'une projection du modèle GTN dans la cinématique surfacique de la bande.

Le processus de rupture ductile résultant de la localisation des déformations dans des bandes volumiques de plus en plus fines jusqu'à la création d'une fissure est un processus d'endommagement volumique. La schématisation de ces bandes de localisation comme des surfaces de discontinuités régit par des lois de traction-séparation présente certaines limites pour la modélisation de la rupture ductile. En effet les états du chargement possibles dans une cinématique surfacique sont inférieurs à ceux possibles dans une cinématique volumique. Il en résulte une loi de traction - séparation qui ne décrit que de manière incomplète le processus de rupture ductile. Un enrichissement du modèle de zone cohésive a été proposé pour lever cette limitation. La loi de traction - séparation dépend explicitement d'une variable qui caractérise l'état du chargement. Cet état du chargement est

déterminé sur le domaine adjacent à la zone cohésive, qui comme il est volumique présente une cinématique complète. Cette formulation apporte une flexibilité dans la façon d'introduire l'effet de l'état du chargement dans la loi de traction - séparation, et en outre il permet au modèle de zone cohésive d'être en mesure de reproduire le comportement d'un point matériel GTN soumis à différents trajets de chargements en contraintes ou en déformations.

L'implémentation numérique s'est faite dans le cadre d'une approche multicorps où les lois de traction - séparations (zones cohésives) sont introduites comme des conditions aux limites mixtes exprimant un contact adhésif entre les éléments (corps). La méthode de résolution numérique est basée sur les algorithmes de la dynamique non régulière des contacts (Non Smooth Contact Dynamics ou NSCD). La pertinence de cette classe de modèles issus de la projection dans une cinématique cohésive de modèles micromécaniques volumiques a pu être évaluée en appliquant le modèle GTN/ZC à quelques études numériques. La simulation du comportement d'une portion de combustible soumise à des conditions de chargement thermomécaniques a permis d'obtenir des résultats qualitatifs raisonnables. Les fissures radiales courtes observées en périphérie des pastilles UO_2 issues des essais REP-Na sur le réacteur expérimental CABRI ont pu être investiguées par la simulation. Une étude quantitative a également été menée au travers de la simulation d'un essai de ténacité sur un acier ferritique ductile (StE460 dans la désignation allemande). La simulation de l'essai CT avec des paramètres matériaux GTN identifiés dans la littérature a permis de retrouver les courbes expérimentales force - ouverture $F - COD$ et de résistance (courbe R) en terme de $J - \Delta a$.

Néanmoins les investigations numériques ont mises en évidence un effet du maillage sur les résultats de simulation. Plus la taille de maille est fine, plus l'énergie dissipée par avancée de fissure augmente. C'est donc contraire à la localisation avec la taille du maillage qui est usuellement observée en mécanique de l'endommagement. Cette observation a conduit au postulat que le paramètre de régularisation h représentant conceptuellement l'épaisseur d'une bande de localisation plastique dépend de la microstructure et également de la discrétisation éléments finis. Une corrélation entre h et la taille de maille l_{mesh} a été observée sur les simulations CT pour l'obtention de courbes macroscopiques indépendantes de la taille de maille.

Au cours de ce travail, il est apparu que certains aspects doivent être approfondis par des recherches ultérieures ou complétés par des investigations supplémentaires.

Sur le plan théorique :

- des approfondissements peuvent être menés par le développement de loi cohésive à partir de modèles micromécaniques plus riches que le modèle GTN (prenant en compte l'endommagement par cisaillement) ;
- le modèle de zone cohésive possède au moins une longueur caractéristique h qui dans

le cadre présent est prise comme une propriété liée à sa microstructure matériau. Mais il apparaît que cette longueur est influencée par la taille de maille. La caractérisation précise de cette longueur vis-à-vis de la microstructure et de la taille de maille apparaît comme une voie de recherche intéressante.

Sur le plan de la modélisation et de la simulation du comportement du combustible :

- il pourrait être intéressant de prendre en compte des comportements de l'UO₂ différents en traction et en compression ;
- le comportement à haute température de l'UO₂ étant *viscoplastique*, deux approches peuvent éventuellement être envisagées pour introduire les effets de vitesse dans une loi de traction - séparation :
 - la première, qui est phénoménologique, consiste à modifier directement la contrainte d'écoulement du matériau σ_y dans le modèle GTN/ZC en lui attribuant une loi de comportement de type viscoplastique ($\sigma_y(\dot{\varepsilon}^p)$).
 - la deuxième consiste à réécrire une loi de traction - séparation pour la bande cohésive en adoptant cette fois-ci comme base, un modèle poro-mécanique avec une matrice viscoplastique tel que celui proposé par [Leblond et al. \[1994\]](#).

Annexes

Sommaire

A	Expressions de $\dot{\gamma}$ en fonction de la triaxialité η_E^{vol} et du saut $[\dot{u}]$	141
B	Intégration implicite du modèle GTN	143
B.1	Relations de comportement	143
B.2	Intégration numérique	144
C	Estimation des paramètres numériques $\alpha_n, \alpha_t, \alpha_s$	148
D	Calcul de la déformation moyenne	150
E	Implémentation du modèle de zone cohésive GTN/ZC	153
F	Détermination de la courbe de rupture $J - \Delta a$	156
G	Compléments d'informations sur la simulation RIA	158
G.1	Compléments d'informations sur la géométrie	158
G.2	Compléments d'informations sur les chargements	159
G.3	Compléments d'informations sur la prise en compte de la pressurisation des cavités	159

A Expressions de $\dot{\gamma}$ en fonction de la triaxialité $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol}$ et du saut $[\dot{\mathbf{u}}]$

Connaissant une valeur imposée de la triaxialité du taux de déformation $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol}$ et de l'état cinématique $[\dot{\mathbf{u}}]$, on veut déterminer la valeur de $\dot{\gamma}$ solution de l'équation suivante :

$$\eta_{\dot{\mathbf{E}}} = \eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol} \Leftrightarrow \frac{\frac{[\dot{u}_n]}{h} + 2\dot{\gamma}}{2 \left(\left(\frac{[\dot{u}_n]}{h} - \dot{\gamma} \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{[\dot{u}_t]^2}{h^2} + \frac{3}{4} \frac{[\dot{u}_s]^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}}} - \eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol} = 0 \quad (\text{A.1})$$

On s'intéresse en particulier au cas où $[\dot{u}_n] > 0$ (situation de charge), puisque le comportement en situation de décharge ($[\dot{u}_n] < 0$) du modèle de zone cohésive est traité séparément dans la section 3.6.2.

Premièrement, considérons le cas où $\eta_{\dot{\mathbf{E}}} \geq 0$, correspondant à des états de traction.

La relation $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^2 = (\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol})^2$ a pour solutions :

— si $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol} = 1$ ou $\eta_{\dot{\mathbf{E}}} = -1$, alors :

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{1}{4} \frac{[\dot{u}_n]^2 + [\dot{u}_t]^2 + [\dot{u}_s]^2}{[\dot{u}_n]h} \quad (\text{A.2})$$

— si $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol} \neq 1$, l'équation (A.1) a 2 racines dont le domaine de validité dépend de $[\dot{\mathbf{u}}]$ et $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}$:

$$\dot{\gamma}_{\pm} = \frac{2(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol})^2 + 1}{2((\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol})^2 - 1)} \frac{[\dot{u}_n]}{h} \pm \frac{\sqrt{(\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol})^2 \left(9 \frac{[\dot{u}_n]^2}{h^2} + 3(1 - (\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol})^2) \left(\frac{[\dot{u}_t]^2}{h^2} + \frac{[\dot{u}_s]^2}{h^2} \right) \right)}}{2((\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol})^2 - 1)} \quad (\text{A.3})$$

L'ensemble des racines en fonction du domaine de validité est donné dans le tableau 10.

$\eta_{\dot{\mathbf{E}}}$ \diagdown $[\dot{u}_n]$	$[\dot{u}_n] > 0$
$[0, 1[$	$\dot{\gamma}_-$
1	$\dot{\gamma}_1$
$]1, +\infty[$	$\dot{\gamma}_{\pm}$

Tableau 10 – Solutions de l'équation A.1

Entre $[0, 1[$, la solution est unique (cf. le tableau 10). Par contre pour $\eta_{\dot{\mathbf{E}}} > 1$, il existe 2 racines solutions $\dot{\gamma}_{\pm}$. La racine $\dot{\gamma}_-$ a été retenue comme la solution pertinente par rapport à la modélisation. En effet, la racine $\dot{\gamma}_+$ reste supérieure à $\frac{[\dot{u}_n]}{h}$ quelque soit $[\dot{\mathbf{u}}]$. En considérant que la modélisation le taux de déformation normal $\frac{[\dot{u}_n]}{h}$ dans la zone cohésive doit être supérieure au taux de déformation transverse $\dot{\gamma}$, il ressort que la racine $\dot{\gamma}_-$ est la racine satisfaisante.

Deuxièmement, considérons le cas $\eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol} < 0$ correspondant aux états de compression. L'évolution de la porosité (sans nucléation) (2.42) indique que celle-ci diminue dans ce cas. Comme la porosité est assimilée à une variable d'endommagement, elle est donc une fonction croissante. Les états de compression ne font pas varier la variable d'endommagement. La valeur de $\dot{\gamma}$ pour tous les états de compression sera simplement prise égale à celle de l'état de triaxialité nulle ($\eta_{\dot{\mathbf{E}}} = 0$) qui ne fait pas varier l'endommagement. Soit :

$$\dot{\gamma} = -\frac{[\dot{u}_n]}{2h} \quad (\text{A.4})$$

Les solutions retenues pour le calcul de $\dot{\gamma}$ sont synthétisées ci-dessous :

$\eta_{\dot{\mathbf{E}}}$ \diagdown $[\dot{u}_n]$	$[\dot{u}_n] \geq 0$
$] -\infty, 0[$	$-\frac{[\dot{u}_n]}{2h}$
$[0, 1[$	$\dot{\gamma}_-$
1	$\dot{\gamma}_1$
$]1, +\infty[$	$\dot{\gamma}_-$

Tableau 11 – Solutions retenues pour le calcul de $\dot{\gamma}$. On notera que les solutions $[\dot{u}_n] > 0$ ont été prolongées au cas $[\dot{u}_n] = 0$.

B Intégration implicite du modèle GTN

Cette section détaille la méthode d'intégration utilisée pour le calcul des contraintes sur la cellule unitaire modélisée avec le modèle GTN. L'intégration est basée sur la méthode d'intégration des modèles de plasticité sensibles à la pression proposée par Aravas [1987]. Le schéma d'intégration est de type implicite.

B.1 Relations de comportement

L'hypothèse de la partition des déformations totales est formulée :

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} + d\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{B.5})$$

où $d\boldsymbol{\varepsilon}$ est l'incrément de la déformation totale, $d\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ est l'incrément de déformation élastique et $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ est l'incrément de déformation plastique.

L'élasticité linéaire s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} \quad (\text{B.6})$$

avec $\mathbb{C} = 3k\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{K}$, le tenseur d'élasticité **isotrope**. Le module de compressibilité et le module de cisaillement sont notés respectivement k et μ . Les projecteurs sur les parties hydrostatique et déviatorique des tenseurs d'ordre 2 sont notés \mathbb{J} et \mathbb{K} .

Le critère de plasticité GTN s'écrit :

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y, f) = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_y^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3}{2}q_2 \frac{\sigma_m}{\sigma_y}\right) - 1 - q_3 f^{*2} = 0 \quad \text{où} \quad q_3 = q_1^2 \quad (\text{B.7})$$

$$f^* = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + k(f - f_c) & \text{si } f \geq f_c \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

avec $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}$, $\sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d\right)^{\frac{1}{2}}$ où $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{i}$.

f est la fraction volumique des cavités, f^* est la porosité modifiée, $\sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ est la contrainte d'écoulement plastique du matériau complètement dense et $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est une déformation plastique équivalente dans la matrice.

L'écoulement plastique est donné par la règle de normalité :

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\varepsilon}^p &= d\Lambda \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = d\Lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \\ &= d\Lambda \left(\frac{1}{3} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_m} \mathbf{i} + \frac{3}{2\sigma_{eq}} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{eq}} \boldsymbol{\sigma}_d \right) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

où $d\Lambda$ est l'incrément du multiplicateur plastique.

La notation suivante est introduite :

$$\mathbf{N} = \frac{3}{2\sigma_{eq}} \boldsymbol{\sigma}_d \quad (\text{B.10})$$

Avec cette notation le tenseur de contrainte et l'incrément de déformation plastique se réécrivent :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbf{i} + \frac{2}{3} \sigma_{eq} \mathbf{N} \quad (\text{B.11})$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\Lambda \left(\frac{1}{3} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_m} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{eq}} \mathbf{N} \right) \quad (\text{B.12})$$

En négligeant l'élasticité, l'évolution de la porosité f est donnée par le bilan de masse :

$$df = (1 - f) \text{tr} d\boldsymbol{\varepsilon}^p + A(\bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon} \quad (\text{B.13})$$

La contrainte d'écoulement est donnée par la loi d'écrouissage $\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon})$ où $d\bar{\varepsilon}$ est évalué à partir de l'égalité de la dissipation microscopique et macroscopique :

$$(1 - f) \sigma_y d\bar{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^p \Rightarrow d\bar{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{(1 - f) \sigma_y} \quad (\text{B.14})$$

B.2 Intégration numérique

L'intégration incrémentale proposée par Aravas [1987] est basée sur un schéma d'Euler implicite. La démarche est la suivante :

1. Les variables $(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\sigma}_t, f_t, \bar{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t^p)$ sont connues à un instant t .
2. Etant donné un incrément de déformation $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, calculer les valeurs des variables $(\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}, f_{t+\Delta t}, \bar{\varepsilon}_{t+\Delta t}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p)$ à l'instant $t + \Delta t$.

Prédiction élastique

A l'instant $t + \Delta t$ la déformation totale vaut $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{\varepsilon}_t + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, avec $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ imposée. L'élasticité s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} &= \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^{el} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_t^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ &= \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\varepsilon}_t^p - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ &= \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_t + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_t^p - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ &= \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_t^{el} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t^{el} = \boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_t^p \\ \text{d'où } \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} &= \boldsymbol{\sigma}^{el} - \mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

où $\boldsymbol{\sigma}^{el} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_t^{el} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\varepsilon}_t^p)$ est le prédicteur élastique.

En substituant la contrainte par le prédicteur élastique dans le critère de plasticité, si

$$\phi[\boldsymbol{\sigma}^{el}, f_t, \sigma_y(\bar{\varepsilon}_t)] < 0$$

alors il n'y a pas progression des déformations plastiques $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = 0$. Soit,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} &= \boldsymbol{\sigma}^{el} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_t^p \\ f_{t+\Delta t} &= f_t \\ \bar{\varepsilon}_{t+\Delta t} &= \bar{\varepsilon}_t\end{aligned}$$

Si $\phi[\boldsymbol{\sigma}^{el}, f_t, \sigma_y(\bar{\varepsilon}_t)] \geq 0$, la réponse est élastoplastique. Les incréments des différentes variables d'état doivent être déterminés.

Réponse élasto-plastique

Le critère de plasticité à l'instant $t + \Delta t$ vérifie :

$$\phi[(\sigma_m)_{t+\Delta t}, (\sigma_{eq})_{t+\Delta t}, f_{t+\Delta t}, \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{t+\Delta t})] = 0 \quad (\text{B.16})$$

L'incrément de déformation se calcule par la règle de normalité :

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p &= \Delta\varepsilon_m^p \mathbf{i} + \Delta\varepsilon_{eq}^p \mathbf{N}_{t+\Delta t} \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p &= \Delta\Lambda \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_m} \right)_{t+\Delta t} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{eq}} \right)_{t+\Delta t} \mathbf{N}_{t+\Delta t} \right].\end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

avec

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon_m^p = \Delta\Lambda \frac{1}{3} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_m} \right)_{t+\Delta t} \\ \Delta\varepsilon_{eq}^p = \Delta\Lambda \left(\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{eq}} \right)_{t+\Delta t} \end{cases}$$

L'élimination du paramètre $\Delta\Lambda$ dans les relations précédentes donne :

$$- \left(\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{eq}} \right)_{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_m^p + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_m} \right)_{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_{eq}^p = 0 \quad (\text{B.18})$$

Les incréments Δf et $\Delta\bar{\varepsilon}$ sont :

$$\Delta\bar{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p}{(1 - f_{t+\Delta t})\sigma_y(\bar{\varepsilon}_{t+\Delta t})} \quad (\text{B.19})$$

$$\Delta f = (1 - f_{t+\Delta t}) \text{tr} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p + A[\bar{\varepsilon}_{t+\Delta t}] \Delta\bar{\varepsilon} = 3(1 - f_{t+\Delta t}) \Delta\varepsilon_m^p \quad (\text{B.20})$$

En utilisant l'expression de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ (équation (B.17)), on peut réécrire la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}$ (équation (B.15)) comme :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} &= \boldsymbol{\sigma}^{el} - 3k\Delta\varepsilon_m^p \mathbf{i} - 2\mu\Delta\varepsilon_{eq}^p \mathbf{N}_{t+\Delta t} \\ \text{soit} \quad (\sigma_m)_{t+\Delta t} &= \sigma_m^{el} - 3k\Delta\varepsilon_m^p \\ (\sigma_d)_{t+\Delta t} &= \sigma_d^{el} - 2\mu\Delta\varepsilon_{eq}^p \mathbf{N}_{t+\Delta t}\end{aligned}\quad (\text{B.21})$$

Comme $(\boldsymbol{\sigma}_d)_{t+\Delta t}$ et $\mathbf{N}_{t+\Delta t}$ sont par définition coaxiaux, cette dernière expression (B.21) montre que $(\boldsymbol{\sigma}_d)_{t+\Delta t}$, $\mathbf{N}_{t+\Delta t}$ et $\boldsymbol{\sigma}_d^{el}$ sont coaxiaux. De plus, $\mathbf{N} : \mathbf{N} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{\boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d}{\sigma_{eq}^2} = 1$. $\mathbf{N}_{t+\Delta t}$ peut se calculer directement à partir du prédicteur élastique $\boldsymbol{\sigma}^{el}$:

$$\mathbf{N}_{t+\Delta t} = \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_d)_{t+\Delta t}}{(\sigma_{eq})_{t+\Delta t}} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}_d^{el}}{\sigma_{eq}^{el}}$$

Après quelques calculs, on obtient :

$$(\sigma_{eq})_{t+\Delta t} = \left(\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}_d)_{t+\Delta t} : (\boldsymbol{\sigma}_d)_{t+\Delta t}\right)^{\frac{1}{2}} = \sigma_{eq}^{el} - 3\mu\Delta\varepsilon_{eq}^p \quad (\text{B.22})$$

L'ensemble des équations (B.16), (B.18), (B.19), (B.20), (B.21), (B.22) constituent le système d'équations à résoudre d'inconnues $\Delta\varepsilon_m^p$, $\Delta\varepsilon_{eq}^p$, $(\sigma_m)_{t+\Delta t}$, $(\sigma_{eq})_{t+\Delta t}$, Δf , $\Delta\bar{\varepsilon}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi[(\sigma_m)_{t+\Delta t}, (\sigma_{eq})_{t+\Delta t}, f_{t+\Delta t}, \sigma_y[\bar{\varepsilon}_t + \Delta\bar{\varepsilon}]] = 0 \\ -\left(\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{eq}}\right)_{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_m^p + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_m}\right)_{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_{eq}^p = 0 \\ \Delta\bar{\varepsilon} = \frac{3(\sigma_m)_{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_m^p + (\sigma_{eq})_{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{eq}^p}{(1-f_t - \Delta f)\sigma_y(\bar{\varepsilon}_{t+\Delta t})} \\ \Delta f = (1 - f_t - \Delta f) \text{tr} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = 3(1 - f_t - \Delta f)\Delta\varepsilon_m^p + A[\bar{\varepsilon}_t + \Delta\bar{\varepsilon}]\Delta\bar{\varepsilon} \\ (\sigma_m)_{t+\Delta t} = \sigma_m^{el} - 3k\Delta\varepsilon_m^p \\ (\sigma_{eq})_{t+\Delta t} = \sigma_{eq}^{el} - 3\mu\Delta\varepsilon_{eq}^p \end{array} \right. \quad (\text{B.23})$$

$$\text{avec } \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{eq}} = 2\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y^2} \text{ et } \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_m} = \frac{3q_1q_2f^*}{\sigma_y} \sinh\left(\frac{3}{2}q_2\frac{\sigma_m}{\sigma_y}\right).$$

Le système d'équations (B.23) peut être réduit à un système d'équations à 3 inconnues,

par exemple en exprimant $\Delta\varepsilon_m^p$, $\Delta\varepsilon_{eq}^p$ et Δf en fonction de $(\sigma_m)_{t+\Delta t}$, $(\sigma_{eq})_{t+\Delta t}$ et $\Delta\bar{\varepsilon}$:

$$\Delta\varepsilon_m^p = \frac{\sigma_m^{el} - (\sigma_m)_{t+\Delta t}}{3k} \quad (\text{B.24})$$

$$\Delta\varepsilon_{eq}^p = \frac{\sigma_{eq}^{el} - (\sigma_{eq})_{t+\Delta t}}{3\mu} \quad (\text{B.25})$$

$$\Delta f = \frac{(1 - f_t)(\sigma_m^{el} - (\sigma_m)_{t+\Delta t}) + A[\bar{\varepsilon}_t + \Delta\bar{\varepsilon}]k\Delta\bar{\varepsilon}}{\sigma_m^{el} - (\sigma_m)_{t+\Delta t} + k} \quad (\text{B.26})$$

Le nouveau système à résoudre, d'inconnues $(\sigma_m)_{t+\Delta t}$, $(\sigma_{eq})_{t+\Delta t}$ et $\Delta\bar{\varepsilon}$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_m^{el} - (\sigma_m)_{t+\Delta t}}{3k} \left(-2 \frac{(\sigma_{eq})_{t+\Delta t}}{\sigma_y^2[\bar{\varepsilon}_t + \Delta\bar{\varepsilon}]} \right) + \frac{\sigma_{eq}^{el} - (\sigma_{eq})_{t+\Delta t}}{3\mu} \frac{q_1 q_2 f^*}{\sigma_y[\bar{\varepsilon}_t + \Delta\bar{\varepsilon}]} \sinh \left(\frac{3}{2} q_2 \frac{(\sigma_m)_{t+\Delta t}}{\sigma_y[\bar{\varepsilon}_t + \Delta\bar{\varepsilon}]} \right) = 0 \\ \frac{(\sigma_{eq})_{t+\Delta t}^2}{\sigma_y^2[\bar{\varepsilon}_t + \Delta\bar{\varepsilon}]} + 2q_1 f^* \cosh \left(\frac{3}{2} q_2 \frac{(\sigma_m)_{t+\Delta t}}{\sigma_y[\bar{\varepsilon}_t + \Delta\bar{\varepsilon}]} \right) - 1 - q_3 f^{*2} = 0 \\ \Delta\bar{\varepsilon}(1 - f_t - \Delta f) \sigma_y[\bar{\varepsilon}_t + \Delta\bar{\varepsilon}] - \frac{(\sigma_m)_{t+\Delta t}}{k} (\sigma_m^{el} - (\sigma_m)_{t+\Delta t}) - \frac{(\sigma_{eq})_{t+\Delta t}}{3\mu} (\sigma_{eq}^{el} - (\sigma_{eq})_{t+\Delta t}) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.27})$$

où f^* désigne $f^*[f_t + \Delta f]$ avec Δf donné en (B.26). La résolution numérique du système (B.27) pour un incrément de déformation donné peut être faite par des méthodes de résolution de systèmes d'équations non linéaires.

C Estimation des paramètres numériques α_n , α_t , α_s

Notons C_N et C_T les rigidités initiales d'un modèle de zones cohésives intrinsèque $R^{(int)}$, respectivement dans les directions normale et tangentielle. Il est connu que l'insertion des modèles de zones cohésives intrinsèques dans les maillages éléments finis génèrent une souplesse additionnelle sur la courbe force - déplacement. Divers critères sont disponibles dans la littérature pour calibrer la pente initiale des modèles de zones cohésives en fonction des propriétés matériaux et de la taille de maille [Blal et al., 2012; Tomar et al., 2004; Espinosa et Zavattieri, 2003].

Considérons un modèle de zone cohésive intrinsèque de la forme suivante introduite en section 3.6.1 :

$$\mathbf{R}^{(int)} = \begin{cases} R_n^{(int)} = \left(1 - \exp\left(-\alpha_n \frac{[u_n]}{h}\right)\right) R_n \\ R_t^{(int)} = \left(1 - \exp\left(-\alpha_t \frac{|[u_t]|}{h}\right)\right) R_t \\ R_s^{(int)} = \left(1 - \exp\left(-\alpha_s \frac{|[u_s]|}{h}\right)\right) R_s \end{cases} \quad (\text{C.28})$$

Connaissant des rigidités initiales C_N et C_T souhaitées, il est proposé dans cette section des estimations adéquates des paramètres α_n , α_t et α_s .

Les paramètres α_n , α_t , α_s , sont choisis pour que la pente initiale du modèle intrinsèque soit égale à C_N , C_T , dans les modes normal pur, tangentiel pur (\mathbf{t} ou \mathbf{s}), respectivement :

$$\left. \frac{\partial R_n^{(int)}}{\partial [u_n]} \right|_{[u_n]=0} = C_N, \quad \left. \frac{\partial R_t^{(int)}}{\partial [u_t]} \right|_{[u_t]=0} = C_T, \quad \left. \frac{\partial R_s^{(int)}}{\partial [u_s]} \right|_{[u_s]=0} = C_T \quad (\text{C.29})$$

En mode normal pur (tension uniaxiale) :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{nn} t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{et } \dot{E}_{nn} > 0 \text{ constant.} \quad (\text{C.30})$$

La contrainte cohésive normale (avec une contrainte d'écoulement initiale $\sigma_y = \sigma_0$) s'écrit :

$$R_n^{(int)} = \sigma_0 T_{nn} \left(1 - \exp\left(-\alpha_n \frac{[u_n]}{h}\right)\right) \quad (\text{C.31})$$

avec $T_{nn} = \frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M\left(\frac{1}{2}, q_1 f^*\right) + \frac{2}{3} N\left(\frac{1}{2}, q_1 f^*\right)$.

En imposant :

$$\left. \frac{\partial R_n^{(int)}}{\partial [u_n]} \right|_{([u_n]=0)} = C_N,$$

soit

$$\sigma_0 \left[\frac{\partial T_{nn}}{\partial [u_n]} - \frac{\partial T_{nn}}{\partial [u_n]} \exp \left(-\alpha_n \frac{[u_n]}{h} \right) + \frac{\alpha_n}{h} T_{nn} \exp \left(-\alpha_n \frac{[u_n]}{h} \right) \right] \Big|_{[u_n]=0} = C_N,$$

le paramètre α_n vaut :

$$\alpha_n = \frac{C_N h}{\sigma_0 T_{nn}([u_n] = 0)},$$

soit

$$\alpha_n = \frac{C_N h}{\sigma_0 \left(\frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M\left(\frac{1}{2}, q_1 f^*(f_0)\right) + \frac{2}{3} N\left(\frac{1}{2}, q_1 f^*(f_0)\right) \right)}. \quad (\text{C.32})$$

Une approche similaire est utilisée pour estimer des valeurs pour α_t et α_s en fonction d'une rigidité tangentielle C_T souhaitée. En considérant un cas de chargement en cisaillement pur (mode II) :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{E}_{nt} t & 0 \\ \dot{E}_{nt} t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{et } \dot{E}_{tt} > 0 \text{ constant.} \quad (\text{C.33})$$

La contrainte de cohésion R_t dans ce cas s'écrit (avec $\sigma_y = \sigma_0$) :

$$R_t^{(int)} = \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{3}} (1 - q_1 f^*) \left(1 - \exp \left(-\alpha_t \frac{|[u_t]|}{h} \right) \right). \quad (\text{C.34})$$

En imposant :

$$\frac{\partial R_t^{(int)}}{\partial [u_t]} ([u_t] = 0) = C_T, \quad (\text{C.35})$$

le paramètre α_t s'écrit :

$$\alpha_t = \frac{\sqrt{3} C_T h}{\sigma_0 (1 - q_1 f^*(f_0))}. \quad (\text{C.36})$$

De même une estimation de α_s est :

$$\alpha_s = \frac{\sqrt{3} C_T h}{\sigma_0 (1 - q_1 f^*(f_0))} \quad (\text{C.37})$$

Ces expressions sont utilisées pour estimer α_n , α_t , α_s dans les simulations numériques en section 4.3 et au chapitre 5.

D Calcul de la déformation moyenne

L'expression de la déformation moyenne sous forme intégrale est donnée en équation (3.64) et est rappelée ici :

$$\int_{t_0}^t \dot{\bar{\varepsilon}}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{1}{1-f(\tau)} \left(\frac{\mathbf{T}(\tau) \cdot \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{u}}](\tau)}{h} + (T_{tt}(\tau) + T_{ss}(\tau))\dot{\gamma}(\tau) \right) d\tau.$$

La démarche adoptée pour l'élaboration d'une forme analytique approximative de la déformation moyenne $\bar{\varepsilon}$ est traitée dans le cas du mode I pur en *déformation uniaxiale* ($[u_t] = [u_s] = \gamma = 0$), puis l'expression obtenue sera étendue aux cas plus généraux.

Le premier membre de l'intégrale s'écrit simplement :

$$\int_{t_0}^t \dot{\bar{\varepsilon}}(\tau) d\tau = \bar{\varepsilon}(t) - \bar{\varepsilon}(t_0) = \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_0$$

Le deuxième membre de l'intégrale se réduit à :

$$\int_{t_0}^t \frac{T_{nn}(\tau)}{1-f(\tau)} \left(\frac{[u_n](\tau)}{h} \right) d\tau$$

Comme l'hypothèse d'un chargement *monotone* a été faite, la fonction $\frac{[u_n]}{h}$ garde le même signe sur $[t_0, t]$. Les fonctions $\frac{T_{nn}(\tau)}{1-f(\tau)}$ et $\frac{[u_n]}{h}$ sont également continues sur $[t_0, t]$ car $f(\tau) < 1$. Il existe une valeur $t_n \in [t_0, t]$ telle que :

$$\int_{t_0}^t \frac{T_{nn}(\tau)[u_n](\tau)}{(1-f(\tau))h} d\tau = \frac{T_{nn}(t_n)}{1-f(t_n)} \int_{t_0}^t \frac{[u_n](t_n)}{h} d\tau \quad (\text{théorème de la moyenne}).$$

Soit en reprenant l'intégrale complète :

$$\bar{\varepsilon}(t) = \bar{\varepsilon}_0 + \frac{T_{nn}(t_n)}{1-f(t_n)} \left(\frac{[u_n](t) - [u_n](t_0)}{h} \right)$$

A ce niveau, la difficulté est que la valeur t_n est inconnue.

A défaut de pouvoir calculer de manière exacte la quantité $\frac{T_{nn}(t_n)}{1-f(t_n)}$, une approximation numérique de cette quantité est réalisée.

On fait l'approximation que à tout instant t :

$$\frac{T_{nn}(t_n)}{1-f(t_n)} \approx c_1 \frac{T_{nn}(t_0)}{1-f_0} + c_2 \frac{T_{nn}(t)}{1-f(t)} \quad (\text{D.38})$$

D'où une approximation à tout instant t de $\bar{\varepsilon}$ dans le cas particulier d'un état de déformation uniaxiale :

$$\bar{\varepsilon}(t) \approx \bar{\varepsilon}_0 + \left(c_1 \frac{T_{nn}(t_0)}{1-f_0} + c_2 \frac{T_{nn}(t)}{1-f(t)} \right) \left(\frac{[u_n](t) - [u_n](t_0)}{h} \right) \quad (\text{D.39})$$

Le choix des constantes c_1 et c_2 égales respectivement aux valeurs $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ permet d'obtenir une approximation relativement bonne comme illustrée par la suite.

La figure 60 montre une comparaison entre l'effort normal de cohésion calculé d'une part avec une intégration numérique de la déformation moyenne, et d'autre part avec la déformation moyenne évaluée avec l'approximation analytique (??). On y observe un bon accord sur la prédiction de l'effort normal de cohésion. L'approximation analytique offre une évaluation correcte de la déformation moyenne jusqu'au point de début de coalescence $f = f_c$, après lequel l'approximation n'est plus bonne. A ce stade les effets de l'endommagement (porosité) sont largement prépondérants sur les effets de l'écroutissage et l'impact de l'erreur sur la déformation moyenne dans le calcul des efforts de cohésion est minime (figure 60).

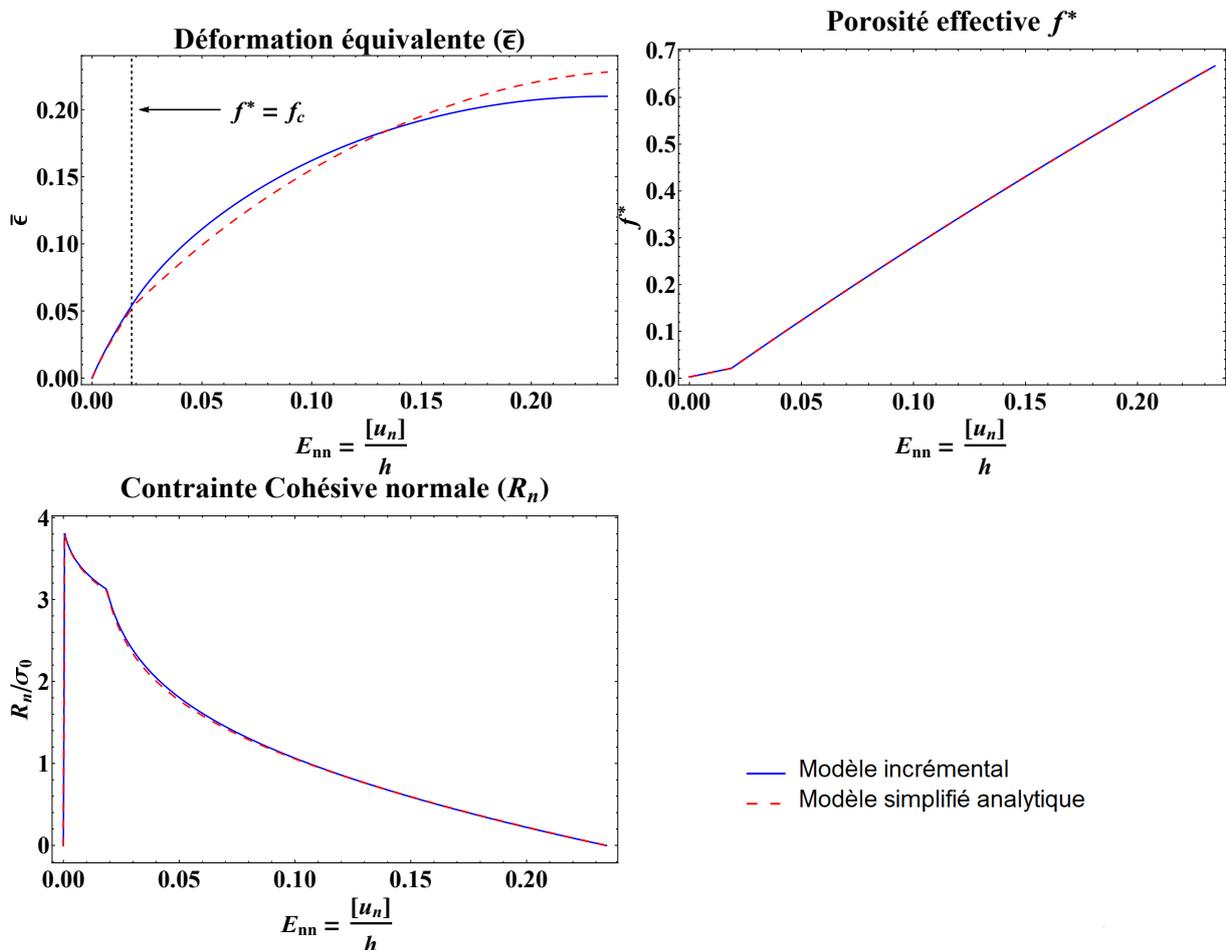


Figure 60 – Comparaison du modèle GTN/ZC incrémental à la version analytique simplifiée pour une triaxialité des déformations $\eta_E = 0.5$ (déformation uniaxiale) imposée. Propriétés matériaux reportées dans le tableau 6, **sans nucléation** ($f_N = 0$).

Dans le cadre plus général ($[\dot{u}_t], [\dot{u}_s], \dot{\gamma}$ non nuls), l'on peut proposer une approximation

de la même forme que celle obtenue précédemment (équation (D.39)) :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(t) \simeq \bar{\varepsilon}(t_0) + & \left(c_1^i \frac{T_{ni}(t_0)}{1-f(t_0)} + c_2^i \frac{T_{ni}(t)}{1-f(t)} \right) \left(\frac{[u_i](t) - [u_i](t_0)}{h} \right) + \\ & \left(c_1^\gamma \frac{T_{tt}(t_0)}{1-f(t_0)} + c_2^\gamma \frac{T_{tt}(t)}{1-f(t)} \right) (\gamma(t) - \gamma(t_0)) + \\ & \left(c_1^\gamma \frac{T_{ss}(t_0)}{1-f(t_0)} + c_2^\gamma \frac{T_{ss}(t)}{1-f(t)} \right) (\gamma(t) - \gamma(t_0)) \end{aligned} \quad (\text{D.40})$$

où les constantes c_1^i et c_2^i ($i = \{n, t, s\}$), c^γ , sont identifiées numériquement.

Le choix des constantes $c_1^i = \frac{1}{4}$ et $c_2^i = \frac{3}{4}$ permet d'obtenir une expression analytique de la déformation moyenne donnant des résultats proches de ceux obtenus par intégration numérique (au moins jusqu'à la porosité de coalescence f_c).

E Implémentation du modèle de zone cohésive GTN/ZC

L'algorithme de calcul des efforts de cohésion \mathbf{R} à chaque itération dans le code XPer est résumé ci-dessous. Il se résume en 3 étapes :

1. mise à jour des cinématiques au début de l'incrément $[\mathbf{u}]$;
2. évaluation des valeurs des variables internes f et $\bar{\epsilon}$;
3. mise à jour des efforts de cohésion \mathbf{R} .

A l'instant t , l'ensemble des champs est connu :

- $[u_n]^{(t)}, [u_t]^{(t)}, [u_s]^{(t)}, \gamma^{(t)}$
- $[u_n]_{max}^{(t)}, [u_t]_{max}^{(t)}, [u_s]_{max}^{(t)}, f^{(t)}, \bar{\epsilon}^{(t)}$

Pour un incrément de temps Δt , l'algorithme présente comment les grandeurs du modèle de zone cohésive GTN/ZC sont évaluées pour l'instant $t + \Delta t$ (fin de l'incrément).

L'information sur l'état du chargement volumique Σ^{vol} est mise à jour si $f^{(t)} < f_c$; dans le cas contraire, Σ^{vol} reste inchangé au cours de l'incrément Δt .

L'incrément d'ouverture de la zone cohésive est noté $\Delta[\mathbf{u}]^{(t+\Delta t)} = (\Delta[u_n], \Delta[u_t], \Delta[u_s])$ et le vecteur ouverture actuel est :

$$[\mathbf{u}]^{(t+\Delta t)} = [\mathbf{u}]^{(t)} + \Delta[\mathbf{u}] \quad (\text{E.41})$$

Le vecteur des plus grandes valeurs d'ouvertures atteintes est mis à jour par :

$$[u_i]_{max}^{(t+\Delta t)} = \max\{|[u_i]^{(t+\Delta t)}|, |[u_i]^{(t)}|\} \quad \text{avec } i = n, t, s \quad (\text{E.42})$$

Les quantités suivantes sont évaluées :

$$\epsilon_{nn}^{(t+\Delta t)} = [u_n]_{max}^{(t+\Delta t)} / h, \quad \epsilon_{nt}^{(t+\Delta t)} = [u_t]_{max}^{(t+\Delta t)} / (2h), \quad \epsilon_{ns}^{(t+\Delta t)} = [u_s]_{max}^{(t+\Delta t)} / (2h) \quad (\text{E.43})$$

$$\Delta\epsilon_{nn} = \epsilon_{nn}^{(t+\Delta t)} - \epsilon_{nn}^{(t)}, \quad \Delta\epsilon_{nt} = \epsilon_{nt}^{(t+\Delta t)} - \epsilon_{nt}^{(t)}, \quad \Delta\epsilon_{ns} = \epsilon_{ns}^{(t+\Delta t)} - \epsilon_{ns}^{(t)} \quad (\text{E.44})$$

L'incrément $\Delta\gamma$ nécessaire pour le calcul de la Δf et $\Delta\bar{\epsilon}$ est évaluée en exploitant les expressions du tableau Table 5 avec en entrée :

$$[\dot{\mathbf{u}}] \equiv (h \Delta\epsilon_{nn}, 2h \Delta\epsilon_{nt}, 2h \Delta\epsilon_{ns}) \quad \text{et} \quad \eta_{\dot{\mathbf{E}}}^{vol} = \frac{q_1 q_2 f^*(f^{(t)}) \sinh\left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m^{vol}}{\sigma_y(\bar{\epsilon}^{(t)})}\right)}{2 \frac{\Sigma_{eq}^{vol}}{\sigma_y(\bar{\epsilon}^{(t)})}} \quad (\text{E.45})$$

La porosité $f^{(t+\Delta t)}$ et la déformation moyenne $\bar{\varepsilon}^{(t+\Delta t)}$ sont estimée par :

$$(\Delta\epsilon)_{eq} = \frac{2}{3} \left((\Delta\epsilon_{nn} - \delta\gamma)^2 + 3(\Delta\epsilon_{nt})^2 + 3(\Delta\epsilon_{ns})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{E.46})$$

$$\eta_{\Delta\epsilon} = \frac{\Delta\epsilon_{nn} + 2\Delta\gamma}{3(\Delta\epsilon)_{eq}} \quad (\text{E.47})$$

$$T_{nn} = \frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M[\eta_{\Delta\epsilon}, q_1 f^*(f^{(t)})] + \frac{4}{9} N[\eta_{\Delta\epsilon}, q_1 f^*(f^{(t)})] \frac{\Delta\epsilon_{nn} - \Delta\gamma}{(\Delta\epsilon)_{eq}} \quad (\text{E.48})$$

$$T_{nt} = \frac{1}{3} N[\eta_{\dot{E}}, q_1 f^*(f^{(t)})] \frac{1}{(\Delta\epsilon)_{eq}} \frac{[\dot{u}_t]}{h} \quad (\text{E.49})$$

$$T_{ns} = \frac{1}{3} N[\eta_{\dot{E}}, q_1 f^*(f^{(t)})] \frac{1}{(\Delta\epsilon)_{eq}} \frac{[\dot{u}_s]}{h} \quad (\text{E.50})$$

$$T_{tt} = \frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M[\eta_{\Delta\epsilon}, q_1 f^*(f^{(t)})] + \frac{2}{9} N[\eta_{\Delta\epsilon}, q_1 f^*(f^{(t)})] \frac{\Delta\gamma - \Delta\epsilon_{nn}}{(\Delta\epsilon)_{eq}} \quad (\text{E.51})$$

$$f^{(t+\Delta t)} = f^{(t)} + (1 - f^{(t)}) (\Delta\epsilon_{nn} + 2\Delta\gamma) + A(\bar{\varepsilon}^{(t)}) \frac{T_{nn} \Delta\epsilon_{nn} + 2T_{tt} \Delta\gamma + 2T_{nt} \Delta\epsilon_{nt} + 2T_{ns} \Delta\epsilon_{ns}}{1 - f^{(t)}} \quad (\text{E.52})$$

$$\bar{\varepsilon}^{(t+\Delta t)} = \bar{\varepsilon}^{(t)} + \frac{T_{nn} \Delta\epsilon_{nn} + 2T_{tt} \Delta\gamma + 2T_{nt} \Delta\epsilon_{nt} + 2T_{ns} \Delta\epsilon_{ns}}{1 - f^{(t)}} \quad (\text{E.53})$$

Puis, les conditions suivantes sont imposées :

$$\text{si } f^{(t+\Delta t)} < f^{(t)} \quad \text{alors } f^{(t+\Delta t)} = f^{(t)} \quad (\text{E.54})$$

$$\text{si } \bar{\varepsilon}^{(t+\Delta t)} < \bar{\varepsilon}^{(t)} \quad \text{alors } \bar{\varepsilon}^{(t+\Delta t)} = \bar{\varepsilon}^{(t)} \quad (\text{E.55})$$

La déformation $\gamma^{(t+\Delta t)}$ est évaluée en exploitant les expressions du tableau 5 avec en entrée :

$$[\dot{\mathbf{u}}] \equiv (h\epsilon_{nn}^{(t+\Delta t)}, 2h\epsilon_{nt}^{(t+\Delta t)}, 2h\epsilon_{ns}^{(t+\Delta t)}) \quad \text{et} \quad \eta_E^{vol} = \frac{q_1 q_2 f^*(f^{(t)}) \sinh\left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m^{vol}}{\sigma_y(\bar{\varepsilon}^{(t)})}\right)}{2 \frac{\Sigma_{eq}^{vol}}{\sigma_y(\bar{\varepsilon}^{(t)})}} \quad (\text{E.56})$$

Puis quelques quantités intermédiaires pour le calculs des efforts de cohésion sont évaluées :

$$\epsilon_{eq}^{(t+\Delta t)} = \frac{2}{3} \left((\epsilon_{nn}^{(t+\Delta t)} - \gamma^{(t+\Delta t)})^2 + 3(\epsilon_{nt}^{(t+\Delta t)})^2 + 3(\epsilon_{ns}^{(t+\Delta t)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{E.57})$$

$$\eta_{\epsilon}^{(t+\Delta t)} = \frac{\epsilon_{nn}^{(t+\Delta t)} + 2\gamma^{(t+\Delta t)}}{3\epsilon_{eq}^{(t+\Delta t)}} \quad (\text{E.58})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_n^{(t+\Delta t)} = \sigma_y(\bar{\epsilon}^{(t+\Delta t)}) \left(\frac{2}{3} \frac{1}{q_2} M[\eta_{\epsilon}^{(t+\Delta t)}, q_1 f^*(f^{(t+\Delta t)})] + \frac{4}{9} N[\eta_{\epsilon}^{(t+\Delta t)}, q_1 f^*(f^{(t+\Delta t)})] \frac{\epsilon_{nn}^{(t+\Delta t)} - \gamma^{(t+\Delta t)}}{\epsilon_{eq}^{(t+\Delta t)}} \right) \\ R_t^{(t+\Delta t)} = \sigma_y(\bar{\epsilon}^{(t+\Delta t)}) \frac{2}{3} N[\eta_{\epsilon}^{(t+\Delta t)}, q_1 f^*(f^{(t+\Delta t)})] \frac{\epsilon_{nt}^{(t+\Delta t)}}{\epsilon_{eq}^{(t+\Delta t)}} \\ R_s^{(t+\Delta t)} = \sigma_y(\bar{\epsilon}^{(t+\Delta t)}) \frac{2}{3} N[\eta_{\epsilon}^{(t+\Delta t)}, q_1 f^*(f^{(t+\Delta t)})] \frac{\epsilon_{ns}^{(t+\Delta t)}}{\epsilon_{eq}^{(t+\Delta t)}} \end{array} \right. \quad (\text{E.59})$$

Les efforts de cohésion sont calculés par :

$$\bar{\mathbf{R}}^{(int),t+\Delta t} = \left\{ \begin{array}{l} R_n^{(t+\Delta t)} \frac{[u_n]^{(t+\Delta t)}}{[u_n]_{max}^{(t+\Delta t)}} \left(1 - \exp \left(-\alpha_n \frac{[u_n]_{max}^{(t+\Delta t)}}{h} \right) \right) \\ R_t^{(t+\Delta t)} \frac{[u_t]^{(t+\Delta t)}}{[u_t]_{max}^{(t+\Delta t)}} \left(1 - \exp \left(-\alpha_t \frac{[u_t]_{max}^{(t+\Delta t)}}{h} \right) \right) \\ R_s^{(t+\Delta t)} \frac{[u_s]^{(t+\Delta t)}}{[u_s]_{max}^{(t+\Delta t)}} \left(1 - \exp \left(-\alpha_s \frac{[u_s]_{max}^{(t+\Delta t)}}{h} \right) \right) \end{array} \right. \quad (\text{E.60})$$

F Détermination de la courbe de rupture $J - \Delta a$

L'évaluation de l'intégrale J critique J_{Ic} et des courbes de $(J - \Delta a)$ dans les codes de calculs numériques se fait en général à partir des champs de contraintes et déformations locaux au moyen d'un calcul d'intégrale de domaine (méthode $G - \theta$). L'implémentation de cette méthode dans un code éléments finis étant relativement lourde, il a été fait le choix dans ce travail de déterminer l'intégrale J critique J_{Ic} ainsi que les courbes de résistances $(J - \Delta a)$ à partir de la courbe macroscopique force - déplacement et de la mesure des avancées de fissure lors de la simulation. Le calcul est fait en utilisant des formules empiriques définies dans la norme [ASTM, 2018].

Dans les simulations numériques la propagation de la fissure survient lorsque la zone cohésive entre 2 éléments est rompue (f^* atteint $\frac{1}{q_1}$). Dès lors, la fissure avance avec des pas de l'ordre de l_{mesh} .

Il est rappeler que le taux de restitution d'énergie pour une avancé virtuelle Δa de la fissure sur une éprouvette d'épaisseur constante B est donnée par :

$$J = -\frac{1}{B} \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta U}{\Delta a} \right)_{v=constante}$$

où U est l'énergie potentielle qui peut s'écrire comme la somme d'une énergie potentielle élastique U^{el} et d'une énergie plastique U^p (voir figure 61). J peut être décomposé de même comme :

$$J = J^{el} + J^p \quad \text{avec} \quad J^{el} = -\frac{1}{B} \frac{\partial U^{el}}{\partial a}, \quad J^p = -\frac{1}{B} \frac{\partial U^p}{\partial a}$$

Si on considère le cas de l'éprouvette type CT rainurée étudiée en section 4.3, pour une longueur de fissure initiale $a = a_0$, l'intégrale J pour un point correspondant à l'ouverture v et à la force F sur la courbe force ouverture (figure 61 est donnée par ASTM [2018] :

$$J^{el} = \frac{K^2(1 - \nu^2)}{E} \quad (\text{en déformations planes}) \quad (\text{F.61})$$

$$J^p = \eta_{pl} \frac{U}{B_N b} \quad (\text{F.62})$$

où :

- $b = W - a$, longueur ligament non fissuré
- $\eta_{pl} = 2 + 0.552b/W$, est un facteur de correction.

$$— K = \frac{F}{(BB_N W)^{0.5}} f\left(\frac{a}{W}\right)$$

$$— f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{(2 + \frac{a}{W}) \left[0.886 + 4.64 \left(\frac{a}{W}\right) - 13.32 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14.72 \left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5.6 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right]}{(1 - \frac{a}{W})^{3/2}}$$

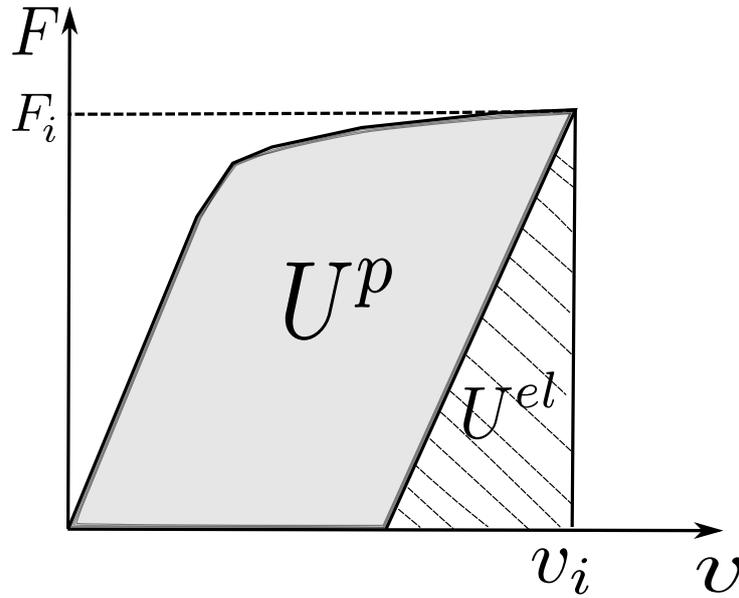


Figure 61 – Définition de la courbe force - ouverture pour le calcul de J

Le calcul du taux de restitution d'énergie critique J_{Ic} se fait en appliquant les formules précédentes avec la force F et l'ouverture v au moment de la première propagation de fissure (première zone cohésive rompue).

Détermination de la courbe de résistance $J - \Delta a$

Partant de la valeur initiale de l'intégrale J à $a = a_0$, la valeur J_i de l'intégrale J pour un point i correspondant à la longueur de fissure a_i est calculée successivement par :

$$J_i = J_i^e + J_i^p = \frac{K_i^2(1 - \nu^2)}{E} + \left(J_{i-1}^p + \frac{\eta_{pl(i-1)}}{b_{i-1}} \frac{\Delta U_i^p}{B_N} \right) \left(1 - \gamma_{i-1} \left(\frac{a_i - a_{i-1}}{b_{i-1}} \right) \right)$$

avec : $\gamma_i = 1 + 0.76 \frac{b_i}{W}$

$$\Delta U_i^p = U_i^p - U_{i-1}^p \approx \frac{1}{2} (F_i + F_{i-1}) \Delta v_{p(i)}$$

$v_{p(i)} = v_i - F_i C_{LL(i)}$, the plastic load line displacement.

$C_{LL(i)}$ est la souplesse au point i . Si des décharges n'ont pas été effectuées au cours du chargement afin de mesurer la souplesse, celle-ci peut être estimée pour une longueur de fissure a_i par une formule empirique donnée dans la norme [ASTM \[2018\]](#).

G Compléments d'informations sur la simulation RIA

Dans cette annexe sont précisées quelques informations complémentaires relatives au cas d'application discuté dans le chapitre 5.

G.1 Compléments d'informations sur la géométrie

Les cotations géométriques de la portion de combustible simulée sont reportées sur la figure 62 et le tableau 12. Il est à noter que la gaine irradiée présente une partie de son épaisseur qui est transformée en couche de zircone. La couche externe de zircone n'a pas été modélisée dans la présente simulation. L'épaisseur considérée ici correspond à l'épaisseur de la gaine à laquelle a été retranchée l'épaisseur de la couche zircone externe.

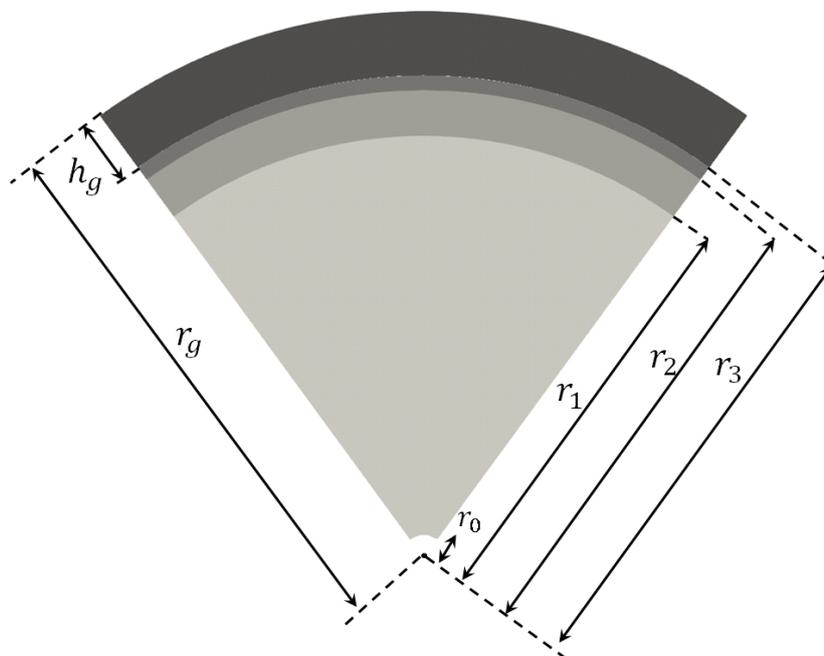


Figure 62 – Spécifications géométriques de la portion de combustible modélisée.

dimension	commentaires	valeurs
r_0	rayon trou	200 μm
r_1	rayon interface zone centrale - intermédiaire	3.64415 mm
r_2	interface zone intermédiaire - HBS	4.033765 mm
r_3	rayon pastille UO_2	4.16475 mm
r_g	rayon bord externe gaine	4.72073 mm
h_g	épaisseur gaine	0.55398 mm

Tableau 12 – Dimensions de la portion de combustible (à température ambiante). Jeu initiale de $2\mu\text{m}$ entre le combustible et la gaine.

Zone	Maille SCANAIR	Température $T(t)$ en °C, $t \in [1, 1.5]$ s	Maille SCANAIR choisie pour identification de la fonction $T(t)$
Centrale	1 à 8	$280 + \frac{2379 - 859t}{1 + \exp(400(1.08 - t))}$	8
Intermédiaire	9 à 11	$280 + \frac{4831 - 2864t}{1 + \exp(400(1.08 - t))}$	11
HBS	12 à 19	$280 + \frac{1757 - 986t}{1 + \exp(400(1.08 - t))}$	19
Gaine	-	$280 + \frac{729 - 371t}{1 + \exp(200(1.09 - t))}$	5

Tableau 13 – Fonctions analytiques approximant le champ de température dans chaque zone.

G.2 Compléments d'informations sur les chargements

La déformation plane généralisée imposée est donnée par la fonction suivante (voir figure 54) :

$$E_{zz}(t) = 0.0019 + \frac{0.0103 - 0.0042t}{1 + \exp(400(1.08 - t))} \quad t \in [1, 1.5]s$$

G.3 Compléments d'informations sur la prise en compte de la pressurisation des cavités

Les déformations (gonflement) générées par les produits de fissions n'ont pas été prises en compte. On note toutefois que la principale cause de gonflement du combustible reste la dilatation thermique : les simulations SCANAIR pour l'essai REP-Na3 ont montrées une déformation locale maximale de l'ordre de 2.5% pour la dilatation thermique contre 0.9% pour la déformation due aux produits de fissions.

Bibliographie

- Acary, V. et Monerie, Y. (2006). Nonsmooth fracture dynamics using a cohesive zone approach. Research Report, INRIA. 63, 64, 87, 89
- Achouri, M., Germain, G., Dal Santo, P. et Saidane, D. (2013). Experimental characterization and numerical modeling of micromechanical damage under different stress states. *Materials & Design*, 50 : 207–222. 12, 43, 44, 45
- Anvari, M., Liu, J. et Thaulow, C. (2007). Dynamic ductile fracture in aluminum round bars : experiments and simulations. *International Journal of Fracture*, 143(4) : 317–332. 66
- Aravas, N. (1987). On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(7) : 1395–1416. 82, 143, 144
- Argon, A. S., Im, J. et Safoglu, R. (1975). Cavity formation from inclusions in ductile fracture. *Metallurgical Transactions A*, 6(4) : 825. 54
- ASTM (2018). ASTM E1820-18, standard test method for measurement of fracture toughness. Standard, ASTM International, West Conshohocken, PA. 60, 61, 110, 156, 157
- Bai, Y. et Wierzbicki, T. (2008). A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence. *International Journal of Plasticity*, 24(6) : 1071–1096. 46
- Bailly, H., Ménessier, D. et Prunier, C. (1996). *Le combustible nucléaire des réacteurs à eau sous pression et des réacteurs à neutrons rapides*. Eyrolles, Paris. 11, 30, 33
- Banerjee, A. et Manivasagam, R. (2009). Triaxiality dependent cohesive zone model. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(12) : 1761–1770. 63
- Bao, Y. et Wierzbicki, T. (2004). On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46(1) : 81–98. 45, 46
- Barenblatt, G. I. (1959). The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 23(3) : 622–636. 12, 61, 62
- Baron, D. et Hallstadius, L. (2012). Fuel Performance of Light Water Reactors (Uranium Oxide and MOX). *Compr. Nucl. Mater.*, 2 : 481. 11, 30, 31, 32

- Benzergha, A. A. et Leblond, J.-B. (2010). Ductile Fracture by Void Growth to Coalescence. *Advances in Applied Mechanics*, 44 : 169–305. 43
- Benzergha, A. A., Leblond, J.-B., Needleman, A. et Tvergaard, V. (2016). Ductile failure modeling. *International Journal of Fracture*, 201(1) : 29–80. 43, 55, 71
- Beremin, F. M. (1981). Cavity formation from inclusions in ductile fracture of A508 steel. *Metallurgical Transactions A*, 12(5) : 723–731. 54
- Besson, J. (2010). Continuum models of ductile fracture : A review. *International Journal of Damage Mechanics*, 19 : 3–52. 113
- Blal, N. (2013). *Modélisation micromécanique et identification inverse de l'endommagement par approches cohésives*. Montpellier 2. 64, 89
- Blal, N., Daridon, L., Monerie, Y. et Pagano, S. (2012). Artificial compliance inherent to the intrinsic cohesive zone models : criteria and application to planar meshes. *International Journal of Fracture*, 178 : 71–83. 88, 109, 148
- Blal, N., Daridon, L., Monerie, Y. et Pagano, S. (2013). Micromechanical-based criteria for the calibration of cohesive zone parameters. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 246 : 206–214. 64, 88
- Bornert, M., Bretheau, T. et Gilormini, P. (2001). *Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 2 : Comportements non linéaires et problèmes ouverts*. Hermes science. 49
- Brocks, W., Cornec, A. et Scheider, I. (2003). Computational aspects of nonlinear fracture mechanics. Rapport Technique GKSS–2003/30, GKSS-Forschungszentrum Geesthacht GmbH (Germany). 60
- Brocks, W., Eberle, A., Fricke, S. et Veith, H. (1994). Large stable crack growth in fracture mechanics specimens. *Nuclear Engineering and Design*, 151(2) : 387–400. 108
- Brocks, W., Klingbeil, D., Künecke, G. et Sun, D.-Z. (1995). Application of the Gurson Model to Ductile Tearing Resistance. *Constraint Effects in Fracture Theory and Applications : Second Volume*. 13, 108, 110, 111
- Budiansky, B., Hutchinson, J. W. et Slutsky, S. (1982). Void Growth and Collapse in Viscous Solids. In *Mechanics of Solids*, pages 13–45. Pergamon, Oxford. 46
- Budiansky, B. et Rice, J. R. (1973). Conservation Laws and Energy-Release Rates. *Journal of Applied Mechanics*, 40(1) : 201–203. 60
- Bui, H. D. (1978). *Mécanique de la rupture fragile*. Masson. Google-Books-ID : jliLQAAACAAJ. 59
- Byron, J. F. (1968). The yield and flow of single crystals of uranium dioxide. *Journal of Nuclear Materials*, 28(1) : 110–114. 27

- Canon, R. F., Roberts, J. T. A. et Beals, R. J. (1971). Deformation of UO₂ at High Temperatures. *Journal of the American Ceramic Society*, 54(2) : 105–112. 11, 14, 25, 27, 29, 30, 126, 127
- Cao, T. S. et Bouchard, O. (2016). Modélisation de l'endommagement ductile en mise en forme des métaux. *Techniques de l'ingénieur*. 43, 44, 45, 46
- Cao, T. S., Mazière, M., Danas, K. et Besson, J. (2015). A model for ductile damage prediction at low stress triaxialities incorporating void shape change and void rotation. *International Journal of Solids and Structures*, 63 : 240–263. 56
- Cappia, F., Pizzocri, D., Marchetti, M., Schubert, A., Van Uffelen, P., Luzzi, L., Papaioannou, D., Macian-Juan, R. et Rondinella, V. V. (2016). Microhardness and Young's modulus of high burn-up UO₂ fuel. *Journal of Nuclear Materials*, 479 : 447–454. 26, 27, 123
- Cazalis, B., Desquines, J., Poussard, C., Marc, P., Monerie, Y., Bernaudat, C., Yvon, P. et Averty, X. (2007). The PROMETRA program : Fuel cladding mechanical behavior under high strain rate. *Nuclear technology*, 157 : 215–229. 127
- Cazalis, B. et Georgenthum, V. (2006). Interpretation of the cip0-2 test with the scanair code. Rapport Technique CABRI WATER LOOP IRSN 2006-88. SEMCA-2006-385, IRSN. 121
- Chaboche, J. L., Feyel, F. et Monerie, Y. (2001a). Interface debonding models : a viscous regularization with a limited rate dependency. *International Journal of Solids and Structures*, 38(18) : 3127–3160. 64, 89, 114
- Chaboche, J. L., Girard, R. et Levasseur, P. (1997). On the Interface Debonding Models. *International Journal of Damage Mechanics*, 6(3) : 220–257. 89
- Chaboche, J.-L., Suquet, P. et Besson, J. (2001b). Endommagement et changement d'échelle. In Bornert, M., Bretheau, T. et Gilormini, P., éditeurs, *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, volume 2, chapitre 3, pages 113–141. Hermès Science Publications, Paris. 47, 48, 54, 55, 59, 60
- Cherepanov, G. P. (1967). Crack propagation in continuous media : PMM vol. 31, no. 3, 1967, pp. 476–488. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 31(3) : 503–512. 59
- Chu, C. C. et Needleman, A. (1980). Void Nucleation Effects in Biaxially Stretched Sheets. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 102(3) : 249–256. 54
- Colin, C. (2003). *Etude du fluage du dioxyde d'uranium : caractérisation par essais de flexion et modélisation mécanique*. phdthesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris. 11, 29
- Couturier, J., Schwarz, M. et Niel, J.-C. (2017). *Etat des recherches dans le domaine de la sûreté des réacteurs à eau sous pression*. EDP sciences, Les Ulis, France. 36
- Danas, K. et Aravas, N. (2012). Numerical modeling of elasto-plastic porous materials with void shape effects at finite deformations. *Composites Part B : Engineering*, 43(6) : 2544–2559. 56

- Dherbey, F., Louchet, F., Mocellin, A. et Leclercq, S. (2002). Elevated temperature creep of polycrystalline uranium dioxide : from microscopic mechanisms to macroscopic behaviour. *Acta Materialia*, 50(6) : 1495–1505. 11, 23, 26
- Dubois, F., Acary, V. et Jean, M. (2018). The Contact Dynamics method : A nonsmooth story. *Comptes Rendus Mécanique*, 346(3) : 247–262. 101
- Dubois, F., Jean, M., Renouf, M., Mozul, R., Martin, A. et Bagneris, M. (2011). LMGC90. In *10e colloque national en calcul des structures*, page Clé USB, Giens, France. 101
- Dubourg, R., Faure-Geors, H., Nicaise, G. et Barrachin, M. (2005). Fission product release in the first two PHEBUS tests FPT0 and FPT1. *Nuclear Engineering and Design*, 235(20) : 2183–2208. 11, 26
- Dugdale, D. S. (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8(2) : 100–104. 12, 61, 62
- Eshelby, J. D. (1956). The Continuum Theory of Lattice Defects. In Seitz, F. et Turnbull, D., éditeurs, *Solid State Physics*, volume 3, pages 79–144. Academic Press. 59
- Espinosa, H. D. et Zavattieri, P. D. (2003). A grain level model for the study of failure initiation and evolution in polycrystalline brittle materials. Part I : Theory and numerical implementation. 88, 148
- Forest, S. et Lorentz, E. (2004). Localization phenomena and regularization methods. 114
- Francfort, G. A. et Marigo, J. J. (1998). Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8) : 1319–1342. 59
- Fuketa, T. (2012). Transient Response of LWR Fuels (RIA). *Comprehensive Nuclear Materials*, 2 : 579–593. 11, 30, 35
- Gărăjeu, M. et Suquet, P. (1997). Effective properties of porous ideally plastic or viscoplastic materials containing rigid particles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(6) : 873–902. 48, 52
- Gatt, J. M., Monerie, Y., Laux, D. et Baron, D. (2005). Elastic behavior of porous ceramics : application to nuclear fuel materials. *Journal of Nuclear Materials*, 336(2) : 145–155. 15, 27
- Germain, P., Nguyen, Q. S. et Suquet, P. (1983). Continuum Thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 50(4b) : 1010–1020. 47
- Gologanu, M. (1997). *Etude de quelques problèmes de rupture ductile des métaux*. thesis, Paris 6. 58
- Gologanu, M., Leblond, J.-B. et Devaux, J. (1993). Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids—Case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(11) : 1723–1754. 58

- Gologanu, M., Leblond, J.-B. et Devaux, J. (1994). Approximate Models for Ductile Metals Containing Nonspherical Voids—Case of Axisymmetric Oblate Ellipsoidal Cavities. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 116(3) : 290–297. 58
- Gologanu, M., Leblond, J.-B., Perrin, G. et Devaux, J. (1997). Recent Extensions of Gurson's Model for Porous Ductile Metals. In Suquet, P., éditeur, *Continuum Micromechanics*, International Centre for Mechanical Sciences, pages 61–130. Springer Vienna, Vienna. 58
- Goods, S. H. et Brown, L. M. (1979). Overview No. 1 : The nucleation of cavities by plastic deformation. *Acta Metallurgica*, 27(1) : 1–15. 54
- Griffith, A. A. et Ingram Taylor, G. (1921). VI. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 221(582-593) : 163–198. 59
- Guerin, Y. (1975). Etude par compression a hautes temperatures de la deformation plastique du bioxyde d'uranium polycristallin. *Journal of Nuclear Materials*, 56(1) : 61–75. 25, 27
- Gurson, A. (1975). *Plastic Flow and Fracture Behavior of Ductile Materials Incorporating Void Nucleation, Growth, and Interaction*. Thèse, Brown University. 48, 54
- Gurson, A. L. (1977). Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth : Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99(1) : 2–15. 48, 50, 53, 55, 76
- Hagrman, D. L. et Reymann, G. A. c. . (1979). MATPRO-Version 11 : a handbook of materials properties for use in the analysis of light water reactor fuel rod behavior. Rapport Technique NUREG/CR-0497 ; TREE-1280, Idaho National Engineering Lab., Idaho Falls (USA). 27
- Huang, Y. (1991). Accurate Dilatation Rates for Spherical Voids in Triaxial Stress Fields. *Journal of Applied Mechanics*, 58(4) : 1084–1086. 46
- Igata, N. et Domoto, K. (1973). Fracture stress and elastic modulus of uranium dioxide including excess oxygen. *Journal of Nuclear Materials*, 45(4) : 317–322. 30
- IRSN (2015). La stratégie scientifique de l'irsn. 30
- IRSN (2019). Site web. <https://gforge.irsn.fr/gf/project/pelicans>. Accédé le 30/09/2019. 101
- Irwin, G. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. J Appl Mech Trans ASME 24 : 361-364. *Journal of Applied Mechanics*, 24 : 361–364. 59
- Jean, M. (1999). The non-smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(3) : 235–257. 101, 106
- Jean, M., Acary, V. et Monerie, Y. (2001). Non-smooth contact dynamics approach of cohesive materials. 101, 105, 106

- Johnson, G. R. et Cook, W. H. (1985). Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. *Engineering Fracture Mechanics*, 21(1) : 31–48. 46
- Kachanov, L. M. L. M. (1986). *Introduction to continuum damage mechanics / L.M. Kachanov*. Mechanics of elastic stability ; 10. M. Nijhoff, Dordrecht ; Boston. Includes index. Bibliography : p. [129]-132. 46
- Kashibe, S. et Une, K. (1991). Effects of Temperature Cycling and Heating Rate on Fission Gas Release of BWR Fuels. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 28(12) : 1090–1099. 25
- Kashibe, S., Une, K. et Nogita, K. (1993). Formation and growth of intragranular fission gas bubbles in UO₂ fuels with burnup of 6–83 GWd/t. *Journal of Nuclear Materials*, 206(1) : 22–34. 25
- Knudsen, F. P., Parker, H. S. et Burdick, M. D. (1960). Flexural Strength of Specimens Prepared from Several Uranium Dioxide Powders ; Its Dependence on Porosity and Grain Size and the Influence of Additions of Titania. *Journal of the American Ceramic Society*, 43(12) : 641–647. 30
- Koplik, J. et Needleman, A. (1988). Void growth and coalescence in porous plastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 24(8) : 835–853. 55
- Kubair, D. V. et Geubelle, P. H. (2003). Comparative analysis of extrinsic and intrinsic cohesive models of dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 40(15) : 3853–3868. 87
- Kulkarni, M. G., Matouš, K. et Geubelle, P. H. (2010). Coupled multi-scale cohesive modeling of failure in heterogeneous adhesives. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(8) : 916–946. 74
- Lassmann, K. et Moreno, A. (1977). The Light-Water-Reactor Version of the URANUS Integral fuel-rod code. Rapport Technique JEN–397, Junta de Energia Nuclear (JEN). 27
- LÉ, B., Moës, N. et Legrain, G. (2018). Coupling damage and cohesive zone models with the Thick Level Set approach to fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 193 : 214–247. 64
- Leblond, J.-B. (2003). *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermes-Lavoisier. 48, 49, 53, 54, 55
- Leblond, J. B., Perrin, G. et Suquet, P. (1994). Exact results and approximate models for porous viscoplastic solids. *International Journal of Plasticity*, 10(3) : 213–235. 48, 56, 138
- Lemaitre, J. et Chaboche, J. L. (1978). Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *J MEC APPL*, 2(3). 47
- Lemaitre, J., Chaboche, J.-L., Benallal, A. et Desmorat, R. (2003). *Mécanique des matériaux solides - 3ème édition*. DUNOD. 59

- Lespiaux, Didier. Noiro, J. M. P. (1997). Post-test examinations of high burnup pwr fuels submitted to ria transients in the cabri facility. In *Proceedings of The International Topical Meeting on LMR fuel performance*, pages 650–658. American Nuclear Society. 121
- MacDonald, P. E. et Thompson, L. B. (1976). Matpro : Version 09. a handbook of materials properties for use in the analysis of light water reactor fuel rod behavior. Rapport Technique TREE-NUREG–1005, EG and G Idaho. 27
- Madou, K. et Leblond, J.-B. (2012a). A Gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids—I : Limit-analysis of some representative cell. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(5) : 1020–1036. 58
- Madou, K. et Leblond, J.-B. (2012b). A Gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids—II : Determination of yield criterion parameters. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(5) : 1037–1058. 58
- Marcet, M. (2010). *Etude de la fracturation mécanique de la structure à haut taux de combustion des combustibles irradiés (RIM) en traitement thermique*. Aix-Marseille 2. 11, 12, 34, 35
- Martin, D. G. (1989). The elastic constants of polycrystalline UO₂ and (U, Pu) mixed oxides : a review and recommendations. *High Temperatures. High Pressures*, 21(1) : 13–24. 27, 123
- McDonald, R. E., Peralta, P., Rajagopalan, J., Solanki, K. et Arizona State University (2014). An Evaluation of the Mechanical Properties and Microstructure in Uranium Dioxide Doped with Oxide Additives. In *ASU Electronic Theses and Dissertations*. Arizona State University. 126
- Michel, B., Sercombe, J., Thouvenin, G. et Chatelet, R. (2008). 3d fuel cracking modelling in pellet cladding mechanical interaction. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(11) : 3581–3598. 126
- Michel, J. C., Moulinec, H. et Suquet, P. (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1) : 109–143. 84
- Michel, J. C. et Suquet, P. (1992). The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(4) : 783–812. 56
- Michel, J.-C., Suquet, P. et Thébaud, F. (1994). Une modélisation du rôle des interfaces dans le comportement des composites à matrice métallique. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 3(4) : 573–595. 38, 74
- Moal, A. (2012). Scanair reference documentation. Rapport Technique Rapport PSN-RES/SEMIA-2012-00360, IRSN. 127
- Moal, A., Georgenthum, V. et Marchand, O. (2014). SCANAIR A transient fuel performance code : Part One : General modelling description. *Nuclear Engineering and Design*, 280 : 150–171. 34, 121

- Moës, N. et Belytschko, T. (2002). Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(7) : 813–833. 59
- Moës, N., Stolz, C., Bernard, P.-E. et Chevaugeon, N. (2011). A level set based model for damage growth : The thick level set approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(3) : 358–380. 59
- Monerie, Y. (2000). *Fissuration des matériaux composites : rôle de l'interface fibre-matrice*. Aix Marseille 2. 63, 64
- Monerie, Y. et Acary, V. (2001). Formulation dynamique d'un modèle de zone cohésive tridimensionnel couplant endommagement et frottement. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 10(02-03-04) : 489–503. 38, 105
- Moreau, J. J. (1988). Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics. In J.J, M. et P.D, P., éditeurs, *Nonsmooth Mechanics and Applications*, volume 302 of *International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures)*, pages 1–82. Springer. 101, 103
- Moreau, J. J. (1994). Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 13(4 - suppl) : 93–114. 101, 102
- Nahshon, K. et Hutchinson, J. W. (2008). Modification of the Gurson Model for shear failure. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 27(1) : 1–17. 57, 58, 85
- Needleman, A. (1987). A Continuum Model for Void Nucleation by Inclusion Debonding. *Journal of Applied Mechanics*, 54(3) : 525–531. 12, 54, 63, 65
- Needleman, A. (1990). An analysis of tensile decohesion along an interface. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38(3) : 289–324. 12, 63, 67
- Needleman, A. (2014). Some Issues in Cohesive Surface Modeling. *Procedia IUTAM*, 10 : 221–246. 114
- Needleman, A. et Rice, J. R. (1978). Limits to Ductility Set by Plastic Flow Localization. In Koistinen, D. P. et Wang, N.-M., éditeurs, *Mechanics of Sheet Metal Forming : Material Behavior and Deformation Analysis*, pages 237–267. Springer US, Boston, MA. 54
- Nielsen, K. L. et Tvergaard, V. (2010). Ductile shear failure or plug failure of spot welds modelled by modified Gurson model. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(7) : 1031–1047. 58
- Oguma, M. (1982). Microstructure Effects on Fracture Strength of UO₂ Fuel Pellets. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 19(12) : 1005–1014. 15, 27, 30
- Oliver, J., Cervera, M. et Manzoli, O. (1999). Strong discontinuities and continuum plasticity models : the strong discontinuity approach. *International Journal of Plasticity*, 15(3) : 319–351. 74

- Ortiz, M. et Pandolfi, A. (1999). Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(9) : 1267–1282. 89
- Paggi, M. et Reinoso, J. (2017). Revisiting the problem of a crack impinging on an interface : A modeling framework for the interaction between the phase field approach for brittle fracture and the interface cohesive zone model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 321(Supplement C) : 145–172. 64
- Pandolfi, A. et Ortiz, M. (2012). An eigeneration approach to brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(8) : 694–714. 59
- Papasidero, J., Doquet, V. et Mohr, D. (2015). Ductile fracture of aluminum 2024-T351 under proportional and non-proportional multi-axial loading : Bao–Wierzbicki results revisited. *International Journal of Solids and Structures*, 69-70 : 459–474. 45
- Papin, J., Cazalis, B., Frizonnet, J. M., Desquines, J., Lemoine, F., Georgenthum, V., Lamare, F. et Petit, M. (2007). Summary and Interpretation of the CABRI REP-Na Program. *Nuclear Technology*, 157(3) : 230–250. 15, 122
- Parisot, J.-F., Bernard, B., Guillet, J.-L. et Guérin, Y. (2008). *Les combustibles nucléaires*. Éditions du Moniteur, Paris. 11, 23, 24, 25, 30, 32, 34, 122
- Perales, F. (2005). *Fissuration des matériaux à gradient de propriétés : application au zircaloy hydrure*. Montpellier 2. 89, 101
- Perales, F., Dubois, F., Monerie, Y., Piar, B. et Stainier, L. (2010). A NonSmooth Contact Dynamics-based multi-domain solver. *European Journal of Computational Mechanics*, 19(4) : 389–417. 101
- Perrin, G. (1992). *Contribution a l'etude theorique et numerique de la rupture ductile des metaux*. thesis, Palaiseau, Ecole polytechnique. 53
- Perrin, G. et Leblond, J. B. (1990). Analytical study of a hollow sphere made of plastic porous material and subjected to hydrostatic tension-application to some problems in ductile fracture of metals. *International Journal of Plasticity*, 6(6) : 677–699. 55
- Ponte Castañeda, P. (1991). The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(1) : 45–71. 48, 56
- Ponte Castañeda, P. P. et Suquet, P. (1997). Nonlinear Composites. In van der Giessen, E. et Wu, T. Y., éditeurs, *Advances in Applied Mechanics*, volume 34, pages 171–302. Elsevier. 48
- Popov, S., Carbajo, J., Ivanov, V. et Yoder, G. (2000). Thermophysical properties of MOX and UO₂ fuels including the effects of irradiation. Rapport Technique ORNL/TM-2000/351, Oak Ridge National Laboratory. 125
- Radford, K. C. (1979). Effect of fabrication parameters and microstructure on the mechanical strength of UO₂ fuel pellets. *Journal of Nuclear Materials*, 84(1) : 222–236. 15, 27, 30

- Radin, C. et Sadun, L. (1996). The isoperimetric problem for pinwheel tilings. *Communications in Mathematical Physics*, 177(1) : 255–263. 64
- Radjaï, F. et Dubois, F. (2010). *Modélisation numérique discrète des matériaux granulaires*. Hermès - Lavoisier, Paris. 106
- Raous, M., Cangémi, L. et Cocu, M. (1999). A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(3) : 383–399. 105
- Remmers, J. J. C., de Borst, R., Verhoosel, C. V. et Needleman, A. (2013). The cohesive band model : a cohesive surface formulation with stress triaxiality. *International Journal of Fracture*, 181(2) : 177–188. 77
- Rice, J. R. (1968). A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2) : 379–386. 59, 60
- Rice, J. R. (1978). Mechanics of quasi-static crack growth. Rapport Technique COO-3084-63 ; CONF-780608-3, Brown Univ., Providence, RI (USA). Div. of Engineering. 63
- Rice, J. R. et Tracey, D. M. (1969). On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17(3) : 201–217. 46, 51
- Richefeu, V., Chrysochoos, A., Huon, V., Monerie, Y., Peyroux, R. et Wattrisse, B. (2012). Toward local identification of cohesive zone models using digital image correlation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 34 : 38–51. 66
- Rondinella, V. V. et Wiss, T. (2010). The high burn-up structure in nuclear fuel. *Materials Today*, 13(12) : 24–32. 11, 24, 26
- Salvo, M. (2014). *Etude expérimentale et modélisation du comportement mécanique du combustible UO₂ en compression à haute température et forte vitesse de sollicitation*. thesis, Aix-Marseille. 14, 15, 28, 122, 125
- Salvo, M., Sercombe, J., Ménard, J.-C., Julien, J., Helfer, T. et Désoyer, T. (2015). Experimental characterization and modelling of UO₂ behavior at high temperatures and high strain rates. *Journal of Nuclear Materials*, 456 : 54–67. 25, 27
- Scheider, I. (2009). Derivation of separation laws for cohesive models in the course of ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(10) : 1450–1459. 12, 66, 67, 108
- Scheider, I. et Brocks, W. (2003). Simulation of cup–cone fracture using the cohesive model. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(14) : 1943–1961. 12, 63, 89
- Scheider, I., Hachez, F. et Brocks, W. (2006). Effect of Cohesive Law and Triaxiality Dependence of Cohesive Parameters in Ductile Tearing. In *Fracture of Nano and Engineering Materials and Structures*, pages 965–966. Springer, Dordrecht. 66

- Schwalbe, K.-H., Scheider, I. et Cornec, A. (2012). *Guidelines for Applying Cohesive Models to the Damage Behaviour of Engineering Materials and Structures*. Springer Science & Business Media. Google-Books-ID : PrRHin0rjUUC. 12, 63, 65, 66, 67
- Seltzer, M. S., Perrin, J. S., Clauer, A. H. et Wilcox, B. A. (1971). Review of creep behavior of ceramic nuclear fuels. *Reactor Technol*, 14(2) : 99–135. 28
- Sercombe, J., Fédérici, E., Le Saux, M., Michel, B. et Poussard, C. (2010). 1d and 3d modelling of PCMI during a RIA with ALCYONE v1.1. 15, 122
- Siegmund, T. et Brocks, W. (1999). Prediction of the Work of Separation and Implications to Modeling. *International Journal of Fracture*, 99(1-2) : 97–116. 66, 77, 85
- Siegmund, T. et Brocks, W. (2000a). A numerical study on the correlation between the work of separation and the dissipation rate in ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 67(2) : 139–154. 12, 13, 15, 66, 67, 81, 108, 109, 111
- Siegmund, T. et Brocks, W. (2000b). The Role of Cohesive Strength and Separation Energy for Modeling of Ductile Fracture. 66, 108, 109, 111
- Spino, J., Baron, D., Coquerelle, M. et Stalios, A. D. (1998). High burn-up rim structure : evidences that xenon-depletion, pore formation and grain subdivision start at different local burn-ups. *Journal of Nuclear Materials*, 256(2) : 189–196. 24
- Spino, J., Vennix, K. et Coquerelle, M. (1996). Detailed characterisation of the rim microstructure in PWR fuels in the burn-up range 40–67 GWd/tM. *Journal of Nuclear Materials*, 231(3) : 179–190. 24, 127
- Sun, Y. et Wang, D. (1989). A lower bound approach to the yield loci of porous materials. *Acta Mechanica Sinica*, 5(3) : 237–243. 56
- Suquet, P. (1995). Overall properties of nonlinear composites : a modified secant moduli theory and its link with Ponte Castañeda’s nonlinear variational procedure. 48
- Suquet, P. M. (1988). Discontinuities and Plasticity. In *Nonsmooth Mechanics and Applications*, International Centre for Mechanical Sciences, pages 279–340. Springer, Vienna. 71
- Tekoglu, C., Hutchinson, J. W. et Pardoën, T. (2015). On localization and void coalescence as a precursor to ductile fracture. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 373(2038) : 20140121. 71
- Tijssens, M. G. A., Sluys, B. L. J. et van der Giessen, E. (2000). Numerical simulation of quasi-brittle fracture using damaging cohesive surfaces. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 19(5) : 761–779. 64
- Tomar, V., Zhai, J. et Zhou, M. (2004). Bounds for element size in a variable stiffness cohesive finite element model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(11) : 1894–1920. 88, 148

- Tvergaard, V. (1981). Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. *International Journal of Fracture*, 17(4) : 389–407. 55
- Tvergaard, V. (1982). Material failure by void coalescence in localized shear bands. *International Journal of Solids and Structures*, 18(8) : 659–672. 55
- Tvergaard, V. et Hutchinson, J. W. (1992). The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(6) : 1377–1397. 12, 63, 65, 66, 67
- Tvergaard, V. et Hutchinson, J. W. (1996). Effect of strain-dependent cohesive zone model on predictions of crack growth resistance. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20) : 3297–3308. 77
- Tvergaard, V. et Needleman, A. (1984). Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32(1) : 157–169. 55
- Vincent, P.-G. (2007). *Modélisation micromécanique de la croissance et de la percolation de pores sous pression dans une matrice céramique à haute température*. Aix-Marseille 1. 11, 29, 48
- Vincent, P.-G., Monerie, Y. et Suquet, P. (2009). Porous materials with two populations of voids under internal pressure : I. Instantaneous constitutive relations. *International Journal of Solids and Structures*, 46(3) : 480–506. 128
- Weck, A. et Wilkinson, D. S. (2008). Experimental investigation of void coalescence in metallic sheets containing laser drilled holes. *Acta Materialia*, 56(8) : 1774–1784. 12, 45
- Wells, A. (1961). Unstable crack propagation in metals : cleavage and fast fracture. In *Proceedings of the crack propagation symposium*, volume 1. 60
- Wells, A. A. (1969). Crack opening displacements from elastic-plastic analyses of externally notched tension bars. *Engineering Fracture Mechanics*, 1(3) : 399–410. 60
- Wierzbicki, T., Bao, Y., Lee, Y.-W. et Bai, Y. (2005). Calibration and evaluation of seven fracture models. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(4) : 719–743. 44, 46
- Williams, M. L. (1959). The stresses around a fault or crack in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 49 : 199–204. 59
- Willis, J. R. (1989). The Structure of Overall Constitutive Relations for a Class of Nonlinear Composites. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 43(3) : 231–242. 50
- WNA (2019). Nuclear power in the world today. <https://www.world-nuclear.org/information-library/current-and-future-generation/nuclear-power-in-the-world-today.aspx>. World Nuclear Association. Accédé le 30/09/2019. 23

-
- Wolf, J., Longère, P., Cadou, J. M. et Créte, J. P. (2017). Numerical modeling of strain localization in engineering ductile materials combining cohesive models and X-FEM. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, pages 1–17. 64
- Xue, L. (2007). *Ductile fracture modeling : theory, experimental investigation and numerical verification*. Thesis, Massachusetts Institute of Technology. 44, 46
- Xue, L. (2008). Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(11) : 3343–3366. 57, 58, 85

Titre : Modélisation micromécanique de l'endommagement ductile par une approche cohésive-volumique : application à l'UO₂ irradié

Résumé : Le contexte de ce travail est relatif à la prédiction du comportement, notamment de la fissuration fragile-ductile du combustible nucléaire en dioxyde d'uranium UO₂ lors d'un hypothétique accident d'insertion de réactivité (RIA). En particulier, la problématique abordée porte sur la modélisation et la simulation de l'initiation et de la propagation de fissure dans les matériaux ductiles qui s'endommagent par nucléation croissance et coalescence de cavités. La démarche globale de modélisation et de simulation adoptée repose sur une approche aux éléments finis cohésifs-volumiques couplant comportements volumiques à écrouissage positif et lois de traction-séparation adoucissantes décrivant le processus d'endommagement et de fissuration du matériau. Un modèle de zone cohésive pour les matériaux ductiles est proposé à partir de considérations micromécaniques. Le modèle de zone cohésive est déterminé via une projection dans une cinématique surfacique d'un modèle d'endommagement ductile volumique (le modèle de Gurson-Tveergaard-Needleman ou modèle GTN). Ce modèle de zone cohésive permet d'une part de retrouver avec un bon accord la réponse d'une cellule unitaire avec un comportement de type GTN et d'autre part de prendre en compte l'influence de la direction du chargement au voisinage de la fissure (triaxialité en contrainte ou en déformation) dans le comportement à rupture. Le traitement numérique de ce modèle de zone cohésive est réalisé dans le cadre d'une formulation éléments finis multicorps dans laquelle la loi cohésive représente une condition aux limites mixte entre éléments finis. L'application de l'approche cohésive-volumique à l'étude du combustible lors d'un transitoire de puissance de type RIA, a permis d'investiguer les mécanismes de fissuration fragile-ductile du combustible UO₂ irradié, notamment dans la zone périphérique fortement irradiée.

Mots-clés : Micromécanique – rupture ductile – Modèles de Zones Cohésives – simulation numérique – dioxyde d'Uranium – modèle GTN

Title : Micromechanical modelling of ductile damage via a cohesive-volumetric approach : application to the irradiated UO₂

Abstract : This work is interested in simulating the local cracking of uranium dioxide during a postulated Reactivity Initiated Accident (RIA). More specifically, the present work addresses the modelling and the simulation of crack initiation and propagation in ductile materials which failed by void nucleation, growth and coalescence. One of the current research frameworks on crack propagation is the use of the cohesive-volumetric approach where the crack growth is modelled as decohesion of two surfaces in a continuum material. In this framework, the material behavior is characterized by two constitutive relations - the volumetric constitutive law relating stress and strain, and a traction-separation law across a two-dimensional surface embedded in the three-dimensional continuum. One specific idea to developed the cohesive model for ductile materials consist in determining the traction separation based on the behavior of a continuously-deforming unit cell failing by void growth and coalescence. Following this method, the present work proposes a cohesive model for ductile materials based on a micromechanical approach. The strain localization band prior to ductile failure is modelled as a cohesive band and the Gurson-Tveergaard-Needleman plasticity model (GTN) is used to describe the behavior of the cohesive band and to derive a corresponding traction separation law. The numerical implementation of the model has been performed using a multi-domain finite element approach where cohesive models are introduced as mixed boundary conditions between each volumetric finite element. The cohesive-volumetric approach is applied to simulate the brittle-ductile cracking of porous uranium dioxide fuels under postulated accident conditions.

Key words : Micromechanics – ductile fracture – Cohesive Zone Model – numerical simulation – uranium oxide – GTN model

